UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE
(AIX-MARSEILLE 2)

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE

Discipline : **Mécanique**

présentée et soutenue publiquement par

Bruno LOMBARD

le 4 janvier 2002

Modélisation numérique de la propagation des ondes acoustiques et élastiques en présence d'interfaces

Directeur de thèse : **Joël PIRAUX**

Rapporteurs :

M. Gérard MAUGIN,	Directeur de Recherche CNRS, LMM, Paris
M. Serge PIPERNO,	Directeur de Recherche INRIA, CAIMAN

Jury :

M. Christophe BAILLY,	Maître de Conférences, ECL
M. Roland BORGHI,	Professeur, ESM2
M. Guillaume CHIAVASSA,	Maître de Conférences, ESM2
M. Joël PIRAUX,	Chargé de Recherche CNRS, LMA

Un grand merci aux rapporteurs du présent pensum (Gérard Maugin et Serge Piperno), ainsi qu'aux examinateurs (Christophe Bailly, Roland Borghi et Guillaume Chiavassa). Leurs remarques m'aideront à faire mieux, la prochaine fois. Merci aussi à Michel Raous (directeur du LMA) et à Jean-Pierre Sessarego (responsable de l'équipe Acoustique Sous-Marine et Modélisation) pour leur intérêt bienveillant et la liberté totale qu'ils m'ont laissée.

Une mention particulière à Joël Piraux, général (en retraite), philosophe (à tendance péripatéticienne), siffleur, docteur ès-contrepets, astronome, fier germaniste (plutôt argotique) et latiniste (de cuisine), bref à cet enfant illégitime et inclassable du Professeur Tournesol et du savant Cosinus. Qu'il sache combien furent enrichissantes et heureuses ces années de travail sous sa houlette visionnaire. Pourvu que ça dure !

Enfin, je ne peux quitter la plume sans évoquer Keith (qui ?) Jarrett et Richard Wagner, dont les oeuvres intemporelles ont bercé ces trois années et les murs du laboratoire... Que celui qui n'a pas goûté aux sortilèges de "Tristan" [1] ou aux 12 dernières minutes de "Vienne" [2] (piste 1), que celui-là donc aille illico prestissimo au disquaire le plus proche dépenser ses faux Euros et investir dans le Beau, le Vrai et l'Eternel. Après quoi, seulement, il goûtera aux 299 pages qui suivent...

1. Georg Solti, Tristan und Isolde, Wiener Philharmoniker DECCA 430, 1961
2. Keith Jarrett, Vienna Concert, piano solo, ECM 1481, 1992

Table des matières

1 Introduction **11**
1.1 L'outil numérique . . . 11
1.2 Interfaces et schémas numériques . . . 12
1.3 Méthodes existantes . . . 15
1.4 Une nouvelle méthode d'interface . . . 17

2 Méthodes d'interface classiques **19**
2.1 Objet du chapitre . . . 19
2.2 Immersed Interface Method 1D . . . 20
2.2.1 Introduction . . . 20
2.2.2 Lois de conservation . . . 21
2.2.3 Conditions de saut . . . 21
2.2.4 Schémas numériques . . . 22
2.2.5 Méthode d'interface . . . 22
2.2.6 Critique de l'IIM 1D . . . 25
2.3 Immersed Interface Method 2D . . . 26
2.3.1 Introduction . . . 26
2.3.2 Lois de conservation . . . 26
2.3.3 Schémas numériques . . . 27
2.3.4 Conditions de saut . . . 28
2.3.5 Méthode d'interface . . . 35
2.3.6 Critique de l'IIM 2D . . . 40
2.4 Explicit Jump Immersed Interface Method 1D . . . 41
2.4.1 Introduction . . . 41
2.4.2 Méthode d'interface . . . 42
2.4.3 Critique de l'EJIIM 1D . . . 43
2.5 Vers une ultime méthode d'interface ! . . . 44

3 Lois de conservation **45**
3.1 Objet du chapitre . . . 45
3.2 Fluide 1D - Solide 1D . . . 46
3.3 Fluide 2D . . . 47
3.4 Solide 2D . . . 49
3.5 Conditions de milieu . . . 51
3.6 Conclusion . . . 54

4 Schémas numériques **55**
4.1 Objet du chapitre . . . 55
4.2 Schémas 1D . . . 56
4.2.1 Notations . . . 56
4.2.2 Lax-Wendroff . . . 57
4.2.3 Volumes finis avec limiteur de flux . . . 58
4.2.4 WENO 5 . . . 61
4.2.5 Exemples numériques . . . 65
4.3 Schémas 2D . . . 67
4.3.1 Notations . . . 67
4.3.2 Lax-Wendroff . . . 68
4.3.3 Volumes finis avec limiteur de flux . . . 72
4.3.4 WENO 5 . . . 87
4.3.5 Exemples numériques . . . 93
4.4 Conclusion . . . 96

5 Conditions aux interfaces 1D **97**
5.1 Objet du chapitre . . . 97
5.1.1 Présentation générale . . . 97
5.1.2 Notations . . . 98
5.2 Interface parfaite . . . 98
5.2.1 Introduction . . . 98
5.2.2 Conditions de contact parfait . . . 99
5.3 Interface imparfaite . . . 100
5.3.1 Introduction . . . 100
5.3.2 Conditions de type masse-ressort . . . 100
5.4 Deux interfaces parfaites . . . 103
5.4.1 Introduction . . . 103
5.4.2 Conditions de couche fine . . . 103
5.5 Conclusion . . . 105

6 Conditions aux interfaces 2D **107**
6.1 Objet du chapitre . . . 107
6.1.1 Présentation générale . . . 107
6.1.2 Notations . . . 109
6.2 Interface fluide-fluide . . . 111
6.2.1 Introduction . . . 111
6.2.2 Conditions de saut naturelles . . . 111
6.2.3 Conditions de saut supplémentaires . . . 114
6.2.4 Ecriture matricielle des conditions de saut . . . 116
6.3 Interface solide-solide (contact parfait soudé) . . . 116
6.3.1 Introduction . . . 116
6.3.2 Conditions de saut naturelles . . . 116
6.3.3 Conditions de saut supplémentaires . . . 122
6.3.4 Ecriture matricielle des conditions de saut . . . 127
6.4 Interface solide-solide (contact imparfait) . . . 127
6.4.1 Introduction . . . 127

6.4.2 Conditions de saut naturelles . . . 128
6.4.3 Ecriture matricielle des conditions de saut . . . 133
6.4.4 Calcul des conditions de type masse-ressort . . . 134
6.5 Interface fluide-solide . . . 135
6.5.1 Introduction . . . 135
6.5.2 Conditions de saut naturelles . . . 136
6.5.3 Conditions de saut supplémentaires . . . 140
6.5.4 Ecriture matricielle des conditions de saut . . . 141
6.6 Récapitulatif . . . 141
6.6.1 Introduction . . . 141
6.6.2 Résolution des conditions aux interfaces . . . 143
6.7 Conclusion . . . 144

7 Méthode d'interface 1D 147
7.1 Objet du chapitre . . . 147
7.2 Principe de la méthode . . . 149
7.2.1 Notations . . . 149
7.2.2 Idée générale . . . 149
7.3 Contact parfait . . . 150
7.3.1 Introduction . . . 150
7.3.2 Calcul des valeurs modifiées . . . 151
7.3.3 Utilisation des valeurs modifiées . . . 153
7.3.4 Analyse de l'erreur locale de troncature . . . 157
7.3.5 Stabilité . . . 162
7.4 Conditions de type masse-ressort . . . 164
7.4.1 Introduction . . . 164
7.4.2 Calcul des valeurs modifiées . . . 164
7.4.3 Utilisation des valeurs modifiées . . . 166
7.4.4 Analyse de l'erreur locale de troncature . . . 169
7.5 Couche fine . . . 171
7.5.1 Introduction . . . 171
7.5.2 Calcul des valeurs modifiées . . . 172
7.5.3 Utilisation des valeurs modifiées . . . 174
7.5.4 Analyse de l'erreur locale de troncature . . . 177
7.5.5 Cas particulier . . . 177
7.6 Conclusion . . . 179

8 Méthode d'interface 2D 181
8.1 Objet du chapitre . . . 181
8.2 Principe de la méthode . . . 181
8.2.1 Rappels . . . 181
8.2.2 Notations . . . 182
8.2.3 Idée générale . . . 184
8.3 Contact parfait . . . 185
8.3.1 Introduction . . . 185
8.3.2 Calcul des valeurs modifiées . . . 186
8.3.3 Utilisation des valeurs modifiées . . . 189

8.3.4 Analyse de l'erreur locale de troncature . . . 189
8.4 Conclusion . . . 190

9 Solutions analytiques 191
9.1 Objet du chapitre . . . 191
9.1.1 Présentation générale . . . 191
9.1.2 Notations . . . 192
9.2 Interface parfaite 1D . . . 192
9.2.1 Introduction . . . 192
9.2.2 Ondes réfléchies et transmises . . . 193
9.3 Interface imparfaite 1D . . . 193
9.3.1 Introduction . . . 193
9.3.2 Ondes réfléchies et transmises . . . 194
9.4 Deux interfaces parfaites 1D . . . 200
9.4.1 Introduction . . . 200
9.4.2 Ondes réfléchies et transmises . . . 200
9.5 Interface parfaite fluide-fluide 2D . . . 204
9.5.1 Introduction . . . 204
9.5.2 Ondes planes non homogènes . . . 204
9.5.3 Coefficients de réflexion et de transmission . . . 207
9.5.4 Incidence en-dessous de l'angle critique . . . 208
9.5.5 Incidence au-dessus de l'angle critique . . . 209
9.5.6 Conditions de saut supplémentaires . . . 215
9.6 Interface parfaite solide-solide 2D . . . 217
9.6.1 Introduction . . . 217
9.6.2 Coefficients de réflexion et de transmission . . . 218
9.6.3 Conditions de saut supplémentaires . . . 221
9.7 Interface parfaite fluide-solide 2D . . . 221
9.7.1 Introduction . . . 221
9.7.2 Coefficients de réflexion et de transmission . . . 221
9.7.3 Conditions de saut supplémentaires . . . 224

10 Expériences numériques 227
10.1 Objet du chapitre . . . 227
10.2 Expériences 1D . . . 227
10.2.1 Introduction . . . 227
10.2.2 Interface parfaite . . . 230
10.2.3 Interface imparfaite . . . 235
10.2.4 Deux interfaces parfaites . . . 239
10.3 Expériences 2D . . . 241
10.3.1 Introduction . . . 241
10.3.2 Interface parfaite fluide-fluide . . . 244
10.3.3 Interface parfaite solide-solide . . . 248
10.4 Conclusion . . . 249

11 Conclusion et perspectives **263**
11.1 Bilan . . . 263
11.1.1 Méthode proposée . . . 263
11.1.2 Démarche suivie . . . 264
11.2 Perspectives . . . 265
11.2.1 Approfondissement de la méthode . . . 265
11.2.2 Voies de recherche . . . 267

A Matrices de saut 2D **269**
A.1 Objet de l'annexe . . . 269
A.2 Interface parfaite fluide-fluide . . . 269
A.3 Interface parfaite solide-solide . . . 272
A.4 Interface imparfaite solide-solide . . . 283
A.5 Interface parfaite fluide-solide . . . 288

Bibliographie **299**

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'outil numérique

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe Acoustique Sous-Marine et Modélisation (ASM2) du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique. Le domaine d'activité traditionnel de cette équipe concerne les expériences de propagation d'ondes en milieu marin, réalisées sur des modèles réduits en cuve, puis comparées à des modèles analytiques. Plus récemment, la complexité croissante des configurations étudiées a impliqué le recours à l'outil numérique. Celui-ci concerne autant les aspects matériels (automatisation des expériences, acquisition des données,...) que la modélisation numérique des phénomènes physiques.

La modélisation numérique permet en effet à la fois de guider, d'interpréter, voire parfois de remplacer les expériences en cuve. Guider : l'aspect souvent visuel des expériences numériques et l'étude rapide de configurations variées permettent de concevoir de façon optimale les expériences en cuve. Interpréter : on pense ici à l'activité développée dans un domaine connexe, l'aéroacoustique numérique : l'observation d'expériences numériques simulant l'écoulement de jets permet d'expliquer l'origine de bruits aérodynamiques [10, 28]. Enfin, remplacer : si les propriétés physiques et géométriques des différents milieux sont connues précisément, il est raisonnable de substituer à l'expérience en cuve une expérience virtuelle. Cela permet, entre autres, de s'affranchir de manipulations coûteuses ou délicates à réaliser.

Si la modélisation numérique est une aide précieuse pour le physicien, elle n'est, pour autant, ni un outil universel à utiliser sans discernement, ni une boîte noire. Pour illustrer le premier point, considérons un aspect majeur, à savoir le choix des schémas numériques : différences finies, éléments finis, méthodes spectrales... Plutôt que de les opposer en une vaine querelle, qui tient plus des guerres de religions que de la science, le physicien doit se poser essentiellement une question : "quel est le but de l'expérience numérique que je souhaite réaliser ?".

Cette question étant posée, les réponses sont forcément plus objectives. Donnons un exemple : si le physicien veut réaliser une expérience numérique où la mesure des temps de propagation est cruciale (permettant par exemple d'estimer des vitesses de propagation dans un milieu hétérogène), il doit obligatoirement limiter la *dispersion numérique*. Cette propriété, classique dans le cas de schémas linéaires comme le schéma de Yee [70] ou de Lax-Wendroff [42], conduit à une

mauvaise localisation des passages par zéros des ondes calculées numériquement, ce qui invalide l'objectif visé. On pourra alors préférer des schémas introduisant, de façon contrôlée, de la *diffusion numérique*, ce qui est le cas des schémas de volumes finis avec limiteur de flux [29]. Par contre, si le critère principal est le respect de l'amplitude des ondes (pour estimer une atténuation, par exemple), le physicien pourra préférer un schéma plus perfectionné, de type Weighted Essentially Non Oscillatory (WENO) [36]. A ces considérations se rajoutent évidemment des questions contingentes, à savoir la place mémoire et le temps de calcul disponibles et requis.

Une fois réglée la question du choix d'un schéma numérique, le physicien doit se poser une autre question, essentielle : l'expérience numérique prévue s'inscrit-elle dans le cadre d'application théorique du schéma choisi ? Cette question est très loin d'être une élucubration mathématique sans conséquence pratique. Pour nous en convaincre, imaginons pour la suite de l'exposé une expérience numérique de propagation d'ondes en présence d'interfaces. Par interface, nous désignons classiquement le lieu de discontinuité des paramètres physiques, par exemple la surface d'une bulle d'air, le fond océanique, une coque immergée... (nous élargirons plus loin ce concept d'interface). Cette expérience est réalisée dans le domaine temporel, pour nous placer au plus près de conditions expérimentales réelles.

1.2 Interfaces et schémas numériques

Irrégularité de la solution. En termes mathématiques, l'équation aux dérivées partielles décrivant la propagation des ondes acoustiques ou élastiques dans un tel milieu est un *système hyperbolique linéaire du premier ordre à coefficients discontinus*. Les inconnues de ce système (i.e. les composantes de la solution) sont respectivement les composantes de la vitesse acoustique et la pression acoustique, dans un fluide, les composantes de la vitesse élastique et les composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques, dans un solide. Pour conduire à un problème bien posé, on définit des *conditions de saut*, reliant à chaque instant et en tout point des interfaces les valeurs limites de la solution de part et d'autres des interfaces. Ces conditions de saut, découlant de considérations physiques, impliquent l'irrégularité de la solution : par exemple, la pression acoustique est continue mais à dérivées spatiales discontinues à l'interface entre deux fluides parfaits au repos, quelle que soit la régularité de la solution initiale.

Propriétés numériques. Cette irrégularité de la solution a des conséquences très fâcheuses : certaines propriétés numériques des schémas, démontrées pour une solution suffisamment régulière (ce qui est généralement le cas en milieu homogène), sont perdues en présence d'interfaces. La première propriété perdue concerne l'*ordre de convergence* des schémas. Cette quantité, caractérisant l'évolution des erreurs en fonction du raffinement du maillage, présuppose en effet une solution suffisamment régulière en tout point de calcul. Par exemple, un schéma d'ordre cinq en milieu homogène (comme WENO 5) peut conduire à un schéma seulement d'ordre un en présence d'interfaces : en considérant deux maillages successifs sur lequels sont effectués les calculs, l'erreur est ainsi divisée par $2^5 = 32$ en milieu homogène, et seulement par $2^1 = 2$ en présence d'interface.

La deuxième propriété perdue concerne la *stabilité numérique*. Cette notion, caractérisant l'amplification des erreurs numériques à chaque pas de temps, est délicate à étudier pour des équations aux dérivées partielles à coefficients discontinus. La technique classique d'analyse de Von Neu-

mann, basée sur une analyse de Fourier des ondes, est alors inopérante ; les seules techniques d'analyse consistent alors à définir une énergie à partir de la solution numérique, puis à étudier l'évolution de cette énergie. Cette technique peut s'avérer particulièrement difficile pour des schémas non linéaires, et conduit souvent seulement à des conditions nécessaires de stabilité [17]. En pratique, on observe souvent des instabilités numériques naissant au voisinage des interfaces pour des contrastes importants des paramètres physiques (exemple : eau/air), alors que les conditions nécessaires de stabilité CFL (reliant les pas de temps, d'espace, et la célérité des ondes) sont satisfaites dans chaque sous-domaine.

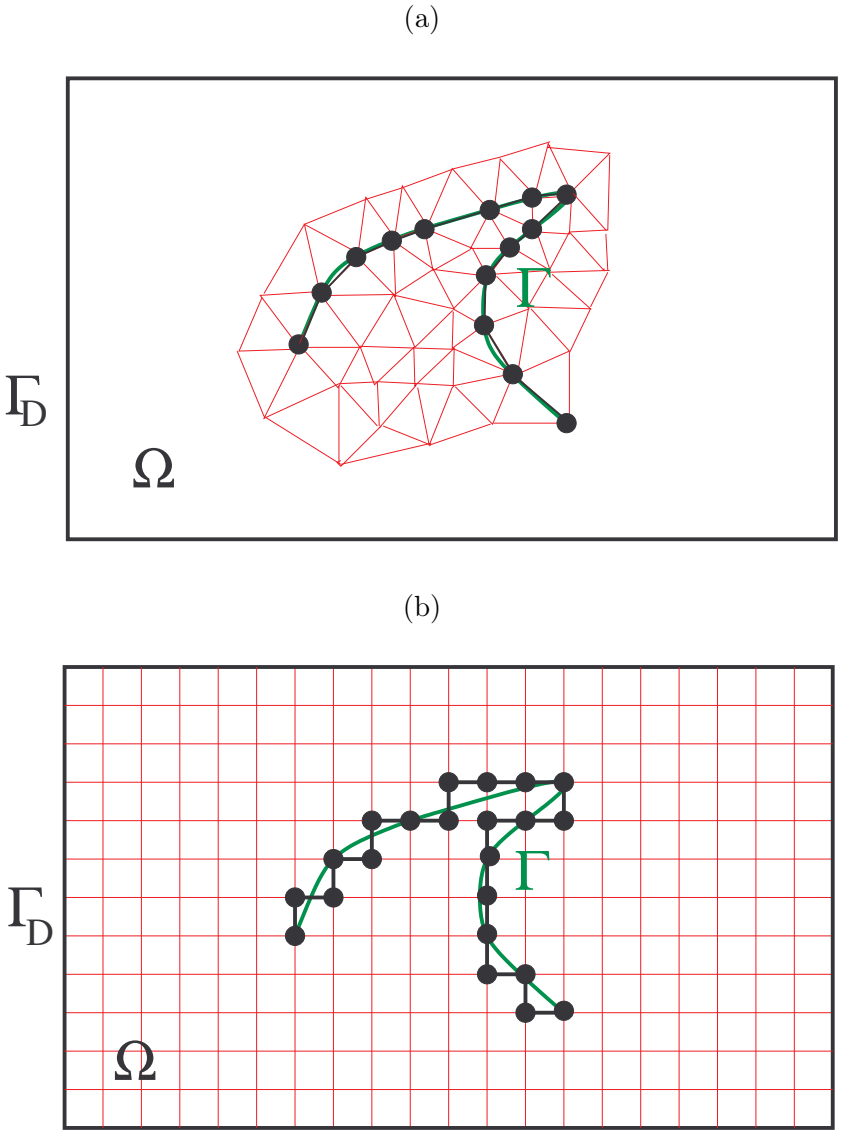

FIG. 1.1 – *Maillages adaptés (a) et en "marches d'escalier" (b).*

Propriétés géométriques. En plus des défauts strictement numériques que nous venons de citer, qui sont du ressort de l'Analyse Numérique, la présence d'interfaces conduit à des défauts d'origine géométrique. En effet, pour prendre en compte des interfaces de forme quelconque dans

des schémas numériques, deux méthodes sont classiquement utilisées. La première méthode, classique dans le cas de schémas d'éléments finis, consiste à adapter le maillage aux interfaces (figure 1.1 a). Cette méthode fournit une bonne description géométriques des interfaces, mais elle conduit à deux défauts. Le premier défaut concerne la lourdeur des calculs, découlant de l'utilisation d'un mailleur et de problèmes de gestion informatique. Ce défaut est particulièrement important si le maillage doit être recalculé à chaque pas de temps, ce qui est le cas si la position de l'interface varie avec le temps (soit pour des raisons physiques, soit en vue de problèmes inverses). Le deuxième défaut découle directement du maillage adapté : les plus petits éléments du maillage imposent une condition de stabilité CFL particulièrement restrictive, nécessitant des pas de temps très petits.

Pour représenter des interfaces de forme quelconque dans des schémas numériques, une deuxième méthode consiste à utiliser un maillage cartésien uniforme, et à décrire l'interface en "marches d'escalier" (figure 1.1 b). Cette méthode, classique dans le cas de schémas de différences finies, est simple et peu onéreuse en termes informatiques. Toutefois, elle conduit à des effets de diffraction parasite, dégradant la solution numérique [18].

(a) (b)

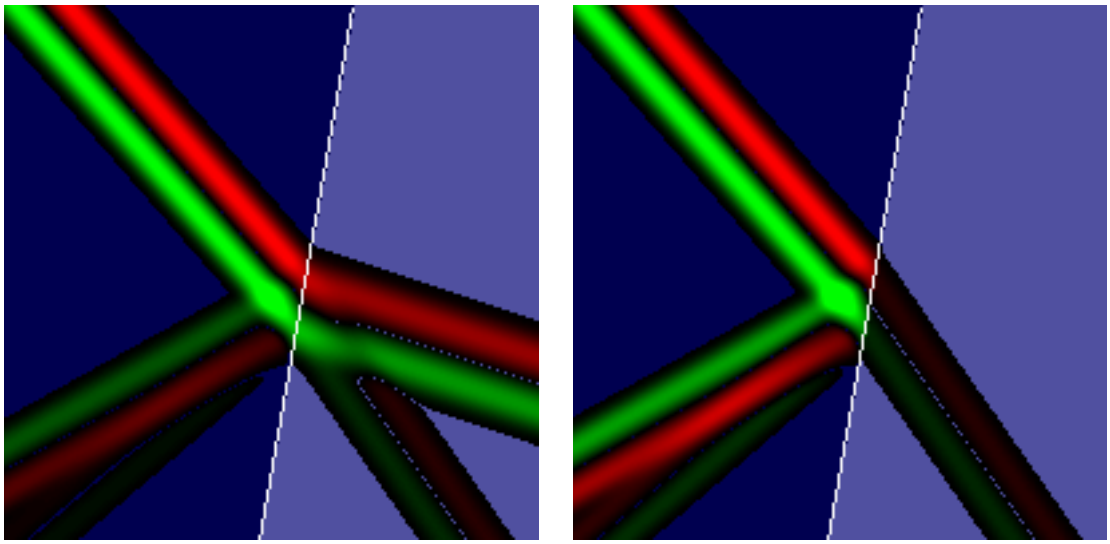

FIG. 1.2 – *Ondes P et SV réfléchies et transmises, pour une onde P incidente et deux conditions de saut : contact parfait (a), glissement sans frottement (b).*

Propriétés physiques. Après les défauts de nature numérique et géométrique, les interfaces introduisent une troisième classe de défauts, de nature physique. Plus précisément, les schémas numériques classiques ne prennent pas en compte les propriétés physiques vérifiées aux interfaces, comme la nature d'un contact entre deux solides. Or, la nature d'un contact est une donnée essentielle au problème de propagation d'ondes : des conditions de saut différentes conduisent à des solutions radicalement différentes.

Pour illustrer ce point, considérons l'exemple caricatural de deux solides élastiques isotropes séparés par une interface plane oblique, et envisageons deux types de conditions de saut : soit des conditions de contact parfait (continuité de la vitesse élastique et de la composante normale

de la contrainte élastique), soit des conditions de glissement sans frottement (continuité de la composante normale de la vitesse élastique, continuité de la composante normale de la contrainte normale, et nullité de la composante tangentielle de la contrainte normale à l'interface). Soit une onde plane P incidente sur l'interface, en-dessous de l'angle critique. Les conditions de saut permettent de calculer les ondes planes P et SV réfléchies et transmises par l'interface. En figure 1.2, nous présentons alors les cartes théoriques de σ_{11} (la première composante du tenseur des contraintes élastiques). Vu la palette de couleur choisie et l'angle d'incidence considéré, l'onde P transmise est invisible dans le cas du glissement sans frottement (b) bien qu'elle existe, alors qu'elle est parfaitement visible dans le cas du contact parfait (a).

Ainsi, les conditions de saut, locales aux interfaces, influencent de façon globale la solution en tout point du domaine (à vitesse finie, dans le cas qui nous intéresse ici de problèmes hyperboliques). Pour étudier numériquement la propagation d'ondes à travers différentes interfaces, comme celles présentées en figure 1.2, nous devons savoir décrire les conditions de saut dans des schémas numériques.

1.3 Méthodes existantes

A la lumière de ce qui vient d'être dit, notons deux points. D'une part, les configurations intéressant le physicien présentent généralement des interfaces. D'autre part, ces interfaces dégradent fortement les schémas numériques et sont pauvrement décrites, géométriquement et physiquement. Quelle confiance accorder alors à une simulation de propagation d'ondes en présence d'une multitude d'interfaces (exemples : milieux stratifiés, bulles...) ou d'une onde de surface, laquelle est, par définition, principalement localisée au voisinage des interfaces, accumulant à chaque pas de temps des artefacts numériques ? Comment peut-on envisager sereinement l'étude fine de problèmes de propagation d'ondes à l'interface fluide-solide, par exemple dans le cas de structures complexes comme l'os, sans se poser la question des conditions de saut qui y sont vérifiées ? Enfin, comment accéder à la résolution propre de problèmes inverses si le problème direct n'est que vaguement qualitatif ?

Toutes ces questions conduisent à des remises en cause douloureuses. Les artefacts numériques sont d'autant plus pernicieux qu'ils ne sont pas forcément détectés, et peuvent être lourds de conséquences : pour s'en convaincre, il est certainement utile de rappeler un problème classique en acoustique sous-marine [75]. Dans le cas de l'équation parabolique en présence d'un fond incliné, il est connu que les simulations numériques peuvent converger vers une fausse solution du problème, et ce à cause de la non-conservation de l'énergie discrète aux interfaces... Pour aborder une étude numérique quantitative et sérieuse de la propagation des ondes en présence d'interfaces, il est alors nécessaire de s'interroger sur les méthodes numériques susceptibles de décrire correctement des interfaces. Nous examinons ici des techniques proposées dans la littérature, sans prétendre à l'exhaustivité. En particulier, nous ne détaillons ni les méthodes de décomposition de domaine [7], ni les méthodes de point fictif [20, 21, 25].

Domaines fictifs. Cette classe de méthodes offre une grande souplesse d'un point de vue géométrique, en utilisant deux maillages : un maillage régulier du domaine, et un maillage surfacique des frontières. A chaque pas de temps, les solutions numériques sont calculées sur le maillage régulier, puis couplées à des quantités calculées sur le maillage surfacique. Ces dernières quanti-

tés, appelées *multiplicateurs de Lagrange*, permettent de prendre en compte sous forme affaiblie les conditions aux limites vérifiées aux frontières. Ce faisant, la méthode des domaines fictifs présente les qualités géométriques d'un maillage adapté, tout en limitant la charge de calcul et en maintenant une condition CFL raisonnable.

L'application des méthodes de domaines fictifs à des problèmes de propagation d'ondes dans le domaine temporel est récente : on pense en particulier à [79] pour des conditions aux limites de type surface libre (fissure ouverte), et à [69] pour des conditions aux limites de type contact unilatéral (fissure fermée). Si ces méthodes s'appliquent bien à des conditions aux limites, elles ne s'appliquent pas (à notre connaissance) à des interfaces, décrites par des conditions de saut. De plus, ces méthodes, déduites d'une formulation variationnelle du problème de propagation d'ondes, sont couplées à des schémas déduits de cette même formulation. Il n'est alors pas possible a priori de coupler n'importe quel schéma, choisi pour ses qualités propres, à une méthode de domaines fictifs.

Homogénéisation des coefficients. Une autre méthode consiste à moyenner les coefficients de l'équation aux dérivées partielles (masse volumique, célérité des ondes) au voisinage des interfaces. Cette solution, de mise en œuvre aisée, est fréquemment appliquée dans le cas de schémas de volumes finis avec limiteur de flux [9, 45]. Ce faisant, les diffractions parasites sont réduites. L'ordre de convergence chute encore, mais de façon contrôlée. De plus, la stabilité du schéma est accrue : on peut en particulier ajuster le calcul des coefficients moyennés pour optimiser les conditions de stabilité et l'erreur locale de troncature [17]. Un problème majeur qui subsiste concerne la description des conditions de saut aux interfaces.

Eléments spectraux. Komatitsch a proposé une méthode d'éléments spectraux permettant de prendre en compte des interfaces [40]. A la différence de la plupart des méthodes rencontrées dans la littérature, cette méthode s'étend au cas de l'interface entre un fluide et un solide [39] : pour cela, on calcule le déplacement élastique dans le solide et le potentiel acoustique dans le fluide, puis on prend en compte les conditions de saut à l'interface via une formulation variationnelle. Cependant, cette méthode nécessite absolument que l'interface coïncide avec des noeuds du maillage, quitte à déformer celui-ci dans le cas d'interfaces de forme quelconque. L'utilisation de maillages adaptés est alors couteuse en temps de calcul (surtout en vue d'interfaces mobiles), et devient difficile à gérer en présence de plusieurs interfaces.

Méthodes d'interfaces. Une quatrième voie consiste à construire, aux points de calcul voisins des interfaces, de nouveaux schémas numériques. Ces schémas sont bâtis pour maintenir l'erreur locale de troncature malgré l'irrégularité de la solution au passage de l'interface. L'idée est ancienne : à la fin des années 70, Marchuk et Samarskii résolvaient numériquement des équations différentielles à coefficients discontinus, avec un ordre arbitrairement élevé [57, 68]. Le principal inconvénient de ces méthodes découlent de limitations géométriques : les interfaces doivent coïncider avec des noeuds du maillage, ce qui est particulièrement restrictif.

Une avancée majeure dans ce domaine est l'invention des *méthodes d'interface immergée* [60], développées à l'origine pour décrire le mouvement d'une membrane (le cœur !) sur un maillage régulier, ainsi que pour représenter les forces singulières qui s'y appliquent. Ces méthodes reviennent à des techniques de coefficients indéterminés : au voisinage des interfaces, les schémas numériques sont construits pour assurer une erreur locale de troncature donnée. Pour cela, on utilise les conditions de saut vérifiées par la solution exacte, ainsi que par ses dérivées spatiales successives. L'interface est "immergée", au sens où elle n'a pas besoin de coïncider avec le maillage

régulier. Les méthodes d'interface (nous omettons désormais de préciser "immergées") ont été appliquées avec succès à différentes configurations et classes d'équations aux dérivées partielles, et plusieurs variantes en ont été proposées. Notons en particulier l'application de l' "Immersed Interface Method" (IIM) aux systèmes hyperboliques de l'acoustique et de l'élastodynamique [86].

1.4 Une nouvelle méthode d'interface

Revenons alors au problème que nous nous posons depuis le début, à savoir comment réaliser proprement une expérience numérique de propagation d'ondes en présence d'interfaces, de formes et propriétés quelconques. A ce point de la discussion, il semble qu'une façon sérieuse de résoudre le problème consiste à appliquer deux schémas différents, suivant le point de calcul : un schéma en milieu homogène, loin des interfaces ; une méthode d'interface classique (comme l'IIM), d'ordre égal à celui du schéma précédent, près des interfaces. Numériquement, l'erreur locale de troncature est la même en tout point de calcul du domaine. Géométriquement, les propriétés de l'interface sont prises en compte par l'utilisation de deux maillages, sans les complications d'un maillage adapté aux interfaces. Enfin, physiquement, l'IIM impose à la solution numérique le respect des conditions de saut vérifiées aux interfaces par la solution exacte.

Limitations des méthodes d'interface classiques. Un examen attentif amène cependant à davantage de circonspection. Il s'avère en effet que les méthodes d'interface classiques, comme l'IIM ou ses avatars, souffrent de sérieuses limitations. Citons entre autres le manque de généralité de ces méthodes, et la différence de nature entre les méthodes d'interface et le schéma proprement dit. Pour illustrer ce dernier point, considérons le cas d'un schéma de volumes finis d'ordre deux avec limiteur de flux. Conformément à ce qui a été dit précédemment, on applique l'IIM d'ordre deux aux points de calcul proches des interfaces. Or il s'avère que l'IIM d'ordre deux introduit de la dispersion numérique, alors que le but des schémas de volumes finis avec limiteur de flux est justement d'éliminer cette dispersion... D'autres défauts (problème de stabilité numérique, difficulté de couplage à des schémas d'ordre et de complexité élevés ...) sont recensés dans le chapitre 2 de cette étude, conduisant à un "cahier des charges" de ce qu'est, à notre sens, une méthode d'interface optimale.

Cette analyse conduit alors à l'objet de la présente étude, à savoir la construction d'une nouvelle méthode d'interface satisfaisant à ce cahier des charges. De façon très résumée, le principe de la méthode est le suivant. Au lieu de construire, au voisinage des interfaces, un nouveau schéma, nous appliquons en tout point de calcul le même schéma (i.e. celui choisi en milieu homogène) ; par contre, nous modifions localement certaines valeurs numériques sur lesquelles s'appuie ce schéma pour effectuer l'avancée en temps. Toute la difficulté est alors reportée sur la modification des valeurs numériques de la solution, appelées ici *valeurs modifiées*. De chaque côté de l'interface, ces valeurs modifiées sont des estimations numériques de prolongements suffisamment réguliers de la solution exacte, de l'autre côté de l'interface. Ces prolongements reposent sur l'analyse des conditions de saut vérifiées aux interfaces, et sont totalement indépendants de l'expression du schéma utilisé. Ce dernier point permet, a priori, d'envisager un couplage avec de nombreuses classes de schémas numériques. Nous appelons cette méthode l' "Explicit Simplified Interface Method" (ESIM).

Plan de l'étude. Une caractéristique fondamentale de l'ESIM est son aspect modulaire, que nous cherchons à retrouver dans la discussion. Après l'analyse des méthodes d'interface classiques menée au chapitre 2, nous commençons par rappeler les systèmes hyperboliques de lois de conservation décrivant la propagation des ondes acoustiques ou élastiques dans un fluide parfait ou un solide élastique isotrope, en dimension un et en dimension deux (1D et 2D). On en déduit alors les expressions reliant, à tout ordre de dérivation, les dérivées temporelles et les dérivées spatiales de la solution exacte en milieu homogène, ce qui fait l'objet du chapitre 3.

Nous proposons alors, au chapitre 4, une sélection de schémas numériques (mentionnnés en début d'introduction), de qualité et complexité croissantes, et dont les propriétés sont connues et rappelées en milieu homogène. Cette partie n'apporte stricto sensu aucune nouveauté ; par contre, elle présente des schémas peu connus en acoustique numérique, et surtout satisfait à un objectif général que nous nous fixons : toutes les étapes doivent être immédiatement programmables et vérifiables. Ainsi, les algorithmes sont écrits explicitement, ce qui a, entre autres avantages, celui de minimiser le temps de calcul à l'exécution. Par exemple, au lieu d'utiliser des solveurs de Riemann pour les schémas de volumes finis, nous préférons mener à bout les calculs et écrire explicitement l'avancée en temps.

Nous abordons les interfaces aux chapitres 5 et 6, respectivement consacrés aux cas 1D et 2D. Les lois de contact sont très classiques : contact parfait entre deux fluides, deux solides, un fluide et un solide, puis contact imparfait entre deux solides. Ce dernier contact est décrit par des conditions de saut de type masse-ressort. Dans tous les cas, nous relions les valeurs limites de la solution et de ses dérivées spatiales, d'un côté de l'interface, aux valeurs limites de la solution et de ses dérivées spatiales, de l'autre côté de l'interface.

La présentation de l'ESIM a lieu aux chapitres 7 et 8, eux aussi respectivement consacrés aux cas 1D et 2D. Nous analysons certaines propriétés numériques de cette méthode d'interface, en particulier l'erreur locale de troncature, et examinons des cas limites. Le point important est le suivant : grâce à la méthode d'interface proposée, les schémas numériques conservent, en présence d'interfaces, les propriétés qu'ils ont en milieu homogène. Le coût informatique de l'ESIM est négligeable, l'essentiel des calculs supplémentaires étant effectué en prétraitement, avant l'avancée en temps. De plus, la méthode d'interface s'adapte automatiquement à une large classe de schémas explicites en temps.

Le chapitre 9, consacré aux solutions analytiques dans le domaine temporel, a deux objectifs. D'une part, il anticipe les expériences numériques du chapitre 10. D'autre part, il permet une discussion sur les conditions de saut en 2D à l'interface fluide-solide, discussion complémentaire à celle menée au chapitre 6.

Chapitre 2

Méthodes d'interface classiques

Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes d'interface classiques, l'IIM et l'EJIIM. Ces méthodes numériques permettent d'imposer à la solution calculée numériquement le respect des conditions physiques vérifiées aux interfaces par la solution exacte. L'ordre de convergence du schéma numérique est alors conservé, malgré l'irrégularité de la solution exacte à l'interface. Nous discutons ces deux méthodes, mettant à jour certaines limitations. Cette critique permet de comprendre l'intérêt de la méthode d'interface proposée dans le reste de l'étude.

2.1 Objet du chapitre

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles régissant la propagation des ondes, différentes classes de schémas existent, schémas dont les propriétés sont démontrées en milieu homogène, et perdues en présence d'interfaces : la solution numérique est alors dégradée par des diffractions parasites, une chute de l'ordre de convergence, voire des instabilités si le contraste des paramètres physiques est important. De plus, les schémas numériques ne prennent pas en compte les propriétés physiques vérifiées aux interfaces, comme la nature d'un contact entre deux solides. Une solution consiste alors à utiliser une "méthode d'interface" aux points de calcul proches des interfaces, c'est-à-dire une méthode numérique permettant de prendre en compte les propriétés physiques et géométriques des interfaces dans des schémas numériques classiques, tout en conservant l'ordre de convergence de ces derniers. Dans l'ensemble des méthodes d'interface, nous distinguons l'Immersed Interface Method (IIM) et l'Explicit Jump Immersed Interface Method (EJIIM).

L'IIM a été développée par Li et LeVeque en 1994 dans le contexte d'équations elliptiques linéaires [49, 50, 51, 52], puis appliquée à des équations paraboliques non linéaires [82] et aux équations de Navier-Stokes [14, 15], et enfin étendue par Zhang en 1996 au cas des systèmes hyperboliques linéaires de l'acoustique et de l'élastodynamique [85, 86]. Les systèmes d'équations étudiés étant les mêmes que ceux étudiés au cours de la présente étude (voir chapitre 3), le travail de Zhang nous intéresse particulièrement. Au cours de ce chapitre, nous analysons de façon systématique les différentes étapes de l'IIM et du travail de Zhang.

Les apports de Zhang sont majeurs : il introduit des idées nouvelles, comme les conditions de saut supplémentaires et les conditions de compatibilité, que nous développons au cours de la présente étude. Sans méthode d'interface, l'ordre des schémas chute en présence d'interface : Zhang vérifie numériquement que le schéma d'ordre deux qu'il utilise (Lax-Wendroff), couplé à l'IIM, conserve l'ordre deux en présence d'interfaces. La principale critique que nous formulons à l'égard de l'IIM provient d'un manque de généralité. L'application de l'IIM à tout type de schéma (différent du schéma de Lax-Wendroff), d'ordre et propriétés quelconques, est délicate, voire impossible ; à part l'erreur locale de troncature, les propriétés du schéma utilisé loin des interfaces sont généralement perdues au voisinage des interfaces. Enfin, on note une erreur de dérivation au début de ses calculs, qui invalide une grande partie des formules qui en découlent... En tant que tel, cette erreur importe peu : la démarche est juste, et le lecteur intéressé peut reconstituer les formules exactes. C'est ce que nous faisons ici dans le cas de l'interface fluide-fluide en 2D. Cette réécriture de l'IIM permet de familiariser le lecteur avec les techniques utilisées dans le reste de l'étude.

De son côté, l'EJIIM a été développée par Wiegmann en 1998 dans le contexte d'équations elliptiques linéaires [80, 81, 83]. Nous avons étudié l'application de l'EJIIM au cas du système hyperbolique linéaire de l'acoustique 1D. A l'instar de l'IIM, les qualités de l'EJIIM sont dégradées par des problèmes d'implémentation et de stabilité. Nous présentons toutefois l'EJIIM pour insister sur sa qualité majeure : dans le cas limite d'un milieu homogène (l'interface disparaissant alors), le schéma utilisé au voisinage des interfaces revient au schéma utilisé loin des interfaces. Ce critère, d'importance majeure, n'est vérifié par l'IIM que si elle est couplée au schéma de Lax-Wendroff.

L'ensemble de ces remarques nous a conduit à développer la nouvelle méthode d'interface qui fait l'objet de cette thèse, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM). Avant d'aborder ses différents aspects, nous présentons successivement trois exemples d'applications des méthodes d'interface classiques à la propagation des ondes : l'IIM en 1D et 2D, et l'EJIIM en 1D. Ces exemples sont tirés directement de la littérature (IIM 1D), sont corrigés (IIM 2D), ou sont une application originale (EJIIM 1D). L'ensemble des critiques formulées à la fin de chaque exemple est résumé en dernière section et conduit au "cahier des charges" que nous nous fixons pour construire la nouvelle méthode d'interface.

2.2 Immersed Interface Method 1D

2.2.1 Introduction

Nous rappelons le principe de l'IIM appliquée par Zhang à la propagation 1D des ondes acoustiques en présence d'une interface. Cette dernière est décrite par des conditions de saut classiques, à savoir la continuité de la pression acoustique et de la vitesse acoustique. Loin de l'interface, l'avancée en temps repose sur un schéma classique d'ordre deux en temps et en espace, le schéma de Lax-Wendroff. Au voisinage de l'interface, un autre schéma est écrit, schéma dont les coefficients sont calculés pour maintenir une erreur locale de troncature d'ordre deux.

Les notes présentées ici sont en grande partie issues de [85, 86] ; nous ajoutons cependant certaines remarques (cas limite du milieu homogène, équation modifiée), qui nous ont conduit à développer

l'ESIM. Les justifications techniques concernant les lois de conservation, les schémas numériques, et les conditions de saut, sont systématiquement omises : nous renvoyons pour cela aux chapitres ultérieurs qui traitent de ces aspects.

2.2.2 Lois de conservation

Soit un fluide parfait unidimensionnel au repos, de paramètres physiques constants par morceaux et discontinus en $x = \alpha$ (figure 2.1)

$$(\rho,c) = \begin{cases} (\rho_0,c_0) & \text{si } x \leq \alpha, \\ (\rho_1,c_1) & \text{si } x > \alpha, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ρ et c sont respectivement la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques. En posant

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho\, c^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où v et p sont respectivement la vitesse acoustique et la pression acoustique, les équations de l'acoustique peuvent s'écrire sous la forme d'un système hyperbolique de lois de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}. \tag{2.3}$$

La matrice $\boldsymbol{A}$ est notée $\boldsymbol{A}_0$ pour $x \leq \alpha$, $\boldsymbol{A}_1$ pour $x > \alpha$.

2.2.3 Conditions de saut

Pour que le problème soit bien posé, il est nécessaire de préciser une condition de saut pour $\boldsymbol{U}(x,t)$ en $x = \alpha$. La plus simple, décrivant la continuité de v et de p, s'écrit à tout instant

$$\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) = \boldsymbol{U}(\alpha^-,t), \tag{2.4}$$

où $\boldsymbol{U}(\alpha^\pm,t)$ désignent les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,t)$ en $x = \alpha$, par valeurs supérieures ou inférieures. Par dérivations successives de (2.4) par rapport à t et utilisation de (2.3), il est alors possible d'obtenir une infinité de conditions de saut portant sur les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,t)$. Jusqu'à l'ordre deux, ces conditions s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) &= \boldsymbol{D}_1\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) &= \boldsymbol{D}_2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où les matrices $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ sont des matrices 2×2 données par

$$\boldsymbol{D}_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2, \frac{\rho_1}{\rho_0}\right), \quad \boldsymbol{D}_2 = \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 \boldsymbol{I}_2. \tag{2.6}$$

On note $\boldsymbol{I}_2$ la matrice identité d'ordre deux. A partir de (2.5) et (2.6), on constate que les dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,t)$ sont discontinues en $x = \alpha$.

2.2.4 Schémas numériques

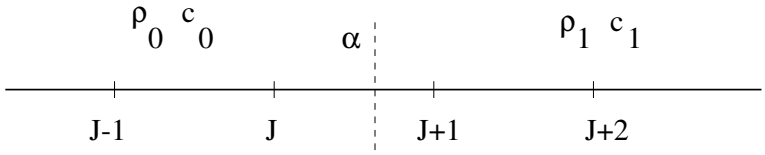

FIG. 2.1 – *Interface 1D et maillage régulier.*

Etant donnés des pas en espace Δx et en temps Δt uniformes, nous notons $\boldsymbol{U}_i^n$ l'approximation numérique de la solution exacte en $x = x_i = i\,\Delta x$ à l'instant $t = t_n = n\,\Delta t$. Pour intégrer numériquement (2.3), Zhang utilise un schéma d'ordre deux en temps et en espace, le schéma de Lax-Wendroff. L'avancée en temps de ce schéma s'écrit

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\,\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n - \boldsymbol{U}_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n - 2\,\boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{U}_{i-1}^n\right). \tag{2.7}$$

Zhang utilise aussi un schéma de volumes finis avec limiteur de flux, le Wave Propagation Algorithm [45], exposé plus loin. Considérons dans un premier temps le cas du schéma de Lax-Wendroff.

Celui-ci n'est d'ordre deux en x_i que si la solution exacte est de classe C^2 sur $[x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$. De (2.5) et (2.7), il découle que cette condition de régularité n'est pas vérifiée aux *points irréguliers*, x_J et x_{J+1}, i.e. les points pour lesquels l'avancée en temps (2.7) coupe l'interface en α (figure 2.1). Les autres points sont dits *réguliers*. Zhang propose d'écrire aux points irréguliers un autre schéma consistant avec l'équation aux dérivées partielles (2.3) à l'ordre deux. La construction de ce nouveau schéma constitue l'Immersed Interface Method (IIM).

2.2.5 Méthode d'interface

Avancée en temps aux points irréguliers. L'IIM revient à une méthode de coefficients indéterminés [43]. En x_J et x_{J+1}, Zhang définit des schémas à trois points centrés en espace

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{U}_J^{n+1} &= \boldsymbol{U}_J^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{J,1}\,\boldsymbol{U}_{J-1}^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2}\,\boldsymbol{U}_J^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{U}_{J+1}^n\right) \\ \boldsymbol{U}_{J+1}^{n+1} &= \boldsymbol{U}_{J+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,1}\,\boldsymbol{U}_{J+2}^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,2}\,\boldsymbol{U}_{J+1}^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,3}\,\boldsymbol{U}_J^n\right) \end{aligned}} \tag{2.8}$$

dont les coefficients $\boldsymbol{\Gamma}_{J,i}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,i}$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont des matrices 2×2, déterminées par l'analyse de l'erreur locale de troncature, menée maintenant.

L'avancée en temps (2.8) au point x_J s'écrit également

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{U}_J^{n+1} - \boldsymbol{U}_J^n\right) - \frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{J,1}\,\boldsymbol{U}_{J-1}^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2}\,\boldsymbol{U}_J^n + \boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{U}_{J+1}^n\right) = \boldsymbol{0}. \tag{2.9}$$

L'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}(x_J,t_n)$ du schéma (2.8) en x_J est obtenue en remplaçant les valeurs numériques dans (2.9) par les valeurs exactes aux points correspondants, soit

$$\boldsymbol{L}(x_J,t_n) = \boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) - \boldsymbol{L}_2(x_J,t_n), \tag{2.10}$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) &= \frac{\boldsymbol{U}(x_J,t_{n+1}) - \boldsymbol{U}(x_J,t_n)}{\Delta t} \\ \boldsymbol{L}_2(x_J,t_n) &= \frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{J,1}\,\boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n) + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2}\,\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{U}(x_{J+1},t_n)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

On suppose que la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ est suffisamment régulière de part et d'autre de α (en pratique, au moins de classe C^2), ce qui est le cas si la solution initiale l'est. $\boldsymbol{L}_1$ est calculée en trois étapes : développement de Taylor de $\boldsymbol{U}(x_J,t_{n+1})$ en (x_J,t_n), utilisation du système de lois de conservation (2.3), et enfin développement de Taylor des solutions en (α^-,t_n), soit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta t^2) \\ &= -\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + c_0^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta t^2) \\ &= -\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \left(c_0^2\frac{\Delta t}{2} - (x_J-\alpha)\boldsymbol{A}_0\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Les pas en temps et en espace sont reliés par la condition CFL, impliquant $\boldsymbol{O}(\Delta t^2) = \boldsymbol{O}(\Delta x^2)$. $\boldsymbol{L}_2$ est calculée à partir de développements de Taylor d'ordre trois de $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ $(i = J-1, J, J+1)$ en $(\alpha^\pm,t_n)$, soit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_2(x_J,t_n) = \frac{1}{\Delta x}\Bigg(&\boldsymbol{\Gamma}_{J,1}\sum_{m=0}^{2}\frac{(x_{J-1}-\alpha)^m}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2}\sum_{m=0}^{2}\frac{(x_J-\alpha)^m}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ &+\boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\sum_{m=0}^{2}\frac{(x_{J+1}-\alpha)^m}{m\,!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^3)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Les conditions de saut (2.5) permettent d'écrire (2.13) uniquement en fonction des valeurs limites $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)$ $(m = 0,1,2)$ à gauche de α. Finalement, l'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}(x_J,t_n)$ s'écrit à partir de (2.12) et (2.13)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}(x_J,t_n) = &-\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + \boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\right)\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ &-\frac{1}{\Delta x}\left((x_{J-1}-\alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + (x_J-\alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + (x_{J+1}-\alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{D}_1 + \Delta x\,\boldsymbol{A}_0\right)\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ &-\frac{1}{2\,\Delta x}\Big((x_{J-1}-\alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + (x_J-\alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + (x_{J+1}-\alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{D}_2 \\ &\qquad -2\,\Delta x\left(c_0^2\frac{\Delta t}{2} - (x_J-\alpha)\,\boldsymbol{A}_0\right)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour obtenir une erreur locale de troncature d'ordre deux, il suffit d'annuler les coefficients en facteur devant les dérivées spatiales $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)$ $(m = 0,1,2)$ dans (2.14). Cela revient à imposer que les matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{J,i}$ vérifient le système d'équations

(2.15)
$$\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + \boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + \boldsymbol{\Gamma}_{J,3} = \boldsymbol{0} \\[2ex]
(x_{J-1} - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + (x_J - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + (x_{J+1} - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{D}_1 = -\Delta\, x\,\boldsymbol{A}_0 \\[2ex]
(x_{J-1} - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} + (x_J - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,2} + (x_{J+1} - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J,3}\,\boldsymbol{D}_2 = c_0^2\,\Delta\, t\,\Delta\, x\,\boldsymbol{I}_2 - 2\,\Delta\, x(x_J - \alpha)\,\boldsymbol{A}_0.
\end{array}\right.$$

On peut suivre la même démarche en x_{J+1} pour déterminer le système vérifié par les matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,i}$ $(i = 1,2,3)$

$$\left|\begin{array}{l}
\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,1} + \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,2} + \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,3} = \boldsymbol{0} \\[2ex]
(x_{J+2} - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,1} + (x_{J+1} - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,2} + (x_J - \alpha)\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,3}\,\boldsymbol{D}_1^{-1} = -\Delta\, x\,\boldsymbol{A}_1 \\[2ex]
(x_{J+2} - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,1} + (x_{J+1} - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,2} + (x_J - \alpha)^2\,\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,3}\,\boldsymbol{D}_2^{-1} = c_1^2\,\Delta\, t\,\Delta\, x\,\boldsymbol{I}_2 \\[2ex]
\qquad\qquad -2\,\Delta\, x(x_{J+1} - \alpha)\,\boldsymbol{A}_1.
\end{array}\right. \tag{2.16}$$

Propriétés. La principale propriété de l'IIM est bien sûr, par construction même, une erreur locale de troncature d'ordre deux (voir section précédente). Les autres propriétés sont

- un coût informatique négligeable,
- l'introduction de dispersion numérique aux points irréguliers,
- la stabilité, même pour de forts contrastes des paramètres physiques.

Détaillons chacune de ces propriétés.

Tout d'abord, le système (2.15) est résolu numériquement par décomposition LU. Les matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{J,i}$ dépendent de la position de l'interface, des propriétés physiques de part et d'autre de α, mais ne dépendent pas de la solution $\boldsymbol{U}(x,t)$: la résolution de (2.15) et de (2.16) peut alors être effectuée une seule fois, en prétraitement. Après quoi, les matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{J,i}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,i}$ sont stockées, et l'avancée en temps aux points irréguliers (2.8) revient seulement à des produits matrice-vecteur. Le coût additionnel en terme de mémoire informatique et de temps de calcul est alors négligeable.

D'autre part, l'IIM d'ordre deux introduit de la dispersion numérique aux points irréguliers. On peut facilement s'en rendre compte dans le cas limite de milieux identiques de part et d'autre de α ($\rho_0 = \rho_1 = \rho$, $c_0 = c_1 = c$), le calcul de $\boldsymbol{\Gamma}_{J,i}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_{J+1,i}$ étant alors explicite. Après quelques manipulations algébriques, on trouve en effet

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_{J,1} = \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,3} &= c^2\,\frac{\Delta\, t}{2\,\Delta\, x}\,\boldsymbol{I}_2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{A}, \\[2ex]
\boldsymbol{\Gamma}_{J,2} = \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,2} &= -c^2\,\frac{\Delta\, t}{\Delta\, x}\,\boldsymbol{I}_2, \\[2ex]
\boldsymbol{\Gamma}_{J,3} = \boldsymbol{\Gamma}_{J+1,1} &= c^2\,\frac{\Delta\, t}{2\,\Delta\, x}\,\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{A}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

L'avancée en temps (2.8) en x_J et x_{J+1} revient alors au schéma de Lax-Wendroff (2.7) en ces points, lequel schéma est de nature dispersive. Rappelons brièvement qu'un schéma dispersif est un schéma pour lequel les différentes composantes harmoniques de la solution se propagent à des vitesses dépendant de leur fréquence. Cette propriété, non vérifié par la solution exacte, dégrade alors la solution numérique en introduisant des trains d'oscillations parasites. Notons que le fait de retrouver le schéma de Lax-Wendroff est logique : en effet, le schéma de Lax-Wendroff est le seul schéma centré, à trois points, consistant avec (2.3) à l'ordre deux en milieu homogène [43].

L'avancée en temps (2.8) est consistante avec (2.3) à l'ordre deux. Cependant, elle vérifie plus précisément une autre équation, appelée *équation modifiée* [42] : on peut en effet montrer que (2.8) vérifie à l'ordre trois

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\boldsymbol{U}, \tag{2.18}$$

qui est une équation de dispersion linéaire [43]. Cette équation modifiée est classique dans le cas de schémas linéaires du second ordre. La matrice $\boldsymbol{B}$ est omise ici car elle n'apporte rien à la discussion. De façon générale, l'IIM introduit ainsi de la dispersion numérique, quels que soient les milieux de part et d'autre de α.

Enfin, même si Zhang ne propose pas de théorie de stabilité de l'IIM, nous observons lors d'expériences numériques en 1D que l'IIM est stable, même pour de forts contrastes des paramètres physiques. Nous observons parfois l'apparition d'instabilités numériques dans certains cas limites : pour une interface très proche d'un point de calcul et pour des contrastes extrêmes (ex : eau/air). En dehors de ces cas, l'IIM est stable. Nous mesurons une convergence d'ordre deux lors d'expériences numériques.

2.2.6 Critique de l'IIM 1D

IIM et schéma de Lax-Wendroff. Le couplage de l'IIM d'ordre deux et du schéma de Lax-Wendroff est optimal, pour deux raisons : les propriétés numériques des deux schémas sont les mêmes (erreur locale de troncature, dispersion numérique) ; l'IIM peut alors s'interpréter comme une modification apportée au schéma de Lax-Wendroff, modification dépendant continûment des paramètres physiques et disparaissant lorsque le contraste des paramètres s'annule.

Par contre, le couplage de l'IIM d'ordre deux avec d'autres schémas numériques d'ordre deux est beaucoup moins satisfaisant. Examinons en particulier le cas d'un schéma de volumes finis avec limiteur de flux, comme le Wave Propagation Algorithm, utilisé par Zhang pour éliminer la dispersion numérique.

IIM et schéma de volumes finis avec limiteur de flux. Tout d'abord, le schéma de volumes finis avec limiteur de flux possède deux points irréguliers supplémentaires par rapport au schéma de Lax-Wendroff, les points x_{J-1} et x_{J+2}. Zhang suggère d'appliquer le schéma sans méthode d'interface en ces deux points, pour deux raisons.

La première raison est que l'utilisation, en ces deux points, de valeurs numériques de l'autre côté de l'interface, n'intervient que dans le calcul des limiteurs de flux [45]. Selon Zhang, cette utilisation dégrade peu la solution numérique. La deuxième raison, plus valable, est que l'écriture

d'une IIM sur les quatre points irréguliers x_i $(J-1 \leq i \leq J+2)$ conduit à une erreur locale de troncature d'ordre quatre en ces points, pour un schéma qui est seulement d'ordre deux aux points réguliers. Malgré l'effort fait aux points irréguliers, l'ordre de convergence global reste égal à deux.

D'autre part, l'IIM introduit de la dispersion numérique, conduisant à des oscillations parasites, alors que le but des limiteurs de flux est justement de limiter cette dispersion en introduisant de la diffusion numérique. Ce défaut croît évidemment avec le nombre d'interfaces, dégradant la qualité de la solution numérique si le nombre de points irréguliers n'est plus négligeable devant le nombre de points réguliers (exemple : milieux multicouches, bulles d'air ...).

IIM et schémas d'ordre élevé. Pour un schéma d'ordre élevé, comme le schéma WENO 5 présenté plus loin, il est évidemment possible d'écrire une IIM d'ordre correspondant. Par contre, les problèmes rencontrés à l'ordre deux sont maintenus, voire accentués. En particulier, il paraît difficile de construire une IIM d'ordre cinq qui imite les propriétés numériques du schéma WENO 5 (en particulier, le contrôle de la croissance des oscillations numériques). De plus, l'écriture explicite des systèmes vérifiés par les matrices $\mathbf{\Gamma}$ devient de plus en plus lourde.

Améliorations à apporter. De ce qui précède, nous déduisons les points à améliorer par rapport à l'IIM 1D. Nous voulons tout d'abord définir une méthode d'interface dont l'écriture soit entièrement automatique, quel que soit le schéma utilisé aux points réguliers. D'autre part, nous souhaitons que les propriétés numériques de la méthode d'interface soient identiques à celles du schéma utilisé aux points réguliers. En particulier, dans le cas limite du milieu homogène (l'interface disparaissant alors), on souhaite retrouver aux points irréguliers le schéma utilisé aux points réguliers. Nous souhaitons par contre conserver les avantages de l'IIM, à savoir un schéma explicite en temps et robuste aux forts contrastes.

2.3 Immersed Interface Method 2D

2.3.1 Introduction

Nous résumons l'application de l'IIM au cas de l'interface 2D entre deux fluides parfaits. Nous corrigeons ici les conditions de saut de [85, 86], ainsi que les systèmes d'équations qui en sont déduits.

2.3.2 Lois de conservation

Considérons un fluide parfait, de paramètres physiques constants par morceaux et discontinus de part et d'autre d'une interface définie par son équation cartésienne $F(x,y) = 0$, où (O,x,y) désigne le *repère global* de vecteurs directeurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ (figure 2.2). Les paramètres sont

$$(\rho,c) = \begin{cases} (\rho_0,c_0) & \text{si } F(x,y) \leq 0, \\ (\rho_1,c_1) & \text{si } F(x,y) > 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

avec les mêmes notations qu'en 1D, et F est une fonction suffisamment régulière. En posant

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho\, c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, c^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

où (v_1,v_2) sont respectivement les composantes de la vitesse acoustique dans le repère (O,x,y), et p est la pression acoustique, les équations de l'acoustique peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire de lois de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}. \tag{2.21}$$

Par dérivation de (2.21) par rapport à t, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\boldsymbol{U}\right). \tag{2.22}$$

2.3.3 Schémas numériques

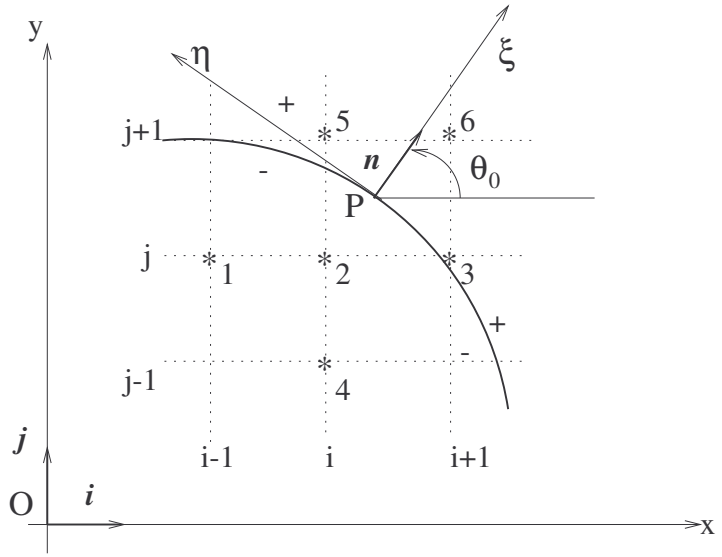

FIG. 2.2 – *Interface 2D et maillage régulier. Les points utilisés par l'IIM au point irrégulier (x_i,y_j) sont numérotés de 1 à 6. Le point de projection de (x_i,y_j) sur l'interface est P, centre du repère local tangent (P,χ,η).*

Etant donné des pas en espace $\Delta x = \Delta y$ et en temps Δt uniformes, nous notons $\boldsymbol{U}^n_{i,j}$ l'approximation numérique de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x_i = i\,\Delta x, y_j = j\,\Delta y, t_n = n\,\Delta t)$. Pour intégrer numériquement (2.21), Zhang utilise des schémas d'ordre deux en temps et en espace, comme le

schéma de Lax-Wendroff

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} &= \boldsymbol{U}_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\left(\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n}\right) + \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} - \boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\right)^{2}\left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} + \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n} + \boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} + \boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n} - 4\,\boldsymbol{U}_{i,j}^{n}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Il utilise aussi un schéma de volumes finis avec limiteur de flux, le Wave Propagation Algorithm [45]. Là encore, nous ne considérons dans un premier temps que le schéma de Lax-Wendroff.

Supposons que le point (x_i,y_j) soit irrégulier, i.e. que l'avancée en temps (2.23) utilise des valeurs numériques des deux côtés de l'interface. La solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ étant irrégulière au passage de l'interface (voir à ce sujet la prochaine section), l'ordre du schéma chute. Pour conserver l'ordre deux en (x_i,y_j), Zhang construit un autre schéma en ce point. Pour cela, Zhang écrit, en un point P de l'interface, des développements de Taylor de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ en des points voisins de (x_i,y_j). Zhang utilise alors les conditions de saut de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales en P.

2.3.4 Conditions de saut

Repère local tangent à l'interface. Soit P la projection orthogonale de (x_i,y_j) sur l'interface. Zhang écrit les conditions de saut de la solution exacte dans le *repère local* (P,ξ,η) direct, tangent à l'interface. Ce repère local a pour vecteur normal $\boldsymbol{n}$ et pour vecteur tangent $\boldsymbol{t}$, avec θ_0 l'angle $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n})$ (figure (2.2)). Pour un point M de coordonnées (x,y) dans le repère global (O,x,y) et de coordonnées (ξ,η) dans le repère local, les formules de changement de repère sont

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Au voisinage de P, l'interface peut localement être décrite par un paramétrage η, soit

$$\begin{aligned} \xi &= \chi(\eta) \\ \eta &= \eta, \end{aligned} \tag{2.25}$$

où χ est une fonction supposée suffisamment régulière. Par définition du repère local centré en $P(0,0)$, on a

$$\chi(0) = \chi^{'}(0) = 0, \tag{2.26}$$

et les vecteurs $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{n}$ s'écrivent en tout point $M(\xi = \chi(\eta),\eta)$ le long de l'interface

$$\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \chi^{'}(\eta) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\chi^{'}(\eta) \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Lois de conservation dans le repère local. On désigne par $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t) = {}^{T}(\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{p})$ le vecteur des composantes de la vitesse acoustique et de la pression acoustique dans le repère (P,ξ,η) (on

a $\overline{p} = p$). On passe de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$ à $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ par une matrice de rotation [26]

$$\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t) = \boldsymbol{Q}_0^{-1}\,\boldsymbol{U}(x,y,t),$$

$$\text{avec } \boldsymbol{Q}_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

P étant fixé, $\boldsymbol{Q}_0$ est une matrice constante. De (2.21), on déduit le système

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\overline{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{0} \tag{2.29}$$

vérifié dans le repère (P,ξ,η), obtenue par report de (2.28). On vérifie au passage l'invariance des lois de conservation par changement de repère. Par dérivation par rapport à t de (2.29), on obtient enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\boldsymbol{U}} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\overline{\boldsymbol{U}} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\overline{\boldsymbol{U}}\right). \tag{2.30}$$

Conditions de saut. Soit un point M le long de l'interface, de coordonnées $(\xi = \chi(\eta),\eta)$ dans le repère (P,ξ,η). Le but de cette partie est d'obtenir autant de conditions de saut en M que de composantes de $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$, jusqu'à l'ordre deux $(0 \le \alpha \le 2, 0 \le \beta \le \alpha)$. Le fait de s'arrêter à l'ordre deux de dérivation spatiale découle de l'ordre deux du schéma de Lax-Wendroff, et trouve son explication lors de la mise en oeuvre ultérieure de la méthode d'interface en section 2.3.5. Ainsi, nous sommes amenés à chercher trois conditions de saut pour les composantes de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$, six conditions de saut pour les composantes de ses dérivées spatiales premières, et neuf conditions de saut pour les composantes de ses dérivées spatiales secondes.

Les conditions de saut *naturelles* découlent de la continuité de la vitesse acoustique normale et de la pression acoustique en M, soit, compte-tenu de (2.27),

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[\overline{v}_1 - \chi'(\eta)\,\overline{v}_2\right] = 0, \\ &[p] = 0, \end{aligned}} \tag{2.31}$$

en notant $[f] = f(P^+,t) - f(P^-,t)$ le saut d'une fonction $f(x,y,t)$ en P. Pour obtenir autant de conditions de saut que de composantes de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$, nous dérivons la deuxième condition de (2.31) par rapport à η ; le théorème de dérivation des fonctions composées, appliqué à $p\,(\chi(\eta),\eta,t)$, conduit alors à

$$\left[\chi'(\eta)\,\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta}\right] = 0. \tag{2.32}$$

Les lois de conservation (2.29) permettent de déduire de ce qui précède

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\,\chi'(\eta)\,\overline{v}_1 + \rho\,\overline{v}_2\right] = 0 \Rightarrow \left[\rho\,\chi'(\eta)\,\overline{v}_1 + \rho\,\overline{v}_2\right] = K(M), \tag{2.33}$$

où K est une constant indépendante de temps. Pour un champ acoustique nul à un instant donné en M, on en déduit la condition de saut *supplémentaire*

$$\boxed{\left[\rho\,\chi^{'}(\eta)\,\overline{v}_1 + \rho\,\overline{v}_2\right] = 0.} \tag{2.34}$$

Pour obtenir des conditions de saut portant sur les composantes des dérivées spatiales de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$, on dérive dans un premier temps les conditions de saut naturelles (2.31) et la condition de saut supplémentaire (2.34) par rapport à η. Après une dérivation, on obtient ainsi

$$\boxed{\left[-\chi^{''}(\eta)\,\overline{v}_2 + \chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi} - \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi} + \frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\eta} - \chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\eta}\right] = 0,} \tag{2.35}$$

$$\boxed{\left[\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\xi} + \frac{\partial\,p}{\partial\,\eta}\right] = 0,} \tag{2.36}$$

$$\boxed{\left[\rho\,\chi^{''}(\eta)\,\overline{v}_1 + \rho\,\left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi} + \rho\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi} + \rho\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\eta} + \rho\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\eta}\right] = 0,} \tag{2.37}$$

soit trois conditions de saut pour six inconnues. Après deux dérivations, on obtient de même

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\chi^{'''}(\eta)\,\overline{v}_2 + \chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi} - 3\,\chi^{'}(\eta)\,\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi} - 2\,\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\eta} + \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi^2}\right.\\ &\left.\quad - \left(\chi^{'}(\eta)\right)^3\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi^2} + 2\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta} - 2\,\left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta} + \frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\eta^2} - \chi^{'}(\eta)\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\eta^2}\right] = 0.\end{aligned}} \tag{2.38}$$

$$\boxed{\left[\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\xi} + \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial^2\,p}{\partial\,\xi^2} + 2\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial^2\,p}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta} + \frac{\partial^2\,p}{\partial\,\eta^2}\right] = 0,} \tag{2.39}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\rho\,\chi^{'''}(\eta)\,\overline{v}_1 + 3\,\rho\,\chi^{'}(\eta)\,\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi} + \rho\,\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi} + 2\,\rho\,\chi^{''}(\eta)\,\frac{\partial\,\overline{v}_1}{\partial\,\eta} + \rho\,\left(\chi^{'}(\eta)\right)^3\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi^2}\right.\\ &\left.\quad + \rho\,\left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi^2} + 2\,\rho\,\left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta} + 2\,\rho\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta} + \rho\,\chi^{'}(\eta)\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_1}{\partial\,\eta^2} + \rho\,\frac{\partial^2\,\overline{v}_2}{\partial\,\eta^2}\right] = 0,\end{aligned}} \tag{2.40}$$

soit trois conditions pour neuf inconnues. Dans un deuxième temps, on dérive les conditions de saut *naturelles* par rapport à t et on utilise les lois de conservation (2.29) et (2.30) écrites sous forme scalaire. Ainsi, après une dérivation de (2.31) par rapport à t, on obtient

$$\boxed{\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,\xi} - \frac{1}{\rho}\,\chi^{'}(\eta)\frac{\partial\,p}{\partial\,\eta}\right] = 0,} \tag{2.41}$$

$$\boxed{\left[\rho\, c^2\, \frac{\partial\, \overline{v}_1}{\partial\, \xi} + \rho\, c^2\, \frac{\partial\, \overline{v}_2}{\partial\, \eta}\right] = 0,} \tag{2.42}$$

soit deux conditions de saut pour six inconnues. Après deux dérivations de (2.31) par rapport à t, on obtient

$$\boxed{\left[c^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_1}{\partial\, \xi^2} - c^2\, \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_1}{\partial\, \xi\, \partial\, \eta} + c^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_2}{\partial\, \xi\, \partial\, \eta} - c^2\, \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_2}{\partial\, \eta^2}\right] = 0,} \tag{2.43}$$

$$\boxed{\left[c^2\, \frac{\partial^2\, p}{\partial\, \xi^2} + c^2\, \frac{\partial^2\, p}{\partial\, \eta^2}\right] = 0,} \tag{2.44}$$

soit deux conditions de saut pour neuf inconnues. Les deux conditions (2.35) et (2.37), obtenues en dérivant les conditions de saut naturelles par rapport à η, sont dérivées par rapport à t, ce qui conduit à

$$\boxed{\left[-\frac{1}{\rho}\, \chi^{''}(\eta)\, \frac{\partial\, p}{\partial\, \eta} + \frac{1}{\rho}\, \chi^{'}(\eta)\, \frac{\partial^2\, p}{\partial\, \xi^2} + \frac{1}{\rho}\, \left(1 - \left(\chi^{'}(\eta)\right)^2\right)\, \frac{\partial^2\, p}{\partial\, \xi\, \partial\, \eta} - \frac{1}{\rho}\, \chi^{'}(\eta)\, \frac{\partial^2\, p}{\partial\, \eta^2}\right] = 0,} \tag{2.45}$$

$$\boxed{\left[\rho\, c^2\, \chi^{'}(\eta)\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_1}{\partial\, \xi^2} + \rho\, c^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_1}{\partial\, \xi\, \partial\, \eta} + \rho\, c^2\, \chi^{'}(\eta)\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_2}{\partial\, \xi\, \partial\, \eta} + \rho\, c^2\, \frac{\partial^2\, \overline{v}_2}{\partial\, \eta^2}\right] = 0,} \tag{2.46}$$

soit deux conditions de saut pour neuf inconnues. En rassemblant les conditions de saut (2.35)-(2.46), on obtient cinq conditions de saut pour les six composantes des dérivées spatiales premières de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$, et sept conditions de saut pour les neuf composantes des dérivées spatiales secondes de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$.

Pour déterminer les trois conditions de saut manquantes, on procède comme suit. A partir des deux premières équations scalaires de (2.29), soit

$$\begin{aligned} \rho\, \frac{\partial\, \overline{v}_1}{\partial\, t} &= \frac{\partial\, p}{\partial\, \xi}, \\ \rho\, \frac{\partial\, \overline{v}_2}{\partial\, t} &= \frac{\partial\, p}{\partial\, \eta}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

on montre la relation

$$\frac{\partial}{\partial\, t}\left(\frac{\partial\, \overline{v}_1}{\partial\, \eta} - \frac{\partial\, \overline{v}_2}{\partial\, \xi}\right) = 0, \tag{2.48}$$

soit $\frac{\partial}{\partial t}$ rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Si le rotationnel de la vitesse est nul à l'instant initial, on obtient alors la condition classique selon laquelle le rotationnel de la vitesse acoustique est nul à tout instant, soit

$$\frac{\partial\, \overline{v}_1}{\partial\, \eta} - \frac{\partial\, \overline{v}_2}{\partial\, \xi} = 0, \tag{2.49}$$

ainsi que les deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{\partial^2 \overline{v}_2}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \overline{v}_2}{\partial \xi \, \partial \eta} &= 0, \end{aligned} \tag{2.50}$$

obtenues par dérivation de (2.49) par rapport à ξ ou η. Par la suite, nous appelons *conditions de compatibilité* les conditions (2.49) et (2.50) ; ces conditions sont caractéristiques du milieu de propagation et non des interfaces. Les conditions de compatibilité étant vraies partout, et en particulier au niveau des interfaces, Zhang propose d'écrire que leur saut de part et d'autre de l'interface est nul, soit

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \overline{v}_2}{\partial \xi}\right] &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{\partial^2 \overline{v}_2}{\partial \xi^2}\right] &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \overline{v}_2}{\partial \xi \, \partial \eta}\right] &= 0, \end{aligned}} \tag{2.51}$$

ce qui finit de compléter les conditions de saut à l'interface 2D entre deux fluides.

Ecriture matricielle des conditions de saut. Les conditions de saut (2.31) à (2.46), puis (2.51), calculées en un point $M(\xi = \chi(\eta),\eta)$ quelconque le long de l'interface, sont maintenant ramenées au point P, origine du repère local. Il suffit pour cela de considérer les propriétés (2.26), lesquelles simplifient les conditions de saut. Après calculs, les valeurs limites $\frac{\partial^i}{\partial \xi^{i-j} \, \partial \eta^j} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t)$ $(0 \leq i \leq 2,\ 0 \leq j \leq 2)$ s'écrivent en fonction des valeurs limites $\frac{\partial^i}{\partial \xi^{i-j} \, \partial \eta^j} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t)$

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial \eta} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \overline{\boldsymbol{U}}(P^+,t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial \eta} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t) \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice bloc 6×6, avec des blocs 3×3, dont les composantes non nulles sont (2.53)

$$\boldsymbol{M}(1,1) = \boldsymbol{M}(3,3) = \boldsymbol{M}(6,6) = \text{ diag } \left(1,\frac{\rho_0}{\rho_1},1\right),$$

$$\boldsymbol{M}(2,1) = \chi^{''}(0)\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \text{ diag } (-1,1,0), \qquad \boldsymbol{M}(2,2) = \text{ diag } \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2,1,\frac{\rho_1}{\rho_0}\right),$$

$$\boldsymbol{M}(2,3) = \boldsymbol{M}(5,6) = \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(3,1) = -\boldsymbol{M}(5,2) = \chi^{''}(0)\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(4,1) = \boldsymbol{M}(5,1) = -\boldsymbol{M}(6,1) = -\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\left(\chi^{'''}(0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\left(\chi^{''}(0)\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

(2.54)

$$\boldsymbol{M}(4,2) = -\boldsymbol{M}(6,2) = -\chi''(0)\ \mathrm{diag}\ \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2, \frac{\rho_0}{\rho_1} - 1, 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right),$$

$$\boldsymbol{M}(4,3) = -\boldsymbol{M}(6,3) = -\chi''(0)\begin{pmatrix} 0 & 3\frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 2 & 0 \\ 2\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(4,4) = \mathrm{diag}\ \left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2, 1, \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2\right), \qquad \boldsymbol{M}(4,5) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(4,6) = \left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)\ \mathrm{diag}\ \left(1, \frac{\rho_0}{\rho_1}, 1\right), \qquad \boldsymbol{M}(5,5) = \mathrm{diag}\ \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2, 1, \frac{\rho_1}{\rho_0}\right),$$

$$\boldsymbol{M}(5,3) = -\chi''(0)\ \mathrm{diag}\ \left(2\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right), -\left(3\frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 2\right), \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right).$$

Ces conditions de saut font intervenir les paramètres physiques de part et d'autre de l'interface, ainsi que la géométrie de l'interface en P. De (2.52), on déduit que les composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ sont soit discontinues, soit à dérivées spatiales discontinues, en P.

Comme signalé en section 2.1, les conditions de saut (2.52) sont différentes de celles proposées par Zhang. Tout en tenant compte des différences de notation, le lecteur pourra comparer (2.52) aux équations (4-50) et (4-51) de [86]. Les erreurs de calcul de Zhang proviennent du fait qu'il dérive directement les conditions de saut naturelles (2.31) au point P, au lieu de les dériver en un point M quelconque de l'interface, que l'on fait tendre dans un second temps vers P. Pour comprendre sur un exemple les conséquences de cette erreur, examinons la condition de saut portant sur la vitesse acoustique normale (première équation de (2.31)). Zhang écrit directement cette condition en P, soit, compte-tenu de (2.26)

$$[\overline{v}_1] = 0, \tag{2.55}$$

qu'il dérive par rapport à η

$$\left[\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \eta}\right] = 0. \tag{2.56}$$

Au lieu de (2.56), l'expression correcte déduite de (2.35) est

$$\left[-\chi''(0)\,\overline{v}_2 + \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial \eta}\right] = 0. \tag{2.57}$$

Des erreurs analogues, faisant intervenir $\chi''(0)$ et $\chi'''(0)$, se retrouvent dans pratiquement toutes les conditions de saut de [86]. Ces erreurs n'ont aucune conséquence sur les expériences numériques de Zhang, pour une simple raison : il compare les solutions numériques aux solutions analytiques dans le cas d'une onde plane incidente sur une interface plane, cas pour lequel les termes de courbure $\chi''(0)$ et $\chi'''(0)$ sont nuls...

2.3.5 Méthode d'interface

l	1	2	3	4	5	6
$k_1(l)$	- 1	0	1	0	0	1
$k_2(l)$	0	0	0	-1	1	1

TAB. 2.1 – *Indices k_1 et k_2 utilisés dans (2.59) et permettant de repérer les positions relatives des points (utilisés pour l'avancée en temps) par rapport au point irrégulier considéré.*

Avancée en temps en un point irrégulier. Soit (x_i,y_j) un point irrégulier, et P la projection orthogonale de (x_i,y_j) sur l'interface (figure 2.2). En (x_i,y_j), Zhang propose décrire l'avancée en temps

$$\boxed{\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} = \boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{l=1}^{6} \boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}\, \boldsymbol{U}_{i_l,j_l}^{n},} \tag{2.58}$$

basée sur six points. Les coefficients $\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}$ $(1 \leq l \leq 6)$ sont des matrices 3×3. Les entiers i_l et j_l $(1 \leq l \leq 6)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} i_l &= i + k_1(l), \\ j_l &= j + k_2(l), \end{aligned} \tag{2.59}$$

avec $k_1(l)$ et $k_2(l)$ précisés dans le tableau 2.1 ; en particulier, $i_2 = i$ et $j_2 = j$. Le choix de $l = 6$ points est a priori nécessaire pour obtenir un schéma d'ordre deux. Ce "stencil" (montré en figure 2.2) est asymétrique, au sens où l'on obtient un autre stencil par symétrie centrale de centre (x_i,y_j). Notons que le sixième point, d'indices relatifs (1,1) par rapport à (x_i,y_j), aurait également pu avoir comme indices relatifs (-1,-1), (-1,1), ou (1,-1).

Les coordonnées des points (x_{i_l},y_{j_l}) dans le repère (P,ξ,η) sont notées (ξ_l,η_l) et sont calculées par (2.24). On définit enfin la notation $P^{(l)}$ $(1 \leq l \leq 6)$, désignant P^+ ou P^- suivant que $F(x_{i_l},y_{j_l}) > 0$ ou $F(x_{i_l},y_{j_l}) \leq 0$.

L'avancée en temps (2.58) s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1}-\boldsymbol{U}_{i,j}^{n}\right)-\frac{1}{\Delta x}\sum_{l=1}^{6}\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}\,\boldsymbol{U}_{i_l,j_l}^{n}=\boldsymbol{0}. \tag{2.60}$$

L'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}(x_i,y_j,t_n)$ du schéma (2.58) est obtenue en remplaçant les valeurs numériques dans (2.60) par les valeurs exactes aux points correspondants, soit

$$\boldsymbol{L}(x_i,y_j,t_n)=\boldsymbol{L}_1(x_i,y_j,t_n)-\boldsymbol{L}_2(x_i,y_j,t_n), \tag{2.61}$$

avec

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1(x_i,y_j,t_n)&=\frac{\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_{n+1})-\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)}{\Delta t},\\ \boldsymbol{L}_2(x_i,y_j,t_n)&=\frac{1}{\Delta x}\sum_{l=1}^{6}\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}\,\boldsymbol{U}(x_{i_l},y_{j_l},t_n).\end{aligned} \tag{2.62}$$

L'erreur locale est calculée dans le repère (P,ξ,η) ; en posant

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}=\boldsymbol{Q}_0^{-1}\,\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}\,\boldsymbol{Q}_0, \tag{2.63}$$

et compte-tenu des formules de changement de repère (2.28), on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1(x_i,y_j,t_n)&=\boldsymbol{Q}_0\,\frac{\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_{n+1})-\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)}{\Delta t},\\ \boldsymbol{L}_2(x_i,y_j,t_n)&=\frac{1}{\Delta x}\,\boldsymbol{Q}_0\sum_{l=1}^{6}\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_l,\eta_l,t_n).\end{aligned} \tag{2.64}$$

$\boldsymbol{L}_1$ est calculée en trois étapes : développement de Taylor en temps en (ξ_2,η_2,t_n) ; utilisation des lois de conservation (2.29) et (2.30) ; enfin, développement de Taylor en espace en $(P^{(2)},t_n)$. Pour simplifier la discussion ultérieure, on suppose que (x_i,y_j) appartient à Ω_0, soit $P^{(2)}=P^-$. D'où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1(x_i,y_j,t_n)&=\boldsymbol{Q}_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta t^2)\right)\\ &=\boldsymbol{Q}_0\left(-\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)-\boldsymbol{B}_0\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)\right.\\ &\qquad\left.+c_0^2\,\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta_2,t_n)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_2,\eta_2,t_n)\right)\right)+\boldsymbol{O}(\Delta t^2),\end{aligned} \tag{2.65}$$

soit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1(x_i,y_j,t_n)&=\boldsymbol{Q}_0\left(-\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t_n)-\boldsymbol{B}_0\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t_n)\right.\\ &\quad+\left(c^2\,\frac{\Delta t}{2}-\xi_2\,\boldsymbol{A}_0\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t_n)-(\eta_2\,\boldsymbol{A}_0+\xi_2\,\boldsymbol{B}_0)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n)\\ &\quad\left.+\left(c_0^2\,\frac{\Delta t}{2}-\eta_2\,\boldsymbol{B}_0\right)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\overline{\boldsymbol{U}}(P^-,t_n)\right)+\boldsymbol{O}(\Delta t^2).\end{aligned} \tag{2.66}$$

Comme en 1D, on a $\boldsymbol{O}(\Delta t^2) = \boldsymbol{O}(\Delta x^2)$, du fait de la condition CFL. $\boldsymbol{L}_2$ est calculée par développements de Taylor d'ordre deux de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi_l,\eta_l,t_n)$ en $(P^{(l)},t_n)$ $(1 \leq l \leq 6)$

(2.67)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_2(x_i,y_j,t_n) &= \frac{1}{\Delta x}\boldsymbol{Q}_0 \sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l} \left(\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) + \xi_l \frac{\partial}{\partial \xi}\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) + \eta_l \frac{\partial}{\partial \eta}\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\xi_l^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) + \xi_l\,\eta_l \frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) + \frac{1}{2}\eta_l^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\overline{\boldsymbol{U}}(P^{(l)},t_n) \right) \\ &\quad + \boldsymbol{O}(\Delta x^2).\end{aligned}$$

Finalement, l'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}(x_i,y_j,t_n)$ est déduite de (2.66) et (2.67). L'expression obtenue met en jeu les douze valeurs limites $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\overline{\boldsymbol{U}}(P^\pm,t_n)$ $(0 \leq \alpha \leq 2, 0 \leq \beta \leq \alpha)$. Pour réduire ce nombre à six valeurs limites, nous utilisons les conditions de saut (2.52).

Pour obtenir une erreur locale de troncature d'ordre deux, il suffit d'annuler les coefficients de $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\overline{\boldsymbol{U}}(P^\pm,t_n)$ $(0 \leq \alpha \leq 2, 0 \leq \beta \leq \alpha)$ dans l'expression obtenue. Après des manipulations algébriques, cela revient à imposer que les matrices $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}$ vérifient le système de six équations matricielles

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{1,l} = \boldsymbol{0}, && \sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{4,l} = \Delta x \left(c_0^2 \frac{\Delta t}{2} - \xi_2\,\boldsymbol{A}_0 \right), \\
&\sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{2,l} = -\Delta x \boldsymbol{A}_0, && \sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{5,l} = -\Delta x \left(\eta_2\,\boldsymbol{A}_0 + \xi_2\,\boldsymbol{B}_0 \right), \\
&\sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{3,l} = -\Delta x \boldsymbol{B}_0, && \sum_{l=1}^{6} \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\hat{\boldsymbol{Q}}_{6,l} = \Delta x \left(c_0^2 \frac{\Delta t}{2} - \eta_2\,\boldsymbol{B}_0 \right),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

où $\hat{\boldsymbol{Q}}_{k,l}$ sont des matrices 3×3 $(1 \leq k \leq 6, 1 \leq l \leq 6)$ données par

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{Q}}_{1,l} = \boldsymbol{I}_3, && \hat{\boldsymbol{Q}}_{4,l} = \frac{1}{2}\xi_l^2\,\boldsymbol{I}_3, \\
&\hat{\boldsymbol{Q}}_{2,l} = \xi_l\,\boldsymbol{I}_3, && \hat{\boldsymbol{Q}}_{5,l} = \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{I}_3, \\
&\hat{\boldsymbol{Q}}_{3,l} = \eta_l \boldsymbol{I}_3, && \hat{\boldsymbol{Q}}_{6,l} = \frac{1}{2}\eta_l^2\,\boldsymbol{I}_3,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

si $P^{(l)} = P^-$, et sont données par

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{Q}}_{1,l} &= \boldsymbol{M}(1,1) + \xi_l\,\boldsymbol{M}(2,1) + \eta_l\,\boldsymbol{M}(3,1) + \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,1) + \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{M}(5,1) + \frac{1}{2}\,\eta_l^2\,\boldsymbol{M}(6,1),\\
\hat{\boldsymbol{Q}}_{2,l} &= \xi_l\,\boldsymbol{M}(2,2) + \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,2) + \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{M}(5,2) + \frac{1}{2}\,\eta_l^2\,\boldsymbol{M}(6,2),\\
\hat{\boldsymbol{Q}}_{3,l} &= \xi_l\,\boldsymbol{M}(2,3) + \eta_l\,\boldsymbol{M}(3,3) + \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,3) + \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{M}(5,3) + \frac{1}{2}\,\eta_l^2\,\boldsymbol{M}(6,3),\\
\hat{\boldsymbol{Q}}_{4,l} &= \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,4),\\
\hat{\boldsymbol{Q}}_{5,l} &= \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,5) + \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{M}(5,5),\\
\hat{\boldsymbol{Q}}_{6,l} &= \frac{1}{2}\,\xi_l^2\,\boldsymbol{M}(4,6) + \xi_l\,\eta_l\,\boldsymbol{M}(5,6) + \frac{1}{2}\,\eta_l^2\,\boldsymbol{M}(6,6),
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

si $P^{(l)} = P^+$. $\boldsymbol{I}_3$ est la matrice identité d'ordre trois. Le système (2.68) s'écrit alors

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}\,\hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{F}, \tag{2.71}$$

avec $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$ la matrice bloc 1×6 dont chaque bloc est la matrice $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}$, de taille 3×3 . D'autre part, $\hat{\boldsymbol{Q}}$ est la matrice bloc 6×6 dont chaque bloc 3×3 est la matrice

$$\hat{\boldsymbol{Q}}(k,l) = \hat{\boldsymbol{Q}}_{l,k}, \tag{2.72}$$

et $\boldsymbol{F}$ est la matrice bloc 1×6 dont les blocs 3×3 sont les seconds membres de (2.68). Par transposition de (2.71), on se ramène au système matriciel

$${}^T\hat{\boldsymbol{Q}}\;{}^T\overline{\boldsymbol{\Gamma}} = {}^T\boldsymbol{F}. \tag{2.73}$$

Zhang ne démontre pas l'inversibilité de (2.73) : en pratique, nous n'avons cependant jamais obtenu de système singulier. On peut montrer que résoudre (2.73) équivaut à résoudre trois systèmes linéaires scalaires 18×18. Une fois les matrices $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}$ calculées, il reste enfin à revenir aux matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l}$ utilisées pour l'avancée en temps (2.58). Pour cela, on déduit de (2.63)

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,l} = \boldsymbol{Q}_0\,\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}\,\boldsymbol{Q}_0^{-1}. \tag{2.74}$$

Propriétés. Les systèmes (2.73) sont résolus numériquement par décomposition LU. Comme en 1D, ce calcul peut être effectué une seule fois, en prétraitement. A chaque pas de temps, le coût informatique supplémentaire est négligeable devant celui du schéma utilisé aux points réguliers : l'analyse de complexité est proposée par Zhang, mais non reproduite ici.

D'autre part, l'IIM d'ordre deux introduit de la dispersion numérique aux points irréguliers, comme en 1D. Pour s'en rendre compte, on peut en particulier considérer le cas limite de milieux identiques de part et d'autre de l'interface ($\rho = \rho_0 = \rho_1$, $c = c_0 = c_1$). Après des manipulations

algébriques, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,1} = c^2\,\frac{\Delta\,t}{2\,\Delta\,x}\,\boldsymbol{I}_3 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{A}, && \boldsymbol{\Gamma}_{i,j,4} = c^2\,\frac{\Delta\,t}{2\,\Delta\,x}\,\boldsymbol{I}_3 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{B},\\
&\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,2} = -2\,c^2\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\,\boldsymbol{I}_3, && \boldsymbol{\Gamma}_{i,j,5} = c^2\,\frac{\Delta\,t}{2\,\Delta\,x}\,\boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{B},\\
&\boldsymbol{\Gamma}_{i,j,3} = c^2\,\frac{\Delta\,t}{2\,\Delta\,x}\,\boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{A}, && \boldsymbol{\Gamma}_{i,j,6} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

L'avancée en temps (2.58) revient alors, au point (x_i,y_j), au schéma de Lax-Wendroff 2D (2.23), de nature dispersive.

Zhang ne propose pas de théorie de stabilité pour l'IIM 2D et ne signale pas de problèmes particuliers à ce sujet. Nous avons cependant observé l'apparition d'instabilités numériques pour des contrastes modérés des paramètres physiques, comme

$$
(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1200 \text{ kg/m}^3, c_0 = 1900 \text{ m/s}, \\ \rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3, c_1 = 1500 \text{ m/s}, \end{cases}
\tag{2.76}
$$

même en réalisant les calculs en double précision, ce qui limite sérieusement l'utilité de la méthode. Nous ne proposons pas de théorie pour expliquer ces instabilités, mais suggérons une origine possible du problème.

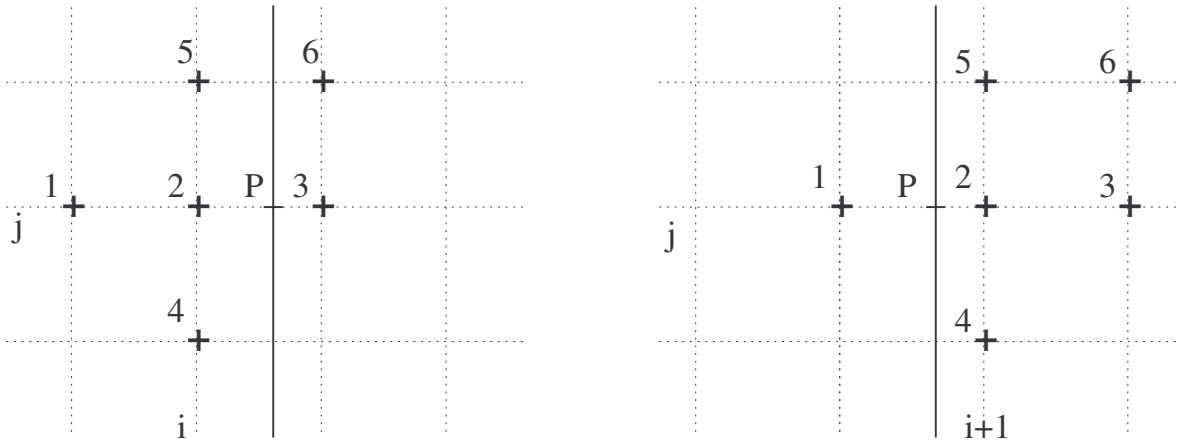

FIG. 2.3 – *Points utilisés par l'IIM en (x_i,y_j) (à gauche) et en (x_{i+1},y_j) (à droite). Les points utilisés pour l'avancée en temps dans les deux cas sont repérés par des croix et numérotés.*

Considérons pour cela une interface plane verticale, et l'application de l'IIM au point irrégulier (x_i,y_j), puis au point irrégulier (x_{i+1},y_j) (figure 2.3). Dans les deux cas, le point de projection P est le même. Le calcul des matrices $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i,j,l}$ et $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{i+1,j,l}$ $(1 \leq l \leq 6)$ revient implicitement à estimer les valeurs limites $\frac{\partial^\alpha}{\partial\,\xi^{\alpha-\beta}\,\partial\,\eta^\beta}\,\boldsymbol{U}(P^-,t_n)$ et $\frac{\partial^\alpha}{\partial\,\xi^{\alpha-\beta}\,\partial\,\eta^\beta}\,\boldsymbol{U}(P^+,t_n)$ $(0 \leq \alpha \leq 2, 0 \leq \beta \leq \alpha)$. Les ensembles de points utilisés dans les deux cas (numérotés de 1 à 6 en figure 2.3) étant différents, les valeurs limites obtenues en P^- (et en P^+) sont différentes. Le problème numérique conduit ainsi à deux valeurs différentes de $\overline{\boldsymbol{U}}(\xi,\eta,t)$ et de ses dérivées spatiales au même point, ce qui est évidemment contradictoire avec le problème continu.

2.3.6 Critique de l'IIM 2D

IIM et Lax-Wendroff. Comme en 1D, le couplage de l'IIM d'ordre deux et du schéma de Lax-Wendroff est idéal (sauf en ce qui concerne la stabilité, discutée plus loin), les propriétés numériques étant les mêmes en tout point du domaine, régulier ou irrégulier. L'étude de cas tests confirme effectivement une convergence d'ordre deux. De plus, l'IIM est une procédure locale à chaque point irrégulier, et est ainsi aisément parallélisable.

Schémas d'ordre élevé. Les limitations de l'IIM soulevées en 1D (section 2.2.6) sont maintenues en 2D. Tout d'abord, l'écriture de l'IIM nécessite de nombreuses manipulations algébriques, et sa complexité croît avec l'ordre du schéma utilisé aux points réguliers. D'autre part, Zhang ne propose pas un algorithme général, valable quel que soit le schéma utilisé loin des interfaces, ce qui est dommage. Enfin, les propriétés numériques de ce dernier schéma et de l'IIM sont généralement différentes. Pour un schéma d'ordre deux différent du schéma de Lax-Wendroff, le cas limite de deux milieux identiques de part et d'autre d'une interface est particulièrement éloquent : en effet, le schéma aux points réguliers et le schémas aux points irréguliers sont différents, ce qui n'a pas lieu d'être en milieu homogène.

Stabilité. Les faibles contrastes tenus par l'IIM en 2D représentent un nouveau défaut par rapport au cas 1D, particulièrement limitatif. Un large spectre d'applications se trouve ainsi hors de portée de l'IIM (ex : interface eau/air) ; pour la petite histoire, ce dernier point a motivé notre recherche de la nouvelle méthode d'interface présentée au cours de cette étude. Pour la construction de cette dernière méthode, nous avons alors veillé à la chose suivante : si un même point P sur l'interface sert pour la méthode d'interface en deux points différents (ex : (x_i,y_j) et (x_{i+1},y_j) en figure 2.3), on se basera dans les deux cas sur les mêmes ensembles de points (au contraire des cas présentés en figure 2.3). Cela permet d'obtenir, dans les deux cas, les mêmes estimations des valeurs limites de $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n)$; nous soupçonnons en effet le non-respect de ce critère d'unicité d'être à l'origine des instabilités observées avec l'IIM.

Asymétrie. Pour assurer une erreur locale de troncature d'ordre deux, l'IIM utilise autant de points de calcul que de composantes de $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n)$ $(0 \leq \alpha \leq 2, 0 \leq \alpha \leq \beta)$, soit six points. Le sixième point (voir tableau 2.3.5)) introduit une asymétrie qui n'a pas lieu d'être. Dans le même ordre d'idées, suivant la géométrie de l'interface, il se peut que l'IIM en un point d'un côté de l'interface n'utilise qu'un seul point de l'autre côté de l'interface (voir le cas du point (x_{i+1},y_j) en figure 2.3). La prise en compte des conditions aux interfaces ne provient alors que d'un seul point sur les six utilisés, ce qui est peu. Nous éliminerons ces deux faiblesses en nous basant sur un ensemble de points régulièrement répartis des deux côtés de l'interface, en nombre supérieur au nombre de composantes de $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^{\alpha-\beta}\,\partial \eta^\beta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n)$.

Repère local. Par ailleurs, nous réfutons l'utilité du passage dans un repère local tangent à l'interface pour l'écriture des conditions de saut. Ce passage dans un repère local, qui est une constante dans l'histoire des méthodes d'interface (voire par exemple [50, 83]), est ici inutile : il introduit des calculs supplémentaires (2.63), (2.74), est une source potentielle d'erreurs (écriture de la représentation paramétrique de l'interface dans le nouveau repère via (2.24)), et a été à l'origine des erreurs de calcul de Zhang. Il a seulement pour avantage de permettre l'écriture analytique les valeurs limites de la solution et de ses dérivées spatiales, d'un côté de l'interface, en fonction des quantités de même nature, de l'autre côté de l'interface, à partir des conditions de saut. En pratique, on peut se dispenser de cette écriture analytique (2.52), et tirer directement

profit des conditions de saut (2.31)-(2.51). Celles-ci peuvent être écrites directement dans le repère global (O,x,y). Nous expliquons au chapitre 6 la procédure à suivre.

Singularités géométriques. Nous ne sommes pas d'accord avec Zhang lorsqu'il affirme traiter avec succès le cas d'interfaces non régulières, comme le cas d'une lentille acoustique (figures 4-11 et 4-12 en pages 58 et 59 de [85]). En effet, les points de projection sont toujours choisis en des points de l'interface où celle-ci est suffisamment régulière. Du coup, les singularités du champ acoustique découlant des singularités géométriques ne sont pas prises en compte, ce dont Zhang ne s'aperçoit pas puisqu'il ne compare pas ses résultats à des solutions analytiques dans le cas d'interfaces singulières. La prise en compte des singularités géométriques repose sur des techniques de régularisation, comme celles présentées par [57] dans le cas d'équations elliptiques. Durant ce travail, nous n'aborderons pas de toute façon ce problème délicat, et nous considérerons toujours des interfaces suffisamment régulières.

Conditions aux interfaces. Nos dernières critiques concernent l'écriture de la condition de saut supplémentaire (2.34) et l'utilisation des conditions de compatibilité. Concernant le premier point, il n'est pas trivial de trouver une telle condition (voir à ce sujet le cas de l'élastodynamique dans [86]), ce qui est à mettre au crédit de Zhang. Par ailleurs, nous précisons au chapitre 6 qu'une telle condition n'existe pas toujours : en particulier, le cas d'une interface fluide-solide 2D et 3D ne conduit à aucune condition de saut supplémentaire, bloquant l'application de l'IIM à de telles configurations. Concernant le second point, le passage des relations (2.49) et (2.50) aux conditions de saut (2.51) est limitatif et conduit à une perte d'information. En effet, la nullité du saut d'une fonction n'implique pas que cette fonction soit nulle. Nous éliminerons ces deux faiblesses de l'IIM dans la méthode d'interface que nous construisons : pour cela, nous nous dispensons de la condition de saut supplémentaire (et des conditions qui en sont dérivées), et nous utilisons pleinement les conditions de compatibilité (2.49) et (2.50) des deux côtés de l'interface.

2.4 Explicit Jump Immersed Interface Method 1D

2.4.1 Introduction

Wiegmann a développé l'EJIIM dans le cas d'équations elliptiques [80, 83]. Nous présentons ici une courte application de l'EJIIM à la propagation 1D des ondes acoustiques. Le but de cette présentation est de montrer une qualité particulière de l'EJIIM : à la différence de l'IIM, l'EJIIM est construite à partir des schémas utilisés aux points réguliers. En particulier, les deux schémas coïncident dans le cas limite de milieux identiques. Nous exploiterons cette idée dans la construction de la nouvelle méthode d'interface.

Les lois de conservation, conditions de saut, et schéma numérique (i.e. le schéma de Lax-Wendroff) sont les mêmes que pour l'IIM 1D, et ne sont donc pas répétés ici. Comme vu précédemment, l'IIM consiste à écrire un nouveau schéma aux points irréguliers, schéma a priori sans rapport avec celui utilisé aux points réguliers ; au lieu de cela, l'EJIIM ajoute à ce schéma des corrections dépendant explicitement du saut de la solution exacte à l'interface.

2.4.2 Méthode d'interface

Différences finies corrigées. Les expressions usuelles des différences finies centrées ne sont plus valables aux points irréguliers x_J et x_{J+1}, à cause de l'irrégularité de $\boldsymbol{U}(x,t)$ en $\alpha \in [x_J,x_{J+1}[$. Considérons le point x_J ; en ce point, Wiegmann démontre les formules

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) &= \frac{\boldsymbol{U}(x_{J+1},t_n)-\boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n)}{2\,\Delta x} \\
&\quad -\frac{1}{2\,\Delta x}\sum_{m=0}^{2}\frac{((1-\theta)\,\Delta x)^m}{m\,!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha,t_n)\right]+\boldsymbol{O}(\Delta x^2), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) &= \frac{\boldsymbol{U}(x_{J+1},t_n)-2\,\boldsymbol{U}(x_J,t_n)+\boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n)}{\Delta x} \\
&\quad -\frac{1}{\Delta x^2}\sum_{m=0}^{3}\frac{((1-\theta)\,\Delta x)^m}{m\,!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha,t_n)\right]+\boldsymbol{O}(\Delta x^2),
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

avec $\theta = (\alpha - x_J)/\Delta x$.

Conditions de saut. A partir des conditions de saut (2.5), on obtient facilement une écriture décentrée à gauche des sauts (2.77)

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{U}(\alpha,t)] = \boldsymbol{0}, \\
&\left[\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha,t)\right] = (\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{I}_2)\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t), \\
&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha,t)\right] = (\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{I}_2)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t).
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

Interpolations décentrées à gauche. Les valeurs limites $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t)$ $(1 \le m \le 2)$ intervenant dans (2.78) sont estimées au second ordre près à partir des valeurs de $\boldsymbol{U}(x_i,t)$ $(J-2 \le i \le J)$. Pour cela, on écrit les développements de Taylor

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_{J-1},t)+(\alpha-x_{J-1})\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_{J-1},t)+\boldsymbol{O}(\Delta x^2), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_{J-1},t)+\boldsymbol{O}(\Delta x).
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Les dérivées spatiales en x_{J-1} sont estimées par les classiques différences finies centrées d'ordre deux en x_{J-1}. On déduit alors de ces dernières et de (2.79) les estimations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) &= \frac{(1+2\,\theta)\,\boldsymbol{U}(x_{J-2},t)-4\,(1+\theta)\,\boldsymbol{U}(x_{J-1},t)+(3+2\,\theta)\boldsymbol{U}(x_J,t)}{2\,\Delta x}+\boldsymbol{O}(\Delta x^2), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) &= \frac{\boldsymbol{U}(x_{J-2},t)-2\,\boldsymbol{U}(x_{J-1},t)+\boldsymbol{U}(x_J,t)}{\Delta x^2}+\boldsymbol{O}(\Delta x).
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

Lax-Wendroff et EJIIM. En tout point x_i, le schéma de Lax-Wendroff découle du développement de Taylor d'ordre deux de $\boldsymbol{U}(x_i,t_{n+1})$ en (x_i,t_n)

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_{n+1}) = \boldsymbol{U}(x_i,t_n) + \Delta\, t\, \frac{\partial}{\partial\, t}\boldsymbol{U}(x_i,t_n) + \frac{1}{2}\,\Delta\, t^2\, \frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\boldsymbol{U}(x_i,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\, t^3). \tag{2.81}$$

Les dérivées temporelles dans (2.81) sont remplacées par des dérivées spatiales à partir de (2.3)

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_{n+1}) = \boldsymbol{U}(x_i,t_n) - \Delta\, t\, \boldsymbol{A}\, \frac{\partial}{\partial\, x}\boldsymbol{U}(x_i,t_n) + \frac{1}{2}\,(c\,\Delta\, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial\, x^2}\boldsymbol{U}(x_i,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\, t^3). \tag{2.82}$$

Aux points réguliers, les dérivées spatiales dans (2.82) sont estimées par des différences finies centrées d'ordre deux (soit les formules (2.77) avec des sauts nuls). Les valeurs exactes de la solution sont alors remplacées par les valeurs numériques, et le vecteur d'erreur est éliminé, conduisant au schéma de Lax-Wendroff (2.7). Au point irrégulier x_J, les dérivées spatiales dans (2.82) sont estimées par les différences finies corrigées (2.77). Les sauts des dérivées spatiales de la solution sont alors estimés via (2.78) et (2.80). On en déduit le schéma de Lax-Wendroff couplé à l'EJIIM

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{U}_J^{n+1} = \boldsymbol{U}_J^n - \frac{\Delta\, t}{2\,\Delta\, x}\boldsymbol{A}_0\left(\boldsymbol{U}_{J+1}^n - \boldsymbol{U}_{J-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_0\,\Delta\, t}{\Delta\, x}\right)^2\left(\boldsymbol{U}_{J+1}^n - 2\,\boldsymbol{U}_J^n + \boldsymbol{U}_{J-1}^n\right) \\ &+\left(\frac{\Delta\, t}{2\,\Delta\, x}\,\boldsymbol{A}_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{c_0\,\Delta\, t}{\Delta\, x}\right)^2\right)\left(\frac{1-\theta}{2}(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{I}_2)\,(1+2\,\theta)\,\boldsymbol{U}_{J-2}^n - 4\,(1+\theta)\,\boldsymbol{U}_{J-1}^n\right. \\ &\left.+(3+2\,\theta)\,\boldsymbol{U}_J^n) + \frac{(1-\theta)^2}{2}(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{I}_2)\left(\boldsymbol{U}_{J-2}^n - 2\,\boldsymbol{U}_{J-1}^n + \boldsymbol{U}_J^n\right)\right). \end{aligned}} \tag{2.83}$$

On peut suivre une démarche analogue au point irrégulier x_{J+1}.

Propriétés. L'EJIIM ne nécessite pas d'inversion de système linéaire (en 1D) et conserve un schéma explicite en temps : à l'instar de l'IIM, le coût additionnel en temps de calcul est négligeable. D'autre part, par principe de construction même, l'EJIIM revient au schéma utilisé aux points réguliers dans le cas limite d'un milieu homogène. Enfin, nous avons observé une stabilité moins importante qu'avec l'IIM en 1D : des instabilités numériques apparaissent pour des contrastes moyens des paramètres physiques (ex : rapport 1 à 4 d'impédances).

2.4.3 Critique de l'EJIIM 1D

Stabilité. La faible stabilité de l'EJIIM en 1D est une sérieuse limitation, et nous a détourné de cette méthode. Nous soupçonnons l'utilisation d'interpolations décentrées en espace comme étant à l'origine des instabilités. En effet, une version préliminaire et décentrée de la méthode d'interface que nous présentons par la suite souffrait de la même limitation, pour les mêmes contrastes de paramètres physiques. En conséquence de quoi nous utiliserons des interpolations centrées, basées sur autant de points des deux côtés de l'interface en 1D.

Schémas d'ordre élevé. D'autre part, la complexité de l'EJIIM croît avec celle du schéma utilisé aux points réguliers. Elle devient finalement rédhibitoire pour un schéma d'ordre élevé.

De plus, si l'EJIIM s'adapte bien à un schéma de différences finies linéaire comme le schéma de Lax-Wendroff, son application à des schémas non linéaires (comme le schéma de volumes finis avec limiteur de flux ou le schéma WENO 5) n'est pas triviale, si tant est même qu'elle soit possible.

2.5 Vers une ultime méthode d'interface !

Pour conclure ce chapitre, nous résumons nos critères pour une méthode d'interface. Celle-ci doit s'adapter automatiquement à tout type de schéma numérique. Elle doit être robuste face à des contrastes importants des paramètres physiques, quelle que soit la position de l'interface dans le maillage cartésien. De plus, elle doit permettre de conserver, aux points irréguliers, les propriétés numériques du schéma utilisé aux points réguliers. En particulier, on souhaite retrouver ce dernier schéma aux points irréguliers dans le cas limite du milieu homogène. Enfin, une méthode d'interface doit pouvoir s'accommoder uniquement des conditions de saut naturelles du problème étudié, ainsi que des conditions de compatibilité dépendant des milieux de part et d'autre des interfaces.

La méthode que nous proposons dans la suite réalise ces différents objectifs. Pour cela, elle opère en trois parties, modulaires. La première partie de l'algorithme consiste à déduire, des conditions de saut naturelles, les conditions vérifiées par les dérivées spatiales de la solution exacte jusqu'à un ordre donné. Cet ordre dépend de l'ordre de convergence du schéma utilisé aux points réguliers. Ce calcul peut facilement être réalisé, à des ordres élevés, avec des langages symboliques comme MAPLE. La deuxième partie de l'algorithme dépend de l'ordre du schéma choisi, ainsi que du nombre de points sur lequel ce schéma repose, mais pas de son expression. La troisième partie de l'algorithme dépend uniquement de l'expression de ce schéma : celui-ci est alors utilisé aux points irréguliers, s'appliquant en ces points à des valeurs numériques modifiées, déduites des deux premières parties.

Ce faisant, nous pensons optimiser ce que doit être une méthode d'interface, au moins dans le cas des systèmes hyperboliques linéaires de l'acoustique et de l'élastodynamique, et de schémas numériques explicites en temps. Le numéricien choisit un schéma pour ses qualités propres en milieu homogène : lorsque le schéma est couplé à la méthode d'interface que nous proposons, ces qualités sont conservées au voisinage des interfaces, et ainsi en tout point du domaine. En l'absence de méthode d'interface, les artefacts numériques se propagent et dégradent l'ensemble de la solution. Dans un problème de propagation d'ondes, tout se propage, même les défauts... De plus, la quantité de travail nécessaire pour écrire et programmer un schéma en milieu homogène n'est ainsi pas perdue en présence d'une interface.

Chapitre 3

Lois de conservation

Dans ce chapitre, nous écrivons les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique sous forme de systèmes hyperboliques linéaires du premier ordre. Ces systèmes, vérifiés en dehors des interfaces, sont ensuite dérivés plusieurs fois par rapport au temps : cela permet de relier les dérivées temporelles et les dérivées spatiales successives de la solution exacte. Les relations obtenues sont utilisées aux chapitres 5 et 6 pour écrire les conditions de saut vérifiées, aux interfaces, par la solution exacte et par ses dérivées spatiales.

3.1 Objet du chapitre

Les équations décrivant, dans le domaine temporel, la propagation des ondes dans les fluides ou les solides peuvent s'écrire de plusieurs façons. La première écriture, déduite directement de la linéarisation des lois de conservation de la mécanique, revient à un système hyperbolique linéaire du premier ordre. Ce système porte simultanément sur toutes les composantes de la solution (exemple : les deux composantes de la vitesse élastique et les trois composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques, pour un solide élastique isotrope 2D). Dans la littérature, cette écriture est appelée "formulation mixte", ou "formulation vitesse-contrainte". La deuxième écriture, beaucoup plus familière en acoustique, découle de la précédente. Elle revient à des équations du second ordre, de type équations d'ondes. Ces équations aux dérivées partielles portent seulement sur certaines composantes de la solution (exemple : les deux composantes du déplacement élastique, pour un solide élastique isotrope 2D). Les deux formulations sont évidemment équivalentes.

Nous choisissons ici le premier type de formulation, sous forme d'un système hyperbolique de lois de conservation. Nous avons opté pour cette formulation pour plusieurs raisons. La première raison découle d'une classe de schémas numériques adaptés à sa résolution, et dont les qualités sont particulièrement appréciables pour des problèmes de propagation d'ondes. Ces schémas, présentés au chapitre 4, sont construits pour éliminer la dispersion numérique, classique dans le cas de schémas linéaires pour les équations d'onde [16]. Une autre raison de ce choix découle de l'écriture des conditions de saut aux interfaces, objet des chapitres 5 et 6. Même si le lecteur souhaite greffer la méthode d'interface à un schéma adapté à l'équation d'ondes vérifiée par la

pression acoustique, ce qui est possible, il devra étudier les lois de conservation vérifiées à la fois par la pression acoustique et par la vitesse acoustique, ainsi que par leurs dérivées spatiales successives.

Au cours de ce chapitre, nous écrivons les systèmes hyperboliques de lois de conservation, du premier ordre en temps et en espace, dans trois configurations : fluide 1D (équivalent au cas solide 1D), fluide 2D, solide 2D. Par souci de concision, nous désignons souvent par fluide et solide un fluide parfait au repos et un solide élastique isotrope. Dans chaque configuration, nous calculons les systèmes vérifiés aux ordres supérieurs de dérivation, en temps et en espace. Ces systèmes, reliant les dérivées temporelles et les dérivées spatiales de la solution exacte à tout ordre, sont essentiels pour le calcul des conditions vérifiées aux interfaces par la solution. Ce dernier calcul fait l'objet des chapitres 5 et 6. Nous calculons aussi les conditions reliant entre elles les composantes des dérivées spatiales de la solution exacte, en 2D. Ces conditions, appelées *conditions de milieu*, sont utiles aux chapitres 6 et 8.

Notons que la solution exacte sera toujours supposée suffisamment régulière, de sorte que ses dérivées successives ont un sens. Tout au long de l'étude, cette condition de régularité sera supposée vérifiée en dehors des interfaces.

3.2 Fluide 1D - Solide 1D

Ordre 1. La linéarisation des équations de la mécanique 1D dans un fluide parfait au repos conduit au système

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où v est la vitesse acoustique, et p est la pression acoustique. La masse volumique ρ et la célérité des ondes acoustiques c sont ici supposées constantes. En posant

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

nous écrivons (3.2) sous forme d'un système hyperbolique linéaire du premier ordre

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.} \tag{3.3}$$

Le système (3.3) décrit aussi la propagation des petites perturbations dans un solide élastique 1D. Il suffit pour cela de remplacer p par $-\sigma$ dans (3.1), où σ est la contrainte élastique, et ainsi de prendre l'opposé de $\boldsymbol{A}$ (3.2).

Ordre n. Nous calculons les équations vérifiées par les dérivées temporelles successives $\frac{\partial^m}{\partial t^m}\boldsymbol{U}(x,t)$ ($m \geq 2$). Pour $m = 2$, on déduit de (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}\right) \\ &= -\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} \\ &= -\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les paramètres physiques étant supposés constants, la matrice $\boldsymbol{A}$ est constante. On déduit alors de (3.4)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}, \tag{3.5}$$

soit, compte-tenu de $\boldsymbol{A}^2 = c^2\,\boldsymbol{I}_2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}, \tag{3.6}$$

qui revient à deux équations d'ondes classiques du second-ordre découplées, pour v et pour p. En suivant une démarche analogue, on peut facilement montrer par récurrence les relations aux ordres supérieurs. C'est l'objet du prochain résultat.

Resultat 1 *En tout point du domaine, les dérivées temporelles et les dérivées spatiales de* $\boldsymbol{U}(x,t)$ *sont reliées par*

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}\boldsymbol{U} = c^{2n}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\boldsymbol{U}, \qquad n \geq 1 \\ &\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}}\boldsymbol{U} = -c^{2n}\boldsymbol{A}\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\boldsymbol{U}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}} \tag{3.7}$$

3.3 Fluide 2D

Ordre 1. Soit (O,x,y) un repère orthonormé. La linéarisation des équations de la mécanique 2D dans un fluide parfait au repos conduit au système

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

où v_1 et v_2 sont les composantes de la vitesse acoustique $\boldsymbol{v}$ dans le repère (O,x,y), et p est la pression acoustique. La masse volumique ρ et la célérité des ondes acoustiques c sont supposées constantes. En posant

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho\, c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, c^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

nous écrivons (3.8) sous forme du système hyperbolique linéaire du premier ordre

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\, t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial\, x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial\, y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.} \tag{3.10}$$

Ordre n. Par dérivation de (3.10) par rapport à t, et en suivant la démarche utilisée en 1D, on obtient facilement la relation suivante

$$\boxed{\frac{\partial^n}{\partial\, t^n}\boldsymbol{U} = (-1)^n \left(\boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial\, x} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial\, y}\right)^n \boldsymbol{U}, \qquad n \geq 0.} \tag{3.11}$$

Les opérateur $\frac{\partial}{\partial\, x}$ et $\frac{\partial}{\partial\, y}$ commutent entre eux et avec $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$; par contre, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne commutent pas, ce qui empêche d'appliquer la formule de Leibniz pour écrire de façon simple (3.11).

Dans le cas d'un fluide parfait, on peut toutefois simplifier (3.11). Considérons à cet effet l'écriture de (3.11) pour $n = 2$, soit

$$\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^2\frac{\partial^2}{\partial\, x^2}\boldsymbol{U} + (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA})\frac{\partial^2}{\partial\, x\,\partial\, y}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}^2\frac{\partial^2}{\partial\, y^2}\boldsymbol{U}. \tag{3.12}$$

A partir des deux premières équations de (3.8), il est facile de montrer le résultat classique selon lequel $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}$ ne varie pas au cours du temps. En dehors des sources acoustiques, le rotationnel de la vitesse acoustique est constamment nul, ce qui s'écrit

$$\frac{\partial\, v_2}{\partial\, x} = \frac{\partial\, v_1}{\partial\, y}. \tag{3.13}$$

Par dérivation de (3.13) par rapport à x et par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\, v_2}{\partial\, x\,\partial\, y} &= \frac{\partial^2\, v_1}{\partial\, y^2}, \\ \frac{\partial^2\, v_1}{\partial\, x\,\partial\, y} &= \frac{\partial^2\, v_2}{\partial\, x^2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Le calcul de $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$ à partir de (3.9) et les relations (3.14) permettent alors de simplifier (3.12) et ainsi d'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\boldsymbol{U} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\, x^2}\boldsymbol{U} + \frac{\partial^2}{\partial\, y^2}\boldsymbol{U}\right), \tag{3.15}$$

qui revient à trois équations d'ondes scalaires du second-ordre en milieu homogène, découplées et vérifiées par v_1, v_2, et p. Nous déduisons de ce qui précède les relations vérifiées aux ordres supérieurs de dérivation.

Resultat 2 *Dans un fluide parfait au repos, en dehors des sources acoustiques, les dérivées temporelles et les dérivées spatiales de* $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ *sont reliées en tout point du domaine par*
(3.16)

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^{2\,n}}{\partial\, t^{2\,n}}\boldsymbol{U} = c^{2\,n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{\partial^{2\,n}}{\partial\, x^{2\,n-2\,k}\,\partial\, y^{2\,k}}\boldsymbol{U}, \qquad n \geq 1 \\ &\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\, t^{2\,n+1}}\boldsymbol{U} = -c^{2\,n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(\boldsymbol{A}\,\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\, x^{2\,n-2\,k+1}\,\partial\, y^{2\,k}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\, x^{2\,n-2\,k}\,\partial\, y^{2\,k+1}}\boldsymbol{U}\right), \qquad n \geq 0. \end{aligned}}$$

La démonstration par récurrence, purement technique et triviale, est omise ici. Les coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ désignent les coefficients de la formule du binôme.

3.4 Solide 2D

Ordre 1. Dans l'hypothèse des petites perturbations, la linéarisation des équations de la mécanique 2D dans un solide élastique isotrope conduit à [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, v_1}{\partial\, t} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, x} + \frac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, y}\right), \\ \frac{\partial\, v_2}{\partial\, t} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, x} + \frac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, y}\right), \\ \frac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, t} &= (\lambda + 2\,\mu)\frac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + \lambda\frac{\partial\, v_2}{\partial\, y}, \\ \frac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, t} &= \mu\left(\frac{\partial\, v_1}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v_2}{\partial\, x}\right), \\ \frac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, t} &= \lambda\frac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + (\lambda + 2\,\mu)\frac{\partial\, v_2}{\partial\, y}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où v_1 et v_2 sont les composantes de la vitesse acoustique $\boldsymbol{v}$, et σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} sont les composantes indépendantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans le repère (O,x,y). La masse volumique ρ et les

coefficients de Lamé λ et μ sont supposés constants. En posant

(3.18)
$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nous écrivons (3.17) sous forme du système hyperbolique linéaire du premier ordre

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\, t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial\, x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial\, y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.} \tag{3.19}$$

On rappelle que la célérité c_p des ondes de compression et la célérité c_s des ondes de cisaillement s'écrivent

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{3.20}$$

Pour la suite de l'étude (en particulier le chapitre 4, traitant des schémas numériques), nous calculons et stockons ici les matrices

(3.21)
$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} c_p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_p^2 - 2\,c_s^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} c_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p^2 - 2\,c_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & c_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & c_p^2 - c_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_p^2 - c_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(c_p^2 - c_s^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & c_s^2 & 0 & c_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(c_p^2 - c_s^2\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ordre n. L'expression (3.11) s'applique aussi dans le cas solide. Par contre, on ne peut pas simplifier cette expression, comme dans le cas fluide. Pour la suite, on explicite ici les dérivées

temporelles pour $n = 2$: de (3.12) et de (**??**), on déduit les relations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= c_p^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \left(c_p^2 - c_s^2\right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \, \partial y} + c_s^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= c_s^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \left(c_p^2 - c_s^2\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \, \partial y} + c_p^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial t^2} &= c_p^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + 2\left(c_p^2 - c_s^2\right) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \, \partial y} + \left(c_p^2 - 2\, c_s^2\right) \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial t^2} &= c_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x \, \partial y} + c_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x \, \partial y} + c_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial t^2} &= \left(c_p^2 - 2\, c_s^2\right) \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + 2\left(c_p^2 - c_s^2\right) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \, \partial y} + c_p^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

3.5 Conditions de milieu

Notations. Dans cette section, nous introduisons des notations utiles pour la suite de l'étude. Nous présentons aussi deux résultats reliant entre elles les composantes des dérivées spatiales de la solution exacte, dans un fluide ou dans un solide. Tout d'abord, nous définissons l'entier d et les variables U_d désignant les composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, en écrivant $\boldsymbol{U}(x,y,t) = {}^T(U_1,...,U_d)$. La solution exacte s'écrit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(x,y,t) &= {}^T(v_1,v_2,p) \quad \text{pour un fluide,} \\
\boldsymbol{U}(x,y,t) &= {}^T(v_1,v_2,\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22}) \quad \text{pour un solide,}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

soit $d = 3$ pour un fluide et $d = 5$ pour un solide. Pour écrire de façon simple et ordonnée toutes les composantes des dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ jusqu'à l'ordre k, nous notons alors

$$
\boldsymbol{U_k}(x,y,t) = {}^T\left(U_1,...,U_d,...,\frac{\partial^i}{\partial x^{i-j} \partial y^j} U_1,...,\frac{\partial^i}{\partial x^{i-j} \, \partial y^j} U_d,...,\frac{\partial^k}{\partial y^k} U_1,...,\frac{\partial^k}{\partial y^k} U_d\right). \tag{3.24}
$$

Les composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ sont repérées par l'application *rang*, notée rg,

$$
(i,j,l) \longmapsto n = \text{ rg } (i,j,l) \quad / \quad \boldsymbol{U_k}[n] = \frac{\partial^i}{\partial x^{i-j} \, \partial y^j} U_l, \tag{3.25}
$$

avec $0 \leq j \leq i \leq k$, et $1 \leq l \leq d$. La valeur du rang est donnée dans le lemme 1.

Lemme 1 *Pour* $0 \leq j \leq i$, *et* $1 \leq l \leq d$,

$$
rg\ (i,j,l) = \frac{d\, i\, (i+1)}{2} + d\, j + l. \tag{3.26}
$$

Démonstration. A partir de la définition de d et du rang (3.25), nous vérifions

$$\text{rg}\ (i,j,l) = \text{rg}\ (i,j,1) + l - 1,$$

$$\text{rg}\ (i,j,1) = \text{rg}\ (i,0,1) + d\,j, \tag{3.27}$$

$$\text{rg}\ (i,0,1) = 1 + \sum_{m=1}^{i} d\,m = 1 + \frac{d\,i\,(i+1)}{2}.$$

Cette dernière équation découle du fait qu'une fonction de deux variables spatiales à valeurs dans $\mathbb{R}$ possède $(k+1)$ fonctions dérivées d'ordre k par rapport à ces variables. On obtient alors le lemme 1. □

Le nombre n_i de composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ est directement déduit du lemme 1 et a pour valeur

$$n_i = \text{rg}\ (k,k,d) = d\,(k+1)(k+2)/2. \tag{3.28}$$

Fluide 2D. Nous présentons maintenant un résultat utile pour l'écriture ultérieure des conditions aux interfaces, dans le cas où l'un au moins des milieux est fluide. Ce résultat ne concerne que les composantes des dérivées spatiales de la vitesse acoustique.

Resultat 3 *En tout point d'un fluide parfait, et à tout ordre de dérivation spatiale $n \geq 1$, on a*

$$\boxed{\frac{\partial^n v_1}{\partial x^{n-i-1}\,\partial y^{i+1}} - \frac{\partial^n v_2}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i} = 0, \qquad 0 \leq i \leq n-1.} \tag{3.29}$$

Démonstration. On dérive (3.13) $n-1$ fois par rapport à x et y. □

Nous appelons les équations (3.29) des *conditions de milieu.* De l'ordre un jusqu'à l'ordre k, on obtient ainsi $n_m = k(k+1)/2$ conditions de milieu pour rg $(k,k,3) = 3(k+1)(k+2)/2$ composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$. Ces conditions ne font pas intervenir les trois premières composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, ni celles portant sur la pression acoustique. En tout point M du domaine, on résume ces conditions en écrivant

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U_k}(M,t) = \boldsymbol{0}, \tag{3.30}$$

où $\boldsymbol{F}$ est une matrice $n_m \times$ rg $(k,k,3)$, et dont les composantes non nulles ($1 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq i-1$) sont déduites du lemme 1

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{F}\left(\frac{i\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{3\,i\,(i+1)}{2} + 3\,(j+1) + 1\right) = 1, \\ &\boldsymbol{F}\left(\frac{i\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{3\,i\,(i+1)}{2} + 3\,j + 2\right) = -1. \end{aligned}} \tag{3.31}$$

Solide 2D. Nous présentons maintenant un résultat utile pour l'écriture ultérieures des conditions aux interfaces dans le cas où l'un au moins des milieux est solide. Ce résultat ne concerne que les composantes des dérivées spatiales de la contrainte élastique.

Resultat 4 *On pose*

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 2\,\mu}{4\,\mu\,(\lambda + \mu)}, \qquad \alpha_2 = \frac{-\lambda}{4\,\mu\,(\lambda + \mu)}, \tag{3.32}$$

En tout point d'un solide élastique isotrope, on a, pour $n \geq 2$ et $0 \leq i \leq n-2$,

(3.33)

$$\boxed{\alpha_2\,\frac{\partial^n\,\sigma_{11}}{\partial\,x^{n-i}\,\partial\,y^i} + \alpha_1\,\frac{\partial^n\,\sigma_{22}}{\partial\,x^{n-i}\,\partial\,y^i} - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial^n\,\sigma_{12}}{\partial\,x^{n-i-1}\,\partial\,y^{i+1}} + \alpha_1\,\frac{\partial^n\,\sigma_{11}}{\partial\,x^{n-i-2}\,\partial\,y^{i+2}} + \alpha_2\,\frac{\partial^n\,\sigma_{22}}{\partial\,x^{n-i-2}\,\partial\,y^{i+2}} = 0.}$$

Démonstration. Les relations contrainte-déformation dans un solide élastique isotrope sont

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\partial\,u_1}{\partial\,x} + \lambda\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,y},\\
\sigma_{12} &= \mu\,\left(\frac{\partial\,u_1}{\partial\,y} + \frac{\partial\,u_2}{\partial\,x}\right),\\
\sigma_{22} &= \lambda\frac{\partial\,u_1}{\partial\,x} + (\lambda + 2\,\mu)\frac{\partial\,u_2}{\partial\,y}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

La résolution de (3.34) conduit aux relations déformation-contrainte à l'ordre 0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,u_1}{\partial\,x} &= \alpha_1\,\sigma_{11} + \alpha_2\,\sigma_{22},\\
\frac{\partial\,u_2}{\partial\,y} &= \alpha_2\,\sigma_{11} + \alpha_1\,\sigma_{22},\\
\frac{\partial\,u_1}{\partial\,y} + \frac{\partial\,u_2}{\partial\,x} &= \frac{1}{\mu}\,\sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

On dérive la première relation de (3.35) deux fois par rapport à y

$$\frac{\partial^3\,u_1}{\partial\,x\,\partial\,y^2} = \alpha_1\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,y^2} + \alpha_2\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}. \tag{3.36}$$

On dérive la deuxième relation de (3.35) deux fois par rapport à x

$$\frac{\partial^3\,u_2}{\partial\,x^2\,\partial\,y} = \alpha_2\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2} + \alpha_1\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x^2}. \tag{3.37}$$

On dérive la troisième relation de (3.35) par rapport à x et par rapport à y

$$\frac{\partial^3\,u_1}{\partial\,x\,\partial\,y^2} + \frac{\partial^3\,u_2}{\partial\,x^2\,\partial\,y} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}. \tag{3.38}$$

La combinaison de (3.36), (3.37), et (3.38) conduit à une relation entre les dérivées secondes des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$, vérifiée en tout point du domaine

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \, \partial y} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2} = 0. \tag{3.39}$$

En dérivant (3.39) $n-2$ fois par rapport à x ou y, on obtient les $n-1$ relations (3.33). □

Comme pour le cas fluide, nous appelons les équations (3.29) des *conditions de milieu*. De l'ordre deux jusqu'à l'ordre k, on obtient $n_m = k\,(k-1)/2$ conditions de milieu pour rg $(k,k,5) = k\,(k-1)/2$ composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$. Ces conditions ne font pas intervenir les cinq premières composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, ni celles portant sur la vitesse élastique. En tout point M du domaine, on résume ces conditions en écrivant

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U_k}(M,t) = \boldsymbol{0}, \tag{3.40}$$

où $\boldsymbol{F}$ est une matrice $n_m \times$ rg $(k,k,5)$, dont les composantes non nulles ($2 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq i-2$) sont déduites du lemme 1

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}\left(\frac{(i-2)\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{5\,i\,(i+1)}{2} + 5\,j + 3\right) = \alpha_2,\\
&\boldsymbol{F}\left(\frac{(i-2)\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{5\,i\,(i+1)}{2} + 5\,j + 5\right) = \alpha_1,\\
&\boldsymbol{F}\left(\frac{(i-2)\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{5\,i\,(i+1)}{2} + 5\,(j+1) + 4\right) = -\frac{1}{\mu},\\
&\boldsymbol{F}\left(\frac{(i-2)\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{5\,i\,(i+1)}{2} + 5\,(j+2) + 3\right) = \alpha_1,\\
&\boldsymbol{F}\left(\frac{(i-2)\,(i-1)}{2} + j + 1, \frac{5\,i\,(i+1)}{2} + 5\,(j+2) + 5\right) = \alpha_2.
\end{aligned}} \tag{3.41}$$

3.6 Conclusion

Nous retenons deux points importants de ce chapitre : tout d'abord, on peut exprimer, à tout ordre de dérivation et en tout point du domaine, les dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales de la solution exacte. Ce point est crucial pour écrire les conditions vérifiées aux interfaces par les dérivées spatiales de la solution exacte, ce qui fait l'objet des chapitres 5 et 6. D'autre part, en 2D, les dérivées spatiales de la solution exacte sont reliées entre elles en tout point du domaine par des *conditions de milieu*. Par la suite, nous appliquons ces conditions de part et d'autre des interfaces, pour compléter les conditions de saut et les conditions aux limites (voir chapitre 6).

Nous abordons maintenant la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation, loin des interfaces.

Chapitre 4

Schémas numériques

Dans ce chapitre, nous résolvons numériquement les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique en milieu homogène. Pour résoudre ces équations, mises sous forme de systèmes hyperboliques linéaires au cours du chapitre précédent, nous utilisons trois schémas, issus de la mécanique des fluides numérique : le schéma de Lax-Wendroff, un schéma de volumes finis avec limiteur de flux, et un schéma WENO. Les propriétés de ces schémas, de complexité et qualités croissantes, sont discutées et illustrées sur des exemples. Dans tous les cas étudiés (1D et 2D, fluide et solide), nous détaillons les algorithmes de sorte que le lecteur puisse directement les programmer.

4.1 Objet du chapitre

Nous résolvons ici les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique, dans le domaine temporel et en l'absence d'interfaces. Ces équations ont été mises sous forme de systèmes hyperboliques linéaires de lois de conservations au cours du chapitre précédent. La littérature consacrée à la résolution des lois de conservation hyperboliques est immense. Le lecteur intéressé trouvera une excellente introduction dans l'ouvrage de LeVeque [42], et une monographie de référence dans l'ouvrage de Godlewski-Raviart [29].

La motivation principale de toute cette littérature est la résolution des équations d'Euler. Le calcul des solutions discontinues qui découlent spontanément de ces équations non linéaires nécessite le développement de schémas numériques perfectionnés. En particulier, ces schémas doivent assurer une bonne localisation des discontinuités et calculer précisément l'amplitude de la solution de part et d'autre de ces discontinuités. Aux schémas linéaires de différences finies, développés dans les années 60, comme le schéma de Lax-Wendroff, ont alors succédé des schémas spécialement adaptés au calcul de solutions discontinues. Citons entre autres les schémas de volumes finis avec limiteur de flux, développés au début des années 80 [33], et dont les propriétés "Total Variation Diminushing" (TVD) dans le cas scalaire empêchent l'apparition d'oscillations non physiques. Citons aussi les schémas "Essentially Non Oscillatory" (ENO) et "Weighted ENO" (WENO), développés au cours des années 90 [6, 23, 34].

Les équations linéaires qui nous intéressent ici sont plus simples que les équations d'Euler : en particulier, en milieu homogène, les solutions des équations de l'acoustique et de l'élastodyna-

mique conservent la régularité de la solution initiale, ne donnant pas naissance à des chocs. Même s'il n'est alors pas aussi crucial que pour les équations d'Euler d'utiliser des schémas adaptés au calcul de solutions discontinues, les qualités remarquables de ces schémas sont utilisées avec profit pour simuler numériquement la propagation des ondes [9]. Les défauts classiques des schémas de différences finies utilisés classiquement en acoustique, comme le schéma de Lax-Wendroff ou le schéma de Yee [70], sont éliminés. Pour les expériences numériques proposées au chapitre 10, nous utilisons les deux schémas mentionnés précédemment (volumes finis avec limiteur de flux, WENO) ; nous utilisons aussi le schéma de Lax-Wendroff, pour sa simplicité.

Au cours de ce chapitre, nous nous fixons deux objectifs. D'une part, nous précisons pour chaque schéma ses principales propriétés pour une solution initiale suffisamment régulière en milieu *homogène*. Rappelons que, en présence d'une interface, certaines propriétés sont perdues : nous chercherons alors, dans des chapitres ultérieurs (chapitres 7 et 8), à maintenir ces propriétés en présence d'interfaces, via la méthode d'interface. D'autre part, nous détaillons les algorithmes de chaque schéma, de sorte que le lecteur intéressé puisse directement les programmer et tester leurs propriétés. Ces formules explicites présentent un autre intérêt : elles permettent un gain en temps de calcul. En effet, nous pouvons nous dispenser des *solveurs de Riemann*, exacts ou approchés, nécessaires dans le cas d'équations non linéaires.

Un dernier mot pour le lecteur que la présentation des schémas n'intéresse pas, du moins lors d'une première lecture : il est alors seulement invité à consulter les sections 4.2.1 et 4.3.1, où nous définissons les notations utilisées en 1D et 2D, réutilisées ultérieurement.

4.2 Schémas 1D

4.2.1 Notations

Etant donnés des pas en espace Δx et en temps Δt uniformes, nous notons $\boldsymbol{U}_i^n$ l'approximation numérique de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x_i = i\,\Delta x, t_n = n\,\Delta t)$. Pour intéger numériquement (3.3), nous utilisons des schémas de différences finies ou volumes finis, explicites en temps et centrés en espace, de qualités croissantes : Lax-Wendroff, volumes finis avec limiteur de flux, et WENO 5. L'intégration numérique est réalisée sur deux pas de temps (le calcul de la solution numérique à l'instant t_{n+1} ne dépend que de la solution numérique à l'instant t_n). L'avancée en temps des schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis avec limiteur de flux peut s'écrire symboliquement, en un point x_i,

$$\boxed{\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{U}_{i-s}^n, \ldots, \boldsymbol{U}_{i+s}^n\right),} \tag{4.1}$$

où l'opérateur discret $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^{2\times(2\,s+1)} \to \mathbb{R}^2$ est continu [29], et où s est la *largeur* du schéma. Cette notation symbolique sera systématiquement utilisée au cours du chapitre 7, permettant alors de caractériser le couplage des différents schémas avec la méthode d'interface. Le schéma WENO 5, pour lequel plusieurs intégrations de Runge-Kutta sont calculées entre t_n et t_{n+1}, est dit un schéma *multistage*, et ne se met pas directement sous la forme (4.1). Par contre, chacune de ses intégrations entre t_n et t_{n+1} peut se mettre sous la forme (4.1) (voir section 4.2.4).

Les trois schémas présentés par la suite vérifient tous la condition nécessaire de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy, ou condition CFL, telle que

$$\text{CFL} = c\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \leq 1, \tag{4.2}$$

où c est la célérité des ondes acoustiques (ou élastiques, ce qui revient au même en 1D). Notons enfin que ces trois schémas peuvent également s'écrire sous *forme conservative*

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}_{i-s+1}^n, ..., \boldsymbol{U}_{i+s}^n\right) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}_{i-s}^n, ..., \boldsymbol{U}_{i+s-1}^n\right)\right), \tag{4.3}$$

où $\boldsymbol{F}$ est appelée la *fonction de flux numérique*. Dans cette formulation, la valeur numérique $\boldsymbol{U}_i^n$ s'interprète comme étant la valeur moyenne, sur la cellule $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, de la solution exacte, soit

$$\boldsymbol{U}_i^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{U}(x,t_n)\, d\,x, \tag{4.4}$$

avec $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \Delta x/2$.

4.2.2 Lax-Wendroff

Le schéma de Lax-Wendroff est un schéma classique de différences finies, d'ordre deux en temps et en espace, pour une solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ de classe C^2 sur l'ensemble du domaine d'étude. L'avancée en temps s'écrit en x_i

$$\boxed{\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n - \boldsymbol{U}_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n - 2\,\boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{U}_{i-1}^n\right),} \tag{4.5}$$

la matrice $\boldsymbol{A}$ étant définie en (3.2). Il découle de (4.5) les formules explicites

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\frac{1}{\rho}\left(p_{i+1}^n - p_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(v_{i+1}^n - 2\,v_i^n + v_{i-1}^n\right), \\ p_i^{n+1} &= p_i^n - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\rho\, c^2\left(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(p_{i+1}^n - 2\,p_i^n + p_{i-1}^n\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

où v_i^n et p_i^n sont les composantes de la solution numérique $\boldsymbol{U}_i^n$, et désignent respectivement la vitesse acoustique et la pression acoustique. Notons que la fonction de flux numérique $\boldsymbol{F}$ associée à l'écriture conservative (4.3) du schéma de Lax-Wendroff est donnée par

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{U}_i^n, \boldsymbol{U}_{i+1}^n\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n + \boldsymbol{U}_i^n\right) - \frac{c^2\,\Delta t}{2\,\Delta x}\left(\boldsymbol{U}_{i+1}^n - \boldsymbol{U}_i^n\right). \tag{4.7}$$

Le schéma de Lax-Wendroff est très facile à programmer et peu gourmant en ressources informatiques (deux tableaux $2 \times N$, où N est le nombre de points de calcul). Par contre, il introduit de la *dispersion numérique* : la vitesse de phase d'une composante harmonique de la solution numérique dépend de sa fréquence [43]. Cet artefact, rencontré aussi dans le cas de schémas linéaires pour l'équation des ondes [16], dégrade la solution numérique en introduisant des trains d'oscillations parasites (voir figure 4.1 a-b). Nous présentons maintenant deux types de schémas qui éliminent cette dispersion numérique.

4.2.3 Volumes finis avec limiteur de flux

Pour limiter la dispersion numérique tout en conservant l'ordre deux, il est intéressant de coupler le schéma de Lax-Wendroff à un schéma diffusif du premier ordre, de type Godunov. En un point x_i, ce dernier schéma repose, à chaque instant, sur la résolution de problèmes de Riemann en $x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}}$. Nous appelons le schéma résultant de ce couplage un "schéma de volumes finis avec limiteur de flux". Nous renvoyons à [41, 42, 74] pour des explications théoriques.

La construction du schéma de volumes finis avec limiteur de flux est classique : les schémas de Godunov et de Lax-Wendroff sont couplés de façon non linéaire, via des limiteurs de flux dépendant de la régularité locale de la solution. Nous présentons dans un premier temps les notations utilisées pour la partie Godunov, puis les corrections apportées par la partie Lax-Wendroff. Nous présentons les calculs de façon plus détaillée que celle strictement nécessaire à la programmation, et ce pour que le lecteur comprenne d'où viennent les différentes expressions. Les calculs strictement nécessaires au schéma sont consignés dans le paragraphe "algorithme final".

Schéma de Godunov. La matrice des valeurs propres λ^i $(1 \leq i \leq 2)$ de $\boldsymbol{A}$ (3.2) est $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(c, -c)$. La matrice $\boldsymbol{R}$, remplie avec les vecteurs propres à droite $\boldsymbol{r}^i$ de $\boldsymbol{A}$, et son inverse $\boldsymbol{R}^{-1}$ peuvent s'écrire

$$\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{r}^1 | \boldsymbol{r}^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho\, c & -\rho\, c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\rho\, c} \\ 1 & -\dfrac{1}{\rho\, c} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, nous notons

$$a^+ = \max(0,a), \qquad a^- = \min(0,a). \tag{4.9}$$

Nous définissons alors les matrices $\boldsymbol{\Lambda}^\pm = \mathrm{diag}\ ((\lambda^1)^\pm, (\lambda^2)^\pm)$, soit $\boldsymbol{\Lambda}^+ = \mathrm{diag}\ (c,0)$ et $\boldsymbol{\Lambda}^- = \mathrm{diag}\ (0, -c)$, puis les *parties positives et négatives* de $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Lambda}^+\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho\, c^2 & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Lambda}^-\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -c & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho\, c^2 & -c \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

et nous vérifions $\boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}$. Enfin, nous notons

$$\Delta_x\, \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{U}^n_i - \boldsymbol{U}^n_{i-1} \tag{4.11}$$

le saut des valeurs numériques entre les cellules C_i et C_{i-1}. A partir de (4.10) et (4.11), nous pouvons écrire tous les termes apparaissant dans le schéma de Godunov [42]

$$\boldsymbol{U}^{n+1}_i = \boldsymbol{U}^n_i - \frac{\Delta\, t}{\Delta\, x} \left(\boldsymbol{A}^+\, \Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^-\, \Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2}}\right), \tag{4.12}$$

du premier ordre en temps et en espace. Ce schéma est *diffusif*, ou *dissipatif* : il vérifie au second-ordre près, une équation modifiée de diffusion [42]. Cela implique un amortissement des oscillations, conduisant à un écrêtage des ondes.

Les quantités $\boldsymbol{A}^{\pm}\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n$ intervenant dans (4.12) sont appelées *ondes d'incrément*. A partir de (4.10) et (4.11), on obtient

$$\boldsymbol{A}^{+}\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^{-}\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c\left(v^n_{i+1} - 2\,v^n_i + v^n_{i-1}\right) + \dfrac{1}{\rho}\left(p^n_{i+1} - p^n_{i-1}\right) \\ \rho\,c^2\left(v^n_{i+1} - v^n_{i-1}\right) - c\left(p^n_{i+1} - 2\,p^n_i + p^n_{i-1}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Corrections du second ordre. On décompose le saut (4.11) sur la base des vecteurs propres à droite de $\boldsymbol{A}$

$$\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{2}\alpha^p_{i-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} \alpha^1_{i-\frac{1}{2}} \\ \alpha^2_{i-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Les coefficients $\alpha^p_{i-\frac{1}{2}}$ $(p = 1{,}2)$ découlant de $\boldsymbol{R}^{-1}$ (4.8) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \alpha^1_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^n_i - v^n_{i-1}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_i - p^n_{i-1}\right), \\ \alpha^2_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^n_i - v^n_{i-1}\right) - \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_i - p^n_{i-1}\right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Par ailleurs, on peut remarquer après calculs que le schéma de Lax-Wendroff (4.5) peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{U}^{n+1}_i = \boldsymbol{U}^n_i - \frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\left(\boldsymbol{A}^{+}\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^{-}\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\left(\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}}\right), \tag{4.16}$$

avec

$$\boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}|\lambda^p|\left(1 - \frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\,|\lambda^p|\right)\boldsymbol{W}^p_{i-\frac{1}{2}}, \tag{4.17}$$

et

$$\boldsymbol{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = \alpha^p_{i-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p, \qquad p = 1{,}2. \tag{4.18}$$

Pour obtenir un schéma intermédiaire aux schémas de Godunov (4.12) et de Lax-Wendroff (4.16), une méthode consiste à "limiter" les ondes $\boldsymbol{W}_{i-\frac{1}{2}}$ (4.18), i.e. à les remplacer dans (4.17) par

$$\overline{\boldsymbol{W}}^p_{i-\frac{1}{2}} = \Phi\left(\theta^p_{i-\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{W}^p_{i-\frac{1}{2}}, \qquad p = 1{,}2, \tag{4.19}$$

conduisant à $\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2}}$, appelée *onde de correction*. Dans (4.19), θ^p est une mesure de la régularité de $\boldsymbol{U}(x_i{,}t_n)$ dans la direction upwind [42] : pour $\alpha^p_{i-\frac{1}{2}} \neq 0$, on pose

$$\theta^p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^p_{i-\frac{3}{2}}}{\alpha^p_{i-\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \lambda^p > 0, \qquad \theta^p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^p_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha^p_{i-\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \lambda^p < 0. \tag{4.20}$$

Si le dénominateur dans (4.20) est nul, on pose $\theta^p = 1$. La fonction non linéaire Φ dans (4.19) est appelée *limiteur de flux*. Cette fonction est construite de sorte que, dans le cas d'équations hyperboliques scalaires 1D, la propriété Total Variation Diminushing (TVD) soit conservée [42], laquelle empêche la croissance d'oscillations non physiques (rappelons que la propriété TVD n'existe que dans le cas scalaire 1D). Parmi les limiteurs de flux existants, nous optons lors des expériences numériques pour le "MC-limiteur"

$$\Phi(\theta) = \max\,(0,\, \min\,((1+\theta)/2, 2\,\theta)). \tag{4.21}$$

De (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20), nous déduisons l'expression de l'onde de correction si $\alpha^p_{i-\frac{1}{2}} \neq 0$

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,c\left(1 - c\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\alpha^1_{i-\frac{3}{2}}}{\alpha^1_{i-\frac{1}{2}}}\right)\alpha^1_{i-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\ \\ \rho\,c\end{pmatrix} + \Phi\left(\frac{\alpha^2_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha^2_{i-\frac{1}{2}}}\right)\alpha^2_{i-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\ \\ -\rho\,c\end{pmatrix}\right). \tag{4.22}$$

Pour $\alpha^p_{i-\frac{1}{2}} = 0$, on remplace la valeur correspondante de Φ par 1.

Algorithme final. Le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, obtenu en limitant les flux de (4.16), s'écrit alors

$$\boxed{\boldsymbol{U}^{n+1}_i = \boldsymbol{U}^n_i - \frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\left(\boldsymbol{A}^+\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^-\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\left(\overline{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2}}\right).} \tag{4.23}$$

Pour l'utilisateur, la programmation de ce schéma se décompose ainsi en trois étapes :

- calcul des *ondes d'incrément* $\boldsymbol{A}^+\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{A}^-\,\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2}}$ via (4.13) ;
- calcul des *ondes de correction* $\overline{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2}}$ et $\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2}}$ via (4.15), (4.21) et (4.22) ;
- avancée en temps via (4.23).

De ces trois étapes, il découle que ce schéma utilise deux points à gauche et deux points à droite de x_i pour l'avancée en temps : la largeur du schéma est $s = 2$. Pour une solution exacte suffisamment régulière, θ^p est petit, et Φ tend vers 1 : on retrouve alors le schéma de Lax-Wendroff (4.5) ; inversement, pour une solution exacte irrégulière, θ^p est grand, et Φ tend vers 0 : on retrouve alors le schéma de Godunov (4.12).

Le schéma de volumes finis présenté ici est facile à programmer et peu gourmand en taille mémoire : l'avancée en temps (4.23) nécessite deux tableaux $2 \times N$, où N est le nombre de points de calcul, comme pour le schéma de Lax-Wendroff. De plus, du fait de l'élimination de la dispersion numérique, la localisation des ondes numériques est excellente.

Par contre, l'avancée en temps (4.23) nécessite plus d'opérations que le schéma de Lax-Wendroff, augmentant ainsi le temps de calcul. D'autre part, la solution numérique variant beaucoup aux extrema des ondes, ceux-ci sont principalement calculés par le schéma de Godunov : la diffusion numérique introduite par celui-ci écrête alors les extrema des ondes (figure 4.1 (c-d)).

Pour limiter la diffusion numérique et éviter l'écrêtage des ondes, tout en limitant la dispersion numérique, nous présentons un troisième et dernier schéma numérique.

4.2.4 WENO 5

Pour contrôler la dispersion numérique du schéma de Lax-Wendroff et limiter la diffusion numérique du schéma de volumes finis avec limiteur de flux, nous utilisons le schéma Weighted Essentially Non Oscillatory (WENO). Il s'agit d'une amélioration du schéma ENO, dont une présentation détaillée est donnée dans Fedkiw et al. [23]. Aussi bien pour les schémas ENO que WENO, les intégrations en temps et en espace sont découplées, conduisant à des *méthodes de lignes* [42]. En un point donné, l'intégration en espace est réalisée à partir d'un jeu d'interpolations polynomiales basées sur des points voisins. Dans le cas du schéma ENO, l'interpolation retenue est celle minimisant les oscillations qui peuvent apparaitre. Le schéma WENO utilise une combinaison des différentes interpolations : cela ne pénalise pas en temps de calcul, puisque les interpolations ont déjà été calculées, et cela permet d'augmenter l'ordre du schéma.

L'algorithme présenté en quatre étapes découle de Jiang et al. [36]. Le système hyperbolique (3.3) est transformé en équations scalaires hyperboliques indépendantes. Nous appliquons alors les interpolations WENO sur ces quantités scalaires obtenues. Après le retour aux variables naturelles, nous procédons à l'intégration temporelle par une méthode de type Runge-Kutta d'ordre élevé. Les calculs strictement nécessaires au schéma sont résumés dans le paragraphe "intégration en temps".

Entrée dans le champ des caractéristiques. L'intégration spatiale de (3.3) est remplacée par le calcul des *flux numériques vectoriels* $\boldsymbol{F}_{i\pm\frac{1}{2}}$ tels que

$$\boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,\boldsymbol{U} \approx \frac{\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta\,x}. \tag{4.24}$$

Nous décomposons (4.24) dans le champ des caractéristiques, i.e. nous transformons cette équation vectorielle en deux équations scalaires indépendantes. Etant données les valeurs propres $\lambda^1 = +c$ et $\lambda^2 = -c$ de $\boldsymbol{A}$, nous définissons les vecteurs propres à gauche et à droite de $\boldsymbol{A}$, soit respectivement $\boldsymbol{l}^j$ et $\boldsymbol{r}^j$ $(j = 1{,}2)$. Ces vecteurs vérifient $(j = 1{,}2)$

$$\begin{aligned} {}^T\boldsymbol{l}^j\,\boldsymbol{A} &= \lambda^j\,{}^T\boldsymbol{l}^j, \\ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}^j &= \lambda^p\,\boldsymbol{r}^j, \\ \boldsymbol{r}^j\,\boldsymbol{l}^j &= 1, \end{aligned} \tag{4.25}$$

et peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}^1 &= \begin{pmatrix} c\sqrt{\rho} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{l}^2 = \begin{pmatrix} c\sqrt{\rho} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\rho}} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{r}^1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{c\sqrt{\rho}} \\ \sqrt{\rho} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{c\sqrt{\rho}} \\ -\sqrt{\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nous définissons ensuite les *variables caractéristiques* θ^j et les *fonctions caractéristiques* $f(\theta^j)$ ($j = 1{,}2$) telles que

$$\theta^j = \boldsymbol{l}^j\,\boldsymbol{U}, \quad f(\theta^j) = \boldsymbol{l}^j\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{U}). \tag{4.27}$$

De l'expression de $\boldsymbol{A}$ (3.2) et de (4.26), il découle

$$\begin{aligned} \theta^1 &= c\,\sqrt{\rho}\,v + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,p, \\ \theta^2 &= c\,\sqrt{\rho}\,v - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,p, \end{aligned} \tag{4.28}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\theta^1\right) &= \frac{c}{\sqrt{\rho}}\,p + \sqrt{\rho}\,c^2\,v, \\ f\left(\theta^2\right) &= \frac{c}{\sqrt{\rho}}\,p - \sqrt{\rho}\,c^2\,v. \end{aligned} \tag{4.29}$$

L'équation vectorielle (3.3), portant sur les variables naturelles v et p, a ainsi été transformée en deux équations scalaires hyperboliques indépendantes, vérifiant

$$\frac{\partial\,\theta^j}{\partial\,t} + \frac{\partial}{\partial\,x}\,f\left(\theta^j\right) = 0, \qquad j = 1{,}2. \tag{4.30}$$

Nous appliquons maintenant la procédure WENO sur les champs scalaires θ^1 et θ^2. Le but de cette procédure est d'estimer les *flux numériques scalaires* $f^j_{i+1/2}$ tels que

$$\frac{\partial}{\partial\,x}\,f(\theta^j) \approx \frac{f^j_{i+\frac{1}{2}} - f^j_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta\,x}, \quad j = 1{,}2. \tag{4.31}$$

On note désormais θ^j_i l'approximation numérique de $\theta^j(x_i)$.

Interpolation WENO. En un point x_i, les flux numériques scalaires $f^j_{i+1/2}$ ($j = 1{,}2$) intervenant dans (4.31) sont calculés par interpolation des valeurs de $f(\theta^j_i)$ aux points voisins de x_i. Pour limiter l'apparition d'oscillations, l'interpolant est de type upwind : la position des points d'interpolation par rapport au point de calcul x_i dépend du signe de la valeur propre considérée. Nous appliquons ici une interpolation sur trois points. La valeur propre λ^1 étant positive, les ensembles de points candidats pour l'estimation de $f^1_{i+1/2}$ sont (x_{i-2},x_{i-1},x_i), (x_{i-1},x_i,x_{i+1}), et (x_i,x_{i+1},x_{i+2}). La valeur propre λ^2 étant négative, les ensembles de points candidats pour le calcul de $f^2_{i+1/2}$ sont $(x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1})$, (x_{i+2},x_{i+1},x_i), et (x_{i+1},x_i,x_{i-1}). On résume ces interpolations en écrivant

$$\begin{aligned} f^1_{i+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k\,a^3_{k,l}\,f\left(\theta^1_{i-2+k+l}\right), \\ f^2_{i+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k\,a^3_{k,l}\,f\left(\theta^2_{i+3-k-l}\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

k	l=0	l=1	l=2
0	1/3	-7/6	11/6
1	-1/6	5/6	1/3
2	1/3	5/6	-1/6

TAB. 4.1 – *Coefficients $a^3_{k,l}$ pour l'interpolation WENO 5*

Les coefficients $a^3_{k,l}$ dans (4.32) sont tabulés (tableau 4.1). Les poids ω_k s'écrivent

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}, \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{C^3_k}{(IS_k+10^{-6})^2}, \qquad k = 0,1,2. \tag{4.33}$$

Les coefficients C^3_k intervenant dans (4.33) sont tabulés : $C^3_0 = 1/10$, $C^3_1 = 6/10$ et $C^3_2 = 3/10$. Enfin, IS_k est une mesure de la régularité obtenue avec le k-ième ensemble de points. A ce sujet, nous utilisons ici la nouvelle mesure de régularité introduite par Jiang et al. [36], basée sur une minimisation de la norme L_2 des dérivées spatiales des polynômes d'interpolation. Cette mesure conduit à un schéma d'ordre 5 en espace aux endroits où la solution est régulière. Pour le calcul de $f^1_{i+\frac{1}{2}}$, cette mesure s'écrit

$$\begin{aligned}
IS_0 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^1_{i-2}\right)-2\,f\left(\theta^1_{i-1}\right)+f\left(\theta^1_i\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f\left(\theta^1_{i-2}\right)-4\,f\left(\theta^1_{i-1}\right)+3\,f\left(\theta^1_i\right)\right)^2\\
IS_1 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^1_{i-1}\right)-2\,f\left(\theta^1_i\right)+f\left(\theta^1_{i+1}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f\left(\theta^1_{i-1}\right)-f\left(\theta^1_{i+1}\right)\right)^2\\
IS_2 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^1_i\right)-2\,f\left(\theta^1_{i+1}\right)+f\left(\theta^1_{i+2}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(3\,f\left(\theta^1_i\right)-4\,f\left(\theta^1_{i+1}\right)+f\left(\theta^1_{i+2}\right)\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Pour le calcul de $f^2_{i+\frac{1}{2}}$, cette mesure s'écrit

$$\begin{aligned}
IS_0 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^2_{i+3}\right)-2\,f\left(\theta^2_{i+2}\right)+f\left(\theta^2_{i+1}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f\left(\theta^2_{i+3}\right)-4\,f\left(\theta^2_{i+2}\right)+3\,f\left(\theta^2_{i+1}\right)\right)^2\\
IS_1 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^2_{i+2}\right)-2\,f\left(\theta^2_{i+1}\right)+f\left(\theta^2_i\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f\left(\theta^2_{i+2}\right)-f\left(\theta^2_i\right)\right)^2\\
IS_2 &= \frac{13}{12}\left(f\left(\theta^2_{i+1}\right)-2\,f\left(\theta^2_i\right)+f\left(\theta^2_{i-1}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(3\,f\left(\theta^2_{i+1}\right)-4\,f\left(\theta^2_i\right)+f\left(\theta^2_{i-1}\right)\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Sortie du champ des caractéristiques. Le retour aux variables naturelles v et p est effectué en multipliant les flux numériques scalaires $f^j_{i+1/2}$, calculés par l'interpolation WENO ($j = 1,2$),

par les vecteurs propres à droite : pour chaque valeur propre, nous définissons le flux $\boldsymbol{F}^j_{i+\frac{1}{2}}$ par

$$\boldsymbol{F}^j_{i+\frac{1}{2}} = f^j_{i+\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^j, \quad j = 1{,}2. \tag{4.36}$$

Les flux numériques vectoriels intervenant dans (4.24) sont alors la somme des flux (4.36), soit

$$\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}^1_{i+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{F}^2_{i+\frac{1}{2}}. \tag{4.37}$$

Compte-tenu de (4.26), on écrit explicitement

$$\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c\sqrt{\rho}}\left(f^1_{i+\frac{1}{2}} + f^2_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \\ \sqrt{\rho}\left(f^1_{i+\frac{1}{2}} - f^2_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

On applique exactement la même procédure que celle suivie au cours des deux sections précédentes pour calculer $\boldsymbol{F}_{i-1/2}$, en décrémentant i d'une unité.

Intégration en temps. Une fois (4.24) estimée via (4.38) et reportée dans l'équation aux dérivées partielles (3.3), il reste à intégrer l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}_i + \frac{\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \boldsymbol{0}, \tag{4.39}$$

écrite sous forme abrégée

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i), \quad \text{avec } \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i) = -\frac{\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \tag{4.40}$$

L'intégration en temps est alors effectuée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, soit

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{U}_i^{(1)} &= \boldsymbol{U}_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i^n), \\ \boldsymbol{U}_i^{(2)} &= \boldsymbol{U}_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i^{(1)}), \\ \boldsymbol{U}_i^{(3)} &= \boldsymbol{U}_i^n + \Delta t\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i^{(2)}), \\ \boldsymbol{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{3}\left(-\boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{U}_i^{(1)} + 2\,\boldsymbol{U}_i^{(2)} + \boldsymbol{U}_i^{(3)}\right) + \frac{1}{6}\Delta t\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_i^{(3)}). \end{aligned}} \tag{4.41}$$

En posant $\boldsymbol{U}_i^{(0)} = \boldsymbol{U}_i^n$ et $\boldsymbol{U}_i^{(4)} = \boldsymbol{U}_i^{n+1}$, le calcul de l'itération r de (4.41) ($1 \leq r \leq 4$) se décompose en sept étapes :

- calcul de $f(\theta_{i+k})$ ($-2 \leq k \leq 3$) à partir de (4.29). Ce calcul repose sur les valeurs numériques de la vitesse acoustique $v^{(r-1)}_{i+k}$ et de la pression acoustique $p^{(r-1)}_{i+k}$ ($-2 \leq k \leq 3$) à l'itération $r-1$;
- calcul des coefficients de régularité IS_k (4.34) et (4.35), des coefficients α_k, et finalement des poids ω_k (4.33) ($0 \leq k \leq 2$) ;

- calcul des flux numériques $f^1_{i+\frac{1}{2}}$ et $f^2_{i+\frac{1}{2}}$ (4.32) ;
- calcul des flux vectoriels $\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}}$ (4.38) ;
- même procédure pour calculer $\boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2}}$, en décalant tous les indices d'une unité vers la gauche ;
- calcul de $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{U}_i^{(k-1)}\right)$ (4.40) ;
- mise à jour de $\boldsymbol{U}_i^{(r)}$ (4.41).

Nous déduisons de (4.34) et de (4.35) que $f^1_{i+1/2}$ et $f^2_{i+1/2}$ dépendent respectivement des valeurs de la solution aux noeuds $(i-2,...,i+2)$ et $(i-1,...,i+3)$. Ainsi, en un point x_i, l'expression (4.24) dépend des valeurs numériques aux noeuds $(i-3,...,i+3)$: la largeur du schéma WENO est alors $s = 3$. Le schéma WENO 5 obtenu est d'ordre cinq en espace et quatre en temps.

Ce schéma est plus coûteux en temps de calcul et en taille mémoire que les schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis avec limiteur de flux. En particulier, il nécessite cinq tableaux $2 \times N$, où N est le nombre de points de calcul. Par contre, pour un même nombre de points par longueur d'onde, la qualité de la solution calculée par WENO 5 est meilleure que celle des deux autres schémas. A la différence du schéma de Lax-Wendroff, la localisation des ondes est excellente. D'autre part, contrairement au schéma de volumes finis avec limiteur de flux, l'amplitude des ondes est très bien conservée.

4.2.5 Exemples numériques

Pour illustrer ce qui précède, nous présentons en figure 4.1 des simulations numériques de propagation d'onde 1D dans de l'eau. Nous considérons un domaine de longueur $L = 1$ m, de propriétés physiques

$$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad c = 1500\,\mathrm{m/s}. \tag{4.42}$$

La solution initiale est une sinusoïde tronquée, de classe C^5 et de fréquence centrale $f_c = 20$ kHz, explicitée au chapitre 10. La simulation est réalisée avec 200 points de calcul et CFL=0.8, soit environ 25 points de calcul par longueur d'onde centrale. Nous représentons les solutions numériques (pointillés) et exactes (traits pleins) à deux instants, t_0 et t_1. A l'instant t_0 (respectivement $t_1 = 2\,t_0$), les ondes se sont propagées sur environ trois (respectivement six) longueurs d'onde.

Nous observons la dispersion numérique du schéma de Lax-Wendroff sous forme de trains d'oscillations parasites, conduisant à une mauvaise localisation de l'onde (figure 4.1 (a) et (b)). La diffusion numérique introduite par le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, là où la solution présente de forts gradients, provoque l'écrêtage des extrema (figure 4.1 (c) et (d)) ; par contre la localisation de l'onde est excellente. Enfin, la localisation de l'onde est légèrement moins bonne avec le schéma WENO 5 (figure 4.1 (e) et (f)), mais l'amplitude de l'onde est très bien conservée. Examinons le temps CPU pour calculer les solutions numériques jusqu'à l'instant t_2 : du schéma WENO 5 au schéma de volumes finis avec limiteur de flux, le temps de calcul est divisé par un facteur 3. De même, du schéma de volumes finis avec limiteur de flux au schéma de Lax-Wendroff, le temps de calcul est divisé par un facteur 1.6.

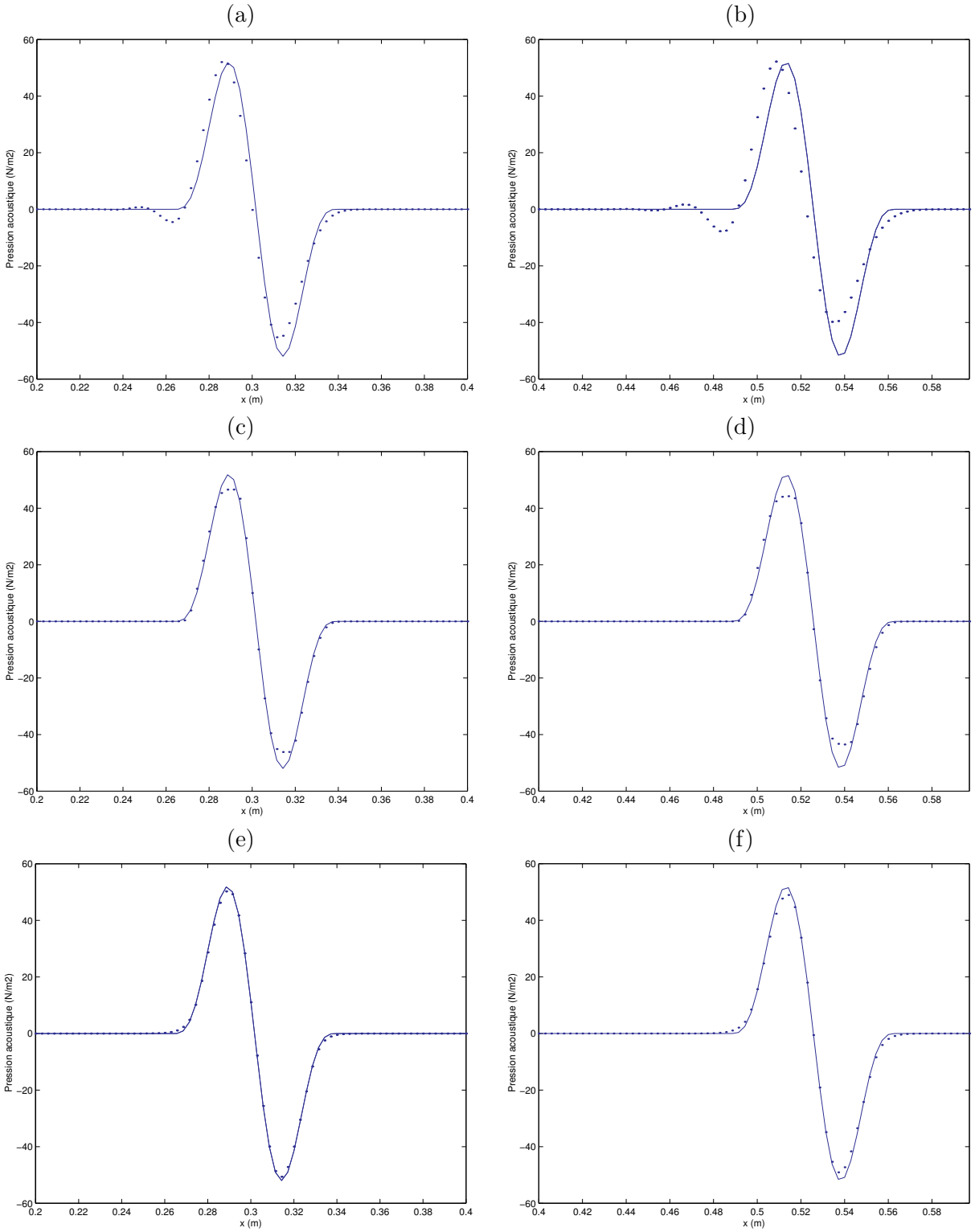

FIG. 4.1 – *Valeurs exactes (ligne pleine) et numériques (pointillés) de la pression acoustique : Lax-Wendroff (a-b), volumes finis avec limiteur de flux (c-d), WENO 5 (e-f), après propagation sur 3 longueurs d'onde (colonne de gauche), sur 6 longueurs d'onde (colonne de droite)*

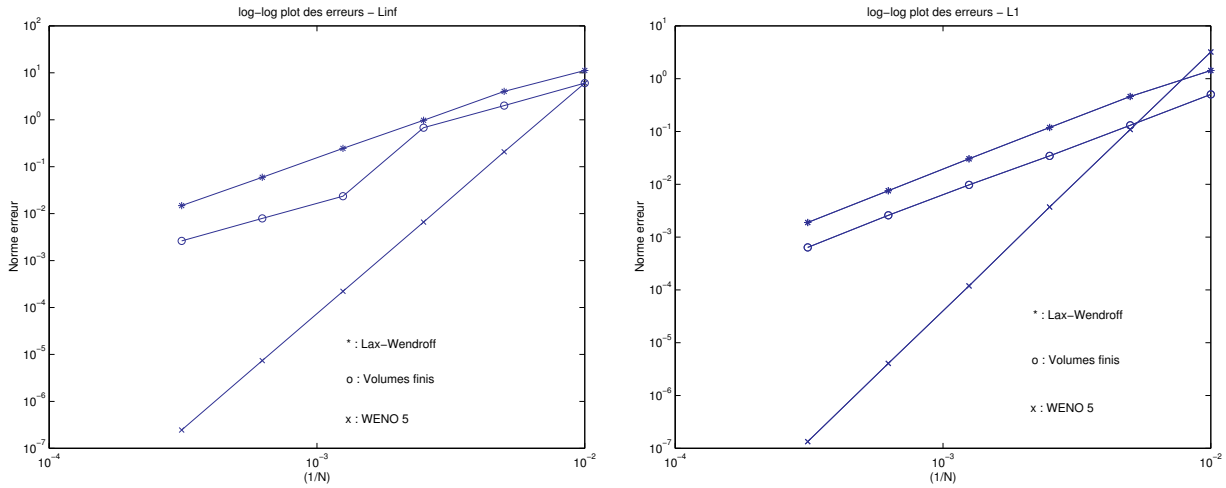

FIG. 4.2 – *Courbes log-log des erreurs en normes L_∞ (a) et L_1 (b) en fonction du nombre de points de calcul N.*

Enfin, la figure 4.2.5 présente les courbes log-log d'erreur en normes L_∞ et L_1 des trois schémas à l'instant t_1, en fonction du nombre de points de calcul. Pour le schéma de Lax-Wendroff, nous mesurons l'ordre 2 dans les deux normes, comme prévu théoriquement. Pour le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, obtenu par combinaison non linéaire du schéma de Godunov d'ordre 1 et du schéma de Lax-Wendroff d'ordre 2, nous mesurons l'ordre 1.6 en norme L_∞ et l'ordre 1.9 en norme L_1. Enfin, pour le schéma WENO 5, nous mesurons l'ordre 5 dans les deux normes, en ajustant le pas de temps

$$\Delta t = \frac{\text{CFL } (\Delta x)^{5/4}}{c}, \tag{4.43}$$

de sorte que l'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4 en temps soit effectivement d'ordre 5.

4.3 Schémas 2D

4.3.1 Notations

Etant donnés des pas en espace $\Delta x = \Delta y$ et en temps Δt uniformes, nous notons $\boldsymbol{U}_{i,j}^n$ l'approximation numérique de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x_i = i\,\Delta x, y_j = j\,\Delta y, t_n = n\,\Delta t)$. Pour intégrer numériquement (3.10) (cas fluide) ou (3.19) (cas solide), nous utilisons les mêmes types de schémas qu'en 1D, explicites en temps et centrés en espace. Pour l'avancée en temps au nœud (i,j), les schémas utilisent les valeurs numériques aux nœuds

$$\begin{aligned} i_l &= i + k_1(l), \\ j_l &= j + k_2(l), \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec $0 \leq l \leq s-1$. Le nombre de points de calculs s et les indices relatifs $k_1(l)$ et $k_2(l)$ dépendent du schéma utilisé, et sont précisés dans chaque cas. A partir de ces notations, l'avancée en

temps des schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis avec limiteurs de flux, peut s'écrire symboliquement, en un point (x_i,y_j),

$$\boxed{\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} = \boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{U}_{i_1,j_1}^{n},\ldots,\boldsymbol{U}_{i_s,j_s}^{n}\right),} \tag{4.45}$$

où l'opérateur discret $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^{d\times s} \to \mathbb{R}^d$ est continu [29]. Rappelons que d est le nombre de composantes de la solution, soit $d = 3$ dans le cas d'un fluide et $d = 5$ dans le cas d'un solide.

La condition de stabilité CFL dépend du schéma utilisé, et est précisée dans chaque cas. Les notations symboliques (4.44) et (4.45) sont systématiquement utilisées au chapitre 8 pour caractériser le couplage des schémas avec la méthode d'interface.

4.3.2 Lax-Wendroff

En un point (x_i,y_j), le schéma de Lax-Wendroff découle du développement de Taylor d'ordre deux de $\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_{n+1})$ en (x_i,y_j,t_n)

$$\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_{n+1}) = \boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \Delta t\,\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \frac{1}{2}\,\Delta t^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta t^3). \tag{4.46}$$

Les dérivées temporelles dans (4.46) sont remplacées par des dérivées spatiales, conduisant à des expressions différentes selon que le milieu est fluide ou solide.

Milieu fluide. Dans le cas d'un milieu fluide, les équations (3.10) et (3.15) permettent d'écrire (4.46) sous la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_{n+1}) &= \boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) - \Delta t\left(\boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)\right)\\ &+\frac{1}{2}\,(c\,\Delta t)^2\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)\right) + \boldsymbol{O}(\Delta t^3).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Les dérivées spatiales sont estimées par des différences finies centrées d'ordre deux. On remplace alors les valeurs exactes de la solution par les valeurs numériques, et on élimine le vecteur d'erreur, d'où le schéma

(4.48)

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} &= \boldsymbol{U}_{i,j}^{n} - \Delta t\left(\frac{1}{2\,\Delta x}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{1}{2\,\Delta y}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} - \boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n}\right)\right)\\ &+\frac{(c\,\Delta t)^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} - 2\,\boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} - 2\,\boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + \boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n}\right)\right).\end{aligned}}$$

à $s = 5$ points en espace. Il découle de (4.48) les formules explicites
(4.49)

$$v_{i,j}^{(1)\,n+1} = v_{i,j}^{(1)\,n} - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\,\frac{1}{\rho}\left(p_{i+1,j}^{n} - p_{i-1,j}^{n}\right)$$

$$+\frac{(c\,\Delta t)^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{(1)\,n} - 2\,v_{i,j}^{(1)\,n} + v_{i-1,j}^{(1)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{(1)\,n} - 2\,v_{i,j}^{(1)\,n} + v_{i,j-1}^{(1)\,n}\right)\right),$$

$$v_{i,j}^{(2)\,n+1} = v_{i,j}^{(2)\,n} - \frac{\Delta t}{2\,\Delta y}\,\frac{1}{\rho}\left(p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j-1}^{n}\right)$$

$$+\frac{(c\,\Delta t)^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{(2)\,n} - 2\,v_{i,j}^{(2)\,n} + v_{i-1,j}^{(2)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{(2)\,n} - 2\,v_{i,j}^{(2)\,n} + v_{i,j-1}^{(2)\,n}\right)\right),$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{2}\,\rho\,c^2\left(\frac{1}{\Delta x}\left(v_{i+1,j}^{(1)\,n} - v_{i-1,j}^{(1)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j+1}^{(2)\,n} - v_{i,j-1}^{(2)\,n}\right)\right)$$

$$+\frac{(c\,\Delta t)^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta x^2}\left(p_{i+1,j}^{n} - 2\,p_{i,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(p_{i,j+1}^{n} - 2\,p_{i,j}^{n} + p_{i,j-1}^{n}\right)\right).$$

où $v_{i,j}^{(1)\,n}$, $v_{i,j}^{(2)\,n}$, et $p_{i,j}^{n}$ sont les composantes de $\boldsymbol{U}_{i,j}^{n}$ et désignent respectivement les valeurs numériques des composantes de la vitesse acoustique et la pression acoustique. Les indices $k_1(l)$ et $k_2(l)$ $(0 \le l \le s-1)$ utilisés dans (4.44) et (4.45) sont précisés dans le tableau 4.2.

l	0	1	2	3	4
$k_1(l)$	0	0	-1	1	0
$k_2(l)$	0	-1	0	0	1

TAB. 4.2 – *Indices k_1 et k_2 (4.44) du schéma de Lax-Wendroff pour un milieu fluide.*

Milieu solide. Dans le cas d'un milieu solide, les équations (3.19) et (3.12) permettent d'écrire (4.46) sous la forme
(4.50)

$$\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_{n+1}) = \boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) - \Delta t\left(\boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)\right)$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\boldsymbol{A}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + (\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n) + \boldsymbol{B}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)\right) + \boldsymbol{O}(\Delta t^3).$$

On remplace alors les valeurs exactes de la solution par les valeurs numériques, et on élimine le vecteur d'erreur, d'où le schéma

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} = \boldsymbol{U}_{i,j}^{n} - \Delta\, t \left(\frac{1}{2\,\Delta\, x} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n} \right) + \frac{1}{2\,\Delta\, y} \boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} - \boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n} \right) \right) \\
&+ \frac{\Delta\, t^2}{2} \left(\frac{1}{\Delta\, x^2} \boldsymbol{A}^2 \left(\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n} - 2\,\boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + \boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n} \right) + \frac{1}{\Delta\, y^2} \boldsymbol{B}^2 \left(\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n} - 2\,\boldsymbol{U}_{i,j}^{n} + +\boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n} \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{4\,\Delta\, x\,\Delta\, y} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) \left(\boldsymbol{U}_{i+1,j+1}^{n} - \boldsymbol{U}_{i+1,j-1}^{n} - \boldsymbol{U}_{i-1,j+1}^{n} + \boldsymbol{U}_{i-1,j-1}^{n} \right) \right).
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

à $s = 9$ points en espace. Il découle de (4.51) les formules explicites

$$
\begin{aligned}
v_{i,j}^{(1)\,n+1} &= v_{i,j}^{(1)\,n} + \Delta\, t \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2\,\Delta\, x} \left(\sigma_{i+1,j}^{(1,1)\,n} - \sigma_{i-1,j}^{(1,1)\,n} \right) + \frac{1}{2\,\Delta\, y} \left(\sigma_{i,j+1}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i,j-1}^{(1,2)\,n} \right) \right) \\
&+ \frac{\Delta\, t^2}{2} \left(\frac{1}{\Delta\, x^2} c_p^2 \left(v_{i+1,j}^{(1)\,n} - 2\, v_{i,j}^{(1)\,n} + v_{i-1,j}^{(1)\,n} \right) + \frac{1}{\Delta\, y^2} c_s^2 \left(v_{i,j+1}^{(1)\,n} - 2\, v_{i,j}^{(1)\,n} + v_{i,j-1}^{(1)\,n} \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{4\,\Delta\, x\,\Delta\, y} \left(c_p^2 - c_s^2 \right) \left(v_{i+1,j+1}^{(2)\,n} - v_{i+1,j-1}^{(2)\,n} - v_{i-1,j+1}^{(2)\,n} + v_{i-1,j-1}^{(2)\,n} \right) \right), \\
v_{i,j}^{(2)\,n+1} &= v_{i,j}^{(2)\,n} + \Delta\, t \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2\,\Delta\, x} \left(\sigma_{i+1,j}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i-1,j}^{(1,2)\,n} \right) + \frac{1}{2\,\Delta\, y} \left(\sigma_{i,j+1}^{(2,2)\,n} - \sigma_{i,j-1}^{(2,2)\,n} \right) \right) \\
&+ \frac{\Delta\, t^2}{2} \left(\frac{1}{\Delta\, x^2} c_s^2 \left(v_{i+1,j}^{(2)\,n} - 2\, v_{i,j}^{(2)\,n} + v_{i-1,j}^{(2)\,n} \right) + \frac{1}{\Delta\, y^2} c_p^2 \left(v_{i,j+1}^{(2)\,n} - 2\, v_{i,j}^{(2)\,n} + v_{i,j-1}^{(2)\,n} \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{4\,\Delta\, x\,\Delta\, y} \left(c_p^2 - c_s^2 \right) \left(v_{i+1,j+1}^{(1)\,n} - v_{i+1,j-1}^{(1)\,n} - v_{i-1,j+1}^{(1)\,n} + v_{i-1,j-1}^{(1)\,n} \right) \right),
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

(4.53)

$$\sigma_{i,j}^{(1,1)\,n+1} = \sigma_{i,j}^{(1,1)\,n} + \Delta\,t\left(\frac{1}{2\,\Delta\,x}\rho\,c_p^2\left(v_{i+1,j}^{(1)\,n} - v_{i-1,j}^{(1)\,n}\right) + \frac{1}{2\,\Delta\,y}\rho\left(c_p^2 - 2\,c_s^2\right)\left(v_{i,j+1}^{(2)\,n} - v_{i,j-1}^{(2)\,n}\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta\,t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta\,x^2}c_p^2\left(\sigma_{i+1,j}^{(1,1)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(1,1)\,n} + \sigma_{i-1,j}^{(1,1)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta\,y^2}\left(c_p^2 - 2\,c_s^2\right)\left(\sigma_{i,j+1}^{(2,2)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(2,2)\,n} + \sigma_{i,j-1}^{(2,2)\,n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\,\Delta\,x\,\Delta\,y}\left(c_p^2 - c_s^2\right)\left(\sigma_{i+1,j+1}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i+1,j-1}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i-1,j+1}^{(1,2)\,n} + \sigma_{i-1,j-1}^{(1,2)\,n}\right)\right),$$

$$\sigma_{i,j}^{(1,2)\,n+1} = \sigma_{i,j}^{(1,2)\,n} + \Delta\,t\,\rho\,c_s^2\left(\frac{1}{2\,\Delta\,x}\left(v_{i+1,j}^{(2)\,n} - v_{i-1,j}^{(2)\,n}\right) + \frac{1}{2\,\Delta\,y}\left(v_{i,j+1}^{(1)\,n} - v_{i,j-1}^{(1)\,n}\right)\right)$$

$$+\frac{(c_s\,\Delta\,t)^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta\,x^2}\left(\sigma_{i+1,j}^{(1,2)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(1,2)\,n} + \sigma_{i-1,j}^{(1,2)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta\,y^2}\left(\sigma_{i,j+1}^{(1,2)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(1,2)\,n} + \sigma_{i,j-1}^{(1,2)\,n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\,\Delta\,x\,\Delta\,y}\left(\sigma_{i+1,j+1}^{(1,1)\,n} - \sigma_{i+1,j-1}^{(1,1)\,n} - \sigma_{i-1,j+1}^{(1,1)\,n} - \sigma_{i-1,j-1}^{(1,1)\,n} + \sigma_{i+1,j+1}^{(2,2)\,n} - \sigma_{i+1,j-1}^{(2,2)\,n} - \sigma_{i-1,j+1}^{(2,2)\,n} - \sigma_{i-1,j-1}^{(2,2)\,n}\right)\right)$$

$$\sigma_{i,j}^{(2,2)\,n+1} = \sigma_{i,j}^{(2,2)\,n} + \Delta\,t\left(\frac{1}{2\,\Delta\,x}\rho\left(c_p^2 - 2\,c_s^2\right)\left(v_{i+1,j}^{(1)\,n} - v_{i-1,j}^{(1)\,n}\right) + \frac{1}{2\,\Delta\,y}\rho\,c_p^2\left(v_{i,j+1}^{(2)\,n} - v_{i,j-1}^{(2)\,n}\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta\,t^2}{2}\left(\frac{1}{\Delta\,x^2}\left(c_p^2 - 2\,c_s^2\right)\left(\sigma_{i+1,j}^{(1,1)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(1,1)\,n} + \sigma_{i-1,j}^{(1,1)\,n}\right) + \frac{1}{\Delta\,y^2}c_p^2\left(\sigma_{i,j+1}^{(2,2)\,n} - 2\,\sigma_{i,j}^{(2,2)\,n} + \sigma_{i,j-1}^{(2,2)\,n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\,\Delta\,x\,\Delta\,y}\left(c_p^2 - c_s^2\right)\left(\sigma_{i+1,j+1}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i+1,j-1}^{(1,2)\,n} - \sigma_{i-1,j+1}^{(1,2)\,n} + \sigma_{i-1,j-1}^{(1,2)\,n}\right)\right),$$

où $v_{i,j}^{(1)\,n}$, $v_{i,j}^{(2)\,n}$, $\sigma_{i,j}^{(1,1)\,n}$, $\sigma_{i,j}^{(1,2)\,n}$, et $\sigma_{i,j}^{(2,2)\,n}$ sont les composantes de $\boldsymbol{U}_{i,j}^n$ et désignent respectivement les valeurs numériques des composantes de la vitesse élastique et des composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques ; c_p et c_s sont les célérités des ondes de compression et de cisaillement. Les indices $k_1(l)$ et $k_2(l)$ $(1 \leq l \leq s)$, utilisés dans (4.44) et (4.45), sont précisés dans le tableau 4.3.

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_1(l)$	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	1
$k_2(l)$	0	-1	-1	-1	0	0	1	1	1

TAB. 4.3 – *Indices k_1 et k_2 du schéma de Lax-Wendroff dans le cas d'un milieu solide.*

Propriétés. Dans les cas fluide et solide, le schéma de Lax-Wendroff est d'ordre deux en temps et en espace pour une solution de classe C^2. Il est stable sous la condition CFL

$$\mathrm{CFL} = \frac{c\,\Delta\,t}{\max(\Delta\,x, \Delta\,y)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{4.54}$$

où c est la célérité des ondes acoustiques ou la célérité c_p dans le cas d'un milieu solide. En prenant $\mu = 0$, le schéma de Lax-Wendroff en milieu solide (4.53) revient au schéma de Lax-Wendroff en milieu fluide (4.49), avec

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}^{(1,1)\,n} &= \sigma_{i,j}^{(2,2)\,n} = -p_{i,j}^n, \\ \sigma_{i,j}^{(1,2)\,n} &= 0. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Le schéma de Lax-Wendroff est facile à programmer et peu gourmant en ressources informatiques en 2D : il nécessite deux tableaux $d \times N_x \times N_y$, où N_x et N_y sont respectivement le nombre de points de calcul dans la direction x et dans la direction y. Comme en 1D, il introduit de la dispersion numérique. De plus, il introduit des effets d'*anisotropie numérique* dus à la grille de calcul. Expliquons brièvement de quoi il s'agit [16]. Le problème exact de propagation en milieu homogène est isotrope : la valeur du vecteur d'onde exact ne dépend pas de la direction de propagation. Par contre, une analyse par ondes planes du schéma démontre que le nombre d'onde numérique dépend non seulement du pas de discrétisation en espace (conduisant à la dispersion numérique), mais aussi de la direction de propagation par rapport à l'orientation de la grille.

4.3.3 Volumes finis avec limiteur de flux

Le schéma de volumes finis avec limiteur de flux présenté en section 4.2.3 dans le cas 1D est classique. En 2D, nous suivons une approche moins classique, typiquement "volumes finis", proposée par LeVeque : le "Wave Propagation Algorithm" [41, 44, 45]. La première partie de l'algorithme procède par *dimensional splitting* [42], i.e. revient à la résolution de problèmes 1D direction par direction. La deuxième partie de l'algorithme consiste à propager, dans chaque direction, les quantités mises à jour dans l'autre direction lors de la première partie. Cette propagation transverse, portant à la fois sur les ondes de correction et sur les ondes d'incrément, permet d'estimer des termes de dérivées spatiales croisées dans le système d'équations aux dérivées partielles étudié. Elle apporte ainsi trois avantages : réduction de l'anisotropie numérique due à la grille, amélioration de la précision du schéma, augmentation de la condition de stabilité CFL.

Dans les parties qui suivent, nous procédons chaque fois en deux étapes. Nous présentons dans un premier temps les notations et résultats propres au cas fluide, puis solide ; nous présentons dans un deuxième temps les résultats généraux, valables pour les deux milieux. Comme en 1D, nous détaillons les calculs de façon plus poussée que celle strictement nécessaire à la programmation, et ce pour que le lecteur comprenne d'où viennent les différentes expressions. Les calculs strictement nécessaires au schéma sont consignés dans le paragraphe "algorithme final".

Schéma de Godunov. Dans le cas d'un milieu fluide, la matrice des valeurs propres λ^i ($1 \leq i \leq 3$) de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ (3.9) est $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(c, -c, 0)$. Les matrices $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{S}$, remplies avec les vecteurs

propres à droite de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, soit respectivement $\boldsymbol{r}^i$ et $\boldsymbol{s}^i$ $(1 \leq i \leq 3)$, peuvent s'écrire

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \rho\, c & -\rho\, c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \rho\, c & -\rho\, c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

Leurs inverses $\boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{S}^{-1}$ sont

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{\rho\, c} \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{\rho\, c} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dfrac{1}{\rho\, c} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{\rho\, c} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Etant données les matrices $\boldsymbol{\Lambda}^+ = \text{diag}\ (c,0,0)$ et $\boldsymbol{\Lambda}^- = \text{diag}\ (0, -c,0)$, les *parties positives et négatives* $\boldsymbol{A}^\pm = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Lambda}^\pm \boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{B}^\pm = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{\Lambda}^\pm \boldsymbol{S}^{-1}$ sont

$$\boldsymbol{A}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c & 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho\, c^2 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -c & 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho\, c^2 & 0 & -c \end{pmatrix}, \tag{4.58}$$

et

$$\boldsymbol{B}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, c^2 & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, c^2 & -c \end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

On vérifie $\boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}^+ + \boldsymbol{B}^- = \boldsymbol{B}$. Dans le cas d'un milieu solide, la matrice des valeurs propres λ^i $(1 \leq i \leq 5)$ de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ (3.18) est $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(-c_p,c_p,-c_s,c_s,0)$, avec c_p et c_s les célérités des ondes de compression et de cisaillement rappelées en (3.20). Les matrices $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{S}$, remplies avec les vecteurs propres à droite de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, soit respectivement $\boldsymbol{r}^i$ et $\boldsymbol{s}^i$ $(1 \leq i \leq 5)$, peuvent s'écrire

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c_p & -c_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \rho\, c_p^2 & \rho\, c_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\, c_s & -\rho\, c_s & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c_p & -c_p & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho\, c_s & -\rho\, c_s & 0 \\ \rho\, c_p^2 & \rho\, c_p^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

Leurs inverses $\boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{S}^{-1}$ sont
(4.61)

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{c_p} & 0 & \frac{1}{\rho\, c_p^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c_p} & 0 & \frac{1}{\rho\, c_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\rho\, c_s} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho\, c_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\,\lambda}{\rho\, c_p^2} & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_p} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho\, c_p^2} \\ 0 & -\frac{1}{c_p} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho\, c_p^2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho\, c_s} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho\, c_s} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{2\,\lambda}{\rho\, c_p^2} \end{pmatrix}.$$

Etant données les matrices $\boldsymbol{\Lambda}^+ = \text{diag}\ (0,c_p,0,c_s,0)$ et $\boldsymbol{\Lambda}^- = \text{diag}\ (-c_p,0,-c_s,0,0)$, les *parties positives et négatives* $\boldsymbol{A}^\pm = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Lambda}^\pm\boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{B}^\pm = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{\Lambda}^\pm\boldsymbol{S}^{-1}$ sont
(4.62)

$$\boldsymbol{A}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_p & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -\rho\, c_p^2 & 0 & c_p & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\, c_s^2 & 0 & c_s & 0 \\ -\lambda & 0 & \frac{\lambda}{\rho\, c_p} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c_p & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -\rho\, c_p^2 & 0 & -c_p & 0 & 0 \\ 0 & -\rho\, c_s^2 & 0 & -c_s & 0 \\ -\lambda & 0 & -\frac{\lambda}{\rho\, c_p} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et
(4.63)

$$\boldsymbol{B}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_s & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & c_p & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\rho\, c_p} \\ -\rho\, c_s^2 & 0 & 0 & c_s & 0 \\ 0 & -\rho\, c_p^2 & 0 & 0 & c_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c_s & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -c_p & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{\rho\, c_p} \\ -\rho\, c_s^2 & 0 & 0 & -c_s & 0 \\ 0 & -\rho\, c_p^2 & 0 & 0 & -c_p \end{pmatrix}.$$

On vérifie $\boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}^+ + \boldsymbol{B}^- = \boldsymbol{B}$. A la fois dans le cas fluide et dans le cas solide,

nous notons

$$
\begin{aligned}
\Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j} &= \boldsymbol{U}^n_{i,j} - \boldsymbol{U}^n_{i-1,j}, \\
\Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i,j-\frac{1}{2}} &= \boldsymbol{U}^n_{i,j} - \boldsymbol{U}^n_{i,j-1},
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

les sauts des valeurs numériques dans la direction x d'une part, dans la direction y d'autre part. A partir de (4.58) et (4.59) dans le cas fluide, de (4.62) et (4.63) dans le cas solide, et de (4.64), nous pouvons écrire tous les termes apparaissant dans le schéma de Godunov [42]

(4.65)

$$
\boxed{\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} = \boldsymbol{U}^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}^+ \Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j} + \boldsymbol{A}^- \Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\boldsymbol{B}^+ \Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i,j-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}^- \Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right),}
$$

du premier ordre en temps et en espace. En pratique, nous prenons $\Delta x = \Delta y$. La condition de stabilité CFL du schéma (4.65) est particulièrement restrictive : CFL=0.5. Les quantités $\boldsymbol{A}^\pm \Delta_x \boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{B}^\pm \Delta_y \boldsymbol{U}$ intervenant dans (4.65) sont appelées *ondes d'incrément*. Dans le cas fluide, on déduit de (4.58), (4.59), et de la définition des sauts (4.64), la valeur de ces termes

(4.66)

$$
\boldsymbol{A}^+ \Delta_x \boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},j} + \boldsymbol{A}^- \Delta_x \boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c\left(v^{(1)\,n}_{i+1,j} - 2\,v^{(1)\,n}_{i,j} + v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) + \dfrac{1}{\rho}\left(p^n_{i+1,j} - p^n_{i-1,j}\right) \\ 0 \\ \rho\, c^2\left(v^{(1)\,n}_{i+1,j} - v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) - c\left(p^n_{i+1,j} - 2\,p^n_{i,j} + p^n_{i-1,j}\right) \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}^+ \Delta_y \boldsymbol{U}_{i,j-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}^- \Delta_y \boldsymbol{U}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -c\left(v^{(2)\,n}_{i,j+1} - 2\,v^{(2)\,n}_{i,j} + v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right) + \dfrac{1}{\rho}\left(p^n_{i,j+1} - p^n_{i,j-1}\right) \\ \rho\, c^2\left(v^{(2)\,n}_{i,j+1} - v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right) - c\left(p^n_{i,j+1} - 2\,p^n_{i,j} + p^n_{i,j-1}\right) \end{pmatrix}.
$$

Dans le cas solide, on déduit de (4.62), (4.63), et de la définition des sauts (4.64),

(4.67)

$$\boldsymbol{A}^+\,\Delta_x\boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},j}+\boldsymbol{A}^-\,\Delta_x\boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c_p\left(v^{(1)\,n}_{i+1,j}-2\,v^{(1)\,n}_{i,j}+v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right)-\dfrac{1}{\rho}\left(\sigma^{(1,1)\,n}_{i+1,j}-\sigma^{(1,1)\,n}_{i-1,j}\right)\\ -c_s\left(v^{(2)\,n}_{i+1,j}-2\,v^{(2)\,n}_{i,j}+v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right)-\dfrac{1}{\rho}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i+1,j}-\sigma^{(1,2)\,n}_{i-1,j}\right)\\ -\rho\,c_p^2\left(v^{(1)\,n}_{i+1,j}-v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right)-c_p\left(\sigma^{(1,1)\,n}_{i+1,j}-2\,\sigma^{(1,1)\,n}_{i,j}+\sigma^{(1,1)\,n}_{i-1,j}\right)\\ -\rho\,c_s^2\left(v^{(2)\,n}_{i+1,j}-v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right)-c_s\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i+1,j}-2\,\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j}+\sigma^{(1,2)\,n}_{i-1,j}\right)\\ -\lambda\left(v^{(1)\,n}_{i+1,j}-v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right)-\dfrac{\lambda}{\rho\,c_p}\left(\sigma^{(1,1)\,n}_{i+1,j}-2\,\sigma^{(1,1)\,n}_{i,j}+\sigma^{(1,1)\,n}_{i-1,j}\right)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^+\,\Delta_y\boldsymbol{U}_{i,j-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{B}^-\,\Delta_y\boldsymbol{U}_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c_s\left(v^{(1)\,n}_{i,j+1}-2\,v^{(1)\,n}_{i,j}+v^{(1)\,n}_{i,j-1}\right)-\dfrac{1}{\rho}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j+1}-\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j-1}\right)\\ -c_p\left(v^{(2)\,n}_{i,j+1}-2\,v^{(2)\,n}_{i,j}+v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right)-\dfrac{1}{\rho}\left(\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j+1}-\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j-1}\right)\\ -\lambda\left(v^{(2)\,n}_{i,j+1}-v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right)-\dfrac{\lambda}{\rho\,c_p}\left(\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j+1}-2\,\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j}+\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j-1}\right)\\ -\rho\,c_s^2\left(v^{(1)\,n}_{i,j+1}-v^{(1)\,n}_{i,j-1}\right)-c_s\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j+1}-2\,\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j}+\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j-1}\right)\\ -\rho\,c_p^2\left(v^{(2)\,n}_{i,j+1}-v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right)-c_p\left(\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j+1}-2\,\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j}+\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j-1}\right)\end{pmatrix}.$$

Corrections du second ordre. On décompose alors respectivement les sauts (4.64), dans les directions x et y, sur la base des vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{A}$ et de la matrice $\boldsymbol{B}$. Soit

(4.68)

$$\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j}=\sum_{p=1}^{d}\alpha^p_{i-\frac{1}{2},j}\,\boldsymbol{r}^p=\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j}\\ \vdots\\ \alpha^d_{i-\frac{1}{2},j}\end{pmatrix},$$

$$\Delta_y\boldsymbol{U}^n_{i,j-\frac{1}{2}}=\sum_{p=1}^{d}\beta^p_{i,j-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{s}^p=\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}\\ \vdots\\ \beta^d_{i,j-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

avec $d=3$ dans le cas d'un fluide et $d=5$ dans le cas d'un solide. Dans tous les cas, nous ne calculons pas les derniers coefficients α^d et β^d : en effet, ceux-ci sont associés à une valeur propre λ^d nulle, et n'interviennent alors pas dans la suite de l'algorithme. Dans le cas d'un fluide, nous déduisons de (4.57) et (4.68) les coefficients de la décomposition des sauts selon x sur la base des

vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}\right), \\
\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) - \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}\right),
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

et selon y sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}\right), \\
\beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right) - \frac{1}{2\,\rho\,c}\left(p^n_{i,j} - p^n_{i-1,j}\right).
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Dans le cas d'un solide, nous déduisons de (4.61) et (4.68) les coefficients de la décomposition des sauts selon x sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2\,c_p}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\left(\sigma^{(1,1)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,1)\,n}_{i-1,j}\right), \\
\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} &= -\frac{1}{2\,c_p}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\left(\sigma^{(1,1)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,1)\,n}_{i-1,j}\right), \\
\alpha^3_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,2)\,n}_{i-1,j}\right), \\
\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i-1,j}\right) - \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,2)\,n}_{i-1,j}\right),
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

et selon y sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\,c_p}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\left(\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(2,2)\,n}_{i,j-1}\right), \\
\beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2\,c_p}\left(v^{(2)\,n}_{i,j} - v^{(2)\,n}_{i,j-1}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\left(\sigma^{(2,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(2,2)\,n}_{i,j-1}\right), \\
\beta^3_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i,j-1}\right) + \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,2)\,n}_{i,j-1}\right), \\
\beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(v^{(1)\,n}_{i,j} - v^{(1)\,n}_{i,j-1}\right) - \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\left(\sigma^{(1,2)\,n}_{i,j} - \sigma^{(1,2)\,n}_{i,j-1}\right).
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

On définit alors, dans les directions x et y, l'analogue de (4.19) dans le cas 1D, soit

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{W}}^p_{i-\frac{1}{2},j} &= \Phi\left(\theta^p_{i-\frac{1}{2},j}\right)\alpha^p_{i-\frac{1}{2},j}\,\boldsymbol{r}^p, \\
\overline{\boldsymbol{X}}^p_{i,j-\frac{1}{2}} &= \Phi\left(\theta^p_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\beta^p_{i,j-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{s}^p,
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

($1 \leq p \leq d$, avec $d = 3$ pour un fluide et $d = 5$ pour un solide), avec Φ la fonction limiteur de flux vue en 1D (4.21), et θ une mesure locale de la régularité de la solution numérique

$$
\begin{aligned}
&\theta^p_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\alpha^p_{i-\frac{3}{2},j}}{\alpha^p_{i-\frac{1}{2},j}} \quad \text{si } \lambda^p > 0, \qquad \theta^p_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\alpha^p_{i+\frac{1}{2},j}}{\alpha^p_{i-\frac{1}{2},j}} \quad \text{si } \lambda^p < 0,\\
&\theta^p_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\beta^p_{i,j-\frac{3}{2}}}{\beta^p_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \lambda^p > 0, \qquad \theta^p_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\beta^p_{i,j+\frac{1}{2}}}{\beta^p_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \lambda^p < 0.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Si un dénominateur est nul dans (4.74), la mesure θ correspondante est prise égale à 1. Nous définissons alors

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i-\frac{1}{2},j} &= \sum_{p=1}^{d} |\lambda^p| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\lambda^p|\right) \overline{\boldsymbol{W}}^p_{i-\frac{1}{2},j},\\
\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{i,j-\frac{1}{2}} &= \sum_{p=1}^{d} |\lambda^p| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta y} |\lambda^p|\right) \overline{\boldsymbol{X}}^p_{i,j-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

De (4.56) et (4.74), nous déduisons (4.75) dans le cas fluide

(4.76)

$$
\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i-\frac{1}{2},j} = c\left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\alpha^1_{i-\frac{3}{2},j}}{\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix}1\\0\\\rho c\end{pmatrix} + \Phi\left(\frac{\alpha^2_{i+\frac{1}{2},j}}{\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix}1\\0\\-\rho c\end{pmatrix}\right),
$$

$$
\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{i,j-\frac{1}{2}} = c\left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\beta^1_{i,j-\frac{3}{2}}}{\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\rho c\end{pmatrix} + \Phi\left(\frac{\beta^2_{i,j+\frac{1}{2},j}}{\beta^2_{i,j-\frac{1}{2},j}}\right)\beta^2_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\rho c\end{pmatrix}\right).
$$

De même, de (4.60) et (4.74), nous déduisons (4.75) dans le cas solide
(4.77)

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i-\frac{1}{2},j} &= c_p\left(1-c_p\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\alpha^1_{i+\frac{1}{2},j}}{\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^1_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix} c_p \\ 0 \\ \rho\,c_p^2 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}+\Phi\left(\frac{\alpha^2_{i-\frac{3}{2},j}}{\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix} -c_p \\ 0 \\ \rho\,c_p^2 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)\\
&+ c_s\left(1-c_s\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\alpha^3_{i+\frac{1}{2},j}}{\alpha^3_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^3_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \rho\,c_s \\ 0 \end{pmatrix}+\Phi\left(\frac{\alpha^4_{i-\frac{3}{2},j}}{\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\rho\,c_s \\ 0 \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

et
(4.78)

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{i,j-\frac{1}{2}} &= c_p\left(1-c_p\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\beta^1_{i,j+\frac{1}{2}}}{\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ c_p \\ \lambda \\ 0 \\ \rho\,c_p^2 \end{pmatrix}+\Phi\left(\frac{\beta^2_{i,j-\frac{3}{2}}}{\beta^2_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\beta^2_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -c_p \\ \lambda \\ 0 \\ \rho\,c_p^2 \end{pmatrix}\right)\\
&+ c_s\left(1-c_s\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\right)\left(\Phi\left(\frac{\beta^3_{i,j+\frac{1}{2}}}{\beta^3_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\beta^3_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho\,c_s \\ 0 \end{pmatrix}+\Phi\left(\frac{\beta^4_{i,j-\frac{3}{2}}}{\beta^4_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\beta^4_{i,j-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho\,c_s \\ 0 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, si les dénominateurs des fractions intervenant dans Φ sont nuls, on prend

$\Phi = 1$. Les *ondes de correction*, analogues de (4.17) en 1D, sont alors définies par

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i-\frac{1}{2},j}, \\ \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{i,j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Propagation transverse des ondes d'incrément. Les ondes d'incrément, soit $\boldsymbol{A}^{\pm}\,\Delta_x \boldsymbol{U}^n$ et $\boldsymbol{B}^{\pm}\,\Delta_y \boldsymbol{U}^n$, utilisées dans les schémas de Godunov (4.65), correspondent respectivement à la résolution de problèmes de Riemann 1D dans les directions x et y. Ces ondes d'incrément sont maintenant propagées dans les directions qui leur sont orthogonales, soit respectivement y et x. Pour cela, l'onde d'incrément dans une direction donnée est décomposée sur la base des vecteurs propres de l'autre direction. Cette décomposition est ensuite ajoutée aux ondes de correction de cette autre direction, calculés en (4.75). On écrit pour cela [41]

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} &:= \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta y}\,\Big(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{B}^{-}\Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{B}^{-}\Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}} \\ &\qquad + \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{B}^{+}\Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i,j-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{B}^{+}\Delta_y \boldsymbol{U}^n_{i-1,j-\frac{1}{2}}\Big), \\ \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} &:= \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\Big(\boldsymbol{B}^{-}\boldsymbol{A}^{+}\Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j} + \boldsymbol{B}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2},j} \\ &\qquad + \boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{A}^{-}\Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2},j-1} + \boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{A}^{+}\Delta_x \boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j-1}\Big), \end{aligned}} \tag{4.80}$$

où la notation ":=" signifie l'incrémentation d'une variable, au sens informatique du terme. Le but de la partie qui suit est d'écrire explicitement les termes ajoutés à $\overline{\boldsymbol{F}}$ et $\overline{\boldsymbol{G}}$ dans (4.80), à la fois dans le cas fluide et dans le cas solide.

Pour simplifier la programmation et diminuer le temps de calcul, nous exprimons maintenant (4.80) uniquement en fonction des coefficients α^p et β^p $(1 \leq p \leq d)$ déjà calculés. Dans le cas d'un fluide, nous déduisons de $\boldsymbol{A}^{\pm}$, $\boldsymbol{B}^{\pm}$ (4.58), (4.59) et des coefficients α^p et β^p (4.69), (4.70), l'écriture de la propagation transverse des ondes d'incrément (4.80)

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} &:= \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{4}\,\frac{\Delta t}{\Delta y}\begin{pmatrix} c^2\left(\beta^2_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^2_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\ 0 \\ \rho\, c^3\left(\beta^2_{i-1,j+\frac{1}{2}} - \beta^2_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix}, \\ \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} &:= \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{pmatrix} 0 \\ c^2\left(\alpha^2_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^2_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\ \rho\, c^3\left(\alpha^2_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^2_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^1_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Dans le cas d'un solide, nous déduisons de $\boldsymbol{A}^{\pm}$, $\boldsymbol{B}^{\pm}$ (4.62), (4.63) et des coefficients α^p et β^p (4.71), (4.72), l'écriture de la propagation transverse des ondes d'incrément (4.80)

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} := \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{4}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,y} \Bigg(& \begin{pmatrix}
c_p\,c_s\left(-\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
c_s^2\left(\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\rho\,c_p^2\,c_s\left(\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} - \beta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\rho\,c_s^3\left(-\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} - \beta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\lambda\,c_s\left(\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^4_{i,j-\frac{1}{2}} - \beta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right)
\end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix}
\frac{\lambda\,c_p}{\rho}\left(\beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} - \beta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
c_p^2\,c_s\left(-\beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} - \beta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\lambda\,c_p^2\left(-\beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\rho\,c_p^2\,c_s^2\left(\beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right) \\
\frac{\lambda^2}{\rho}\left(-\beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}}\right)
\end{pmatrix} \Bigg),
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} := \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x} \Bigg(& \begin{pmatrix}
c_p^2\,c_s\left(\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^2_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\frac{\lambda\,c_p}{\rho}\left(-\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^2_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\frac{\lambda^2}{\rho}\left(-\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^2_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\rho\,c_p^2\,c_s^2\left(\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^2_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\lambda\,c_p^2\left(-\alpha^2_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^1_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^2_{i-\frac{1}{2},j-1}\right)
\end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix}
c_s^2\left(\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^4_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
c_p\,c_s\left(-\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j-1} + \alpha^4_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\lambda\,c_s\left(-\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^4_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\rho\,c_s^3\left(\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j} - \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^4_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) \\
\rho\,c_p^2\,c_s\left(-\alpha^4_{i-\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha^3_{i+\frac{1}{2},j-1} - \alpha^4_{i-\frac{1}{2},j-1}\right)
\end{pmatrix} \Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

Propagation transverse des ondes de correction. Le but de cette partie est de propager les ondes $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$ (4.75), respectivement associées aux directions x et y, suivant les directions y et x. Pour cela, on décompose $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$, explicitées dans les cas fluide (4.76) et solide (4.78), respectivement sur la base des vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{A}$ et de la matrice $\boldsymbol{B}$. Soit

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i-\frac{1}{2},j} &= \sum_{p=1}^{d} \varepsilon^p_{i-\frac{1}{2},j}\,\boldsymbol{s}^p = \boldsymbol{S}\begin{pmatrix} \varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} \\ \vdots \\ \varepsilon^d_{i-\frac{1}{2},j} \end{pmatrix}, \\
\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{i-\frac{1}{2},j} &= \sum_{p=1}^{d} \delta^p_{i,j-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} \delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \delta^d_{i,j-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

avec $d = 3$ dans le cas d'un fluide et $d = 5$ dans le cas d'un solide. Comme pour (4.68), nous ne calculons pas les derniers coefficients ε^d et δ^d : en effet, ceux-ci sont associés à une valeur propre λ^d nulle, et n'interviennent alors pas dans la suite de l'algorithme. Dans le cas d'un fluide, nous déduisons de (4.57) et (4.84) les coefficients de la décomposition des sauts selon x sur la base des

vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c}\,\overline{\mathcal{F}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2\,\rho\,c}\,\overline{\mathcal{F}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

et selon y sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c}\,\overline{\mathcal{G}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\delta^2_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2\,\rho\,c}\,\overline{\mathcal{G}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

où $\overline{\mathcal{F}}^{(i)}$ et $\overline{\mathcal{G}}^{(i)}$ sont respectivement la i-ème composante de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$. Dans le cas d'un solide, nous déduisons de (4.61) et (4.84) les coefficients de la décomposition des sauts selon x sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2\,c_p}\,\overline{\mathcal{F}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(5)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j} &= -\frac{1}{2\,c_p}\,\overline{\mathcal{F}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(5)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\varepsilon^3_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\,\overline{\mathcal{F}}^{(4)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\varepsilon^4_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{F}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\,\overline{\mathcal{F}}^{(4)}_{i-\frac{1}{2},j},
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

et selon y sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\,c_p}\,\overline{\mathcal{G}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\delta^2_{i,j-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2\,c_p}\,\overline{\mathcal{G}}^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_p^2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(3)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\delta^3_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\,\overline{\mathcal{G}}^{(4)}_{i-\frac{1}{2},j},\\
\delta^4_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{G}}^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2\,\rho\,c_s}\,\overline{\mathcal{G}}^{(4)}_{i-\frac{1}{2},j}.
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

A partir de ces décompositions, l'algorithme permettant de prendre en compte la propagation

transverse des ondes de correction est

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} &:= \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,y}\left(\sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^-\;\delta^p_{i,j-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p + \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^+\;\delta^p_{i-1,j-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p\right.\\
&\qquad\left. - \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^-\;\delta^p_{i,j+\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p - \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^+\;\delta^p_{i-1,j+\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{r}^p\right),\\
\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} &:= \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\left(\sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^-\;\varepsilon^p_{i-\frac{1}{2},j}\,\boldsymbol{s}^p + \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^+\;\varepsilon^p_{i-\frac{1}{2},j-1}\,\boldsymbol{s}^p\right.\\
&\qquad\left. - \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^-\;\varepsilon^p_{i+\frac{1}{2},j}\,\boldsymbol{s}^p - \sum_{p=1}^{d-1}(\lambda^p)^+\;\varepsilon^p_{i+\frac{1}{2},j-1}\,\boldsymbol{s}^p\right),
\end{aligned}
}
\tag{4.89}
$$

avec $d = 3$ pour un fluide et $d = 5$ pour un solide. Les ondes $\overline{\boldsymbol{F}}$ et $\overline{\boldsymbol{G}}$ sont ainsi incrémentées pour la deuxième fois (la première était (4.80)). Les valeurs $(\lambda^p)^-$ découlent des valeurs propres et de la notation (4.9). Nous explicitons (4.89) dans les cas fluide et solide. Dans le cas d'un fluide, nous déduisons des vecteurs propres $\boldsymbol{r}^p$ et $\boldsymbol{s}^p$ consignés dans (4.56) l'écriture explicite de la propagation transverse des ondes de correction (4.89)

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} &:= \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,y}\begin{pmatrix} c\left(-\delta^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \delta^2_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)\\ 0\\ \rho\,c^2\left(\delta^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}} - \delta^2_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right)\end{pmatrix},\\
\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} &:= \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,t}{\Delta\,x}\begin{pmatrix} 0\\ c\left(-\varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j-1} + \varepsilon^2_{i+\frac{1}{2},j} - \varepsilon^1_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)\\ \rho\,c^2\left(\varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j-1} - \varepsilon^2_{i+\frac{1}{2},j} - \varepsilon^1_{i+\frac{1}{2},j-1}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

De même, dans le cas d'un solide, nous déduisons des vecteurs propres $\boldsymbol{r}^p$ et $\boldsymbol{s}^p$ consignés dans

(4.60) l'écriture explicite de la propagation transverse des ondes de correction (4.89)

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} := \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\begin{pmatrix} c_p^2\left(-\delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^1_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \delta^2_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right) \\ c_s\left(-\delta^3_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^3_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}} - \delta^4_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right) \\ \rho\, c_p^3\left(-\delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^1_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}} - \delta^2_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right) \\ \rho\, c_s^2\left(-\delta^3_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^3_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta^4_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \delta^4_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right) \\ \lambda\, c_p\left(-\delta^1_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta^1_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta^2_{i-1,j-\frac{1}{2}} - \delta^2_{i-1,j+\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix},$$

(4.91)

$$\boldsymbol{G}_{i,j-\frac{1}{2}} := \boldsymbol{G}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{pmatrix} c_s\left(-\varepsilon^3_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^3_{i+\frac{1}{2},j} + \varepsilon^4_{i-\frac{1}{2},j-1} - \varepsilon^4_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \\ c_p^2\left(-\varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^1_{i+\frac{1}{2},j} - \varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j-1} + \varepsilon^2_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \\ \lambda\, c_p\left(-\varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^1_{i+\frac{1}{2},j} + \varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j-1} - \varepsilon^2_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \\ \rho\, c_s^2\left(-\varepsilon^3_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^3_{i+\frac{1}{2},j} - \varepsilon^4_{i-\frac{1}{2},j-1} + \varepsilon^4_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \\ \rho\, c_p^3\left(-\varepsilon^1_{i-\frac{1}{2},j} + \varepsilon^1_{i+\frac{1}{2},j} + \varepsilon^2_{i-\frac{1}{2},j-1} - \varepsilon^2_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \end{pmatrix}.$$

La définition des ondes intermédiaires $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$ (4.75) trouve sa justification dans la propagation transverse des ondes de correction, présentée durant cette section. En effet, les ondes de correction $\overline{\boldsymbol{F}}$ et $\overline{\boldsymbol{G}}$, définies à partir de (4.79), sont mises à jour une première fois en (4.80), pour simuler la propagation transverse des ondes d'incrément. Sans le passage par $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$, les décompositions (4.84) puis les mises à jour (4.89) reviendraient à propager une deuxième fois les ondes d'incrément dans les directions transverses.

Algorithme final. Le schéma de volumes finis avec limiteur de flux s'écrit alors
(4.92)

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} = \boldsymbol{U}^n_{i,j} &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}^+\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i-\frac{1}{2},j} + \boldsymbol{A}^-\Delta_x\boldsymbol{U}^n_{i+\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\boldsymbol{B}^+\Delta_y\boldsymbol{U}^n_{i,j-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}^-\Delta_y\boldsymbol{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j} - \overline{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\overline{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \overline{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}}$$

Pour résumer, la programmation de ce schéma se décompose en huit étapes :

- calcul des *ondes d'incrément* $\boldsymbol{A}^\pm\Delta_x\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{B}^\pm\Delta_y\boldsymbol{U}$ à partir de (4.66) dans le cas fluide, de (4.67) dans le cas solide;
- calcul des coefficients α^p et β^p de la décomposition des sauts $\Delta_x\boldsymbol{U}$ et $\Delta_y\boldsymbol{U}$ sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. On utilise pour cela (4.69) et (4.70) dans le cas fluide, (4.71) et (4.72) dans le cas solide ;

- calcul des ondes intermédiaires $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$, à partir de (4.76) dans le cas fluide, et de (4.78) dans le cas solide ;
- calcul des *ondes de correction* $\overline{\boldsymbol{F}}$ et $\overline{\boldsymbol{G}}$ à partir de (4.79) ;
- mise à jour des ondes de correction à partir de (4.81) dans le cas fluide, de (4.82) et (4.83) dans le cas solide. Cette étape permet de prendre en compte la propagation transverse des ondes d'incrément ;
- calcul des coefficients ε^p et δ^p de la décomposition de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ et $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$ sur la base des vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. On utilise pour cela (4.85) et (4.86) dans le cas fluide, (4.87) et (4.88) dans le cas solide ;
- mise à jour des ondes de correction à partir de (4.90) dans le cas fluide, de (4.91) dans le cas solide ;
- avancée en temps, via (4.92).

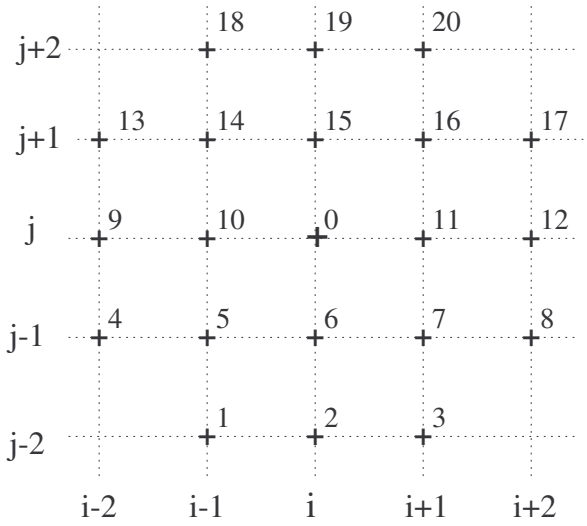

FIG. 4.3 – *Les points utilisés pour l'avancée en temps du schéma de volumes finis avec limiteur de flux sont repérés par des croix.*

De ces huit étapes, il découle que ce schéma de volumes finis utilise $s = 21$ points pour l'avancée en temps en un point donné, schématisés en figure 4.3. A la différence du schéma de Lax-Wendroff, le cas fluide ne peut pas être déduit du cas solide en faisant tendre μ vers 0. En effet, l'algorithme dépend de $\boldsymbol{R}^{-1}$ et $\boldsymbol{S}^{-1}$, dont certains coefficients sont en $1/c_s$, donc en $1/(\mu)^{1/2}$, dans le cas solide (4.61). Les indices $k_1(l)$ et $k_2(l)$ $(0 \leq l \leq s-1)$ utilisés pour les notations symboliques (4.44) et (4.45), sont précisés dans le tableau 4.4. Ce schéma est plus couteux en temps de calcul que le schéma de Lax-Wendroff, et plus délicat à programmer. Notons cependant que la programmation est simplifiée au maximum, grâce aux formules explicites présentées au cours de cette section.

Le schéma est peu gourmand en taille mémoire : l'avancée en temps (4.92) nécessite seulement le stockage de deux tableaux $d \times N_x \times N_y$, où d est le nombre de composantes de la solution exacte ($d = 3$ pour un fluide et $d = 5$ pour un solide), et N_x et N_y sont respectivement le nombre de points de calcul en x et en y. De plus, la prise en compte des propagations transverses d'ondes

d'incrément et d'ondes de correction augmente la limite de stabilité CFL jusqu'à 1, soit

$$\text{CFL} = \frac{c\,\Delta\,t}{\max(\Delta\,x, \Delta\,y)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{4.93}$$

avec $c = c_p$ dans le cas d'un milieu solide. Cette condition permet de prendre un pas de temps $\Delta\,t\,\sqrt{2}$ fois plus grand que dans le cas du schéma de Lax-Wendroff, ce qui compense en partie le coût supplémentaire du schéma de volumes finis.

Enfin, les expériences numériques démontrent les qualités du schéma : en plus de l'élimination de la dispersion numérique, l'anisotropie numérique introduite par la grille de calcul est négligeable par rapport à celle introduite par le schéma de Lax-Wendroff. Le schéma obtenu est réellement multidimensionnel, à la différence des schémas construits par *dimensional splitting* [73]. La seule partie de l'algorithme où subsiste encore une détermination direction par direction est la calcul des ondes limitées (4.73). Il existe des procédures permettant ce calcul par des limiteurs de flux réellement multidimensionnels [84], mais ceux-ci sont lourds en temps de calcul et n'apportent pas une nette amélioration.

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_1(l)$	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2	-2	-1
$k_2(l)$	0	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	0	0

l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	01
$k_1(l)$	1	2	-2	-1	0	1	2	-1	0	1
$k_2(l)$	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2

TAB. 4.4 – *Indices k_1 et k_2 du schéma de volumes finis avec limiteurs de flux.*

4.3.4 WENO 5

En 2D, le schéma WENO 5 suit le même modèle qu'en 1D. Il sera donc moins détaillé qu'en section 4.2.4. Nous insistons surtout sur les changements de base, i.e. les entrées et sorties du champ des caractéristiques, et ce dans les cas fluide et solide.

Entrée dans le champ des caractéristiques. L'objet des trois prochaines sections est de calculer les flux numériques vectoriels $\boldsymbol{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}$ et $\boldsymbol{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ tels que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,\boldsymbol{U} &\approx \frac{\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j}-\boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\,x}, \\ \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial\,y}\,\boldsymbol{U} &\approx \frac{\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{G}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\,y}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Dans le cas d'un milieu fluide, les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ (3.9) sont

$$\lambda^1 = +c, \quad \lambda^2 = -c, \quad \lambda^3 = 0. \tag{4.95}$$

Etant donnés les vecteurs propres $\boldsymbol{r}^k$ et $\boldsymbol{s}^k$ $(1 \le k \le 3)$ à droite de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, donnés en (4.56), nous calculons les vecteurs propres à gauche de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, soit $\boldsymbol{l}^k$ et $\boldsymbol{m}^k$, vérifiant $(1 \le k \le 3)$

$${}^T\boldsymbol{l}^k\,\boldsymbol{A} = \lambda^k\,{}^T\boldsymbol{l}^k, \tag{4.96}$$

et les conditions de normalisation

$$\boldsymbol{r}^k\,\boldsymbol{l}^k = 1. \tag{4.97}$$

Des expressions de $\boldsymbol{r}^k$ et $\boldsymbol{s}^k$ (4.56) et des conditions (4.96), (4.97), nous déduisons

$$\boldsymbol{l}^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\,c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{\rho\,c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

et

$$\boldsymbol{m}^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{1}{\rho\,c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{\rho\,c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.99}$$

Les grandeurs θ^k, ε^k, $f(\theta^k)$ et $g(\varepsilon^k)$ $(1 \le k \le 3)$, définies par

$$\begin{aligned} \theta^k &= \boldsymbol{l}^k\,\boldsymbol{U}, & f(\theta^k) &= \boldsymbol{l}^k\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{U}), \\ \varepsilon^k &= \boldsymbol{m}^k\,\boldsymbol{U}, & g(\varepsilon^k) &= \boldsymbol{m}^k\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{U}), \end{aligned} \tag{4.100}$$

s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{1}{\rho\,c}\,p\right), & f\left(\theta^1\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\,p + c\,v_1\right), \\ \theta^2 &= \frac{1}{2}\left(v_1 - \frac{1}{\rho\,c}\,p\right), & f\left(\theta^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\,p - c\,v_1\right), \\ \theta^3 &= v_2, & f\left(\theta^3\right) &= 0, \end{aligned} \tag{4.101}$$

et

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^1 &= \frac{1}{2}\left(v_2 + \frac{1}{\rho\, c}\, p\right), & g\left(\varepsilon^1\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\, p + c\, v_2\right), \\
\varepsilon^2 &= \frac{1}{2}\left(v_2 - \frac{1}{\rho\, c}\, p\right), & g\left(\varepsilon^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\, p - c\, v_2\right), \\
\varepsilon^3 &= v_1, & g\left(\varepsilon^3\right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

Dans le cas d'un milieu solide, les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ (3.18) sont

$$
\lambda^1 = -c_p, \quad \lambda^2 = +c_p, \quad \lambda^3 = -c_S, \quad \lambda^4 = +c_s, \quad \lambda^5 = 0. \tag{4.103}
$$

Etant donnés les vecteurs propres $\boldsymbol{r}^k$ et $\boldsymbol{s}^k$ $(1 \leq k \leq 5)$ à droite de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, donnés en (4.60), nous calculons les vecteurs propres à gauche de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, soit $\boldsymbol{l}^k$ et $\boldsymbol{m}^k$, vérifiant (4.96) et (4.97). Des expressions de $\boldsymbol{r}^k$ et $\boldsymbol{s}^k$ (4.60), nous déduisons

(4.104)

$$
\boldsymbol{l}^1 = \frac{1}{2\, c_p}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}^2 = \frac{1}{2\, c_p}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{\rho\, c_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-\lambda}{\rho\, c_p^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

et

(4.105)

$$
\boldsymbol{m}^1 = \frac{1}{2\, c_p}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_p} \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}^2 = \frac{1}{2\, c_p}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_p} \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho\, c_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{\rho\, c_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{-\lambda}{\rho\, c_p^2} \end{pmatrix},
$$

où λ est un des coefficients de Lamé. Les grandeurs θ^k, ε^k, $f(\theta^k)$ et $g(\varepsilon^k)$, définies par (4.96) et

(4.97), s'écrivent alors

$$
\begin{aligned}
\theta^1 &= \frac{1}{2\,c_p}\left(v_1 + \frac{1}{\rho\,c_p}\,\sigma_{11}\right), & f\left(\theta^1\right) &= -\frac{1}{2\,\rho\,c_p}\left(\sigma_{11} + \rho\,c_p\,v_1\right),\\
\theta^2 &= \frac{1}{2\,c_p}\left(-v_1 + \frac{1}{\rho\,c_p}\,\sigma_{11}\right), & f\left(\theta^2\right) &= -\frac{1}{2\,\rho\,c_p}\left(-\sigma_{11} + \rho\,c_p\,v_1\right),\\
\theta^3 &= \frac{1}{2}\left(v_2 + \frac{1}{\rho\,c_s}\,\sigma_{12}\right), & f\left(\theta^3\right) &= -\frac{1}{2\,\rho}\left(\sigma_{12} + \rho\,c_s\,v_2\right),\\
\theta^4 &= \frac{1}{2}\left(v_2 - \frac{1}{\rho\,c_s}\,\sigma_{12}\right), & f\left(\theta^4\right) &= -\frac{1}{2\,\rho}\left(\sigma_{12} - \rho\,c_s\,v_2\right),\\
\theta^5 &= -\frac{\lambda}{\rho\,c_p^2}\,\sigma_{11} + \sigma_{22}, & f\left(\theta^5\right) &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^1 &= \frac{1}{2\,c_p}\left(v_2 + \frac{1}{\rho\,c_p}\,\sigma_{22}\right), & g\left(\varepsilon^1\right) &= -\frac{1}{2\,\rho\,c_p}\left(\sigma_{22} + \rho\,c_p\,v_2\right),\\
\varepsilon^2 &= \frac{1}{2\,c_p}\left(-v_2 + \frac{1}{\rho\,c_p}\,\sigma_{22}\right), & g\left(\varepsilon^2\right) &= -\frac{1}{2\,\rho\,c_p}\left(-\sigma_{22} + \rho\,c_p\,v_2\right),\\
\varepsilon^3 &= \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{1}{\rho\,c_s}\,\sigma_{12}\right), & g\left(\varepsilon^3\right) &= -\frac{1}{2\,\rho}\left(\sigma_{12} + \rho\,c_s\,v_1\right),\\
\varepsilon^4 &= \frac{1}{2}\left(v_1 - \frac{1}{\rho\,c_s}\,\sigma_{12}\right), & g\left(\varepsilon^4\right) &= -\frac{1}{2\,\rho}\left(\sigma_{12} - \rho\,c_s\,v_1\right),\\
\varepsilon^5 &= \sigma_{11} - \frac{\lambda}{\rho\,c_p^2}\,\sigma_{22}, & g\left(\varepsilon^5\right) &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.107}
$$

Le but du prochain paragraphe est de déterminer les flux numériques scalaires $f^k_{i\pm1/2,j}$ et $g^k_{i,j\pm1/2}$ tels que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\,x}\,f(\theta^k) &\approx \frac{f^k_{i+\frac{1}{2},j} - f^k_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\,x},\\
\frac{\partial}{\partial\,y}\,g(\varepsilon^k) &\approx \frac{g^k_{i,j+\frac{1}{2}} - g^k_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\,y},
\end{aligned}
\tag{4.108}
$$

avec $1 \leq k \leq 2$ pour un fluide et $1 \leq k \leq 4$ pour un solide. On note respectivement $\theta^k_{i,j}$ et $\varepsilon^k_{i,j}$ les approximations numériques de $\theta^k(x_i,y_j)$ et $\varepsilon^k(x_i,y_j)$. On remarque que les grandeurs $f(\theta^k)$ et $g(\varepsilon^k)$ associées à la valeur propre nulle (λ^3 dans le cas fluide et λ^5 dans le cas solide) sont nulles.

Interpolation WENO. Dans le cas d'un milieu fluide, les flux numériques scalaires sont obtenus par les interpolations

$$
\begin{aligned}
f^1_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^1_{i-2+k+l,j}\right), \\
f^2_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^2_{i+3-k-l,j}\right),
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

et

$$
\begin{aligned}
g^1_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^1_{i,j-2+k+l}\right), \\
g^2_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^2_{i,j+3-k-l}\right),
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

avec les coefficients $a^3_{k,l}$ tabulés (tableau 4.1). Les poids $\omega_k(f)$ et $\omega_k(g)$ sont calculés via (4.33), faisant intervenir les mesures de régularité IS_k. Ces dernières sont légèrement modifiées par rapport au cas 1D : pour calculer $\omega_k(f)$, on remplace θ^k_i par $\theta^k_{i,j}$ dans (4.34) et (4.35) ; pour calculer $\omega_k(g)$, on remplace θ^k_i par $\theta^k_{i,j}$ et f par g dans (4.34) et (4.35).

Dans le cas d'un milieu solide, les interpolations s'écrivent

$$
\begin{aligned}
f^1_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^1_{i+3-k-l,j}\right), \\
f^2_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^2_{i-2+k+l,j}\right), \\
f^3_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^3_{i+3-k-l,j}\right), \\
f^4_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(f)\, a^3_{k,l}\, f\left(\theta^4_{i-2+k+l,j}\right),
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

et

$$
\begin{aligned}
g^1_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^1_{i,j+3-k-l}\right), \\
g^2_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^2_{i,j-2+k+l}\right), \\
g^3_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^3_{i,j+3-k-l}\right), \\
g^4_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \omega_k(g)\, a^3_{k,l}\, g\left(\varepsilon^4_{i,j-2+k+l}\right).
\end{aligned}
\tag{4.112}
$$

Les modifications de IS_k mentionnées dans le cas fluide 2D s'appliquent ici aussi.

Sortie du champ des caractéristiques. Les flux vectoriels sont obtenus en multipliant les flux numériques scalaires par les vecteurs propres à droite, puis en sommant les résultats, soit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j} &= \sum_{k=1}^{d-1} f^k_{i+\frac{1}{2},j}\, \boldsymbol{r}^k, \\
\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=1}^{d-1} g^k_{i,j+\frac{1}{2}}\, \boldsymbol{s}^k,
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

avec $d = 3$ pour un fluide et $d = 5$ pour un solide. On obtient alors, dans le cas d'un fluide,

$$
\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{pmatrix} f^1_{i+\frac{1}{2},j} + f^2_{i+\frac{1}{2},j} \\ 0 \\ \rho\, c\left(f^1_{i+\frac{1}{2},j} - f^2_{i+\frac{1}{2},j}\right) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ g^1_{i,j+\frac{1}{2}} + g^2_{i,j+\frac{1}{2}} \\ \rho\, c\left(g^1_{i,j+\frac{1}{2}} - g^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix},
\tag{4.114}
$$

et dans le cas solide

(4.115)

$$
\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{pmatrix} c_p\left(f^1_{i+\frac{1}{2},j} - f^2_{i+\frac{1}{2},j}\right) \\ f^3_{i+\frac{1}{2},j} + f^4_{i+\frac{1}{2},j} \\ \rho\, c_p^2\left(f^1_{i+\frac{1}{2},j} + f^2_{i+\frac{1}{2},j}\right) \\ \rho\, c_s\left(f^3_{i+\frac{1}{2},j} - f^4_{i+\frac{1}{2},j}\right) \\ \lambda\left(f^1_{i+\frac{1}{2},j} + f^2_{i+\frac{1}{2},j}\right) + f^5_{i+\frac{1}{2},j} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} g^3_{i,j+\frac{1}{2}} + g^4_{i,j+\frac{1}{2}} \\ c_p\left(g^1_{i,j+\frac{1}{2}} - g^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \\ \lambda\left(g^1_{i,j+\frac{1}{2}} + g^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right) + g^5_{i,j+\frac{1}{2}} \\ \rho\, c_s\left(g^3_{i,j+\frac{1}{2}} - g^4_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \\ \rho\, c_p^2\left(g^1_{i,j+\frac{1}{2}} + g^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix}.
$$

Intégration en temps. L'intégration en temps de (3.10) dans le cas fluide, de (3.19) dans le cas solide, se ramène alors à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}_{i,j} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_{i,j}), \quad \text{avec } \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}_{i,j}) = -\frac{\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} - \frac{\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{G}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}. \tag{4.116}$$

L'intégration en temps est alors effectuée par une méthode de type Runge-Kutta d'ordre 4, semblable à celle présentée en (4.41) et non répétée ici : il suffit de remplacer l'indice i par les indices i,j. Comme en 1D, le calcul d'une itération de Runge-Kutta se décompose en sept étapes :

- calcul de $f(\theta_{i+k,j})$ et $g(\theta_{i,j+k})$ $(-2 \leq k \leq 3)$ à partir de (4.101) et (4.102) dans le cas fluide, de (4.106) et (4.107) dans le cas solide ;
- calcul des poids $\omega_k(f)$ et $\omega_k(g)$ (4.33), les mesures de régularité IS_k utilisées pour calculer $\omega_k(g)$ étant obtenues en remplaçant f par g dans (4.34) et (4.35) ;
- calcul des flux numériques $f^k_{i+\frac{1}{2},j}$ et $g^k_{i,j+\frac{1}{2}}$ à partir de (4.109) et (4.110) dans le cas fluide, de (4.111) et (4.112) dans le cas solide ;
- calcul des flux vectoriels $\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}}$ à partir de (4.114) dans le cas fluide, de (4.115) dans le cas solide ;
- même procédure pour calculer $\boldsymbol{F}_{i-\frac{1}{2},j}$ et $\boldsymbol{G}_{i,j-\frac{1}{2}}$, en décalant respectivement les indices i et j d'une unité vers la gauche ;
- calcul de $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{U}^{(k-1)}_{i,j}\right)$ (4.116) ;
- mise à jour de $\boldsymbol{U}^{(r)}_{i,j}$ (4.41).

Le schéma WENO 5 utilise en 2D $s = 13$ points pour l'avancée en temps. Les indices $k_1(l)$ et $k_2(l)$ $(1 \leq l \leq s)$ utilisés dans (4.44) et (4.45), sont précisés dans le tableau 4.5. Le schéma WENO 5 est plus exigeant en temps de calcul et en taille mémoire que les deux autres schémas : il nécessite le stockage de cinq tableaux $d \times N_x \times N_y$, où N_x et N_y sont le nombre de points de calcul en x et en y. La condition CFL est la même que celle du schéma de Lax-Wendroff (4.54).

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_1(l)$	0	0	0	0	-3	-2	-1	1	2	3	0	0	0
$k_2(l)$	0	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	0	1	2	3

TAB. 4.5 – *Indices k_1 et k_2 du schéma WENO 5 en 2D.*

4.3.5 Exemples numériques

Pour illustrer ce qui précède, nous réalisons des expériences numériques de propagation d'onde 2D en milieu homogène. Nous considérons pour cela un domaine de dimensions 0.2 m × 0.2 m,

ayant les propriétés acoustiques de l'eau, soit

$$\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad c = 1500\,\mathrm{m/s}. \tag{4.117}$$

La solution initiale est une onde cylindrique, de fréquence centrale $f_c = 40$ kHz. Nous renvoyons au chapitre 10 pour la construction d'une onde cylindrique, pour les différentes notations (fréquence centrale f_c, instant initial t_0) et pour la signification de la palette de couleurs. Les valeurs exactes de la pression acoustique sont représentées en figure 4.4 aux instants $t_0 = 3\,10^{-5}$ s et $t_1 = 8.5\,10^{-5}$ s : entre les deux instants, l'onde s'est propagée sur environ quatre longueurs d'onde centrale. Les simulations numériques sont réalisées avec $N_x \times N_y = 200 \times 200$ points de calcul et CFL=0.6, soit environ 25 points de calcul par longueur d'onde centrale.

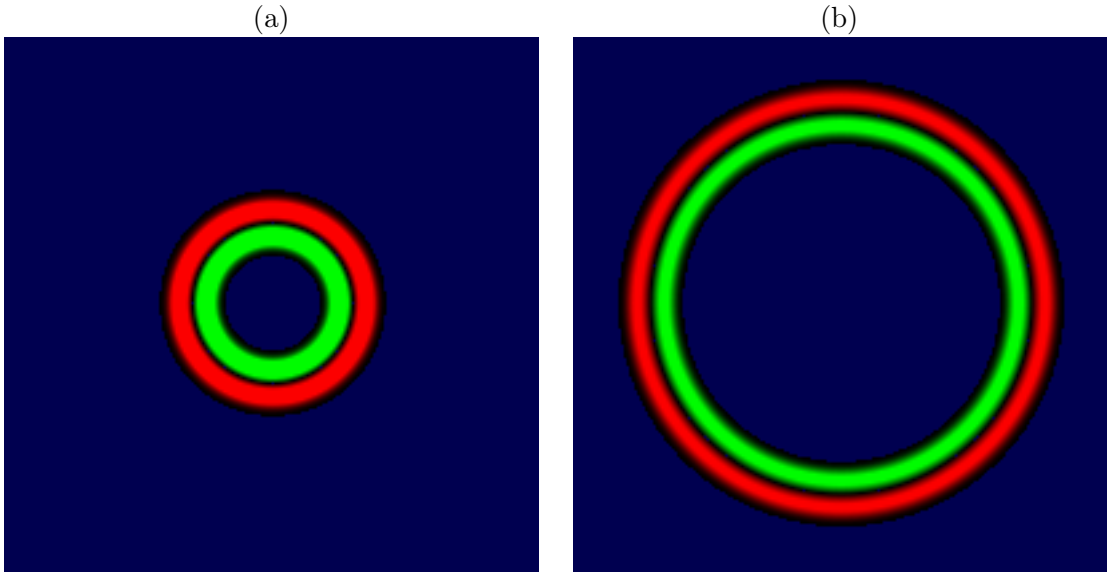

FIG. 4.4 – *Cartes théoriques de la pression acoustique, à $t_0 = 3\,10^{-5}$ s (a) et $t_1 = 8.5\,10^{-5}$ (b).*

Nous présentons en figure 4.5 les cartes et coupes de la pression acoustique à l'instant t_1, calculées avec les différents schémas numériques. Les droites horizontales en pointillés sur les cartes repèrent l'ordonnée où sont effectuées les coupes (soit $y = 0.1$ m). Sur les coupes (traits pleins : solution exacte, pointillés : solution numérique), nous observons les propriétés classiques déjà mentionnées en 1D, à savoir : la dispersion numérique du schéma de Lax-Wendroff (a-b) ; la très bonne localisation du schéma de volumes finis, dégradée cependant par la diffusion numérique (c-d) ; enfin, l'excellente qualité du schéma WENO 5.

Sur les cartes, nous observons l'effet de l'anisotropie numérique. Nous observons aussi, dans la zone centrale, une onde cylindrique convergente de faible amplitude. Cette onde parasite découle d'une approximation effectuée lors de la construction de l'onde initiale. En effet, les fonctions de Hankel nécessaires à la construction d'ondes cylindriques sont approchées ici par le premier terme de leur développement asymptotique (voir chapitre 10). Cet artefact n'est donc pas à imputer aux schémas numériques. Enfin, les mesures d'ordre de convergence vers la solution exacte (non présentées ici) confirment les ordres théoriques : 2 pour le schéma de Lax-Wendroff, 1.6 (en norme L_∞) et 2 (en norme L_1) pour le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, et 5 pour le schéma WENO 5.

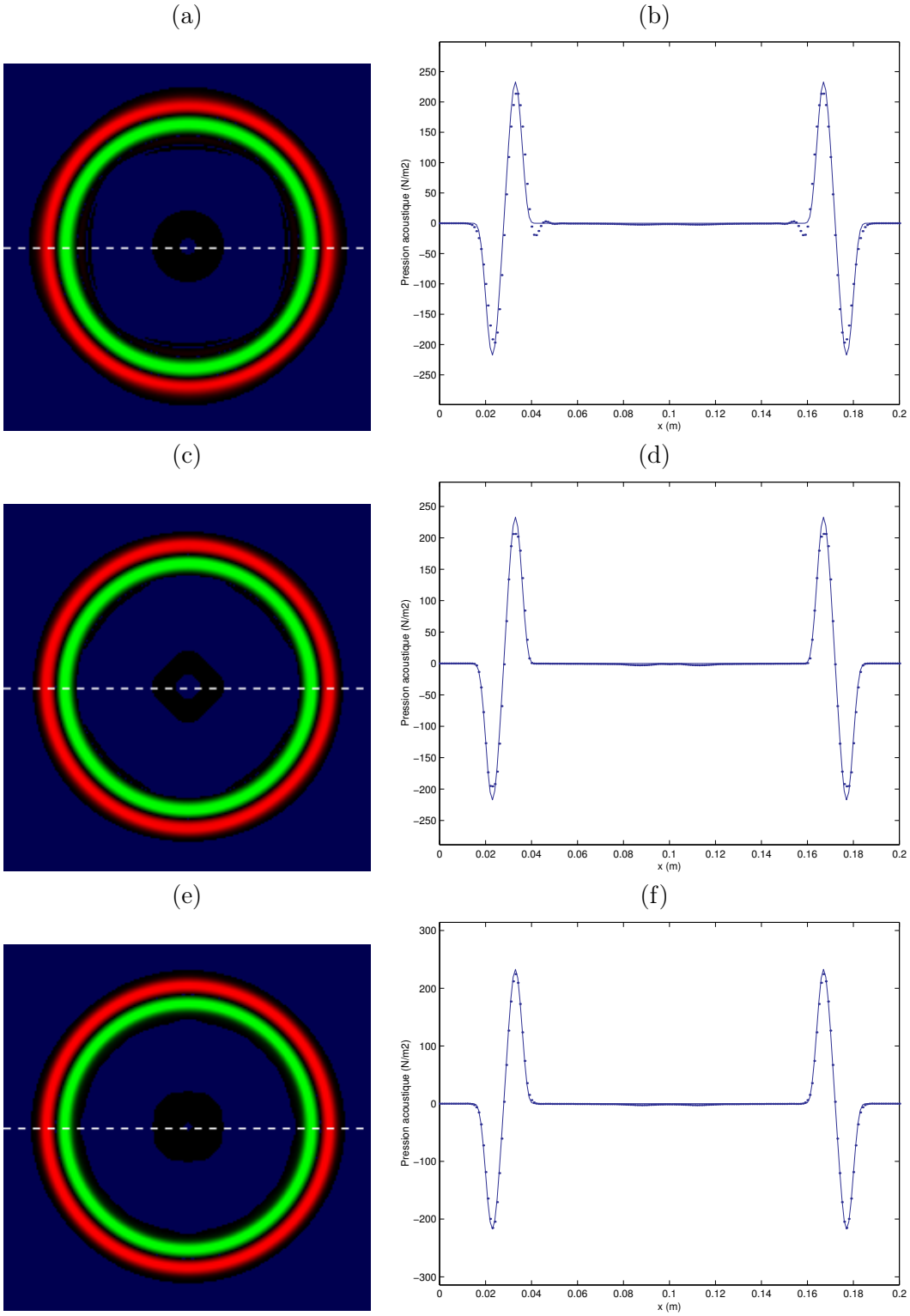

FIG. 4.5 – *Cartes et coupes de la pression acoustique, calculée par différents schémas : Lax-Wendroff (a-b), volumes finis avec limiteur de flux (c-d), WENO 5 (e-f).*

4.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons détaillé trois schémas permettant de résoudre numériquement les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique. Le premier schéma est le schéma de Lax-Wendroff, très facile à mettre en oeuvre, mais conduisant à une mauvaise localisation des ondes à cause de la dispersion numérique. Le deuxième schéma est un schéma de volumes finis avec limiteur de flux : la dispersion numérique étant éliminée, la localisation des ondes est excellente. De plus, en 2D, le calcul est réellement multidimensionnel, réduisant les effets d'anisotropie numérique. Par contre, la diffusion numérique dégrade l'amplitude des ondes. Enfin, le troisième et dernier schéma est le schéma WENO 5, d'ordre élevé, conservant remarquablement l'amplitude des ondes. Par contre, ce schéma est couteux en temps de calcul et en taille mémoire.

Finalement, quel schéma utiliser ? Pour le reste de l'étude, tout schéma explicite en temps convient, même si nous ne détaillerons le couplage de la méthode d'interface qu'avec des schémas à deux pas de temps. De façon plus générale, le choix d'un schéma repose sur un compromis entre la qualité souhaitée et les ressources disponibles en temps de calcul, place mémoire, et temps de programmation. La présente étude n'a nullement pour objet de décider quel est le schéma idéal pour étudier des problèmes de propagation d'ondes, si tant est que ce schéma soit unique. Nous nous sommes contentés, dans ce chapitre, de présenter des schémas connus en mécanique des fluides numérique, mais méconnus en acoustique numérique, et dont les qualités remarquables sont utilisées ici avec profit. Notons de plus qu'il n'y a pas de réponse universelle : suivant l'objectif motivant l'expérience numérique, on préférera tel ou tel schéma. Si on s'intéresse à une mesure numérique de temps d'arrivée, le schéma de volumes finis avec limiteur de flux est à conseiller. Par contre, pour une expérience où l'amplitude des ondes est primordiale (par exemple, pour une mesure numérique d'atténuation), on préférera le schéma WENO 5.

Nous avons présenté les algorithmes et les propriétés des trois schémas nmériques en supposant à la fois un milieu de propagation homogène et une solution initiale suffisamment régulière. Que se passe-t-il si on relâche une de ces hypothèses ? En pratique, nous nous intéressons seulement à la première hypothèse (la solution initiale est toujours supposée suffisamment régulière). Nous considérons alors la présence d'une discontinuité des paramètres physiques ou de forces singulières, autrement dit, d'une *interface*. Les propriétés des schémas sont alors perdues : la solution numérique est dégradée par des diffractions parasites, une chute de l'ordre de convergence, voire des instabilités si le contraste des paramètres physiques est important. L'objet de la méthode d'interface que nous proposons plus loin est justement de pallier ces défauts, en maintenant des propriétés des schémas numériques en présence d'interfaces. Pour cela, nous commençons par étudier les conditions vérifiées, aux interfaces, par la solution exacte et ses dérivées spatiales.

Chapitre 5

Conditions aux interfaces 1D

Dans ce chapitre, nous étudions trois types d'interfaces en 1D : une interface parfaite, une interface imparfaite, et enfin deux interfaces parfaites proches l'une de l'autre. Ces interfaces, modélisant différentes situations physiques et natures de contact, reviennent chacune à imposer des conditions particulières à la solution exacte du problème de propagation d'ondes. Le but de ce chapitre est de calculer, en 1D, les conditions de saut vérifiées par les dérivées spatiales successives de la solution exacte, dans les trois cas étudiés. Ces dernières conditions, reposant sur les lois de conservations présentées au chapitre 3, sont utilisées au chapitre 7 traitant de la méthode d'interface 1D.

5.1 Objet du chapitre

5.1.1 Présentation générale

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des milieux homogènes, tant au niveau des lois de conservation qu'à celui des schémas numériques. Nous abordons maintenant l'étude des interfaces. Une interface est, classiquement, le lieu des points de discontinuité des paramètres physiques (célérité des ondes, masse volumique). Cette discontinuité revient à une discontinuité des coefficients des systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles décrivant la propagation des ondes. La frontière entre une bulle d'air et l'eau environnante en est une bonne illustration. De façon plus générale, une interface est aussi le lieu des points où des conditions sont imposées à la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$, pour modéliser une situation physique donnée. Par exemple, un collage entre deux milieux identiques peut être décrit par une interface et des conditions ad hoc.

Dans tous les cas, une interface revient à imposer un nombre adéquat de conditions à la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ en un point, sur une courbe, et sur une surface, respectivement en 1D, 2D, et 3D. Ces conditions, ajoutées aux conditions aux bords du domaine, doivent conduire à un problème bien posé et à une solution unique. Nous considérons ici trois types d'interfaces (une interface parfaite, une interface imparfaite, et enfin deux interfaces parfaites très proches). Ces conditions étant classiques, nous n'examinerons pas le caractère bien posé des problèmes étudiés. La position

des interfaces et les conditions qui y sont imposées sont enfin supposées constantes au cours du temps.

L'objet de ce chapitre et du suivant est de calculer, à partir des conditions imposées à la solution exacte, les conditions vérifiées par les dérivées spatiales successives de cette solution exacte. Ces dernières conditions ne sont pas obtenues en dérivant trivialement les conditions vérifiées par la solution exacte. Le calcul découle des dérivations successives des lois de conservation présentées au chapitre 3, et de la nature des milieux de part et d'autre des interfaces. Par souci de clarté, l'étude des conditions aux interfaces est divisée en deux parties : ce chapitre et le suivant traitent successivement des cas 1D et 2D. Dans ce chapitre, nous traitons seulement le cas solide : en 1D, les calculs sont identiques en remplaçant la contrainte élastique $\sigma(x,t)$ par $-p$, où $p(x,t)$ désigne la pression acoustique. Les conditions vérifiées par les dérivées spatiales successives de la solution exacte sont utilisées aux chapitres 7 et 8 par la méthode d'interface.

5.1.2 Notations

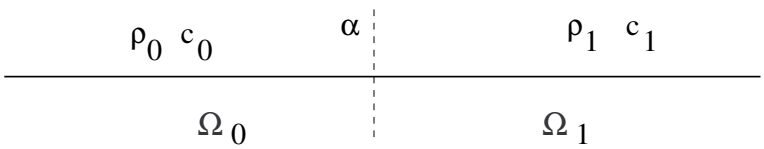

FIG. 5.1 – *Milieu 1D avec une interface*

Pour la suite de l'exposé en 1D, nous notons

$$f(\alpha^{\pm},t) = \lim_{x\to\alpha^{\pm}} f(x,t) \tag{5.1}$$

les valeurs limites d'une fonction $f(x,t)$ en $\alpha^{\pm}$, et

$$[f(\alpha,t)] = f(\alpha^{+},t) - f(\alpha^{-},t) \tag{5.2}$$

le saut de f en α. Les interfaces étant fixes, on a le lemme suivant.

Lemme 2 *Pour des fonctions $f(x,t)$ et $g(t)$ suffisamment régulières, on a pour tout entier naturel n*

$$\forall t, \quad [f(\alpha,t)] = g(t) \quad \Rightarrow \quad \forall t, \quad \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(\alpha,t)\right] = g^{(n)}(t). \tag{5.3}$$

5.2 Interface parfaite

5.2.1 Introduction

Nous considérons tout d'abord le cas classique d'une *interface parfaite*. A chaque instant, le déplacement élastique $u(x,t)$ et la contrainte élastique $\sigma(x,t)$ des milieux Ω_0 et Ω_1 sont supposés continus en α. Ces *conditions de contact parfait* décrivent le cas de deux solides parfaitement soudés [12].

5.2.2 Conditions de contact parfait

Ordre 0. Les paramètres physiques sont constants par morceaux autour de $x = \alpha$ (figure 5.1)

$$(\rho,c) = \begin{cases} (\rho_0,c_0) & \text{si} \quad x \leq \alpha \\ (\rho_1,c_1) & \text{si} \quad x > \alpha. \end{cases} \tag{5.4}$$

Les bilans de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie au niveau de l'interface conduisent à deux conditions de saut [26]

$$[u(\alpha,t)] = 0, \qquad [\sigma(\alpha,t)] = 0, \tag{5.5}$$

où $u(x,t)$ et $\sigma(x,t)$ désignent le déplacement et la contrainte élastique. Nous dérivons par rapport à t la condition portant sur le saut de $u(x,t)$; le lemme 2 conduit alors à

$$\boxed{[\boldsymbol{U}(\alpha,t)] = \boldsymbol{0},} \tag{5.6}$$

avec $\boldsymbol{U} = {}^T(v,\sigma)$, où v est la vitesse élastique.

Ordre k. Nous dérivons la condition de saut (5.6) k fois par rapport à t. Suivant que $k = 2\,n$ ou $k = 2\,n + 1$, les lois de conservation (3.7) et le lemme 2 conduisent à

$$\begin{aligned} &\left[c^{2\,n}\,\frac{\partial^{2\,n}}{\partial\,x^{2\,n}}\,\boldsymbol{U}\right] = \boldsymbol{0}, \qquad n \geq 1 \\ &\left[c^{2\,n}\,\boldsymbol{A}\,\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\,x^{2\,n+1}}\,\boldsymbol{U}\right] = \boldsymbol{0}, \qquad n \geq 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nous définissons alors les matrices $\boldsymbol{D}_k$, pour k pair ou impair, par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{2\,n}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\,\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2n}, \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n}\right), \\ \boldsymbol{D}_{2\,n+1}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\,\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n+2}, \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n}\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

De (5.7), nous déduisons directement les conditions de saut, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\boxed{\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) = \boldsymbol{D}_k(\Omega_0,\Omega_1)\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t).} \tag{5.9}$$

Les relations dans l'autre sens s'écrivent simplement

$$\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) = \boldsymbol{D}_k^{-1}(\Omega_0,\Omega_1)\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) = \boldsymbol{D}_k(\Omega_1,\Omega_0)\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t). \tag{5.10}$$

De (5.8) et (5.9), il découle que la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ est continue à dérivées spatiales discontinues en $x = \alpha$. Dans la suite de l'étude, nous omettrons de préciser Ω_0 et Ω_1 dans (5.9) et (5.10) en l'absence d'ambiguïté, i.e. si nous étudions un domaine avec une seule interface.

5.3 Interface imparfaite

5.3.1 Introduction

Des défauts de contact peuvent exister entre les milieux, comme des bulles d'air, ou des gradients de propriétés physiques [61]. L'interface en $x = \alpha$ entre Ω_0 et Ω_1 est alors dite *imparfaite* : le déplacement élastique $u(x,t)$ et la contrainte élastique $\sigma(x,t)$ ne sont pas transmis totalement et instantanément de part et d'autre de la zone de contact. Si, d'une part, la zone où sont localisées les hétérogénéités est très petite devant les longueurs d'ondes propagées (hypothèse quasi-statique), et si, d'autre part, la contrainte élastique est suffisamment petite pour ne pas modifier la nature du contact, la zone de contact est classiquement décrite par un modèle rhéologique simple : un ressort [3, 62, 63, 71] ou un système masse-ressort [5, 67]. Ce modèle revient alors à négliger l'épaisseur de la zone de contact et à imposer des conditions de saut linéaires couplant en 1D les valeurs limites de $u(x,t)$ et de $\sigma(x,t)$ de part et d'autre de α, ou *conditions de type masse-ressort.*

L'utilisation de conditions de type masse-ressort dispense d'avoir à raffiner le maillage dans des zones complexes, évitant entre autres des diffcultés de gestion informatique en 2D et 3D. Les valeurs de masse et de raideur, a priori inconnues, peuvent être calculées dans des cas académique (section 5.4). Autrement, elles doivent être déterminées par des essais mécaniques ou par des essais ultrasonores. Elles sont alors reliées, de façon pas forcément triviale, à la qualité du contact [19, 76].

5.3.2 Conditions de type masse-ressort

Ordre 0. Les paramètres physiques sont les mêmes que dans le cas du contact parfait. Les relations

$$
\begin{aligned}
[u(\alpha,t)] &= \frac{1}{K}\,\sigma(\alpha^-,t),\\
[\sigma(\alpha,t)] &= M\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(\alpha^-,t),
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

généralisent les conditions de contact parfait (5.5). Elles sont appelées *conditions de type masse-ressort* par analogie avec les équations gouvernant le mouvement d'une masse M et d'un ressort de raideur K. Le calcul des valeurs de K et M dans un cas particulier est proposé en section 5.4.

Pour $K = +\infty$ et $M = 0$, les conditions de type masse-ressort (5.11) reviennent aux conditions de contact parfait (5.5). Pour $K \to 0$ et $M = 0$, les conditions de type masse-ressort impliquent $\sigma(\alpha^\pm,t) = 0$; les deux bords de α sont alors libres de contraintes. Il est important de remarquer que le milieu homogène n'est retrouvé que si $K = +\infty$, $M = 0$, $\rho_0 = \rho_1$, et $c_0 = c_1$. Pour des milieux identiques de part et d'autre de α ($\rho_0 = \rho_1$ et $c_0 = c_1$), et une interface telle que $K < +\infty$ ou $M \neq 0$, le milieu de propagation n'est pas homogène : une onde incidente en $x = \alpha$ est réfléchie et déformée. Ce cas est particulièrement intéressant pour la suite, décrivant le cas de deux milieux identiques reliés par une couche de colle. Entre tous ces cas limites, les conditions de type masse-ressort décrivent continûment une large gamme de degrés de contact entre solides.

Si $M = 0$, on peut montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en α sont indépendants du sens de propagation des ondes. Par contre, si $M \neq 0$ et $K < +\infty$, les conditions (5.11) introduisent une asymétrie. Dans le cas limite de milieux identiques de part et d'autre de α, on peut montrer que l'amplitude de l'onde transmise à travers α dépend du sens de propagation de l'onde incidente, ce qui n'a pas lieu d'être physiquement. Cette asymétrie pourrait être éliminée en écrivant d'autres conditions de type masse-ressort, comme

$$
\begin{aligned}
[u(\alpha,t)] &= \frac{1}{2\,K}\,\big(\sigma(\alpha^+,t) + \sigma(\alpha^-,t)\big)\,,\\
[\sigma(\alpha,t)] &= \frac{M}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\,\big(u(\alpha^+,t) + u(\alpha^-,t)\big)\,.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Cependant, les calculs menés avec (5.11) et (5.12) sont semblables, mais plus lourds avec ces derniers : nous préférons pour la suite utiliser (5.11).

On dérive la première équation de (5.11), portant sur le saut de $u(x,t)$, par rapport à t

$$
\begin{aligned}
v(\alpha^+,t) &= v(\alpha^-,t) + \frac{1}{K}\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,\sigma(\alpha^-,t)\\
\sigma(\alpha^+,t) &= \sigma(\alpha^-,t) + M\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,v(\alpha^-,t).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Le lemme 2 et les lois de conservation (3.1) impliquent alors

$$
\boxed{
\begin{aligned}
v(\alpha^+,t) &= v(\alpha^-,t) + \frac{\rho_0\,c_0^2}{K}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,v(\alpha^-,t)\\
\sigma(\alpha^+,t) &= \sigma(\alpha^-,t) + \frac{M}{\rho_0}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,\sigma(\alpha^-,t).
\end{aligned}
}
\tag{5.14}
$$

On remarque que les conditions (5.14) relient uniquement des quantités de même nature, à savoir les vitesses élastiques d'une part, les contraintes élastiques d'autre part. En posant

$$
\boldsymbol{S}_0 = \ \mathrm{diag}\ \left(\frac{\rho_0\,c_0^2}{K}\,,\frac{M}{\rho_0}\right),
\tag{5.15}
$$

on résume les conditions (5.14) en écrivant

$$
\boxed{[\boldsymbol{U}(\alpha,t)] = \boldsymbol{S}_0\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t).}
\tag{5.16}
$$

Ordre k. Les deux résultats suivants relient les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,t)$ et de ses dérivées spatiales, d'un côté de α, et les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,t)$ et de ses dérivées spatiales, de l'autre côté de α.

Resultat 5 *Pour tout $k \geq 0$ et à tout instant t, on a*

$$
\boxed{\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) = \boldsymbol{D}_{2\,k+1}(\Omega_0,\Omega_1)\,\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) + \boldsymbol{D}_{2\,k+2}(\Omega_0,\Omega_1)\,\frac{\partial^{k+1}}{\partial\,x^{k+1}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t).}
\tag{5.17}
$$

Les matrices $\boldsymbol{D}_{2k+1}$ et $\boldsymbol{D}_{2k+2}$ dépendent de la parité de k, soit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{4\,n+1}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n},\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n}\right),\\
\boldsymbol{D}_{4\,n+2}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\left(\frac{\rho_0}{K}\frac{c_0^{2\,n+2}}{(c_1)^{2\,n}},\frac{M}{\rho_0}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n}\right),\\
\boldsymbol{D}_{4\,n+3}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n+2},\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n}\right),\\
\boldsymbol{D}_{4\,n+4}(\Omega_0,\Omega_1) &= \text{diag}\left(\frac{M}{\rho_1}\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{2\,n+2},\frac{\rho_1}{K}\frac{c_0^{2\,n+2}}{(c_1)^{2\,n}}\right).
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Démonstration. Nous dérivons $2\,n$ fois par rapport à t la condition de saut (5.16). Le lemme 2 et la première équation de (3.7) conduisent alors à

$$
\left[c^{2\,n}\frac{\partial^{2\,n}}{\partial\,x^{2\,n}}\boldsymbol{U}(\alpha,t)\right] = c_0^{2\,n}\,\boldsymbol{S}_0\,\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\,x^{2\,n+1}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t). \tag{5.19}
$$

De même, la condition de saut (5.16) est dérivée $2\,i+1$ fois par rapport à t. Le lemme 2 et la deuxième équation de (3.7) conduisent à

$$
\left[-c^{2\,n}\,\boldsymbol{A}\,\frac{\partial^{2\,n+1}}{\partial\,x^{2\,n+1}}\boldsymbol{U}(\alpha,t)\right] = -c_0^{2\,n}\,\boldsymbol{S}_0\,\boldsymbol{A}_0\,\frac{\partial^{2\,n+2}}{\partial\,x^{2\,n+2}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t). \tag{5.20}
$$

De simples manipulations algébriques sur (5.19) et (5.20) conduisent enfin à (5.17). □

Resultat 6 *Pour tout $k \geq 0$, $l \leq 1$, et à tout instant t, on a*

$$
\boxed{\frac{\partial^k}{\partial\,x^k}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) = \sum_{m=0}^{l-1}\boldsymbol{E}(m,k,l)\frac{\partial^{k+m}}{\partial\,x^{k+m}}\boldsymbol{U}(\alpha^+,t) + \boldsymbol{E}(l,k,l)\,\frac{\partial^{k+l}}{\partial\,x^{k+l}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t),} \tag{5.21}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
m < l \quad &\Rightarrow \boldsymbol{E}(m,k,l) = (-1)^m\,(\boldsymbol{D}_{2k+1})^{-1}\prod_{j=1}^{m}\boldsymbol{D}_{2(k+j)}\left(\boldsymbol{D}_{2(k+j)+1}\right)^{-1}\\
m = l \quad &\Rightarrow \boldsymbol{E}(l,k,l) = (-1)^l\,(\boldsymbol{D}_{2k+1})^{-1}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\boldsymbol{D}_{2(k+j)}\left(\boldsymbol{D}_{2(k+j)+1}\right)^{-1}\right)\boldsymbol{D}_{2(k+l)},
\end{aligned}
$$

et avec la convention

$$
\prod_{j=1}^{0}\boldsymbol{D}_{2(k+j)}\left(\boldsymbol{D}_{2(k+j)+1}\right)^{-1} = \boldsymbol{I}_2. \tag{5.22}
$$

$\boldsymbol{I}_2$ est la matrice identité 2×2.

Démonstration. La démonstration est faite par récurrence sur l. Pour tout entier $j \geq 0$, l'équation (5.17) s'écrit

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t) = (\boldsymbol{D}_{2j+1})^{-1} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t) - (\boldsymbol{D}_{2j+1})^{-1} \boldsymbol{D}_{2j+2} \frac{\partial^{j+1}}{\partial x^{j+1}} U(\alpha^-,t). \tag{5.23}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée en $l = 1$ en prenant $j = k$ dans (5.23). L'équation (5.21) est alors supposée vérifiée jusqu'à l'ordre $l \geq 1$. L'équation (5.23) est écrite pour $j = k + l$ et est insérée dans (5.21). Par définition des matrices $\boldsymbol{E}$, la relation (5.21) est obtenue pour $l+1$. □

Notons que les valeurs limites des dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,t)$ à gauche de α, à un ordre donné, ne s'écrivent pas uniquement en fonction des dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,t)$ à droite de α.

5.4 Deux interfaces parfaites

5.4.1 Introduction

L'objet de la section précédente était de remplacer un milieu intermédiaire, de propriétés physiques complexes et d'épaisseur fine devant les échelles caractéristiques du problème, par une interface. Cependant, si les propriétés physiques et géométriques du milieu intermédiaire sont connues, il est intéressant de les prendre en compte directement. C'est le cas du milieu Ω_1, représenté schématiquement en figure 5.2.

L'écriture des conditions de contact parfait en $x = \alpha_0$ et en $x = \alpha_1$, puis leur couplage via des développements de Taylor, conduit aux *conditions de couche fine*, reliant les valeurs limites de $u(x,t)$ et $\sigma(x,t)$ en α_0^- et en α_1^+ (section 5.4). Ces conditions de couche fine permettent de prendre en compte le temps de propagation des ondes dans le milieu intermédiaire Ω_1, sans avoir à mailler ce dernier. En sus de la modélisation d'un collage, l'utilisation des conditions de couche fine via une méthode d'interface (vue au chapitre 7) est aussi une façon originale d'envisager le couplage fluide-structure de plaques ou coques minces dans le domaine temporel.

5.4.2 Conditions de couche fine

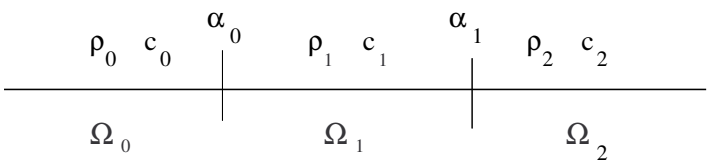

FIG. 5.2 – *Milieu tricouche 1D avec deux interfaces parfaites*

Les paramètres physiques sont constants par morceaux (figure 5.2)

$$(\rho,c) = \begin{cases} (\rho_0,c_0) & \text{si} \quad x \leq \alpha_0 \\ (\rho_1,c_1) & \text{si} \quad \alpha_0 < x < \alpha_1 \\ (\rho_2,c_2) & \text{si} \quad x \geq \alpha_1. \end{cases} \tag{5.24}$$

Les contacts sont parfaits en $x = \alpha_0$ et en $x = \alpha_1$. On suppose

$$h = \alpha_1 - \alpha_0 = O(\Delta\, x). \tag{5.25}$$

Pour $k \geq 0$ et $l \geq 1$, les dérivées spatiales $\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^{k+m}} \boldsymbol{U}(x,t)$ $(0 \leq m \leq l)$ sont supposées suffisamment régulières sur $]\alpha_0,\alpha_1[$, de sorte que les développements de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_1^-,t) &= \sum_{m=0}^{l} \frac{h^m}{m\,!} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^+,t) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{l+1}), \\ \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_0^+,t) &= \sum_{m=0}^{l} \frac{(-h)^m}{m\,!} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_1^-,t) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{l+1}) \end{aligned} \tag{5.26}$$

ont toujours un sens. Les conditions de saut correspondant à des contacts parfaits en $x = \alpha_0$ et $x = \alpha_1$ (5.9) s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^+,t) &= \boldsymbol{D}_{k+m}(\Omega_0,\Omega_1) \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t), \\ \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t) &= \boldsymbol{D}_k(\Omega_1,\Omega_2) \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_1^-,t). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Les relations (5.26) et (5.27) conduisent, pour $l \geq 1$ et $k \geq 0$, aux *conditions de couche fine*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t) &= \sum_{m=0}^{l} \frac{h^m}{m\,!} \boldsymbol{D}_k(\Omega_1,\Omega_2)\, \boldsymbol{D}_{k+m}(\Omega_0,\Omega_1) \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t) + \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{l+1}), \\ \frac{\partial^k}{\partial\, x^k} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t) &= \sum_{m=0}^{l} \frac{(-h)^m}{m\,!} \boldsymbol{D}_k(\Omega_1,\Omega_0)\, \boldsymbol{D}_{k+m}(\Omega_2,\Omega_1) \frac{\partial^{k+m}}{\partial\, x^{k+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t) + \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{l+1}). \end{aligned}} \tag{5.28}$$

Lien avec les conditions de type masse-ressort. A partir des conditions de couche fine (5.28), nous pouvons retrouver les conditions de type masse-ressort, et les valeurs de K et M correspondantes. En posant

$$K = \frac{\rho_1\, c_1^2}{h}, \qquad M = \rho_1\, h, \tag{5.29}$$

la première équation de (5.28) conduit, pour $k = 0$ et $l = 1$, au système

$$\begin{aligned} v(\alpha_1^+,t) &= v(\alpha_0^-,t) + \frac{\rho_1\, c_1^2}{K} \frac{\partial}{\partial\, x} v(\alpha_0^-,t) + O(\Delta\, x^2) \\ \sigma(\alpha_1^+,t) &= \sigma(\alpha_0^-,t) + \frac{M}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial\, x} \sigma(\alpha^-,t) + O(\Delta\, x^2). \end{aligned} \tag{5.30}$$

En faisant tendre α_0 et α_1 vers α, nous retrouvons les conditions de type masse-ressort (5.14).

5.5 Conclusion

Nous retenons deux points importants de ce chapitre. D'une part, on peut imposer, aux interfaces, différentes conditions à la solution exacte, modélisant ainsi différentes situations physiques. D'autre part, on peut calculer dans chaque cas les conditions vérifiées par les dérivées spatiales successives de la solution exacte. Ces conditions sont utilisées aux chapitres 7 et 8 traitant de la méthode d'interface.

Nous abordons maintenant l'étude des conditions aux interfaces en 2D. Par rapport au cas 1D, cette étude est compliquée par trois facteurs : la description de géométries complexes, différentes natures de milieux, et surtout moins de conditions de saut aux interfaces que de composantes de la solution.

Chapitre 6

Conditions aux interfaces 2D

Dans ce chapitre, nous étudions quatre types d'interfaces en 2D : l'interface entre deux fluides parfaits, l'interface entre deux solides parfaitement collés, l'interface entre deux solides imparfaitement collés, et enfin l'interface entre un fluide parfait et un solide. A chaque type d'interface correspond un ensemble de conditions de saut vérifiées, aux interfaces, par la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t)$*. A partir de ces conditions, le but du présent chapitre est alors de relier les valeurs limites de la solution exacte* $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ *et de ses dérivées spatiales successives des deux côtés de l'interface. Toutefois, nous rencontrons en 2D une difficulté : le nombre de conditions de saut déduites des lois de la mécanique est toujours inférieur au nombre de composantes de la solution exacte. Pour contourner cet obstacle, on peut calculer des conditions de saut supplémentaires à partir des lois de conservation vues au chapitre 3, ce qui permet de fermer les systèmes. Cette technique, utilisée par l'IIM, présente un inconvénient : on ne dispose pas toujours de telles conditions de saut supplémentaires. En particulier, ces conditions n'existent pas pour l'interface fluide-solide. Pour traiter ce cas, nous proposons alors de n'utiliser que les conditions de saut naturelles. L'écriture des valeurs limites de la solution et de ses dérivées spatiales, d'un côté de l'interface, en fonction des grandeurs de même nature, de l'autre côté de l'interface, revient alors à la résolution d'un système sous-déterminé. Cette résolution repose sur une décomposition en valeurs singulières. Dans tous les cas, les systèmes obtenus sont utilisés au chapitre 8, traitant de la méthode d'interface 2D.*

6.1 Objet du chapitre

6.1.1 Présentation générale

Nous poursuivons ici en 2D l'étude des conditions aux interfaces, abordée en 1D au chapitre 5. Nous considérons deux milieux (fluide parfait au repos, solide élastique isotrope) et deux types d'interface (interface parfaite, interface imparfaite). Par rapport au chapitre 5, le passage en 2D implique d'abord certaines modifications purement techniques. Parmi ces modifications, les conditions de saut en un point d'une interface dépendent maintenant de la géométrie locale de l'interface, ce qui alourdit les calculs. Notons dès à présent que les interfaces sont toujours supposées suffisamment régulières géométriquement ; le cas d'interfaces non régulières, comme des

coins, est exclu de fait. D'autre part, et à la différence du cas 1D, les conditions aux interfaces en 2D dépendent de la nature des milieux de part et d'autre des interfaces, ce qui augmente le nombre de cas à traiter. Enfin, aux conditions de saut naturelles déjà rencontrées en 1D, s'ajoutent des *conditions de saut supplémentaires* (définies plus loin) et les *conditions de milieu* (vues au chapitre 3).

Précisons tout d'abord les quatre cas étudiés et les conditions de saut correspondantes. Le premier cas est celui de l'*interface fluide-fluide* : dans ce cas, il y a continuité de la pression acoustique et de la vitesse acoustique normale. Les fluides étant parfaits, on ne dispose a priori d'aucun renseignement sur la composante tangentielle de la vitesse acoustique. On dispose alors de deux conditions de saut pour les trois composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. Le deuxième cas est celui d'une *interface solide-solide* parfaite. Les composantes normales et tangentielles du déplacement élastique et de la contrainte élastique normales sont continues, soit quatre conditions de saut pour les cinq composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. De même, le cas d'une interface *solide-solide imparfaite* (décrite par des conditions de type masse-ressort) conduit aussi à quatre conditions de saut pour les cinq composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. Enfin, le quatrième et dernier cas est celui d'une *interface fluide-solide*. Ce cas correspond, du côté fluide, à l'interface fluide-fluide, et du côté solide, à l'interface solide-solide en contact parfait glissant sans frottements, cas non traité ici.

A la lumière de ce qui vient d'être dit, la principale différence avec le cas 1D est que, en 2D, *le nombre de conditions de saut reliant les composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ de part et d'autre des interfaces est inférieur au nombre de composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$*. Cette propriété se répercute évidemment aux ordres de dérivation supérieurs. Il est alors impossible d'écrire directement les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales, d'un côté de l'interface, en fonction des valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, de l'autre côté de l'interface. Or cette écriture est la base des méthodes d'interface.

Face à cette difficulté, les auteurs [85, 86] adoptent une stratégie à deux étages. Tout d'abord, ils exhibent dans deux cas d'interfaces parfaites (fluide-fluide, solide-solide) des *conditions de saut supplémentaires* déduites des conditions de saut naturelles et des lois de conservation de part et d'autre des interfaces (l'application des conditions de saut supplémentaires au cas d'une interface imparfaite entre deux solides est immédiate). Ajoutées aux conditions de saut existantes, ces conditions de saut supplémentaires conduisent à autant de conditions que de composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. Donnons un exemple : dans le cas de l'interface fluide-fluide, on montre que le débit massique tangentiel, dépendant de la vitesse acoustique tangentielle à l'interface, est continu.

La question essentielle est alors la suivante : les conditions de saut supplémentaires existent-elles dans toutes les configurations, et pas seulement pour une interface parfaite entre deux fluides ou entre deux solides ? La réponse que nous apportons est négative. Pour montrer ce résultat, nous partons du fait que les conditions de saut supplémentaires, si elles existent, doivent être vérifiées pour tout type d'onde et d'interface. En particulier, elles doivent être vérifiées pour les ondes planes incidente, réfléchie et transmise par une interface plane. A partir des conditions de saut naturelles, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission, et ainsi déterminer $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ en tout point du domaine. Il est alors possible de chercher des relations entre toutes les composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ de part et d'autre de l'interface, et ainsi d'obtenir les conditions de saut supplémentaires. Reprenons l'exemple de l'interface entre deux fluides parfaits : nous montrons au chapitre 9 que les conditions de saut naturelles, puis des manipulations algébriques, conduisent à la condition de saut supplémentaire évoquée précédemment (à savoir continuité du débit massique tangentiel), indépendemment de l'angle d'incidence. Or, dans le cas d'une

interface fluide-solide, l'analyse par ondes planes menée au chapitre 9 conduit à des conditions de saut supplémentaires dépendant de l'angle d'incidence. Pour un champ acoustique quelconque, il n'y a alors pas de condition de saut supplémentaire. Cette absence explique alors que le cas fluide-solide ne soit point traité par l'IIM.

Dans le cas de l'interface fluide-solide, nous proposons alors de n'utiliser que les conditions de saut naturelles, et de résoudre le système sous-déterminé qui en résulte. Pour cela, une décomposition en *valeurs singulières* de ce système permet d'exprimer de façon simple les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales, d'un côté de l'interface, en fonction des valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales, de l'autre côté de l'interface, et d'un espace affine de solutions. Cette écriture est utilisée au chapitre 8. Nous chercherons alors les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales, minimales au sens des moindres carrés. Notons que cette procédure peut aussi s'appliquer aux trois cas d'interfaces pour lesquels nous disposons de conditions de saut supplémentaires (i.e. les interfaces fluide-fluide et solide-solide parfaite et imparfaite). Quelle procédure suivre alors ? A priori, le lecteur a le choix, dans ces cas, d'utiliser les conditions de saut supplémentaires (et ainsi de résoudre de façon immédiate le problème), ou de s'en dispenser (ce qui conduit à la résolution d'un système sous-déterminé). De toute façon, les deux techniques sont explicitées par la suite.

D'autre part, comme il manque encore des conditions pour les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, Zhang et LeVeque [85, 86] utilisent les *conditions de milieu* calculées au chapitre 3. Ces conditions désignent les relations vérifiées par les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, déduites uniquement des lois de conservation, et vérifiées en tout point des sous-domaines, en particulier de part et d'autre des interfaces. La nullité du rotationnel de la vitesse acoustique est un bon exemple de condition de milieu. Le fait d'écrire que le saut des conditions de milieu est nul permet alors de compléter les conditions portant sur les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. Dans chaque configuration, nous proposons d'utiliser plus pleinement les conditions de milieu de part et d'autre des interfaces. Au lieu d'écrire que le saut des conditions de milieu est nul [85, 86], nous utilisons le fait que ces conditions de milieu sont effectivement nulles de part et d'autre des interfaces. En effet, la nullité du saut d'une fonction n'implique pas que cette fonction soit nulle.

Durant ce chapitre, nous présentons le calcul des conditions de saut de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ (voir notation (3.24)) pour k quelconque. Toutefois, nous détaillons les calculs jusqu'à l'ordre deux, i.e. la valeur de k suffisante pour coupler la méthode d'interface avec des schémas d'ordre deux comme les schémas de Lax-Wendroff ou de volumes finis avec limiteur de flux. Les expressions des matrices de saut sont résumées en annexe 1, sous forme directement programmable.

6.1.2 Notations

On considère une courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ suffisamment régulière en chacun de ses points, fermée ou non, divisant le plan en deux sous-domaines Ω_0 et Ω_1 (figure 6.1). Nous utilisons une représentation paramétrique de Γ : $(x(\tau),y(\tau))$. Tout au long de ce chapitre, nous écrivons les conditions de saut portant sur $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et sur ses dérivées spatiales successives en un point P quelconque de Γ (figure 6.1), de coordonnées $(x_P,y_P) = (x(\tau_0),y(\tau_0))$. Les vecteurs tangent $\boldsymbol{t}$ et normal $\boldsymbol{n}$ à Γ

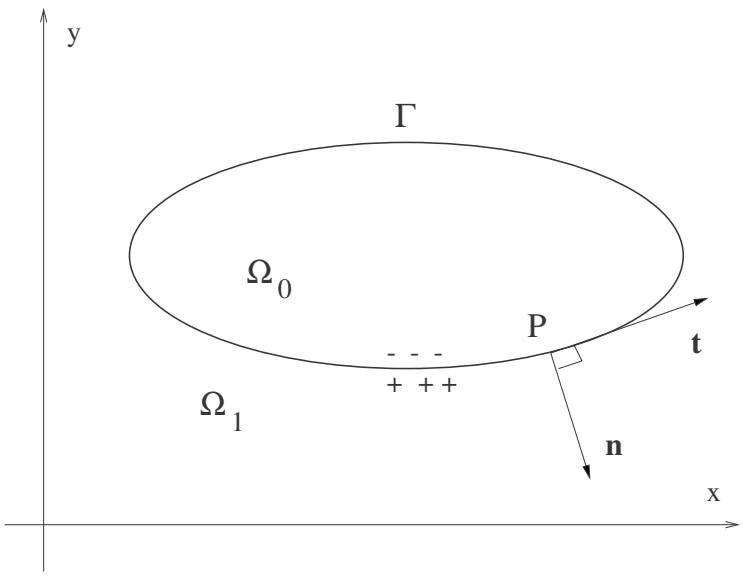

FIG. 6.1 – *Interface* Γ *séparant les milieux* Ω_0 *et* Ω_1.

en P étant définis par

$$\boldsymbol{t}(\tau_0) = \begin{pmatrix} x'(\tau_0) \\ y'(\tau_0) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n}(\tau_0) = \begin{pmatrix} y'(\tau_0) \\ -x'(\tau_0) \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

le repère $(P,\boldsymbol{n},\boldsymbol{t})$ est direct. L'interface Γ est paramétrée de sorte que le vecteur normal $\boldsymbol{n}$ pointe de Ω_0 vers Ω_1. Par la suite, l'argument τ_0 est systématiquement omis. Les composantes normales et tangentielles à Γ de la vitesse acoustique ou élastique $\boldsymbol{v} = {}^T(v_1,v_2)$ et de la contrainte élastique normale $\boldsymbol{\sigma.n}$ sont notées

$$\left| \begin{array}{l} v_N = \boldsymbol{v.n} = y' v_1 - x' v_2, \\ \\ v_T = \boldsymbol{v.t} = x' v_1 + y' v_2, \\ \\ \sigma_N = (\boldsymbol{\sigma.n}).\boldsymbol{n} = y'^2 \sigma_{11} - 2\, x' y' \sigma_{12} + x'^2 \sigma_{22}, \\ \\ \sigma_T = (\boldsymbol{\sigma.n}).\boldsymbol{t} = x' y' \sigma_{11} - \left(x'^2 - y'^2\right) \sigma_{12} - x' y' \sigma_{22}. \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Dans le cas d'un milieu solide, on note $\boldsymbol{u}$ le déplacement élastique. Nous notons aussi

$$f(P^+,t) = \lim_{M \to P, M \in \Omega_1} f(M,t), \qquad f(P^-,t) = \lim_{M \to P, M \in \Omega_0} f(M,t) \tag{6.3}$$

les valeurs limites d'une fonction $f(x,y,t)$ en P de part et d'autre de Γ, et

$$[f(P,t)] = f(P^+,t) - f(P^-,t) \tag{6.4}$$

le saut de f à travers Γ en P, en allant de Ω_0 vers Ω_1. Les interfaces sont fixes ; le théorème de dérivation des fonctions composées conduit aux lemmes suivants, systématiquement utilisés

pour calculer les conditions de saut des dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$.

Lemme 3 *Soit $f(x,y,t)$ et $g(x,y,t)$ définies et suffisamment régulières d'un côté de l'interface. Pour tout t, on a*

$$\forall\tau,\quad f\left(P^{\pm},t\right)=g\left(P^{\pm},t\right)\quad\Rightarrow\quad\forall\tau,\quad\frac{\partial}{\partial\tau}f\left(P^{\pm},t\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}g\left(P^{\pm},t\right).\tag{6.5}$$

Lemme 4 *Pour $f(x,y,t)$ suffisamment régulière en $P^{\pm}$, on a*

$$\begin{aligned}\forall t,\qquad\frac{\partial}{\partial\tau}f\left(P^{\pm},t\right)&=x'\frac{\partial}{\partial x}f\left(P^{\pm},t\right)+y'\frac{\partial}{\partial y}f\left(P^{\pm},t\right),\\&=\boldsymbol{t}.\boldsymbol{\nabla}f\left(P^{\pm},t\right).\end{aligned}\tag{6.6}$$

6.2 Interface fluide-fluide

6.2.1 Introduction

Nous étudions ici l'interface entre deux fluides parfaits au repos. A chaque instant et en tout point de l'interface, la vitesse acoustique normale à l'interface et la pression acoustique sont continues au passage de l'interface. Dans un premier temps, nous calculons les conditions de saut naturelles vérifiées par les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$. Dans un deuxième temps, nous calculons des conditions de saut supplémentaires. Enfin, nous résumons ces deux types de conditions sous une forme matricielle.

6.2.2 Conditions de saut naturelles

Ordre 0. La masse volumique ρ et la célérité des ondes acoustiques c sont constantes par morceaux

$$(\rho,c)=\begin{cases}(\rho_0,c_0)\ \text{ si } M(x,y)\in\Omega_0\\(\rho_1,c_1)\ \text{ si } M(x,y)\in\Omega_1.\end{cases}\tag{6.7}$$

Pour un fluide parfait, on considère classiquement que la vitesse acoustique normale à l'interface et la pression acoustique sont continues à l'interface [26], soit

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}]=0,\\&[p]=0.\end{aligned}\tag{6.8}$$

A partir de (6.2), ces conditions de saut naturelles s'écrivent

$$\boxed{\begin{array}{l}\left[y^{'}\, v_1 - x^{'}\, v_2\right] = 0,\\[2ex] [p] = 0.\end{array}} \tag{6.9}$$

On obtient ainsi une condition de saut pour la pression acoustique, et seulement une condition de saut pour les deux composantes de la vitesse acoustique.

Pour obtenir des conditions de saut portant sur les composantes des dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, on dérive maintenant un certain nombre de fois les conditions de saut naturelles (6.9) par rapport à τ et par rapport à t.

Ordre 1. Dans un premier temps, on dérive (6.9) par rapport à τ. Le lemme 3 et le lemme 4 impliquent

$$\left[y^{''}\, v_1 - x^{''}\, v_2 + x^{'}\, y^{'}\, \frac{\partial v_1}{\partial x} - x^{'2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + y^{'2} \frac{\partial v_1}{\partial y} - x^{'}\, y^{'}\, \frac{\partial v_2}{\partial y}\right] = 0, \tag{6.10}$$

et

$$\left[x^{'}\, \frac{\partial p}{\partial x} + y^{'}\, \frac{\partial p}{\partial y}\right] = 0. \tag{6.11}$$

Dans un deuxième temps, on dérive les deux équations de (6.9) par rapport à t. On remplace alors les dérivées temporelles par des dérivées spatiales via les lois de conservation (3.8). On obtient respectivement

$$\left[-\frac{y^{'}}{\rho}\, \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^{'}}{\rho}\, \frac{\partial p}{\partial y}\right] = 0, \tag{6.12}$$

et

$$\left[\rho\, c^2\, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \rho\, c^2\, \frac{\partial v_2}{\partial y}\right] = 0. \tag{6.13}$$

Résumons les conditions à l'ordre 1. Les conditions (6.11) et (6.13) impliquent deux conditions de saut pour les deux grandeurs $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$. Ces deux grandeurs sont reliées de manière bijective des deux côtés de l'interface. En effet, les conditions (6.11) et (6.13) reviennent à écrire

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} \\[2ex] -\dfrac{y^{'}}{\rho} & \dfrac{x^{'}}{\rho} \end{pmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{0}. \tag{6.14}$$

Or, pour une interface sans point singulier, on a

$$x^{'2} + y^{'2} > 0. \tag{6.15}$$

D'où

$$\det \Delta = \frac{x'^2 + y^2}{\rho} > 0, \tag{6.16}$$

ce qui démontre la bijection. Par contre, on obtient seulement deux conditions de saut pour les quatre grandeurs $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_i}{\partial y}$ $(1 \leq i \leq 2)$.

Ordre 2. Dans un premier temps, on dérive les deux équations de (6.9) deux fois par rapport à τ. On obtient alors respectivement

(6.17)

$$\left[y''' v_1 - x''' v_2 + \left(2 x' y'' + x'' y'\right) \frac{\partial v_1}{\partial x} - 3 x' x'' \frac{\partial v_2}{\partial x} + 3 y' y'' \frac{\partial v_1}{\partial y} - \left(2 x'' y' + x' y''\right) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right.$$

$$\left. + x'^2 y' \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - x'^3 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 2 x' y'^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - 2 x'^2 y' \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + y'^3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - x' y'^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] = 0,$$

et

$$\left[x'' \frac{\partial p}{\partial x} + y'' \frac{\partial p}{\partial y} + x'^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 x' y' \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = 0. \tag{6.18}$$

Dans un deuxième temps, on dérive les trois équations de (6.9) par rapport à τ et par rapport à t. On remplace les dérivées temporelles premières par des dérivées spatiales premières via les lois de conservation (3.8). On obtient respectivement

$$\left[-\frac{y''}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x''}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{x' y'}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{x'^2 - y'^2}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{x' y'}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = 0, \tag{6.19}$$

et

$$\left[\rho c^2 x' \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \rho c^2 y' \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \rho c^2 x' \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \rho c^2 y' \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] = 0. \tag{6.20}$$

Dans un troisième et dernier temps, on dérive (6.9) deux fois par rapport à t. On remplace alors les dérivées temporelles secondes par des dérivées spatiales secondes, via les lois (3.15). On obtient respectivement

$$\left[c^2 y' \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - c^2 x' \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + c^2 y' \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} - c^2 x' \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] = 0, \tag{6.21}$$

et

$$\left[c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = 0. \tag{6.22}$$

Là encore, on dispose d'un jeu complet de conditions de saut pour la pression acoustique, soit trois conditions de saut pour les trois grandeurs $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$, et $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$. Par contre, on dispose seulement de trois conditions de saut pour les six grandeurs $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y}$, et $\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}$ $(1 \leq i \leq 2)$.

Ordre k. Les calculs présentés jusqu'à l'ordre deux se généralisent aux ordres supérieurs. Pour obtenir les conditions de saut portant sur les composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, on dérive k fois les conditions de saut naturelles (6.9), par rapport à τ et t. On écrit alors $(0 \leq j \leq k)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[v_N] = 0, \\ &\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[p] = 0, \end{aligned} \tag{6.23}$$

avec v_N donné en (6.2). On remplace les dérivées temporelles à l'ordre j $(0 \leq j \leq k)$ découlant de (6.23) par des dérivées spatiales d'ordre j, via les relations à l'ordre j (3.16). Après calculs, on obtient ainsi $(k+1)$ conditions de saut pour les $(k+1)$ composantes $\frac{\partial^k p}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(0 \leq j \leq k)$. Par contre, on obtient seulement $(k+1)$ conditions de saut pour les $2(k+1)$ composantes de la vitesse acoustique $\frac{\partial^k v_i}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq k)$.

Bilan des équations. On recense ici les conditions de saut naturelles, de l'ordre 0 jusqu'à l'ordre k. Concernant la pression acoustique, on a $(k+1)(k+2)/2$ conditions de saut pour $(k+1)(k+2)/2$ grandeurs $\frac{\partial^i p}{\partial x^{i-j}\,\partial y^j}$ $(0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq i)$, i.e. autant d'équations que d'inconnues. Concernant la vitesse acoustique, on a seulement $(k+1)(k+2)/2$ conditions de saut pour $(k+1)(k+2)$ grandeurs $\frac{\partial^i v_l}{\partial x^{i-j}\,\partial y^j}$ $(0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq i, 1 \leq l \leq 2)$. On pose

$$\begin{aligned} &n_c = (k+1)(k+2), \\ &n_i = \mathrm{rg}(k,k,3) = \frac{3(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

où l'application rg est définie en (3.25). On obtient alors n_c conditions de saut naturelles pour n_i composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, avec $n_c < n_i$.

6.2.3 Conditions de saut supplémentaires

Dans la section précédente, nous avons montré que le nombre de conditions de saut *naturelles* portant sur la vitesse acoustique et sur ses dérivées spatiales est inférieur au nombre de composantes de la vitesse acoustique et de ses dérivées spatiales. Dans le cas de l'interface fluide-fluide, il est cependant possible d'adjoindre des conditions de saut *supplémentaires*, déduites des conditions de saut naturelles et des lois de conservation.

Ordre 0. Comme au début de la section 6.2.2, nous dérivons par rapport à τ la condition de saut portant sur la pression acoustique. Le lemme 3 et le lemme 4 impliquent alors

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[p] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [\boldsymbol{t}.\boldsymbol{\nabla} p] = 0, \tag{6.25}$$

ce qui revient à la deuxième condition de saut de (6.11). A partir des lois de conservation (3.8) et de (6.1), on déduit

$$\left[\rho\,\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{v}.\boldsymbol{t}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\left[\rho\,x^{'}\,v_1 + \rho\,y^{'}\,v_2\right] = 0. \tag{6.26}$$

Après une intégration en temps, on obtient

$$\left[\rho\, x^{'} v_1 + \rho\, y^{'} v_2\right] = [\rho\, v_T] = C(\tau_0), \tag{6.27}$$

$C(\tau_0)$ étant une constante indépendante du temps. Si le saut de $\rho\, v_T$ est nul à un instant donné en P, en particulier si $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ est nul à l'instant initial en P, la constante C est nulle. Nous nous plaçons ici dans ce dernier cas. La condition *supplémentaire* à l'ordre 0

$$\boxed{\left[\rho\, x^{'} v_1 + \rho\, y^{'} v_2\right] = 0} \tag{6.28}$$

est alors vérifiée à chaque instant. La condition (6.28) s'interprète comme la conservation du débit massique tangentiel de la vitesse acoustique. Même si la condition de saut supplémentaire (6.28) découle en partie de (6.9), ces deux conditions de saut sont indépendantes et relient de manière bijective les valeurs limites de v_1 et v_2 des deux côtés de l'interface. En effet, ces conditions conduisent à

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} y^{'} & -x^{'} \\ \rho\, x^{'} & \rho\, y^{'} \end{pmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} \\ \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{0}. \tag{6.29}$$

Or, l'interface étant régulière, on a

$$\det \Delta = \rho\, \left(x^{'2} + y^{'2}\right) > 0, \tag{6.30}$$

ce qui démontre la bijection.

Ordre 1. Pour obtenir des conditions de saut supplémentaires portant sur les dérivées spatiales de v_1 et v_2, on peut dériver (6.28) par rapport à τ et par rapport à t. Cependant, par construction même, il est inutile de dériver la condition de saut supplémentaire par rapport à t. En effet,

$$\frac{\partial}{\partial\, t}\, \left[\rho\, x^{'} v_1 + \rho\, y^{'} v_2\right] = \frac{\partial}{\partial\, \tau}\, [p] = 0, \tag{6.31}$$

cette dernière condition étant déjà écrite en (6.11). Finalement, on obtient seulement une condition de saut supplémentaire à l'ordre un, obtenue par dérivation par rapport à τ de (6.28), soit

$$\left[\rho\, x^{''} v_1 + \rho\, y^{''} v_2 + \rho\, x^{'2} \frac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + \rho\, x^{'} y^{'} \frac{\partial\, v_2}{\partial\, x} + \rho\, x^{'} y^{'} \frac{\partial\, v_1}{\partial\, y} + \rho\, y^{'2} \frac{\partial\, v_2}{\partial\, y}\right] = 0. \tag{6.32}$$

Ordre 2. A l'ordre deux, on dérive (6.28) deux fois par rapport à τ et on obtient

$$\begin{aligned} &\Big[\rho\, x^{'''} v_1 + \rho\, y^{'''} v_2 + 3\, \rho\, x^{'} x^{''} \frac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + \rho\, \left(2\, x^{'} y^{''} + x^{''} y^{'}\right) \frac{\partial\, v_2}{\partial\, x} + \rho\, \left(2\, x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right) \frac{\partial\, v_1}{\partial\, y} \\ &+3\, \rho\, y^{'} y^{''} \frac{\partial\, v_2}{\partial\, y} + \rho\, x^{'3} \frac{\partial^2\, v_1}{\partial\, x^2} + \rho\, x^{'2} y^{'} \frac{\partial^2\, v_2}{\partial\, x^2} + 2\, \rho\, x^{'2} y^{'} \frac{\partial^2\, v_1}{\partial\, x\, \partial\, y} + 2\, \rho\, x^{'} y^{'2} \frac{\partial^2\, v_2}{\partial\, x\, \partial\, y} \\ &+\rho\, x^{'} y^{'2} \frac{\partial^2\, v_1}{\partial\, y^2} + \rho\, y^{'3} \frac{\partial^2\, v_2}{\partial\, y^2}\Big] = 0. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ordre k. A l'ordre k, on dérive (6.28) k fois par rapport à τ, soit

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}\,[\rho\, v_T] = 0. \tag{6.34}$$

Bilan des équations. A chaque ordre, on obtient ainsi une condition de saut supplémentaire portant sur les dérivées spatiales de la vitesse acoustique. Finalement, de l'ordre 0 à l'ordre k, on obtient n_s conditions de saut supplémentaires, avec

$$n_s = k + 1. \tag{6.35}$$

6.2.4 Ecriture matricielle des conditions de saut

Nous résumons ici les conditions de saut naturelles et supplémentaires calculées dans les sections précédentes. Pour cela, nous définissons la matrice $\boldsymbol{C}$ telle que

$$[\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{U_k}] = \boldsymbol{0}, \tag{6.36}$$

avec

$$\boldsymbol{C} = \begin{cases} \boldsymbol{C}_0 \text{ si } M(x,y) \in \Omega_0 \\ \\ \boldsymbol{C}_1 \text{ si } M(x,y) \in \Omega_1. \end{cases} \tag{6.37}$$

Les indices 0 et 1 dans (6.37) réfèrent aux valeurs des paramètres physiques ρ et c utilisés dans l'écriture de $\boldsymbol{C}$. Suivant que l'on utilise ou pas les conditions de saut supplémentaires, la matrice $\boldsymbol{C}$ est une matrice $n_c \times n_i$ ou $(n_c + n_s) \times n_i$, avec n_c et n_i définis en (6.24), et n_s défini en (6.35). Nous écrivons explicitement $\boldsymbol{C}$ pour $k = 2$ en annexe 1, ce qui permet une programmation directe de la méthode d'interface si le lecteur choisit des schémas d'ordre deux, comme les schémas de Lax-Wendroff ou de volumes finis avec limiteur de flux (voir chapitre 8).

6.3 Interface solide-solide (contact parfait soudé)

6.3.1 Introduction

Nous considérons maintenant le cas de deux solides élastiques isotropes parfaitement collés. A chaque instant et en tout point de l'interface, la vitesse élastique et la contrainte élastique sont continues au passage de l'interface. Comme dans le cas de l'interface fluide-fluide, nous calculons tout d'abord les conditions de saut naturelles de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, puis les conditions de saut supplémentaires. Enfin, nous résumons les calculs sous une forme matricielle.

6.3.2 Conditions de saut naturelles

Ordre 0. La masse volumique ρ et les célérités des ondes élastiques de compression c_p et de cisaillement c_s sont constantes par morceaux

$$(\rho,c_p,c_s) = \begin{cases} (\rho_0,c_{p0},c_{s0}) \text{ si } M(x,y) \in \Omega_0 \\ \\ (\rho_1,c_{p1},c_{s1}) \text{ si } M(x,y) \in \Omega_1. \end{cases} \tag{6.38}$$

Par la suite, nous utilisons aussi les coefficients de Lamé, reliés à c_p et c_s par (3.20). Les composantes normales et tangentielles de la vitesse élastique, soit v_N et v_T, ainsi que les composantes normales et tangentielles de la contrainte élastique normale à l'interface, soit σ_N et σ_T, sont supposées continues en P. Compte-tenu de (6.2), on obtient quatre conditions de saut *naturelles*

$$\boxed{\begin{aligned}
&[v_N] = \left[y^{'}\, v_1 - x^{'}\, v_2\right] = 0,\\
&[v_T] = \left[x^{'}\, v_1 + y^{'}\, v_2\right] = 0,\\
&[\sigma_N] = \left[y^{'2}\sigma_{11} - 2\, x^{'} y^{'}\, \sigma_{12} + x^{'2}\sigma_{22}\right] = 0,\\
&[\sigma_T] = \left[x^{'} y^{'}\sigma_{11} - \left(x^{'2} - y^{'2}\right)\sigma_{12} - x^{'} y^{'}\sigma_{22}\right] = 0.
\end{aligned}} \tag{6.39}$$

On obtient ainsi deux conditions de saut pour les deux composantes v_1 et v_2 de la vitesse élastique, et seulement deux conditions de saut pour les trois composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques σ_{11}, σ_{12} et σ_{22}. On pourrait simplifier le système (6.39) en écrivant

$$\begin{aligned}
&[v_1] = 0,\\
&[v_2] = 0,\\
&\left[y^{'}\sigma_{11} - x^{'}\sigma_{12}\right] = 0,\\
&\left[y^{'}\sigma_{12} - x^{'}\sigma_{22}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Toutefois, cette simplification n'est possible que pour le cas traité dans cette section de deux solides parfaitement collés ; or le cas d'une interface imparfaite entre deux solides (traité plus loin) revient seulement à ajouter un second membre aux conditions de saut (6.39). Pour réutiliser directement les expressions calculées durant la présente section, nous préférons alors travailler avec les conditions (6.39)

Pour obtenir des conditions de saut portant sur les composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, on dérive maintenant les conditions de saut naturelles (6.39) par rapport à τ et par rapport à t.

Ordre 1. Dans un premier temps, on dérive (6.39) par rapport à τ. Le lemme 3 et le lemme 4 impliquent

$$\left[y^{''} v_1 - x^{''} v_2 + x^{'} y^{'}\frac{\partial v_1}{\partial x} - x^{'2}\frac{\partial v_2}{\partial x} + y^{'2}\frac{\partial v_1}{\partial y} - x^{'} y^{'}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right] = 0, \tag{6.41}$$

et

$$\left[x^{''} v_1 + y^{''} v_2 + x^{'2}\frac{\partial v_1}{\partial x} + x^{'} y^{'}\frac{\partial v_2}{\partial x} + x^{'} y^{'}\frac{\partial v_1}{\partial y} + y^{'2}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right] = 0, \tag{6.42}$$

et

$$\left[2\,y^{'}y^{''}\sigma_{11}-2\left(x^{''}y^{'}+x^{'}y^{''}\right)\sigma_{12}+2\,x^{'}x^{''}\sigma_{22}+x^{'}y^{'2}\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}-2\,x^{'2}y^{'}\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+x^{'3}\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}\right.$$
$$\left.+y^{'3}\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y}-2\,x^{'}y^{'2}\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}+x^{'2}y^{'}\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right]=0, \tag{6.43}$$

et

$$\left[\left(x^{''}y^{'}+x^{'}y^{''}\right)\sigma_{11}-2\left(x^{'}x^{''}-y^{'}y^{''}\right)\sigma_{12}-\left(x^{''}y^{'}+x^{'}y^{''}\right)\sigma_{22}+x^{'2}y^{'}\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}\right.$$
$$\left.-\left(x^{'3}-x^{'}y^{'2}\right)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}-x^{'2}y^{'}\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}+x^{'}y^{'2}\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y}-\left(x^{'2}y^{'}-y^{'3}\right)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}-x^{'}y^{'2}\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right]=0. \tag{6.44}$$

Dans un deuxième temps, on dérive (6.39) par rapport à t. On remplace alors les dérivées temporelles par des dérivées spatiales via les lois de conservation (3.17). On obtient alors

$$\left[\frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}-\frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+\frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}-\frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right]=0, \tag{6.45}$$

et

$$\left[\frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}+\frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+\frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}+\frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right]=0, \tag{6.46}$$

et

$$\left[\left(x^{'2}\lambda+y^{'2}\left(\lambda+2\,\mu\right)\right)\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}-2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}-2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}+\left(y^{'2}\lambda+x^{'2}\left(\lambda+2\,\mu\right)\right)\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\right]=0, \tag{6.47}$$

et

$$\left[2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}-\left(x^{'2}-y^{'2}\right)\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}-\left(x^{'2}-y^{'2}\right)\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}-2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\right]=0. \tag{6.48}$$

Finalement, les conditions (6.44) et (6.48) impliquent quatre conditions de saut pour les quatre grandeurs $\frac{\partial\,v_i}{\partial\,x}$ et $\frac{\partial\,v_i}{\partial\,y}$ $(1\leq i\leq 2)$. Par contre, on dispose seulement de quatre conditions de saut pour les six grandeurs $\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x}$ et $\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,y}$ $(1\leq i\leq j, i\leq j\leq 2)$.

Ordre 2. Dans un premier temps, on dérive (6.39) deux fois par rapport à τ. Le lemme 3 et le lemme 4 impliquent

$$\left[y^{'''}v_1-x^{'''}v_2+\left(x^{''}y^{'}+2\,x^{'}y^{''}\right)\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}-3\,x^{'}x^{''}\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}+3\,y^{'}y^{''}\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}-\left(2\,x^{''}y^{'}+x^{'}y^{''}\right)\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\right.$$
$$\left.+x^{'2}y^{'}\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x^2}-x^{'3}\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x^2}+2\,x^{'}y^{'2}\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x\,\partial\,y}-2\,x^{'2}y^{'}\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x\,\partial\,y}+y^{'3}\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,y^2}-x^{'}y^{'2}\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,y^2}\right]=0, \tag{6.49}$$

et

(6.50)
$$\Big[x'''v_1+y'''v_2+3\,x'x''\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}+\Big(x''y'+2\,x'y''\Big)\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}+\Big(2\,x''y'+x'y''\Big)\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}+3\,y'y''\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}$$
$$+x'^3\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x^2}+x'^2y'\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x^2}+2\,x'^2y'\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x\,\partial\,y}+2\,x'y'^2\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x\,\partial\,y}+x'y'^2\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,y^2}+y'^3\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,y^2}\Big]=0,$$

et

(6.51)
$$\Big[2\Big(y''^2+y'y'''\Big)\sigma_{11}-2\Big(x'''y'+2\,x''y''+x'y'''\Big)\sigma_{12}+2\Big(x''^2+x'x'''\Big)\sigma_{22}$$
$$+\Big(x''y'^2+4\,x'y'y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}-2\Big(3\,x'x''y'+2\,x'^2y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+5\,x'^2x''\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}+5\,y'^2y''\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y}$$
$$-2\Big(2\,x''y'^2+3\,x'y'y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}+\Big(3\,x'^2x''+2\,x'x''y'\Big)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}+x'^2y'^2\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}-2\,x'^3y'\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}$$
$$+x'^4\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x^2}+2\,x'y'^3\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y}-4\,x'^2y'^2\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}+\Big(x'^3y'+x'^4\Big)\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x\,\partial\,y}+y'^4\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,y^2}$$
$$-2\,x'y'^3\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}+x'^3y'\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\Big]=0,$$

et

(6.52)
$$\Big[\Big(x'''y'+2\,x''y''+x'y'''\Big)\sigma_{11}-2\Big(x''^2+x'x'''-y''^2-y'y'''\Big)\sigma_{12}$$
$$-\Big(x'''y'+2\,x''y''+x'y'''\Big)\sigma_{22}+\Big(3\,x'x''y'+2\,x'^2y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}$$
$$-\Big(5\,x'^2x''-x''y'^2-3\,x'y'y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}-\Big(3\,x'x''y'+2\,x'^2y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}$$
$$+\Big(2\,x''y'^2+3\,x'y'y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y}-\Big(4\,x'x''y'+x'^2y''-5\,y'^2y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}$$
$$-\Big(2\,x''y'^2+3\,x'y'y''\Big)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}+x'^3y'\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}-\Big(x'^4-x'^2y'^2\Big)\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}-x'^3y'\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x^2}$$
$$+2\,x'^2y'^2\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}-2\Big(x'^3y'-x'y'^3\Big)\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}$$
$$-2\,x'^2y'^2\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x\,\partial\,y}+x'y'^3\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,y^2}-\Big(x'^2y'^2-y'^4\Big)\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}-x'y'^3\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\Big]=0.$$

Dans un deuxième temps, on dérive (6.39) par rapport à τ et par rapport à t. On remplace les dérivées temporelles premières par des dérivées spatiales premières via les lois de conservation

(3.17). On obtient alors

$$\left[\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}-\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}-\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-\frac{x'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}-\frac{x'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+\frac{y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\right]=0, \tag{6.53}$$

et

$$\left[\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{1y}}{\partial y}+\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}+\frac{x'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{x'^2+y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\right]=0, \tag{6.54}$$

et

$$\left[2\left(x'x''\lambda+y'y''\left(\lambda+2\mu\right)\right)\frac{\partial v_1}{\partial x}-2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_2}{\partial x}-2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_1}{\partial y}\right.$$
$$+2\left(y'y''\lambda+x'x''\left(\lambda+2\mu\right)\right)\frac{\partial v_2}{\partial y}+\left(x'y'^2\left(\lambda+2\mu\right)+x'^3\lambda\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-2x'^2y'\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$
$$\left(x'^2y'\left(\lambda-2\mu\right)+y'^3\left(\lambda+2\mu\right)\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}+\left(x'y'^2\left(\lambda-2\mu\right)+x'^3\left(\lambda+2\mu\right)\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}$$
$$\left.-2x'y'^2\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\left(y'^3\lambda+x'^2y'\left(\lambda+2\mu\right)\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right]=0, \tag{6.55}$$

et

$$\left[2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_1}{\partial x}-2\left(x'x''-y'y''\right)\mu\frac{\partial v_2}{\partial x}-2\left(x'x''-y'y''\right)\mu\frac{\partial v_1}{\partial y}\right.$$
$$-2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_2}{\partial y}+2x'^2y'\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\left(x'^3-x'y'^2\right)\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\left(3x'y'^2-x'^3\right)\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}$$
$$\left.-\left(3x'^2y'-y'^3\right)\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}-\left(x'^2y'-y'^3\right)\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-2x'y'^2\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right]=0. \tag{6.56}$$

Dans un troisième et dernier temps, on dérive (6.39) deux fois par rapport à t. On remplace alors les dérivées temporelles secondes par des dérivées spatiales secondes, via les lois de conservation (3.12). On obtient alors

$$\left[y'\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-x'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-x'\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}+y'\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}+y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-x'\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right]=0, \tag{6.57}$$

et

(6.58)
$$\left[x'\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+y'\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}+x'\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}+x'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+y'\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right]=0,$$

et

(6.59)
$$\left[\frac{1}{\rho}\left(x'^2\lambda+y'^2(\lambda+2\mu)\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}-2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}+2\left(x'^2+y'^2\right)\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}\right.$$
$$\left.-2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}-2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho}\left(y'^2\lambda+x'^2(\lambda+2\mu)\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\right]=0,$$

et

(6.60)
$$\left[2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}\right.$$
$$\left.-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-2\,x'y'\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\right]=0.$$

On dispose alors d'un jeu complet de conditions de saut portant sur la vitesse élastique, soit six conditions de saut pour six grandeurs $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}$ $(1\le i\le 2)$. Par contre, on dispose seulement de six conditions de saut pour les neuf grandeurs $\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial y^2}$ $(1\le i\le 2, i\le j\le 2)$.

Ordre k. Les calculs présentés jusqu'à l'ordre deux se généralisent facilement aux ordres supérieurs. Pour obtenir les conditions de saut portant sur les composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ $(0\le j\le k)$, on dérive k fois les conditions de saut naturelles (6.39) par rapport à τ et par rapport à t. On écrit ainsi $(0\le j\le k)$

(6.61)
$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[v_N]=0,$$
$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[v_T]=0,$$
$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[\sigma_N]=0,$$
$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[\sigma_T]=0,$$

avec v_N, v_T, σ_N et σ_T donnés en (6.2). On applique les règles de dérivations du lemme 3 et du lemme 4, puis on transforme les dérivées temporelles à l'ordre j $(0\le j\le k)$ en dérivées spatiales d'ordre j, via les relations à l'ordre j (3.16). Après calculs, on obtient ainsi $2(k+1)$ conditions de saut pour les $2(k+1)$ grandeurs $\frac{\partial^k v_i}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(0\le i\le 2, 0\le j\le k)$. Par contre, on obtient seulement $2(k+1)$ conditions de saut pour les $3(k+1)$ grandeurs $\frac{\partial^k\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(1\le\alpha\le 2, \alpha\le\beta\le 2, 0\le j\le k)$.

Bilan des équations. On recense ici les conditions de saut naturelles, de l'ordre 0 jusqu'à l'ordre k. Concernant la vitesse élastique, on a $(k+1)(k+2)$ conditions de saut pour $(k+1)(k+2)$ grandeurs $\frac{\partial^j v_i}{\partial x^{j-l}\partial y^l}$ $(0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq k, 0 \leq l \leq j)$, saut autant d'équations que d'inconnues. Concernant la contrainte élastique, on obtient seulement $(k+1)(k+2)$ conditions de saut pour les $3(k+1)(k+2)/2$ grandeurs $\frac{\partial^j \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^{j-l}\partial y^l}$ $(0 \leq j \leq k, 0 \leq i \leq j, 1 \leq \alpha \leq 2, \alpha \leq \beta \leq 2)$. En posant

$$\begin{aligned} n_c &= 2(k+1)(k+2), \\ n_i &= \mathrm{rg}(k,k,5) = \frac{5(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned} \tag{6.62}$$

on obtient finalement n_c conditions de saut naturelles pour n_i composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, avec $n_c < n_i$.

6.3.3 Conditions de saut supplémentaires

Dans la section précédente, nous avons montré que le nombre de conditions de saut portant sur la contrainte élastique, ainsi que sur ses dérivées spatiales, était inférieur au nombre de composante de la contrainte élastique et de ses dérivées spatiales. Comme dans le cas de l'interface fluide-fluide, on peut compléter ces conditions par des conditions de saut supplémentaires, déduites des lois de conservation.

Ordre 0. Pour deux solides parfaitement collés, le déplacement élastique est continu de part et d'autre de l'interface, soit

$$[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{0}. \tag{6.63}$$

Par application du lemme 3, on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{0}. \tag{6.64}$$

Le produit scalaire avec le vecteur tangent $\boldsymbol{t}$ vérifie alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t} = 0. \tag{6.65}$$

L'application du lemme 4 et la définition de $\boldsymbol{t}$ (6.1) permettent d'écrire (6.65) sous la forme

$$\left[x'^2\frac{\partial u_1}{\partial x} + x'y'\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + y'^2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] = 0. \tag{6.66}$$

Les relations déformation-contrainte à l'ordre 0 (3.35), vues au chapitre 3, sont en particulier valables de part et d'autre de Γ. On peut alors simplifier (6.66), ce qui conduit à la condition de saut *supplémentaire*

$$\boxed{\left[\left(x'^2\alpha_1 + y'^2\alpha_2\right)\sigma_{11} + \frac{x'y'}{\mu}\,\sigma_{12} + \left(x'^2\alpha_2 + y'^2\alpha_1\right)\sigma_{22}\right] = 0,} \tag{6.67}$$

où les coefficients α_1, α_2 sont définis en (3.32). Les conditions de saut naturelles (6.39) et la condition de saut supplémentaire (6.67) sont indépendantes, et relient de manière bijective les valeurs limites de σ_{11}, σ_{12}, et σ_{22} des deux côtés de l'interface. En effet, ces conditions conduisent au système

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} y'^2 & -2\,x'\,y' & x'^2 \\ x'\,y' & -\left(x'^2-y'^2\right) & -x'\,y' \\ x'^2\alpha_1+y^2\alpha_2 & \dfrac{x'\,y'}{\mu} & x'^2\alpha_2+y'^2\alpha_1 \end{pmatrix}}_{\Delta}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{22}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{6.68}$$

Après calculs, on obtient

$$\det\Delta=\frac{(\lambda+2\,\mu)\left(x'^2+y'^2\right)^3}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}>0, \tag{6.69}$$

ce qui démontre la bijection.

Ordre 1. Pour obtenir des conditions de saut supplémentaires portant sur les dérivées spatiales de σ_{ij} $(1\le i\le 2, i\le j\le 2)$, on peut dériver (6.67) par rapport à τ et par rapport à t. Cependant, il s'avère inutile de dériver la condition de saut supplémentaire (6.67) par rapport à t. En effet, la dérivée par rapport à t de (6.67) revient, par construction même, à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t}\right)=0=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,[\boldsymbol{u}]\right)\right).\boldsymbol{t}, \tag{6.70}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\boldsymbol{v}]\right).\boldsymbol{t}=0. \tag{6.71}$$

Or la condition $\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\boldsymbol{v}]=\mathbf{0}$ est déjà utilisée en (6.44) : la condition (6.71) est alors redondante et inutile. Par contre, en dérivant (6.67) par rapport à τ, on obtient une première condition de saut supplémentaire à l'ordre un, soit

$$\begin{aligned}\Bigg[&2\left(x'\,x''\alpha_1+y'\,y''\alpha_2\right)\sigma_{11}+\frac{1}{\mu}\left(x'\,y''+x''\,y'\right)\sigma_{12}+2\left(x'\,x''\alpha_2+y'\,y''\alpha_1\right)\sigma_{22}\\ &+\left(x'^3\alpha_1+x'\,y'^2\alpha_2\right)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}+\frac{x'^2y'}{\mu}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+\left(x'^3\alpha_2+x'\,y'^2\alpha_1\right)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}\\ &+\left(x'^2y'\,\alpha_1+y'^3\alpha_2\right)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y}+\frac{x'\,y'^2}{\mu}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}+\left(x'^2y'\,\alpha_2+y'^3\alpha_1\right)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\Bigg]=0.\end{aligned} \tag{6.72}$$

Nous cherchons maintenant une deuxième condition de saut supplémentaire à l'ordre un. Pour cela, on calcule

$$\frac{\partial^2}{\partial\,\tau^2}\,[\boldsymbol{u}]=\mathbf{0}. \tag{6.73}$$

Cependant, la condition (6.73) ne peut pas être utilisée telle quelle : en effet, pour $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t}$ non nul, la condition (6.73) conduit après calculs aux termes $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, dont seule la somme est connue via (3.35). Pour faire apparaître cette somme, on calcule en pratique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\,[\boldsymbol{u}]\right).\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} = 0, \tag{6.74}$$

ce qui conduit à une condition de saut non triviale uniquement si $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t}$ est non nul (en particulier, si Γ n'est pas une interface plane) ; nous étudions tout d'abord ce cas. L'application du lemme 4, puis des manipulations algébriques, permettent alors d'écrire (6.74) sous la forme

$$\begin{aligned}&\Bigg[x''^2\frac{\partial u_1}{\partial x} + x'^2x''\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\,x'x''y'\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} + x''y'^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\\ &+y''^2\frac{\partial u_2}{\partial y} + y'^2y''\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2\,x'y'y''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y} + x'^2y''\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\\ &+x''y''\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\Bigg] = 0.\end{aligned} \tag{6.75}$$

A partir des relations déformation-contraintes vues au chapitre 3 (voir (3.35)) et de (6.75), on obtient alors la deuxième condition supplémentaire à l'ordre un, valable si $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} \neq 0$, soit

$$\begin{aligned}&\Bigg[\left(x''^2\alpha_1 + y''^2\alpha_2\right)\sigma_{11} + \frac{x''y''}{\mu}\,\sigma_{12} + \left(x''^2\alpha_2 + y''^2\alpha_1\right)\sigma_{22}\\ &+\left(\left(2\,x'y'y'' - x''y'^2\right)\alpha_2 + x'^2x''\alpha_1\right)\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{x'^2y''}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x}\\ &+\left(\left(2\,x'y'y'' - x''y'^2\right)\alpha_1 + x'^2x''\alpha_2\right)\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + \left(\left(2\,x'x''y' - x'^2y''\right)\alpha_1 + y'^2y''\alpha_2\right)\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y}\\ &+\frac{x''y'^2}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \left(\left(2\,x'x''y' - x'^2y''\right)\alpha_2 + y'^2y''\alpha_1\right)\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}\Bigg] = 0.\end{aligned} \tag{6.76}$$

La condition de saut (6.76) revient cependant à une condition triviale si $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, ce qui est en particulier le cas pour une interface plane. Il convient alors de traiter ce cas à part. On remarque tout d'abord que la première condition de saut supplémentaire à l'ordre un (6.72), revient à

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \tau}[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t} + \left(\frac{\partial}{\partial \tau}[\boldsymbol{u}]\right).\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} = 0. \tag{6.77}$$

Si $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, la condition (6.77) revient alors à calculer

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t} = 0. \tag{6.78}$$

Pour déterminer une deuxième condition de saut supplémentaire à l'ordre un, indépendante de (6.78), il suffit de calculer

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\,[\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n} = 0. \tag{6.79}$$

Après calculs, on obtient ainsi la deuxième condition de saut supplémentaire à l'ordre un, valable dans le cas $\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, soit

(6.80)
$$\Bigg[\left(x'^2 y' \left(\alpha_1 - 2\,\alpha_2\right) - y'^3 \alpha_2\right) \frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x} - \frac{x'^3}{\mu}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x} + \left(x'^2 y' \left(\alpha_2 - 2\,\alpha_1\right) - y'^3 \alpha_1\right) \frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}$$
$$+ \left(x'^2 y' \left(2\,\alpha_1 - \alpha_2\right) + x'^3 \alpha_1\right) \frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y} + \frac{y'^3}{\mu}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y} + \left(x'^2 y' \left(2\,\alpha_2 - \alpha_1\right) + x'^3 \alpha_2\right) \frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\Bigg] = 0.$$

Ordre 2. On dérive (6.67) deux fois par rapport à τ, d'où

(6.81)
$$\Bigg[2\left(\left(x''^2 + x' x'''\right)\alpha_1 + \left(y''^2 + y' y'''\right)\alpha_2\right)\sigma_{11} + \frac{1}{\mu}\left(x' y''' + 2\,x'' y'' + x''' y'\right)\sigma_{12}$$
$$+2\left(\left(x''^2 + x' x'''\right)\alpha_2 + \left(y''^2 + y' y'''\right)\alpha_1\right)\sigma_{22} + \left(5\,x'^2 x'' \alpha_1 + \left(x'' y'^2 + 4\,x' y' y''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}$$
$$+\frac{3}{\mu}\left(x' x'' y' + x'^2 y''\right)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x} + \left(5\,x'^2 x'' \alpha_2 + \left(x'' y'^2 + 4\,x' y' y''\right)\alpha_1\right)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x}$$
$$+\left(\left(4\,x' x'' y' + x'^2 y''\right)\alpha_1 + 5\,y'^2 y'' \alpha_2\right)\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,y} + \frac{1}{\mu}\left(3\,x' y' y'' + 2\,x'' y'^2\right)\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}$$
$$+\left(5\,y'^2 y'' \alpha_1 + \left(4\,x' x'' y' + x'^2 y''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y} + \left(x'^4 \alpha_1 + x'^2 y'^2 \alpha_2\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2} + \frac{x'^3 y'}{\mu}\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}$$
$$+\left(x'^4 \alpha_2 + x'^2 y'^2 \alpha_1\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x^2} + 2\left(x'^3 y' \alpha_1 + x' y'^3 \alpha_2\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y} + \frac{2\,x'^2 y'^2}{\mu}\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}$$
$$+2\left(x'^3 y' \alpha_2 + x' y'^3 \alpha_1\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x\,\partial\,y} + \left(x'^2 y'^2 \alpha_1 + y'^4 \alpha_2\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,y^2} + \frac{x' y'^3}{\mu}\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}$$
$$+\left(x'^2 y'^2 \alpha_2 + y'^4 \alpha_1\right)\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\Bigg] = 0.$$

On cherche une deuxième condition de saut. Pour cela, on utilise

(6.82)
$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\,\tau^3}[\boldsymbol{u}]\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\,\tau^2}\boldsymbol{t} = 0,$$

qui conduit à une condition non triviale si $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\boldsymbol{t} \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas, on obtient après calculs et utilisation des relations déformation-contrainte (3.35),

(6.83)

$$
\begin{aligned}
&\Bigg[\left(x'''^2\alpha_1 + y'''^2\alpha_2\right)\sigma_{11} + \frac{x'''y'''}{\mu}\sigma_{12} + \left(x'''^2\alpha_2 + y'''^2\alpha_1\right)\sigma_{22} \\
&+3\left(x'x''x'''\alpha_1 - \left(x'y''y''' + x''y'y''' + x'''y'y''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{3x'x''y'''}{\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x} \\
&+3\left(\left(x'y''y''' + x''y'y''' - x'''y'y'''\right)\alpha_1 + x'x''x'''\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x} \\
&+3\left(\left(x'x'''y'' + x''x'''y' - x'x''y'''\right)\alpha_1 + y'y''y'''\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y} + \frac{3x'''y'y''}{\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} \\
&+3\left(y'y''y'''\alpha_1 + \left(x''x'''y' + x'x'''y'' - x'x''y'''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \left(x'^3x'''\alpha_1 + 3x'^2y'y'''\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2} \\
&+\frac{x'^3y'''}{\mu}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2} + \left(x'^3x'''\alpha_2 + 3x'^2y'y'''\alpha_1\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x^2} \\
&+\left(\left(3x'^2x'''y' - x'^3y'''\right)\alpha_1 + \left(3x'y'^2y''' - x'''y'^3\right)\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y} \\
&+\left(\left(3x'y'^2y''' - x'''y'^3\right)\alpha_1 + \left(3x'^2x'''y' - x'^3y'''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y} + \left(3x'x'''y'^2\alpha_1 + y'^3y'''\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial y^2} \\
&+\frac{x'''y'^3}{\mu}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2} + \left(3x'x'''y'^2\alpha_2 + y'^3y'''\alpha_1\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\Bigg] = 0.
\end{aligned}
$$

Par contre, dans le cas $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ (ce qui est en particulier le cas d'une interface plane), on utilise

(6.84)
$$\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}[\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n} = 0,$$

et on obtient après calculs
(6.85)

$$\Bigg[3\left(x'x''y'\alpha_1-\left(x'x''y'+x'^2y''+y'^2y''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}-\frac{3x'^2x''}{\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}$$

$$-3\left(\left(x'x''y'+x'^2y''+y'^2y''\right)\alpha_1-x'x''y'\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}+3\left(\left(x'^2x''+x''y'^2+x'y'y''\right)\alpha_1-x'y'y''\alpha_2\right)\frac{\partial}{\partial}$$

$$+\frac{3y'^2y''}{\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}-3\left(x'y'y''\alpha_1-\left(x'^2x''+x''y'^2+x'y'y''\right)\alpha_2\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\left(x'^3y'\alpha_1-3x'^3y'\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}$$

$$+\left(\left(x'^4+3x'^2y'^2\right)\alpha_1-\left(y'^4+3x'^2y'^2\right)\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}-\left(\left(y'^4+3x'^2y'^2\right)\alpha_1-\left(x'^4+3x'^2y'^2\right)\alpha_2\right)\frac{\partial^2}{\partial x}$$

$$+\left(3x'y'^3\alpha_1-x'y'^3\alpha_2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial y^2}+\frac{y'^4}{\mu}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}+\left(3x'y'^3\alpha_2-x'y'^3\alpha_1\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\Bigg]=0.$$

Ordre k. A l'ordre k, on cherche deux conditions de saut supplémentaires. Si $\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{0}$, on calcule

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t}\right)=0,\qquad\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\,[\boldsymbol{u}]\right).\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\boldsymbol{t}=0. \tag{6.86}$$

Le calcul de la première équation de (6.86) est direct. Le calcul de la deuxième équation de (6.86) repose sur les relations déformation-contrainte à l'ordre k. Si $\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$, les deux conditions de saut supplémentaires sont

$$\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{n}=0,\qquad\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\,[\boldsymbol{u}]\right).\boldsymbol{t}=0. \tag{6.87}$$

Bilan des équations. Finalement, de l'ordre 0 jusqu'à l'ordre k, on obtient ainsi $n_s=2k+1$ conditions de saut supplémentaires.

6.3.4 Ecriture matricielle des conditions de saut

Les conditions de saut naturelles et supplémentaires calculées dans les sections précédentes jusqu'à $k=2$ peuvent être résumées de façon matricielle. Pour cela, nous définissons une matrice $\boldsymbol{C}$ de la même façon que dans le cas fluide-fluide, et vérifiant en particulier (6.36) et (6.37). Nous renvoyons à l'annexe 1 pour l'expression détaillée de $\boldsymbol{C}$.

6.4 Interface solide-solide (contact imparfait)

6.4.1 Introduction

Nous traitons maintenant le cas de deux solides élastiques reliés par un contact imparfait. Le degré de contact est modélisé par des conditions de type masse-ressort, généralisant celles déjà vues en

1D au chapitre 5. A chaque instant et en tout point de l'interface, les sauts des composantes de la vitesse élastique et de la contrainte élastique normale sont non nuls : ils sont linéairement reliés aux composantes de la contrainte normale et de la vitesse élastique d'un côté de l'interface. La zone de contact est alors décrite par un modèle rhéologique simple : un système masse-ressort. Les valeurs de masse et de ressorts peuvent être calculées dans des cas académiques. Autrement, elles doivent être déterminées par des essais ultrasonores ou mécaniques, et sont reliées à la qualité du contact.

6.4.2 Conditions de saut naturelles

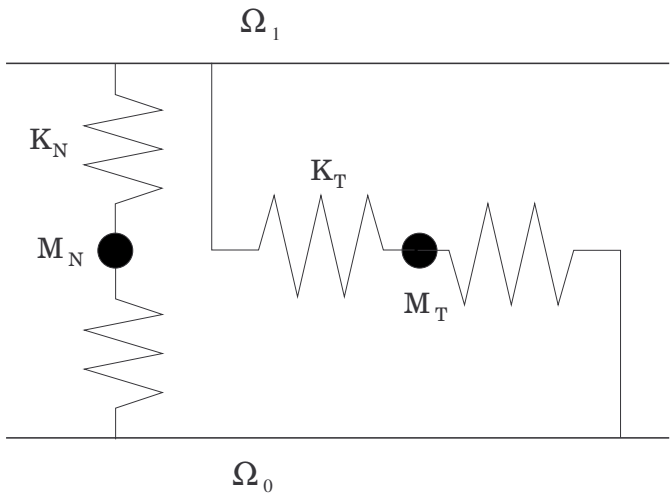

FIG. 6.2 – *Modèle rhéologique décrivant un contact imparfait entre les milieux* Ω_0 *et* Ω_1.

Ordre 0. Les paramètres physiques sont les mêmes qu'en (6.38). Etant données quatre constantes positives K_N, K_T, M_N et M_T, les conditions

$$
\begin{aligned}
[u_N] &= \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\sigma_N(P^-,t),\\
[u_T] &= \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\sigma_T(P^-,t),\\
[\sigma_N] &= M_N \parallel \boldsymbol{n} \parallel \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u_N(P^-,t),\\
[\sigma_T] &= M_T \parallel \boldsymbol{n} \parallel \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u_T(P^-,t),
\end{aligned}
\tag{6.88}
$$

généralisent les conditions de contact parfait entre deux solides (6.39). Elle sont appelées *conditions de type masse-ressort* par analogie avec les équations du mouvement d'un ensemble de masses et de ressorts, constituant un modèle rhéologique de l'interface (figure 6.2).

Ces conditions de type masse-ressort présentent des analogies avec les modèles adhésifs utilisés en Mécanique des Solides pour décrire des fissures et des interfaces fibres-matrices [58]. Les termes

de raideur K_N et K_T dépendent alors de la sollicitation imposée et de l'état d'endommagement, et les termes inertiels M_N et M_T sont négligés. Dans le cas qui nous intéresse ici (à savoir la propagation des ondes élastiques), nous supposons K_N, K_T, M_N et M_T constants et indépendants du champ élastique. Nous explicitons les valeurs de ces constantes dans un cas académique plus loin dans la section.

Pour $K_N = +\infty$, $K_T = +\infty$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$, les conditions (6.88) conduisent aux conditions de contact parfait entre deux solides parfaitement collés (6.39). Pour $K_N = +\infty$, $K_T \to 0$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$, les conditions (6.88) impliquent les conditions de contact parfait entre deux solides glissant sans frottement, cas non présenté ici. Enfin, pour $K_N \to 0$, $K_T \to 0$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$, les conditions (6.88) impliquent $\sigma_N(P^{\pm},t) = \sigma_T(P^{\pm},t) = 0$: Γ est alors une surface libre de contraintes. Pour des paramètres physiques identiques en Ω_0 et Ω_1, le milieu n'est homogène que si $K_N = +\infty$, $K_T = +\infty$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$: si une de ces conditions n'est pas vérifiée, une onde incidente sera réfléchie par l'interface. Entre tous ces cas limites, les conditions de type masse-ressort décrivent continûment une large gamme de degrés de contacts entre solides.

Comme dans le cas 1D, les conditions de type masse-ressort (6.88) sont asymétriques si $M_N \neq 0$, $M_T \neq 0$, $K_N < +\infty$ et $K_T < +\infty$. L'asymétrie peut être éliminée en suivant le modèle (5.12) ; les calculs étant plus lourds sans apporter de concept nouveau, nous ne poursuivons pas dans cette voie.

On exprime maintenant les quatre conditions de saut naturelles (6.88) en fonction de v_1, v_2, σ_{11}, σ_{12} et σ_{22}. Pour cela, on dérive les deux premières équations de (6.88) par rapport à t

$$
\begin{aligned}
[v_N] &= \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sigma_N(P^-,t),\\
[v_T] &= \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sigma_T(P^-,t),\\
[\sigma_N] &= M_N\ \parallel \boldsymbol{n} \parallel\ \frac{\partial}{\partial t}\,v_N(P^-,t),\\
[\sigma_T] &= M_T\ \parallel \boldsymbol{n} \parallel\ \frac{\partial}{\partial t}\,v_T(P^-,t).
\end{aligned}
\tag{6.89}
$$

A partir des expressions de v_N, v_T, σ_N et σ_T recensées dans (6.2) et des lois de conservation

(3.17), on obtient alors les quatre conditions de saut naturelles
(6.90)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\left[y^{'}v_1 - x^{'}v_2\right] = \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times \\
&\qquad\times\left(\left(\left(x'^2+y'^2\right)\lambda + 2\,y'^2\mu\right)\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x} - 2\,x^{'}y^{'}\mu\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x} - 2\,x^{'}y^{'}\mu\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y} + \left(\left(x'^2+y'^2\right)\lambda + 2\,x'^2\mu\right)\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\right)^{-}, \\
&\left[x^{'}v_1 + y^{'}v_2\right] = \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times \\
&\qquad\times\left(2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x} - \left(x'^2-y'^2\right)\,\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x} - \left(x'^2-y'^2\right)\,\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y} - 2\,x^{'}y^{'}\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\right)^{-}, \\
&\left[y'^2\sigma_{11} - 2\,x^{'}y^{'}\sigma_{12} + x'^2\sigma_{22}\right] = M_N\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times \\
&\qquad\times\left(\frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x} - \frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x} + \frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y} - \frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right)^{-}, \\
&\left[x^{'}y^{'}\sigma_{11} - \left(x'^2-y'^2\right)\,\sigma_{12} - x^{'}y^{'}\sigma_{22}\right] = M_T\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times \\
&\qquad\times\left(\frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x} + \frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x} + \frac{x^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y} + \frac{y^{'}}{\rho}\,\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right)^{-}.
\end{aligned}}$$

On obtient ainsi deux conditions de saut indépendantes pour les deux composantes v_1 et v_2 de la vitesse élastique, et seulement deux conditions de saut pour les trois composantes indépendantes σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} du tenseur des contraintes élastiques. On remarque, comme en 1D, que le second membre des conditions de type masse-ressort fait intervenir des dérivées spatiales d'ordre supérieur au membre de gauche.

Pour obtenir des conditions de saut portant sur les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, on dérive maintenant (6.90) un certain nombre de fois par rapport à τ et à t. Les dérivées des membres de gauche de (6.90) ayant déjà été calculées et présentées en section 6.2, nous ne présentons ici que les membres de droite. De plus, nous ne présentons les calculs qu'à l'ordre un.

Ordre 1. Dans un premier temps, on dérive les quatre équations de (6.39) par rapport à τ, ce

qui conduit respectivement à

(6.91)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[v_N] = \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times$$

$$\Bigg\{\Bigg(\Big(x'x''+y'y''\Big)\,\lambda+\Bigg(4\,y'y''-2\,\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,y'^2\Bigg)\,\mu\Bigg)\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}-2\,\frac{x''y'^3+x'^3y''}{x'^2+y'^2}\,\mu\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}$$

$$-2\,\frac{x''y'^3+x'^3y''}{x'^2+y'^2}\,\mu\,\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}+\Bigg(\Big(x'x''+y'y''\Big)\,\lambda+\Bigg(4\,x'x''-2\,\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,x'^2\Bigg)\,\mu\Bigg)\,\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}$$

$$+\Big(\Big(x'^3+x'y'^2\Big)\,\lambda+2\,x'y'^2\mu\Big)\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x^2}+\Big(\Big(x'^2y'+y'^3\Big)\,\lambda+2\,\Big(y'^3-x'^2\Big)\,\mu\Big)\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x\,\partial\,y}$$

$$-2\,x'^2y'\,\mu\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x^2}+\Big(\Big(x'^3+x'y'^2\Big)\,\lambda+2\,\Big(x'^3-x'y'^2\Big)\,\mu\Big)\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x\,\partial\,y}-2\,x'y'^2\mu\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,y^2}$$

$$+\Big(\Big(x'^2y'+y'^3\Big)\,\lambda+2\,\Big(x'^2y'-x'y'\Big)\,\mu\Big)\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,y^2}\Bigg\}^{-},$$

et

(6.92)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[v_T] = \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times$$

$$\Bigg\{-\frac{x'^3x''-3\,x'^2y'y''+3\,x'x''y'^2-y'^3y''}{x'^2+y'^2}\,\mu\,\Bigg(\frac{\partial\,v_2}{\partial\,x}+\frac{\partial\,v_1}{\partial\,y}\Bigg)+2\,\frac{x'^3y''+x''y'^3}{x'^2+y'^2}\,\mu\,\Bigg(\frac{\partial\,v_1}{\partial\,x}-\frac{\partial\,v_2}{\partial\,y}\Bigg)$$

$$+2\,x'^2y'\,\mu\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x^2}-\Big(x'^3-x'y'^2\Big)\,\mu\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x^2}+\Big(x'y'^2-x'^3\Big)\,\mu\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x\,\partial\,y}-\Big(3\,x'^2y'-y'^3\Big)\,\mu\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x\,\partial\,y}$$

$$-\Big(x'^2y'-y'^3\Big)\,\mu\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,y^2}-2\,x'y'^2\mu\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,y^2}\Bigg\}^{-},$$

et

(6.93)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[\sigma_N] = M_N\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times$$

$$\Bigg\{\Bigg(\frac{y''}{\rho}+\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,\frac{y'}{\rho}\Bigg)\Bigg(\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}\Bigg)-\Bigg(\frac{x''}{\rho}+\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,\frac{x'}{\rho}\Bigg)\Bigg(\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\Bigg)$$

$$+\frac{y'^2}{\rho}\,\Bigg(\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y}+\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}\Bigg)+\frac{x'y'}{\rho}\,\Bigg(\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}-\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\Bigg)-\frac{x'^2}{\rho}\,\Bigg(\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}+\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\partial\,y}\Bigg)\Bigg\}^{-},$$

et

(6.94)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\,[\sigma_T] = M_T\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times$$

$$\left\{\left(\frac{x''}{\rho}+\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,\frac{x'}{\rho}\right)\left(\frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,y}\right)+\left(\frac{y''}{\rho}+\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\,\frac{y'}{\rho}\right)\left(\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,y}\right)\right.$$

$$+\frac{x'^2}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}+\frac{x'y'}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}+\frac{x'y'}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y}+\frac{x'^2+y'^2}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}$$

$$\left.+\frac{x'y'}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x\,\partial\,y}+\frac{x'y'}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}+\frac{y'^2}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\right\}^{-}.$$

Dans un deuxième temps, on dérive les quatre équations de (6.90) par rapport à t. Les lois de conservation (3.17) conduisent alors respectivement à

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,[v_N] = \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times$$

$$\times\left\{\left(\left(x'^2+y'^2\right)\lambda+2\,y'^2\mu\right)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}-2\,x'\,y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}-2\,x'\,y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right.$$

(6.95) l

$$+\left(2\,\left(x'^2+y'^2\right)\lambda+\left(x'^2+y'^2-x'\,y'\right)\,\mu\right)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y}-2\,x'\,y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}$$

$$\left.+\left(\left(x'^2+y'^2\right)\lambda+2\,x'^2\mu\right)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\right\}^{-}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,[v_T] = \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\times$$

(6.96)

$$\times\left\{2\,x'\,y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x^2}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right.$$

$$\left.-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x\,\partial\,y}-\left(x'^2-y'^2\right)\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,y^2}-2\,x'\,y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}\right\}^{-},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,[\sigma_N] = M_N\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times$$

(6.97)

$$\times\left\{y'\,\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x^2}-x'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x^2}-x'\,\frac{\lambda+\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,x\,\partial\,y}\right.$$

$$\left.+y'\,\frac{\lambda+\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,x\,\partial\,y}+y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_1}{\partial\,y^2}-x'\,\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2\,v_2}{\partial\,y^2}\right\}^{-},$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\,[\sigma_T] &= M_T\,\sqrt{x'^2+y'^2}\times \\
&\times\left\{x'\,\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+y'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+y'\,\frac{\lambda+\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}\right. \\
&\left.+x'\,\frac{\lambda+\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}+x'\,\frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+y'\,\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right\}^{-}.
\end{aligned}
\tag{6.98}
$$

On obtient ainsi quatre conditions de saut pour les quatre composantes $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_i}{\partial y}$ $(1 \leq i \leq 2)$. Par contre, on obtient seulement quatre conditions de saut pour les six composantes $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y}$ $(1 \leq i \leq j, i \leq j \leq 2)$.

Ordre k. Les calculs présentés à l'ordre un se généralisent facilement aux ordres supérieurs, en suivant le modèle de l'interface solide-solide parfaite. Pour obtenir les conditions de saut portant sur les grandeurs $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ $(0 \leq j \leq k)$, on dérive k fois les conditions de saut naturelles (6.90) par rapport à τ et par rapport à t, et on écrit $(0 \leq j \leq k)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[v_N] &= \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\sigma_N^-, \\
\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[v_T] &= \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\parallel \boldsymbol{n} \parallel}\,\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\sigma_T^-, \\
\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[\sigma_N] &= M_N \parallel \boldsymbol{n} \parallel\,\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}v_N^-, \\
\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}\,[\sigma_T] &= M_T \parallel \boldsymbol{n} \parallel\,\frac{\partial^k}{\partial \tau^{k-j}\,\partial t^j}v_T^-.
\end{aligned}
\tag{6.99}
$$

On applique les règles de dérivations du lemme 3 et du lemme 4, puis on transforme les dérivées temporelles à l'ordre j $(0 \leq j \leq k)$ en dérivées spatiales d'ordre j, via les relations à l'ordre j (3.16). Après calculs, on obtient ainsi $2(k+1)$ conditions de saut pour les $2(k+1)$ grandeurs $\frac{\partial^k v_i}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq k)$. Par contre, on obtient seulement $2(k+1)$ conditions de saut pour les $3(k+1)$ grandeurs $\frac{\partial^k \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}$ $(1 \leq \alpha \leq 2, \alpha \leq \beta \leq 2, 0 \leq j \leq k)$.

6.4.3 Ecriture matricielle des conditions de saut

Nous résumons ici les conditions de saut naturelles dans le cas d'une interface imparfaite. Pour cela, on écrit

$$
[\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{U_k}] = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{U_{k+1}}(P^-,t). \tag{6.100}
$$

La matrice $\boldsymbol{C}$ est la même que dans le cas du contact parfait. La matrice $\boldsymbol{K}$ est explicitée en annexe 1.

6.4.4 Calcul des conditions de type masse-ressort

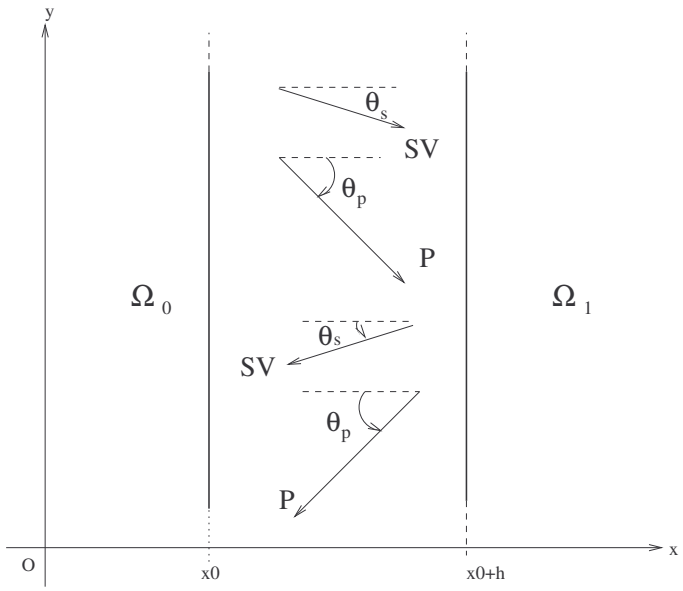

FIG. 6.3 – *Ondes P et SV dans une couche élastique plane d'épaisseur h.*

On peut obtenir les conditions (6.88) et calculer les valeurs des raideurs et masses dans un cas particulier : l'interface imparfait décrit une couche élastique reliant Ω_0 et Ω_1, très mince devant les longueurs d'onde propagées (figure 6.3). Nous précisons ici succintement les différentes étapes du calcul. Les paramètres physiques de la couche intermédiaire sont la masse volumique $\tilde{\rho}$, la célérité des ondes de compression $\tilde{c}_p$ et de cisaillement $\tilde{c}_s$. Les deux faces de la couche sont supposées planes, d'abscisses x_0 et $x_0 + h$ et en contact parfait.

En régime harmonique, on peut décomposer toute onde de pulsation ω dans la couche intermédiaire sur la base de quatre types d'ondes : deux ondes P et SV "montantes" (se propageant suivant les x croissants), et deux ondes P et SV "descendantes" (se propageant suivant les x décroissants). Un calcul classique (non reproduit ici) consiste à relier les valeurs limites du déplacement élastique $\hat{\overline{\boldsymbol{u}}}$ et de la contrainte élastique normale à l'interface $\hat{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}.\boldsymbol{n}$, des deux côtés de l'interface, via une matrice de transfert [12]. Les chapeaux et lignes sur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ signifient respectivement que l'on travaille sur les transformées de Fourier en temps des quantités considérées, et dans le repère local lié à la couche.

En supposant la longueur d'onde λ_0 très grande devant l'épaisseur h de la couche (approximation quasi-statique), on peut simplifier la matrice de transfert. On néglige les termes en $O((h/\lambda)^2)$

dans la matrice de transfert (λ est la longueur d'onde dans le milieu intermédiaire), et on pose

$$\boxed{\begin{aligned} K_N &= \frac{\tilde{\rho}\,\tilde{c_p}^{\,2}}{h}, \\ K_T &= \frac{\tilde{\rho}\,\tilde{c_s}^{\,2}}{h}, \\ M_N &= \tilde{\rho}\,h, \\ M_T &= M_N \left(1 - 2\,\sin^2\theta_s \left(\cos^2\theta_s + 2\left(\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{c}_p}\right)^2\right) - 4\,\sin^2\theta_s\right), \end{aligned}} \tag{6.101}$$

où θ_s est l'angle que font les ondes SV avec la normale (figure 6.3). On obtient alors après calculs

$$\left|\begin{aligned} \left[\hat{\overline{u}}_1\right] &= \frac{1}{K_N}\,\hat{\overline{\sigma}}_{11}^{-}, \\ \left[\hat{\overline{u}}_2\right] &= \frac{1}{K_T}\,\hat{\overline{\sigma}}_{12}^{-}, \\ \left[\hat{\overline{\sigma}}_{11}\right] &= -M_N\,\omega^2\,\hat{\overline{u}}_1^{-}, \\ \left[\hat{\overline{\sigma}}_{12}\right] &= -M_T\,\omega^2\,\hat{\overline{u}}_2^{-}, \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} [\overline{u}_1] &= \frac{1}{K_N}\,\overline{\sigma}_{11}^{-}, \\ [\overline{u}_2] &= \frac{1}{K_T}\,\overline{\sigma}_{12}^{-}, \\ [\overline{\sigma}_{11}] &= M_N\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\overline{u}_1^{-}, \\ [\overline{\sigma}_{12}] &= M_T\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\overline{u}_2^{-}. \end{aligned}\right. \tag{6.102}$$

Les expressions (6.101) et (6.102) sont classiques [67] ; de façon générale, les auteurs négligent souvent les termes de masse, conduisant parfois à des erreurs grossières si $\tilde{\rho}$ est grande devant ρ_0 et ρ_1 [67]. On remarque que la masse tangentielle M_T dépend de l'angle d'incidence des ondes dans la couche. Pour aborder le cas plus général d'une interface plane inclinée, nous utilisons les formules de changement de repère (9.90) et (9.111). Après calculs, on retrouve (6.88).

6.5 Interface fluide-solide

6.5.1 Introduction

Nous traitons enfin le cas de l'interface entre un fluide parfait (non visqueux) au repos et un solide élastique isotrope. Ce cas est rarement traité dans la littérature, principalement pour deux raisons. D'une part, on ne dispose pas de conditions de saut supplémentaires, ce qui empêche l'application des méthodes d'interface classiques. D'autre part, les quantités calculées de part et d'autre de l'interface sont différentes : en plus des composantes de la vitesse, on calcule la pression acoustique dans le fluide, et les trois composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques du côté solide.

6.5.2 Conditions de saut naturelles

Ordre 0. Considérons un solide élastique Ω_0 (masse volumique ρ_0, célérités c_{p0} des ondes P et c_{s0} des ondes SV) et un fluide parfait Ω_1 (masse volumique ρ_1, célérité des ondes acoustiques c_1). Les paramètres physiques sont constants de part et d'autre de l'interface. La vitesse normale et les efforts normaux dus à la propagation des ondes sont continus à l'interface, soit

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}] = 0, \\ &(-p\,\boldsymbol{n})^+ = (\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n})^- . \end{aligned} \tag{6.103}$$

A partir de (6.103) et de l'expression du vecteur normal $\boldsymbol{n}$, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[y^{'} v_1 - x^{'} v_2\right] = 0, \\ &\left(x^{'2} + y^{'2}\right) p = -y^{'2}\sigma_{11} + 2\,x^{'} y^{'}\sigma_{12} - x^{'2}\sigma_{22}, \\ &0 = x^{'} y^{'}\sigma_{11} + \left(y^{'2} - x^{'2}\right)\sigma_{12} - x^{'} y^{'}\sigma_{22}, \end{aligned}} \tag{6.104}$$

soit deux conditions de saut et une conditions aux limites. Rappelons que $(x(\tau),y(\tau))$ est une représentation paramétrée de Γ. Du côté fluide, ces conditions reviennent à une condition de saut pour les deux composantes de la vitesse acoustique et à une condition de saut pour la pression acoustique. Du côté solide, ces conditions reviennent à une condition de saut pour les deux composantes de la vitesse élastique, à une condition de saut et à une condition aux limites pour les trois composantes du tenseur des contraintes élastiques.

Pour obtenir des conditions de saut portant sur les dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ des deux côtés de l'interface, nous dérivons maintenant les conditions (6.104) par rapport à t et τ.

Ordre 1. En dérivant les trois équations de (6.104) par rapport à τ, on obtient respectivement

$$\left[y^{''} v_1 - x^{''} v_2 + x^{'} y^{'}\frac{\partial v_1}{\partial x} - x^{'2}\frac{\partial v_2}{\partial x} + y^{'2}\frac{\partial v_1}{\partial y} - x^{'} y^{'}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right] = 0, \tag{6.105}$$

et

$$\begin{aligned} &2\left(x^{'} x^{''} + y^{'} y^{''}\right) p + \left(x^{'3} + x^{'} y^{'2}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(x^{'2} y^{'} + y^{'3}\right)\frac{\partial p}{\partial y} \\ &= -2\,y^{'} y^{''}\sigma_{11} + 2\left(x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right)\sigma_{12} - 2\,x^{'} x^{''}\sigma_{22} - x^{'} y^{'2}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + 2\,x^{'2} y^{'}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \\ &-x^{'3}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} - y^{'3}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y} + 2\,x^{'} y^{'2}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - x^{'2} y^{'}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{6.106}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right)\sigma_{11} + 2\left(y^{'} y^{''} - x^{'} x^{''}\right)\sigma_{12} - \left(x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right)\sigma_{22} \\ &+x^{'2} y^{'}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \left(x^{'} y^{'2} - x^{'3}\right)\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - x^{'2} y^{'}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + x^{'} y^{'2}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y} + \left(y^{'3} - x^{'2} y^{'}\right)\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - x^{'} y^{'2}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6.107}$$

On dérive ensuite les trois équations de (6.104) par rapport à t. On remplace alors les dérivées temporelles par des dérivées spatiales via les lois de conservation. On obtient respectivement

$$\left(-\frac{y'}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{x'}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{+}=\left(\frac{y'}{\rho}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}-\frac{x'}{\rho}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x}+\frac{y'}{\rho}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}-\frac{x'}{\rho}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}\right)^{-}, \tag{6.108}$$

et

$$\begin{aligned}&\left(-\left(x'^2+y'^2\right)\rho c^2\frac{\partial v_1}{\partial x}-\left(x'^2+y'^2\right)\rho c^2\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^{+}\\&=\left(-\left(y'^2(\lambda+2\mu)+x'^2\lambda\right)\frac{\partial v_1}{\partial x}+2x'y'\mu\frac{\partial v_2}{\partial x}+2x'y'\mu\frac{\partial v_1}{\partial y}-\left(x'^2(\lambda+2\mu)+y'^2\lambda\right)\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^{-},\end{aligned} \tag{6.109}$$

et

$$0=\left(2x'y'\frac{\partial v_1}{\partial x}+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial v_2}{\partial x}+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial v_1}{\partial y}-2x'y'\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^{-}. \tag{6.110}$$

Résumons les six conditions obtenues à l'ordre 1. Du côté fluide, ces conditions reviennent à deux conditions de saut pour les quatre grandeurs $\frac{\partial v_i}{\partial x^{1-j}\partial y^j}$ $(1\le i\le 2, 0\le j\le 1)$, et à deux conditions de saut pour les deux grandeurs $\frac{\partial p}{\partial x^{1-j}\partial y^j}$ $(0\le j\le 1)$. Du côté solide, ces conditions reviennent à deux conditions de saut et une conditions aux limites pour les quatre composantes $\frac{\partial v_i}{\partial x^{1-j}\partial y^j}$ $(1\le i\le 2, 0\le j\le 1)$, et à deux conditions de saut et une condition aux limites pour les six grandeurs $\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^{1-i}\partial y^i}$ $(1\le\alpha\le 2, \alpha\le\beta\le 2, 0\le i\le 1)$.

Ordre 2. On dérive les trois équations de (6.104) deux fois par rapport à τ. On obtient alors respectivement

$$\begin{aligned}&\Bigg[y'''v_1-x'''v_2+\left(2x'y''+x''y'\right)\frac{\partial v_1}{\partial x}-3x'x''\frac{\partial v_2}{\partial x}+3y'y''\frac{\partial v_1}{\partial y}-\left(2x''y'+x'y''\right)\frac{\partial v_2}{\partial y}\\&\quad+x'^2y'\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-x'^3\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+2x'y'^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}-2x'^2y'\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}+y'^3\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-x'y'^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\Bigg]=0,\end{aligned} \tag{6.111}$$

et

(6.112)

$$
\begin{aligned}
&2\left(x''^2+x'x'''+y''^2+y'y'''\right)p+\left(5x'^2x''+4x'y'y''+x''y'^2\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\left(5y'^2y''+4x'x''y'+x'^2y''\right)\frac{\partial p}{\partial y}\\
&+\left(x'^4+x'^2y'^2\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2\left(x'^3y'+x'y'^3\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}+\left(x'^2y'^2+y'^4\right)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\\
&=-2\left(y''^2+y'y'''\right)\sigma_{11}+2\left(x'''y'+2x''y''+x'y'''\right)\sigma_{12}-2\left(x''^2+x'x'''\right)\sigma_{22}\\
&-\left(x''y'^2+4x'y'y''\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+2\left(3x'x''y'+2x'^2y''\right)\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}-5x'^2x''\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}-5y'^2y''\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y}\\
&+2\left(3x'y'y''+2x''y'^2\right)\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}-\left(x'^2y''+4x'x''y'\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}-x'^2y'^2\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+2x'^3y'\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}\\
&-x'^4\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x^2}-2x'y'^3\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}+4x'^2y'^2\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}-2x'^3y'\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}-y'^4\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial y^2}+2x'y'^3\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-x'^2y'^2\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2},
\end{aligned}
$$

et

(6.113)

$$
\begin{aligned}
&0=\left(x'''y'+2x''y''+x'y'''\right)\sigma_{11}+2\left(y''^2+y'y'''-x''^2-x'x'''\right)\sigma_{12}-\left(x'''y'+2x''y''+x'y'''\right)\sigma_{22}\\
&+\left(3x'x''y'+2x'^2y''\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\left(x''y'^2+4x'y'y''-5x'^2x''\right)\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}-\left(3x'x''y'+2x'^2y''\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}\\
&+\left(2x''y'^2+3x'y'y''\right)\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y}+\left(5y'^2y''-4x'x''y'-x'^2y''\right)\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}-\left(2x''y'^2+3x'y'y''\right)\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}\\
&+x'^3y'\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\left(x'^2y'^2-x'^4\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}-x'^3y'\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x^2}+2x'^2y'^2\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}\\
&+2\left(x'y'^3-x'^3y'\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}-2x'^2y'^2\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+x'y'^3\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial y^2}+\left(y'^4-x'^2y'^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-x'y'^3\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

On dérive les trois équations de (6.104) par rapport à τ et par rapport à t. Après utilisation des lois de conservation, on obtient respectivement

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{y''}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{x''}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{x'^2-y'^2}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^+\\
&=\left(\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}-\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{y''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}-\frac{x''}{\rho}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}\right.\\
&\left.-\frac{x'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}+\frac{y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}-\frac{x'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+\frac{y'^2}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-\frac{x'y'}{\rho}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\right)^-,
\end{aligned}
\tag{6.114}
$$

et
(6.115)

$$\Bigg(-2\left(x'x''+y'y''\right)\rho c^2\frac{\partial v_1}{\partial x}-2\left(x'x''+y'y''\right)\rho c^2\frac{\partial v_2}{\partial y}-\left(x'^3+x'y'^2\right)\rho c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

$$-\left(x'^2y'+y'^3\right)\rho c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}-\left(x'^3+x'y'^2\right)\rho c^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}-\left(x'^2y'+y'^3\right)\rho c^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\Bigg)^+$$

$$=\Bigg(-2\left(\left(x'x''+y'y''\right)\lambda+2y'y''\mu\right)\frac{\partial v_1}{\partial x}+2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_2}{\partial x}+2\left(x''y'+x'y''\right)\mu\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

$$-2\left(\left(x'x''+y'y''\right)\lambda+2x'x''\mu\right)\frac{\partial v_2}{\partial y}-\left(\left(x'^3+x'y'^2\right)\lambda+2x'y'^2\mu\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+2x'^2y'\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$

$$-\left(\left(x'^2y'+y'^3\right)\lambda-2\left(x'^2y'-y'^3\right)\mu\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}-\left(\left(x'y'^2+x'^3\right)\lambda-2\left(x'y'^2-x'^3\right)\mu\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}$$

$$+2x'y'^2\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-\left(\left(x'^2y'+y'^3\right)\lambda+2x'^2y'\mu\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\Bigg)^-,$$

et
(6.116)

$$0=\Bigg(2\left(x''y'+x'y''\right)\frac{\partial v_1}{\partial x}+2\left(y'y''-x'x''\right)\frac{\partial v_2}{\partial x}+2\left(y'y''-x'x''\right)\frac{\partial v_1}{\partial y}-2\left(x''y'+x'y''\right)\frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$+2x'^2y'\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\left(x'y'^2-x'^3\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\left(3x'y'^2-x'^3\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}$$

$$+\left(y'^3-3x'^2y'\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}+\left(y'^3-x'^2y'\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-2x'y'^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\Bigg)^-.$$

Enfin, on dérive les trois équations (6.104) deux fois par rapport à t. Les dérivées temporelles sont transformées en dérivées spatiales via les lois de conservation à l'ordre 2, conduisant respectivement à
(6.117)

$$\left(y'c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-x'c^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+y'c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-x'c^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right)^+$$

$$=\left(y'c_p^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-x'c_s^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-x'\left(c_p^2-c_s^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\,\partial y}+y'\left(c_p^2-c_s^2\right)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial y}+y'c_s^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-x'c_p^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right)^-,$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(x'^2+y'^2\right)c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(x'^2+y'^2\right)c^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^+\\
&=\Bigg(-\left(\left(x'^2+y'^2\right)c_p^2-2\,x'^2c_s^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+2\,x'y'c_s^2\,\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}+2\,x'y'c_s^2\,\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}\\
&-2\left(x'^2+y'^2\right)\left(c_p^2-c_s^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x\,\partial y}+2\,x'y'c_s^2\,\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+2\,x'y'c_s^2\,\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}\\
&-\left(\left(x'^2+y'^2\right)c_p^2-2\,y'^2c_s^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\Bigg)^-,
\end{aligned}
\tag{6.118}
$$

et

$$
\begin{aligned}
0=\Bigg(&2\,x'y'\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x^2}+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x^2}+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x\,\partial y}\\
&+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x\,\partial y}+\left(y'^2-x'^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial y^2}-2\,x'y'\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial y^2}\Bigg)^-.
\end{aligned}
\tag{6.119}
$$

Résumons les six conditions obtenues à l'ordre 2 (i.e. portant sur les dérivées spatiales secondes des composantes de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$). Du côté fluide, elles reviennent à trois conditions de saut portant sur les six grandeurs $\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^{2-i}\,\partial y^i}$, $1\le\alpha\le 2$, $0\le i\le 2$), et à trois conditions de saut pour les trois grandeurs $\frac{\partial^2 p}{\partial x^{2-i}\,\partial y^i}$, $0\le i\le 2$). Du côté solide, elles reviennent à trois conditions de saut et une condition aux limites portant sur les six grandeurs $\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^{2-i}\,\partial y^i}$, $1\le\alpha\le 2$, $0\le i\le 2$), à trois conditions de saut et deux conditions aux limites portant sur les neuf grandeurs $\frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\,\beta}}{\partial x^{2-i}\,\partial y^i}$, $1\le\alpha\le 2$, $\alpha\le\beta\le 2$, $0\le i\le 2$).

6.5.3 Conditions de saut supplémentaires

A la différence du cas des interfaces fluide-fluide et solide-solide, nous ne trouvons pas de condition de saut supplémentaire à partir de (**??**) et des lois de conservation. De deux choses l'une, alors : soit ces conditions nous échappent, soit elles n'existent pas...

Pour trancher, nous procédons comme suit. Si des conditions de saut supplémentaires existent, elles doivent être vérifiées pour tout champ d'onde. En particulier, elles doivent être vérifiées pour des ondes planes incidente, réfléchie et transmise par une interface plane, et ce indépendamment de l'angle d'incidence. Or, nous montrons au chapitre 9 que de telles conditions ne peuvent pas exister. En conséquence de quoi, nous ne disposons pas de conditions de saut supplémentaires dans le cas de l'interface fluide-solide.

6.5.4 Ecriture matricielle des conditions de saut

Nous résumons ici les conditions de saut naturelles propres à l'interface fluide-solide, en écrivant

$$\boxed{\boldsymbol{C}_0\,\boldsymbol{U_k}(P^-,t) = \boldsymbol{C}_1\,\boldsymbol{U_k}(P^+,t).} \tag{6.120}$$

A la différence des cas fluide-fluide et solide-solide vus précédemment, les matrices $\boldsymbol{C}_0$ et $\boldsymbol{C}_1$ n'ont pas la même structure l'une et l'autre : cela découle de la différence de structure de la solution exacte des deux côtés de l'interface, rappelée dans le tableau **??**. Les matrices $\boldsymbol{C}_0$ et $\boldsymbol{C}_1$ sont explicitées en annexe 1.

6.6 Récapitulatif

6.6.1 Introduction

Dans les sections précédentes, nous avons écrit de façon matricielle les conditions de saut et les conditions aux limites vérifiées par $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et ses dérivées spatiales (soit $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$) de part et d'autre de diverses interfaces. L'objectif de cette dernière section est d'écrire explicitement les valeurs limites de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, d'un côté de l'interface, en fonction des grandeurs de l'autre côté de l'interface.

Avant cela, nous résumons dans le tableau 6.2 le nombre de conditions de saut naturelles (n_c) et supplémentaires (n_s) calculées dans les sections précédentes pour les quatre types d'interfaces, ainsi que le nombre de conditions de milieu (n_m) calculées au chapitre 3. Les conditions de saut s'écrivent de façon générale

$$\boldsymbol{C}_1\,\boldsymbol{U_k}(P^+,t) = \boldsymbol{C}_0\,\boldsymbol{U_k}(P^-,t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{U_{k+1}}(P^-,t). \tag{6.121}$$

Pour les interfaces fluide-fluide et solide-solide (parfaite ou imparfaite), les matrices $\boldsymbol{C}_0$ et $\boldsymbol{C}_1$ sont des matrices rectangulaires $n_c \times n_i$ ou $(n_c + n_s) \times n_i$, suivant que l'on utilise ou pas les conditions de saut supplémentaires. Pour l'interface fluide-solide, les matrices $\boldsymbol{C}_0$ et $\boldsymbol{C}_1$ sont respectivement des matrices $n_c \times n_{is}$ et $n_c \times n_{if}$ (voir (**??**)). Enfin, la matrice $\boldsymbol{K}$ est identiquement nulle sauf dans le cas de l'interface imparfaite solide-solide, avec conditions de type masse-ressort.

Les conditions de milieu, calculées au chapitre 3, sont vérifiées en tout point des sous-domaines. En particulier, on peut les écrire en $P^\pm$, soit

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U_k}(P^\pm,t) = \boldsymbol{0}. \tag{6.122}$$

En posant

$$n_e = n_c + n_m + n_s, \tag{6.123}$$

l'inégalité

$$n_e \leq n_i \tag{6.124}$$

est vérifiée dans toutes les configurations répertoriées dans le tableau 6.2 ; l'égalité est uniquement obtenue si $n_s \neq 0$ (i.e. dans les cas fluide-fluide, solide-solide parfaitement collés ou solide-solide avec conditions de type masse-ressort).

Configuration	Conditions de saut naturelles (n_c)	Conditions de saut supplémentaires (n_s)	Conditions de milieu (n_m)	Composantes de $\boldsymbol{U}_k$ (n_i)
fluide-fluide parfait	$(k+1)(k+2)$	$k+1$	$k(k+1)/2$	$3\,(k+1)(k+2)/2$
solide-solide parfait	$2\,(k+1)(k+2)$	$2\,k+1$	$k(k-1)/2$	$5\,(k+1)(k+2)/2$
solide-solide imparfait	$2\,(k+1)(k+2)$	$2\,k+1$	$k(k-1)/2$	$5\,(k+1)(k+2)/2$
fluide-solide parfait	côté fluide $3(k+1)(k+2)/2$ côté solide $3(k+1)(k+2)/2$	0 0	$k(k+1)/2$ $k(k-1)/2$	$3\,(k+1)(k+2)/2$ $5\,(k+1)(k+2)/2$

TAB. 6.1 – *Récapitulatif du nombre de conditions et de composantes de* $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ *jusqu'à l'ordre* k

6.6.2 Résolution des conditions aux interfaces

Interface parfaite. Nous traitons à part dans la prochaine section le cas de l'interface imparfaite entre deux solides ; dans les trois autres cas traités ici, la matrice $\boldsymbol{K}$ est identiquement nulle. Les conditions de saut (6.121), ainsi que les conditions de milieu (6.122) écrites en P^+, conduisent à

$$\boldsymbol{S}_l\,\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^+,t) = \boldsymbol{S}_r\,\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^-,t), \tag{6.125}$$

où $\boldsymbol{S}_l$ et $\boldsymbol{S}_r$ sont des matrices $n_e \times n_i$, de composantes $(1 \leq j \leq n_i)$

$$\boldsymbol{S}_l[i,j] = \begin{cases} \boldsymbol{C}_1[i,j] & \text{si } i \leq n_c + n_s, \\ \boldsymbol{F}\,[i-(n_c+n_s),j] & \text{si } n_c + n_s + 1 \leq i \leq n_c + n_s + n_m, \end{cases} \tag{6.126}$$

et

$$\boldsymbol{S}_r[i,j] = \begin{cases} \boldsymbol{C}_0(i,j) & \text{si } i \leq n_c + n_s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.127}$$

Considérons tout d'abord le cas où l'on utilise les conditions de saut supplémentaires ($n_s \neq 0$) ; le cas fluide-solide est ainsi exclu de la discussion. Les matrices $\boldsymbol{S}_{l,r}$ sont alors des matrices carrées, et $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^+,t)$ s'écrit simplement

$$\boxed{\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^+,t) = (\boldsymbol{S}_l)^{-1}\,\boldsymbol{S}_r\,\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^-,t).} \tag{6.128}$$

$(\boldsymbol{S}_l)^{-1}$ est calculé par décomposition LU. Dans le cas limite de milieux identiques, $\boldsymbol{S}_l = \boldsymbol{S}_r$, d'où $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^+,t) = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(P^-,t)$.

Considérons maintenant le cas général où l'on n'utilise pas les conditions de saut supplémentaires (ou que soit fait le choix de n'utiliser que les conditions de saut naturelles). Le système (6.125) est alors sous-déterminé. Pour résoudre (6.125), on décompose $\boldsymbol{S}_l$ en valeurs singulières [30, 65]

$$\boldsymbol{S}_l = \boldsymbol{X}_S\,\boldsymbol{Y}_S{}^T\boldsymbol{Z}_S, \tag{6.129}$$

avec

- $\boldsymbol{X}_S$ matrice $n_e \times n_i$ orthogonale,
- $\boldsymbol{Y}_S$ matrice diagonale $n_i \times n_i$, avec $n_i - n_e$ zéros sur la diagonale,
- $\boldsymbol{Z}_S$ matrice $n_i \times n_i$ orthonormale.

Les composantes de $\boldsymbol{Y}_S$ sont les *valeurs singulières*. L'ensemble des solutions de (6.125) est alors un espace affine de dimension $n_i - n_e$. Le i-ème vecteur-colonne de $\boldsymbol{Z}_S$ est notée $\boldsymbol{z_i}$. L'ensemble des $\boldsymbol{z}_i$ tels que $\boldsymbol{Y}_S[i,i] = 0$ forme une base orthonormale du noyau de $\boldsymbol{S}_l$, de dimension $n_i - n_e$: nous construisons la matrice $\boldsymbol{Z}_{ker}$ à partir de ces vecteurs. On résume de façon algorithmique la

construction de la matrice $\boldsymbol{Z}_{ker}$

$$
(6.130)\qquad \left|\begin{array}{l}
j = 1, \\
\text{de } i = 1 \text{ à } n_i, \\
\qquad \text{si } \boldsymbol{Y}_S[i,i] = 0, \text{ alors} \\
\qquad\qquad \text{de } m = 1 \text{ à } n_i, \\
\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{Z}_{ker}[m,j] = \boldsymbol{Z}_S[m,i], \\
\qquad\qquad j := j + 1;
\end{array}\right.
$$

Enfin, nous notons $\boldsymbol{Y}_S^{-1}$ la matrice diagonale $n_i \times n_i$ dont le j-ième terme est $1/\boldsymbol{Y}_S[j,j]$ si $\boldsymbol{Y}_S[j,j] \neq 0$, 0 autrement. La solution générale de (6.125) s'écrit alors

$$
(6.131)\qquad \boldsymbol{U_k}(P^+,t) = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{U_k}(P^-,t) + \boldsymbol{Z}_{ker}\,\boldsymbol{\Lambda},
$$

avec

$$
(6.132)\qquad \begin{array}{l}
\boldsymbol{G} = \left(\boldsymbol{Z}_S\ \boldsymbol{Y}_S^{-1}\ {}^T\boldsymbol{X}_S\right)\boldsymbol{S}_r \text{ matrice } n_i \times n_i, \\
\boldsymbol{Z}_{ker} \text{ matrice } n_i \times (n_i - n_e), \\
\boldsymbol{\Lambda} = {}^T\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_i-n_e}\right),
\end{array}
$$

et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. En définissant la matrice $\boldsymbol{H}$, de taille $n_i \times (2\,n_i - n_e)$, par

$$
(6.133)\qquad \boldsymbol{H}[i,j] = \begin{cases} \boldsymbol{G}[i,j] & \text{si } j \leq n_i \\ \boldsymbol{Z}_{ker}[i,j-n_i] & \text{si } j > n_i, \end{cases}
$$

la relation (6.131) s'écrit

$$
(6.134)\qquad \boxed{\boldsymbol{U_k}(P^+,t) = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U_k}(P^-,t) \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix}.}
$$

Pour exprimer les relation dans l'autre sens, c'est-à-dire écrire $\boldsymbol{U_k}(P^-,t)$ en fonction de $\boldsymbol{U_k}(P^+,t)$, il suffit d'échanger les rôles de $\boldsymbol{C}_0$ et $\boldsymbol{C}_1$ dans (6.126) et (6.127), ainsi que les rôles de $\boldsymbol{U_k}(P^+,t)$ et $\boldsymbol{U_k}(P^-,t)$ dans (6.128) ou (6.134).

6.7 Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons exprimé en 2D les valeurs limites de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales, d'un côté d'une interface, en fonction des grandeurs de même nature,

de l'autre côté. Nous avons considéré quatre types d'interfaces : fluide-fluide, solide-solide parfaitement collés, solide-solide imparfaitement collés, et enfin fluide-solide. Par rapport au cas 1D, la principale difficulté provient du fait que le nombre de conditions de saut est inférieur au nombre de composantes de la solution. Nous sommes alors amenés, soit à déterminer des conditions de saut supplémentaires, soit à résoudre des sytèmes sous-déterminés.

Nous abordons maintenant la prise en compte des interfaces dans les schémas numériques vus au chapitre 4. Cette prise en compte repose sur les conditions d'interface vues durant le chapitre 5 et le présent chapitre. Nous commençons par le cas 1D.

Chapitre 7

Méthode d'interface 1D

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode pour prendre en compte les interfaces dans des schémas numériques quelconques. Cette méthode numérique, appelée l' "Explicit Simplified Interface Method" (ESIM), permet de conserver, en présence d'interfaces, des propriétés des schémas numériques en l'absence d'interfaces (par exemple l'erreur locale de troncature). L'algorithme de l'ESIM est entièrement automatique et ne dépend pas de l'expression du schéma utilisé, mais seulement de l'ordre de convergence et de la largeur spatiale du schéma. L'ESIM impose à la solution numérique le respect des conditions de saut vérifiées par la solution exacte. L'ESIM est déclinée ici pour les trois types d'interfaces vus au chapitre 4 en 1D (interface parfaite, interface imparfaite, deux interfaces parfaites proches).

7.1 Objet du chapitre

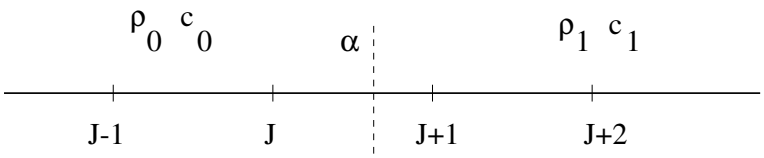

FIG. 7.1 – *Interface 1D et maillage régulier.*

La présence d'une interface (figure 7.1) conduit à trois types de difficultés pour la résolution numérique des problèmes de propagation.

La première difficulté, purement numérique, découle du fait que, en présence d'une interface, la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ est irrégulière (voir chapitre 5) : $\boldsymbol{U}(x,t)$ est continue à dérivées spatiales discontinues (cas d'une interface parfaite) ou discontinue (cas d'une interface imparfaite décrite par les conditions de type masse-ressort) en α. Or, en tout point x_i, les schémas numériques sont construits à partir de développements de Taylor de la solution sur $[x_{i-s},x_{i+s}]$, supposant la solution exacte suffisamment régulière sur cet intervalle. Aux points irréguliers, l'irrégularité de la solution conduit alors à une chute de l'ordre des schémas. Pour des contrastes importants des

paramètres physiques, l'irrégularité de $\boldsymbol{U}(x,t)$ peut aussi conduire à l'apparition d'instabilités numériques au voisinage des interfaces.

Le deuxième type de difficulté provient du choix d'un maillage régulier. Hormis le cas particulier où l'interface coïncide avec la frontière d'une cellule $C_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]$, la position de l'interface est mal représentée géométriquement. Cette erreur se traduit, en 1D et 2D, par des erreurs de temps d'arrivée des ondes numériques, et en 2D, par des diffractions parasites [18].

Le troisième type de difficulté provient enfin du fait que les schémas numériques ne décrivent pas la nature du contact aux interfaces. Les conditions de type masse-ressort en 1D et 2D sont alors impossibles à décrire directement.

L'objectif de ce chapitre est de résoudre ces trois types de difficultés (numériques, géométriques, physiques). Pour cela, nous développons une nouvelle méthode d'interface. Par rapport aux méthodes d'interface classiques discutées au chapitre 2, comme l'IIM ou l'EJIIM, nous nous fixons les critères suivants cette méthode d'interface

- l'algorithme de la méthode d'interface doit être simple, à la différence de l'IIM et de l'EJIIM. L'écriture explicite de ces méthodes est en effet particulièrement laborieuse pour des schémas d'ordre élevé ;
- dans le cas limite d'un milieu homogène de part et d'autre de l'interface, la méthode d'interface doit coïncider avec le schéma utilisé en l'absence d'interface. Ce n'est pas le cas de l'IIM, sauf lorsque cette méthode est couplée au schéma de Lax-Wendroff ;
- la méthode d'interface doit être stable, même pour des contrastes importants des paramètres physiques. Ce n'est pas le cas de l'EJIIM en 1D, de l'IIM et à fortiori de l'EJIIM en 2D ;
- la méthode d'interface doit être appliquée en tout point irrégulier. Ce n'est pas le cas lorsque Zhang couple l'IIM au schéma de volumes finis avec limiteur de flux [85].

Nous proposons alors une nouvelle méthode d'interface vérifiant ces quatre critères, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM) [53, 64]. Durant l'exposé de la méthode, nous nous intéressons particulièrement au cas des schémas à deux pas de temps et à deux stages. Cette méthode s'applique toutefois à une large classe de schémas explicites en temps, à des modifications mineures près. Nous proposons en particulier un exemple d'application de l'ESIM à des schémas multi-stages comme WENO 5.

Avant d'aborder le principe de la méthode, notons que pour une solution initiale $\boldsymbol{U}_0(x) = \boldsymbol{U}(x,t_0)$ de classe C^q, la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t > t_0)$ reste de classe C^q pour $x < \alpha$ et $x > \alpha$. Durant la suite de l'exposé, nous supposons toujours q suffisant pour que les développements de Taylor de $\boldsymbol{U}(x,t)$ de part et d'autres de α aient bien un sens.

7.2 Principe de la méthode

7.2.1 Notations

Soit une interface parfaite ou imparfaite en $x = \alpha$ (voir chapitre 5). L'entier J est tel que

$$x_J \leq \alpha < x_{J+1}. \tag{7.1}$$

Nous appelons *points irréguliers* les points pour lesquels l'avancée en temps du schéma choisi (voir chapitre 4) utilise des valeurs numériques de la solution en des points de l'autre côté de l'interface. Etant donnée la largeur s du schéma utilisé, les points irréguliers sont

$$x_{J-s+1}, ..., x_{J+s}. \tag{7.2}$$

Par opposition, un point qui n'est pas irrégulier est dit *régulier*. Enfin, nous posons

$$\theta = \frac{\alpha - x_J}{\Delta x}, \tag{7.3}$$

de sorte que $\theta \in [0,1[$.

7.2.2 Idée générale

Supposons la solution numérique calculée jusqu'à l'instant t_n inclu, par un schéma numérique donné ; les valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ sont alors connues en tout point du maillage. Pour calculer l'avancée en temps du schéma aux points irréguliers, nous proposons de réaliser deux opérations : la construction de *valeurs modifiées* de la solution aux points irréguliers, puis l'utilisation de ces valeurs modifiées par le schéma numérique, en d'autres points irréguliers. L'ensemble de ces opérations constitue l'ESIM.

On commence par définir, de chaque côté de l'interface et à l'instant t_n, un prolongement suffisamment régulier $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ de l'autre côté de l'interface. Ces deux prolongements, schématisés en pointillés en figures 7.2, 7.3 et 7.4, sont appelés *solutions modifiées*. Ces prolongements sont tels que les fonctions $\tilde{\boldsymbol{U}}_0(x,t_n)$ et $\tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,t_n)$ définies par

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{U}}_0(x,t_n) &= \begin{cases} \boldsymbol{U}(x,t_n) & \text{si } x_{J-2\,s+1} \leq x < \alpha \\ \boldsymbol{U}^*(x,t_n) & \text{si } \alpha \leq x \leq x_{J+s} \end{cases} \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_1(x,t_n) &= \begin{cases} \boldsymbol{U}^*(x,t_n) & \text{si } x_{J-s+1} \leq x \leq \alpha \\ \boldsymbol{U}(x,t_n) & \text{si } \alpha < x \leq x_{J+2\,s} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.4}$$

sont régulières en α, à dérivées spatiales continues en α jusqu'à l'ordre $2\,k-1$. Soit, pour $0 \leq m \leq 2\,k-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}^*(\alpha^+,t_n) &= \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n), \\ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}^*(\alpha^-,t_n) &= \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n). \end{aligned} \tag{7.5}$$

La valeur de l'entier k est précisée ultérieurement ; elle dépend de la largeur spatiale s et de l'ordre de convergence r du schéma, mais elle ne dépend pas de l'expression du schéma.

Une façon d'imposer (7.5) consiste à écrire $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ sous forme d'un polynôme en x de degré $2\,k-1$, soit

$$
(7.6)\qquad
\begin{aligned}
\alpha \le x \le x_{J+s}, \qquad & \boldsymbol{U}^*(x,t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n),\\
x_{J-s+1} \le x \le \alpha, \qquad & \boldsymbol{U}^*(x,t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n).
\end{aligned}
$$

Pour écrire les solutions modifiées (7.6), il faut connaître les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,t)$ et de ses $2\,k-1$ premières dérivées spatiales en $\alpha^{\pm}$. Nous approchons ces valeurs à partir des valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ $(J-k+1 \le i \le J+k)$ et des conditions de saut vérifiées aux interfaces par la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$. Les estimations numériques de $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ sont alors appelées *valeurs modifiées* et sont notées $\boldsymbol{U}_i^*$ (pour un schéma à deux pas de temps, l'indice n désignant l'instant est inutile).

Ces valeurs modifiées sont alors utilisées pour l'avancée en temps aux points irréguliers. En un point irrégulier d'un côté de l'interface, le schéma s'applique sur les valeurs numériques de la solution du même côté de l'interface que le point considéré ; par contre, le schéma s'applique sur les valeurs modifiées au lieu des valeurs numériques aux points de l'autre côté de l'interface. Ce faisant, le schéma est modifié implicitement. Toute la difficulté de construction de la méthode d'interface est ainsi reportée sur la construction explicite des valeurs modifiées, construction entièrement automatique, et ne dépendant pas de l'expression du schéma. Aux points réguliers, l'avancée en temps est effectuée classiquement.

A partir d'une valeur minimale de k, l'erreur locale de troncature obtenue en utilisant l'ESIM aux points irréguliers est la même que celle du schéma aux points réguliers. De plus, dans le cas limite du milieu homogène (l'interface disparait), les valeurs modifiées sont égales aux valeurs numériques. La méthode d'interface coïncide alors, par construction même, avec le schéma utilisé en l'absence d'interface.

Au cours de ce chapitre, l'ESIM et ses propriétés sont présentées pour les trois types de contact vus au chapitre 4. Nous détaillons plus particulièrement les calculs dans le cas de l'interface parfaite. Il est important de noter que la procédure générale est la même dans les trois cas ; seule la construction des valeurs modifiées, basée sur les conditions aux interfaces, présente des différences.

7.3 Contact parfait

7.3.1 Introduction

Le cas de l'interface parfaite correspond à une solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ continue à dérivées spatiales discontinues en $x=\alpha$ (voir chapitre 5). Nous schématisons une composante de $\boldsymbol{U}(x,t)$ et de $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ (ex : la contrainte élastique) en figure 7.2.

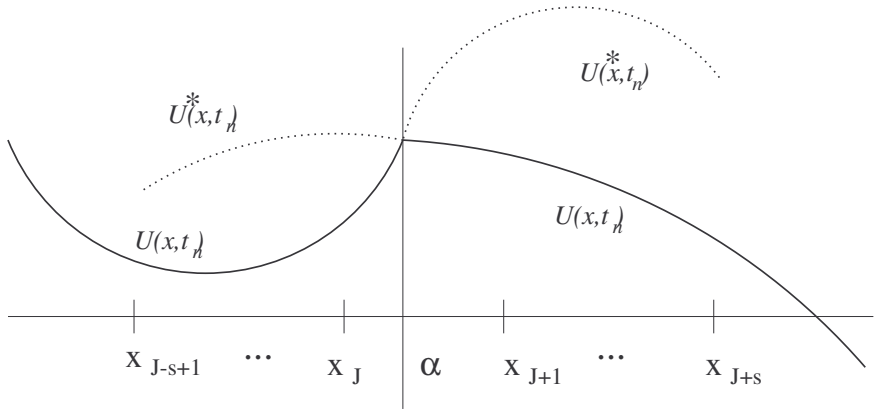

FIG. 7.2 – *Schématisation d'une composante de* $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ *(traits pleins) et de* $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ *(pointillés) pour un contact parfait.*

Nous cherchons ici à estimer numériquement la solution modifiée $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ aux points irréguliers de part et d'autre de l'interface. Pour déterminer les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ et de ses dérivées spatiales en $(\alpha^{\pm},t_n)$ intervenant dans (7.6), nous écrivons en $\alpha^{\pm}$ les développements de Taylor d'ordre $2\,k$ de $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ en $2\,k-1$ points de calcul de part et d'autre de α, soit

$$
\begin{aligned}
&J-k+1 \le i \le J, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}),\\
&J+1 \le i \le J+k, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}).
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Suivant le contexte, la notation $\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{\lambda})$ désigne un vecteur à d composantes ou une matrice $d \times d$ diagonale dont les composantes sont des scalaires en $O(\Delta\,x^{\lambda})$, où d est la taille de $\boldsymbol{U}(x,t)$ (en 1D, $d=2$). Il est important de préciser que, a priori, $k \neq s$ (où s est la largeur du schéma, voir (4.1)).

7.3.2 Calcul des valeurs modifiées

Valeurs modifiées à droite. Nous calculons tout d'abord les valeurs modifiées $\boldsymbol{U}_i^*$ aux points irréguliers x_i à droite de α ($J+1 \le i \le J+s$). Nous appliquons les conditions (5.9) dans les k développements de Taylor à droite de α ($J+1 \le i \le J+k$ dans (7.7)), ce qui conduit en ces points à

$$
J+1 \le i \le J+k, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{D}_m\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}),
\tag{7.8}
$$

avec $\boldsymbol{D}_m$ donné par (5.8). Les k premières équations de (7.7) et les k équations (7.8) s'écrivent

$$\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n)\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n)\end{array}\right)=\boldsymbol{M}\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\,x^{2\,k-1}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k})\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k})\end{array}\right), \tag{7.9}$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice bloc $2\,k\times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1\le j\le 2\,k)$

$$\boldsymbol{M}[i,j]=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 & \text{si } 1\le i\le k\\[2ex] \dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{j-1} & \text{si } k+1\le i\le 2\,k.\end{array}\right. \tag{7.10}$$

$\boldsymbol{I}_2$ est la matrice identité d'ordre 2.

Les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ (membre de gauche de (7.9)) et les restes de Taylor (deuxième membre de droite de (7.9)) sont inconnus. Le fait de remplacer les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ par les valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ et d'éliminer les restes de Taylor dans (7.9) permet d'accéder à des estimations numériques de $\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)$ $(0\le m\le 2\,k-1)$, notées symboliquement $\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\boldsymbol{U}^-$, et données par

$$\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{U}^-\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\,x^{2\,k-1}}\boldsymbol{U}^-\end{array}\right)=\boldsymbol{M}^{-1}\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{U}_{J-k+1}^n\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n)\end{array}\right). \tag{7.11}$$

L'inversibilité de $\boldsymbol{M}$ est discutée plus loin. Les estimations numériques (7.11) ne sont pas directement utiles. Par contre, reportées dans l'expression de la solution modifiée à droite de α à la place de $\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)$ (voir (7.6) pour $\alpha\le x\le x_{J+s}$), elles conduisent à la valeur explicite des valeurs modifiées aux points irréguliers à droite de α, soit

$$\boxed{J+1\le i\le J+s,\qquad \boldsymbol{U}_i^*=\left(\boldsymbol{I}_2\ldots\frac{(x_i-\alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{U}_{J-k+1}^n\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n\end{array}\right).} \tag{7.12}$$

Dans le cas d'un schéma comportant plusieurs intégrations de Runge-Kutta entre t_n et t_{n+1}, comme WENO 5, ou d'un schéma à plusieurs pas de temps, il est utile d'indicer les valeurs modifiées (7.12) pour préciser l'instant où elles sont calculées.

Valeurs modifiées à gauche. Nous suivons une procédure semblable pour calculer les valeurs modifiées aux points irréguliers x_i à gauche de α $(J-s+1\le i\le J)$. Nous appliquons les conditions (5.10) dans les k développements de Taylor à gauche de α $(J-k+1\le i\le J$ dans (7.7)), ce qui conduit en ces points à

$$J-k+1\le i\le J+k,\quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n)=\sum_{m=0}^{2\,k-1}\frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{D}_m^{-1}\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}). \tag{7.13}$$

Les k dernières équations de (7.7) et les k équations (7.13) s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{N} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\, x^{2\,k-1}} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

où $\boldsymbol{N}$ est une matrice bloc $2\,k \times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1 \leq j \leq 2\,k)$

$$\boldsymbol{N}[i,j] = \begin{cases} \dfrac{(x_{J-k+i} - \alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!} \boldsymbol{D}_{j-1}^{-1} & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \\ \dfrac{(x_{J-k+i} - \alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 & \text{si } k+1 \leq i \leq 2\,k. \end{cases} \tag{7.15}$$

Le fait de remplacer les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ par les valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ et d'éliminer les restes de Taylor dans (7.14) permet d'accéder à des estimations numériques de $\frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n)$ $(0 \leq m \leq 2\,k-1)$, notées symboliquement $\frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}^+$, et données par

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^+ \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\, x^{2\,k-1}} \boldsymbol{U}^+ \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n) \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

La valeur explicite des valeurs modifiées aux points irréguliers à gauche de α est alors

$$\boxed{J-s+1 \leq i \leq J, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{N}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}.} \tag{7.17}$$

7.3.3 Utilisation des valeurs modifiées

Avancée en temps. En un point irrégulier d'un côté de l'interface, l'avancée en temps d'un schéma à deux pas de temps et à deux stages utilise maintenant les valeurs modifiées aux points de calcul de l'autre côté de l'interface. Au lieu de (4.1), l'avancée en temps s'écrit alors

$$\boxed{\begin{array}{ll} J-s+1 \leq i \leq J, & \boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{H}_0 \left(\boldsymbol{U}_{i-s}^n, \ldots, \boldsymbol{U}_J^n, \boldsymbol{U}_{J+1}^*, \ldots, \boldsymbol{U}_{i+s}^* \right) \\ \\ J+1 \leq i \leq J+s, & \boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{H}_1 \left(\boldsymbol{U}_{i-s}^*, \ldots, \boldsymbol{U}_J^*, \boldsymbol{U}_{J+1}^n, \ldots, \boldsymbol{U}_{i+s}^n \right), \end{array}} \tag{7.18}$$

où $\boldsymbol{H}_0$ et $\boldsymbol{H}_1$ désignent l'opérateur discret $\boldsymbol{H}$, utilisant respectivement les coefficients ρ_0, c_0 et ρ_1, c_1. Le calcul des valeurs modifiées à partir des valeurs numériques de la solution et des conditions vérifiées par la solution exacte aux interfaces, puis l'utilisation par un schéma de ces valeurs modifiées pour l'avancée en temps aux points irréguliers (7.18), constituent l'ESIM. Si un point de calcul coïncide avec l'interface, la convention (7.1) évite toute ambiguïté.

L'application de l'ESIM à des schémas multistages comme WENO 5, ou à plus de deux pas de temps, est évidente. Des jeux de valeurs modifiées sont calculés et stockés à chaque étape de

l'avancée en temps, puis injectés dans le schéma selon le modèle (7.18) pour remplacer les valeurs numériques aux points et instants correspondants.

Les interfaces étant fixes dans le temps, les matrices $\boldsymbol{M}^{-1}$ et $\boldsymbol{N}^{-1}$ sont calculées une seule fois par décomposition LU, durant un prétraitement. A chaque pas de temps, le calcul d'une valeur modifiée revient à un simple produit matrice-vecteur (7.12) ou (7.17). Le coût supplémentaire engendré par l'ESIM en termes de temps de calcul et de mémoire informatique est négligeable en 1D. Nous verrons au chapitre 8 qu'il en est de même en 2D.

Cas limite du milieu homogène. Dans le cas limite d'un milieu homogène (l'interface disparaissant alors), nous montrons que l'ESIM coïncide avec le schéma en l'absence d'interface.

Resultat 7 *Pour $\rho_0 = \rho_1$ et $c_0 = c_1$, l'ESIM coïncide avec le schéma en l'absence d'interface, i.e. l'avancée en temps (7.18) revient à l'avancée en temps classique (4.1), si*

$$k \geq s.$$

Démonstration. Dans le cas limite d'un milieu homogène, $\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{D}_m^{-1} = \boldsymbol{I}_2$ pour tout entier m (5.8). Par conséquence, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$. Les valeurs modifiées aux points irréguliers à droite (7.12) et à gauche de α (7.17) s'écrivent alors

$$J - s + 1 \leq i \leq J + s, \quad \boldsymbol{U}_i^* = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

D'autre part, les valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ utilisées pour la construction des valeurs modifiées peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \ldots & \dfrac{(x_{J-k+1} - \alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{I}_2 & \ldots & \dfrac{(x_{J+k} - \alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.20}$$

soit

$$J - k + 1 \leq i \leq J + k, \quad \boldsymbol{U}_i^n = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

La comparaison de (7.19) et (7.21) conduit à

$$k \geq s \quad \Rightarrow \quad J - s + 1 \leq i \leq J + s, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{U}_i^n. \tag{7.22}$$

L'avancée en temps (7.18) revient alors à l'avancée en temps (4.1) en l'absence d'interface : nous retrouvons ainsi l'expression du schéma en milieu homogène. □

Rappelons que ce résultat n'est vérifié par l'IIM que dans des cas particuliers. Par exemple, à l'ordre 2 et en 1D, l'IIM revient au schéma de Lax-Wendroff dans le cas limite du milieu homogène, quel que soit le schéma utilisé aux points réguliers.

Resultat 8 *Pour $\rho_0 = \rho_1$ et $c_0 = c_1$, les déterminants de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont indépendants de la position de l'interface dans le maillage.*

Démonstration. De (7.3), on tire

$$x_{J-k+i} - \alpha = (i - k - \theta)\,\Delta\,x. \tag{7.23}$$

Après report de (7.23) dans l'expression de $\boldsymbol{M}$ (7.10), on obtient

$$\boldsymbol{M}[i,j] = \frac{1}{\Delta\,x}\,(i - k - \theta)^{j-1}\;\Delta\,x^{j-1}\,\boldsymbol{I}_2. \tag{7.24}$$

Calculons alors le déterminant de $\boldsymbol{M}$. Pour cela, on peut sortir les facteurs en $1/(j-1)!$ (car ils sont en facteur de chaque colonne), soit

$$\det\,\boldsymbol{M} = \left(\prod_{j=1}^{2\,k-1}(j-1)\,!\right)^{-1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{2\,k-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{2\,k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{2\,k} & \dots & a_{2\,k}^{2\,k-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{V}} \tag{7.25}$$

avec $a_i = (i - k - \theta)\,\Delta\,x$. Or $\boldsymbol{V}$ n'est autre que la matrice de Vandermonde, de déterminant

$$\begin{aligned} \det\,\boldsymbol{V} &= \prod_{1\le i\le j\le 2\,k}(a_j - a_i) \\ &= \prod_{1\le i\le j\le 2\,k}(j-i)\,\Delta\,x, \end{aligned} \tag{7.26}$$

d'où

$$\det\,\boldsymbol{M} = \frac{\displaystyle\prod_{1\le i\le j\le 2\,k}(j-i)\,\Delta\,x}{\displaystyle\prod_{j=1}^{2\,k-1}(j-1)\,!} \tag{7.27}$$

qui est indépendant de θ (et donc de la position de α dans une maille). □

Inversibilité des matrices. Dans le cas limite du milieu homogène, les matrices $\boldsymbol{M}$ (7.10) et $\boldsymbol{N}$ (7.15) utilisées pour le calcul des valeurs modifiées sont des matrices de Vandermonde, et sont donc toujours inversibles. Par contre, dans le cas général, la structure des matrices $\boldsymbol{M}$ et

$\boldsymbol{N}$ ne permet pas de montrer directement qu'elles sont inversibles. Pour démontrer ce résultat quels que soient les paramètres physiques et géométriques, nous montrons que les déterminants de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont non nuls, et ce pour différentes valeurs de k. Compte-tenu des schémas utilisés au cours de cette étude et de l'analyse ultérieure de l'erreur locale de troncature effectuée plus loin, nous nous limitons à $k \leq 3$.

Resultat 9 *Pour $k = 1,2,3$, les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toujours inversibles, quelles que soient les valeurs de Δx, α, ρ_0, ρ_1, c_0, et c_1.*

Démonstration. Le calcul du déterminant est proposé pour la matrice $\boldsymbol{M}$ et $k = 2$. Les blocs de $\boldsymbol{M}$ sont diagonaux (7.10) : après permutations de lignes et de colonnes, le déterminant de $\boldsymbol{M}$ s'écrit

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}, \tag{7.28}$$

avec $\boldsymbol{A}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][1,1]$ et $\boldsymbol{B}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][2,2]$ $(1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4)$. Les calculs, menés avec MAPLE, conduisent à

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \frac{c_0^2}{12\,\rho_1^2\,c_1^6}\,\Delta x^6 \sum_{i=1}^{5} \eta_i\, p_i(\theta), \\ \det \boldsymbol{B} &= \frac{1}{12\,\rho_0^2\,c_1^4}\,\Delta x^6 \sum_{i=1}^{5} \xi_i\, p_i(\theta), \end{aligned} \tag{7.29}$$

avec les polynômes $p_i(\theta)$

$$\begin{aligned} p_1(\theta) &= -4\,\theta^4 + 16\,\theta^3 - 17\,\theta^2 - \theta + 6, \\ p_2(\theta) &= \theta^4 - 6\,\theta^3 + 13\,\theta^2 - 12\,\theta + 4, \\ p_3(\theta) &= 6\,\theta^4 - 12\,\theta^3 - 4\,\theta^2 + 10\,\theta + 2, \\ p_4(\theta) &= \theta^4 + 2\,\theta^3 + \theta^2, \\ p_5(\theta) &= -4\,\theta^4 + 7\,\theta^2 + 3\,\theta, \end{aligned}$$

et les coefficients η_i et ξ_i

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \rho_0^2\,c_0^4, & \xi_1 &= \rho_1^2\,c_1^2\,c_0^2, \\ \eta_2 &= \rho_0\,c_0^4\,\rho_1 & \xi_2 &= \eta_2, \\ \eta_3 &= \rho_0\,c_0^2\,\rho_1\,c_1^2 & \xi_3 &= \eta_3, \\ \eta_4 &= \rho_0\,\rho_1\,c_1^4 & \xi_4 &= \eta_4, \\ \eta_5 &= \rho_1^2\,c_1^4 & \xi_5 &= \rho_0^2\,c_0^2\,c_1^2. \end{aligned}$$

On peut remarquer deux propriétés[1] : d'une part, une symétrie des polynômes $p(\theta)$

$$p_1(\theta) = p_5(1-\theta), \quad p_2(\theta) = p_4(1-\theta), \quad p_3(\theta) = p_3(1-\theta).$$

1. Merci à Serge Piperno de nous avoir montré ces propriétés (ainsi que les popriétés anaologues vues ultérieurement dans le cas des conditions de masse-ressort).

De plus,

$$\sum_{i=1}^{4} p_i(\theta) = 12.$$

Les coefficients η_i et ξ_i étant tous positifs, on en déduit que les polynômes p_i ne sont pas tous nuls simultanément. On a alors $\det \boldsymbol{A} > 0$ et $\det \boldsymbol{B} > 0$, d'où

$$\det \boldsymbol{M} > 0.$$

La même procédure s'applique pour montrer $\det \boldsymbol{N} > 0$. Nous avons vérifié par ailleurs des propriétés analogues pour $k = 1$ et $k = 3$. □

Le calcul numérique de $\boldsymbol{M}^{-1}$ et $\boldsymbol{N}^{-1}$ ne pose pas de difficulté, même dans des cas potentiellement délicats, comme des contrastes extrêmes des paramètres physiques et des interfaces très proches des points de calcul. Même dans ces configurations, les produits $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}$ et $\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{-1}$ sont égaux à $\boldsymbol{I}_{2\,k}$, à 10^{-7} près ou 10^{-14} près, selon que les inversions sont réalisées en simple précision ou en double précision.

7.3.4 Analyse de l'erreur locale de troncature

Résultat général. Nous écrivons tout d'abord un lemme utile pour l'estimation ultérieure d'erreur.

Lemme 5 *Soit Ψ un vecteur à $2\,k$ blocs 2×2 dont les composantes sont en $\boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k})$. Alors, pour $k = 1,2,3$, les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ (7.10), (7.15) vérifient*

$$\boldsymbol{M}^{-1}\,\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{N}^{-1}\,\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \end{pmatrix}. \tag{7.30}$$

Démonstration. Les calculs (7.30) sont faits explicitement avec MAPLE. □

Théorème 1 (Erreur locale de troncature) *Nous supposons $k \leq 3$. Le couplage (7.18) d'un schéma à deux pas de temps, d'ordre r, et de largeur s, avec l'ESIM dans le cas d'une interface parfaite, est d'ordre local r si*

$$2\,k - 1 \geq r. \tag{7.31}$$

L'expression du schéma étant quelconque, nous ne pouvons pas calculer directement l'ordre local du couplage. Nous proposons alors une démonstration en trois parties, en un point irrégulier x_i à gauche de α ($J - s + 1 \leq i \leq J + s$). En première partie, nous développons l'expression de l'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$ du couplage (7.18). Nous définissons en deuxième partie

un problème de Cauchy, à solution suffisamment régulière. L'erreur locale $\boldsymbol{L}_2(x_i,t_n)$ du schéma appliqué à ce problème est connue. La comparaison de $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$ et $\boldsymbol{L}_2(x_i,t_n)$, menée dans une troisième partie, conduit à la valeur explicite de $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$.

Première partie de la démonstration.
L'avancée en temps en x_i (7.18) s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{U}_i^{n+1}-\boldsymbol{U}_i^n\right)-\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{H}_0\left(\boldsymbol{U}_{i-s}^n,\ldots,\boldsymbol{U}_J^n,\boldsymbol{U}_{J+1}^*,\ldots,\boldsymbol{U}_{i+s}^*\right)=\boldsymbol{0}. \tag{7.32}$$

L'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$ est obtenue en remplaçant chaque valeur numérique qui apparait implicitement ou explicitement dans (7.32) par la valeur exacte correspondante. La structure de (7.32) amène à écrire $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$ comme la différence de deux quantités $\boldsymbol{L}_1^1(x_i,t_n)$ et $\boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n)$. La première partie $\boldsymbol{L}_1^1(x_i,t_n)$ découle de développements de Taylor de $\boldsymbol{U}(x_i,t_{n+1})$ en (x_i,t_n)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1^1(x_i,t_n) &= \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{U}(x_i,t_{n+1})-\boldsymbol{U}(x_i,t_n)\right)\\ &= \sum_{m=1}^{2k-1}\frac{\Delta t^{m-1}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\boldsymbol{U}(x_i,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}).\end{aligned} \tag{7.33}$$

On rappelle que Δt et Δx sont liés par le nombre CFL (4.2) : pour tout λ, $O(\Delta t^\lambda)=O(\Delta x^\lambda)$. La deuxième partie $\boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n)$ s'écrit

$$\boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n)=\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{H}_0\left(\boldsymbol{U}(x_{i-s},t_n),\ldots,\boldsymbol{U}(x_J,t_n),\mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n),\ldots,\mathcal{U}^*(x_{i+s},t_n)\right), \tag{7.34}$$

où $\mathcal{U}^*(x_j,t_n)$ $(J+1\le j\le i+s)$ est obtenue en remplaçant les valeurs numériques qui apparaissent dans (7.12) par la solution exacte correspondante

$$\mathcal{U}^*(x_j,t_n)=\left(\boldsymbol{I_2}\ldots\frac{(x_j-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)!}\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n)\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n)\end{pmatrix} \tag{7.35}$$

soit, compte-tenue de (7.9),
(7.36)

$$\mathcal{U}^*(x_j,t_n)=\left(\boldsymbol{I}_2\ldots\frac{(x_j-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)!}\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k})\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k})\end{pmatrix}\right).$$

Pour tout j et m, $(x_j-\alpha)^m=O(\Delta x^m)$; le lemme 5 conduit alors à

$$\left(\boldsymbol{I}_2\ldots\frac{(x_j-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)!}\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k})\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k})\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}), \tag{7.37}$$

d'où

$$\mathcal{U}^*(x_j,t_n)=\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{(x_j-\alpha)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}). \tag{7.38}$$

Par ailleurs, les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_j,t_n)$ à gauche de α $(i-s \leq j \leq J)$ qui interviennent dans (7.34) sont développées autour de (α^-,t_n)

$$\boldsymbol{U}(x_j,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_j-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}). \tag{7.39}$$

On reporte alors les valeurs (7.38) et (7.39) dans $\boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n)$ (7.34), ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n) = \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{H}_0 \Bigg(& \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i-s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}),\ldots, \\ & \ldots, \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i+s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}) \Bigg). \end{aligned} \tag{7.40}$$

L'opérateur discret $\boldsymbol{H}_0$ est continu [29], ce qui permet de simplifier (7.40)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1^2(x_i,t_n) = \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{H}_0 \Bigg(& \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i-s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n),\ldots, \\ & \ldots, \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i+s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \Bigg) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}). \end{aligned} \tag{7.41}$$

Les expressions (7.33) et (7.41) conduisent alors à

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1(x,t_n) = & \sum_{m=1}^{2k-1} \frac{\Delta t^{m-1}}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \boldsymbol{U}(x_i,t_n) \\ & - \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{H}_0 \left(\sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i-s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n),\ldots, \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_{i+s}-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \right) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}). \end{aligned} \tag{7.42}$$

Deuxième partie de la démonstration.
Considérons la fonction

$$\boldsymbol{V}(x,t) = \sum_{\lambda=0}^{2k-1} \frac{(x-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!} \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t), \tag{7.43}$$

où $\boldsymbol{U}(x,t)$ est solution de (3.3). $\boldsymbol{V}(x,t)$ est régulière à travers α, et il est facile de montrer que $\boldsymbol{V}(x,t)$ est solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{A}_0 \dfrac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{V} = - \dfrac{(x-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)\,!} \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t) \\[2ex] \boldsymbol{V}_0(x) = \boldsymbol{V}(x,0) = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{2k-1} \frac{(x-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!} \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{U}(\alpha^-,0). \end{cases} \tag{7.44}$$

Notons que les valeurs limites $\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t)$ $(0 \leq \lambda \leq 2\,k)$ doivent être définies à chaque instant. La solution initiale $\boldsymbol{U}_0(x,t)$ doit alors être de classe $C^{2\,k-1}$, à dérivées $2\,k$-ièmes définies, mais pas forcément continues.

Supposons que le schéma (4.1) soit utilisé pour résoudre (7.44), sans couplage avec l'ESIM. Les valeurs exactes $\boldsymbol{V}(x_j,t_n)$ sont approchées par des valeurs numériques $\boldsymbol{V}_j^n$. L'avancée en temps au point irrégulier x_j (le même que celui de la première partie) s'écrit

$$\frac{\boldsymbol{V}_i^{n+1}-\boldsymbol{V}_i^n}{\Delta\,t}-\frac{1}{\Delta\,t}\,\boldsymbol{H}_0\left(\boldsymbol{V}_{i-s}^n,\ldots,\boldsymbol{V}_{i+s}^n\right)=\boldsymbol{0}. \tag{7.45}$$

L'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}_2(x_j,t_n)$ est obtenue, là encore, en remplaçant les valeurs numériques de (7.45) par les solutions exactes correspondantes.

$$\boldsymbol{L}_2(x_i,t_n)=\underbrace{\frac{\boldsymbol{V}(x_i,t_{n+1})-\boldsymbol{V}(x_i,t_n)}{\Delta\,t}}_{\boldsymbol{L}_2^1(x_i,t_n)}-\underbrace{\frac{1}{\Delta\,t}\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{V}(x_{i-s},t_n),\ldots,\boldsymbol{V}(x_{i+s},t_n)\right)}_{\boldsymbol{L}_2^2(x_i,t_n)}. \tag{7.46}$$

La première partie $\boldsymbol{L}_2^1(x_i,t_n)$ découle de développement de Taylor de $\boldsymbol{V}(x_i,t_{n+1})$ en (x_i,t_n)

$$\boldsymbol{L}_2^1(x_i,t_n)=\sum_{m=1}^{2\,k-1}\frac{\Delta\,t^{m-1}}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\,\boldsymbol{V}(x_i,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k-1}). \tag{7.47}$$

Pour $1 \leq m \leq 2\,k-1$, l'équation (7.43) conduit à

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\,\boldsymbol{V}(x_i,t_n) &= \frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\left(\sum_{\lambda=0}^{2\,k-1-m}\frac{(x_i-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial\,x^\lambda}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\right.\\ &\left.+(x_j-\alpha)^{2\,k-m}\sum_{\lambda=2\,k-m}^{2\,k-1}\frac{(x_i-\alpha)^{\lambda-(2\,k-m)}}{\lambda\,!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial\,x^\lambda}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\right)\\ &= \frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\left(\sum_{\lambda=0}^{2\,k-1-m}\frac{(x_i-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial\,x^\lambda}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k-m})\right),\end{aligned} \tag{7.48}$$

soit

$$\boldsymbol{L}_2^1(x_i,t_n)=\sum_{m=1}^{2\,k-1}\frac{\Delta\,t^{m-1}}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\left(\sum_{\lambda=0}^{2\,k-1-m}\frac{(x_i-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial\,x^\lambda}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\right)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k-1}). \tag{7.49}$$

Pour chaque valeur de m, nous écrivons un développement de Taylor de $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ autour de (α^-,t_n)

$$\sum_{\lambda=0}^{2\,k-1-m}\frac{(x_i-\alpha)^\lambda}{\lambda\,!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial\,x^\lambda}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)=\boldsymbol{U}(x_i,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k-m}), \tag{7.50}$$

soit, après report dans (7.49),

$$\boldsymbol{L}_2^1(x_i,t_n)=\sum_{m=1}^{2\,k-1}\frac{\Delta\,t^{m-1}}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,t^m}\,\boldsymbol{U}(x_i,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta x^{2\,k-1}). \tag{7.51}$$

La deuxième partie $\boldsymbol{L}_2^2(x_i,t_n)$ découle de la définition de $\boldsymbol{V}(x_j,t_n)$ (7.43)
(7.52)

$$\boldsymbol{L}_2^2(x_i,t_n) = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{H}_0\left(\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{(x_{i-s}-\alpha)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n),\ldots,\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{(x_{i+s}-\alpha)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\right).$$

Les expressions (7.51) et (7.52) conduisent alors à
(7.53)

$$\boldsymbol{L}_2(x,t_n) = \sum_{m=1}^{2k-1}\frac{\Delta t^{m-1}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{H}_0\left(\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{(x_{i-s}-\alpha)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n),\ldots,\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{(x_{i+s}-\alpha)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)\right)+\boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}).$$

Troisième partie de la démonstration.
On compare $\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n)$ et $\boldsymbol{L}_2(x_i,t_n)$ à partir de (7.42) et (7.53)

$$\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n) = \boldsymbol{L}_2(x_i,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}). \tag{7.54}$$

D'une part, $\boldsymbol{V}(x,t)$ est suffisamment régulière $[x_{j-s},x_{j+s}]$. D'autre part, le schéma choisi est d'ordre local r pour approcher le système hyperbolique linéaire

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}. \tag{7.55}$$

Cependant, $\boldsymbol{V}(x,t)$ n'est pas solution de (7.55), mais est solution de (7.44). Le second membre de l'EDP (7.44) est borné : pour tout x,

$$-\frac{(x-\alpha)^{2k-1}}{(2k-1)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t) = \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k-1}), \tag{7.56}$$

d'où

$$\boldsymbol{L}_2(x_i,t_n) = \boldsymbol{O}(\Delta x^{\min(r,2k-1)}). \tag{7.57}$$

De (7.54) et (7.57), nous déduisons

$$\boldsymbol{L}_1(x_i,t_n) = \boldsymbol{O}(\Delta x^{\min(r,2k-1)}), \tag{7.58}$$

ce qui achève la démonstration. La même démonstration peut être effectuée aux points irréguliers à droite de α. □

La limitation du théorème 1 à $k \leq 3$ provient uniquement du lemme 5, la démonstration de ce dernier pour $k > 3$ se répercutant sur le théorème 1. Il est raisonnable de penser que le lemme 5 est vérifié pour tout k, et qu'il en est ainsi du théorème 1

Notons enfin qu'un exemple de calcul direct de l'erreur locale de troncature est proposé plus loin, dans le cas des conditions de type masse-ressort.

Choix de k. Nous n'avons pas encore indiqué la valeur de k intervenant dans le calcul des valeurs modifiées (7.12) et (7.17). Le résultat 7 précise la valeur minimale de k telle que, dans le

	s	r	k
Lax-Wendroff	1	2	2
Volumes finis	2	2	2
WENO 5	3	5	3

TAB. 7.1 – *Valeurs de s, r et k pour différents schémas*

cas limite d'un milieu homogène, le schéma coïncide avec le schéma en l'absence d'interfaces. Le théorème 1 précise la valeur minimale de k telle que l'ordre local du schéma est maintenu aux points irréguliers. La valeur minimale de k vérifiant ces deux critères est alors optimale et s'écrit

$$\boxed{k = \max\left(s, r+1-E\left(\frac{r+1}{2}\right)\right),} \tag{7.59}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Le tableau 7.1 rappelle les valeurs de la largeur s et de l'ordre de convergence r des schémas utilisés au cours de cette étude, et précise les valeurs de k découlant de (7.59).

7.3.5 Stabilité

Observations. Nous ne proposons pas ici de théorie de stabilité concernant le couplage de l'ESIM aux schémas numériques. Cette étude de stabilité ne peut être effectuée via une analyse de Fourier classique, cette analyse nécessitant l'invariance des schémas par translation dans le milieu. L'étude de la stabilité des schémas avec coefficients discontinus repose en général sur des *techniques d'énergie* : il s'agit alors de définir une énergie, basée sur les valeurs numériques $\boldsymbol{U}_i^n$ et sur les valeurs modifiées $\boldsymbol{U}_i^*$, dont on montre qu'elle est conservée ou décroît.

Nous proposons seulement un ensemble de remarques déduites d'expériences numériques, pour différentes positions de l'interface, valeurs des paramètres physiques, et nombre CFL. Tout d'abord, le couplage de l'ESIM au schéma WENO 5 est toujours stable pour CFL ≤ 1, même pour des contrastes extrêmes des paramètres physiques (ex : eau-air), et pour une interface très proche ou sur un point du maillage ($\theta = 0$). Par contre, dans certains cas limites, le couplage de l'ESIM aux schémas de Lax-Wendroff ou de volumes finis avec limiteur de flux peut conduire à l'apparition d'instabilités numériques au voisinage de l'interface. Ces cas correspondent à des contrastes très importants des paramètres physiques et à une interface très proche d'un point de

calcul, soit

$$\begin{aligned} &\rho_0 \gg \rho_1, c_0 \gg c_1 \text{ et } \theta \to 1^- \\ &\rho_0 \ll \rho_1, c_0 \ll c_1 \text{ et } \theta \to 0^+. \end{aligned} \tag{7.60}$$

Nous n'avons pas d'expression théorique des valeurs limites de θ en fonction des paramètres physiques, mais avons observé plusieurs propriétés. Tout d'abord, les configurations instables existent aussi dans le cas de l'IIM en 1D, et apparaissent exactement pour les mêmes valeurs des paramètres physiques et géométriques. D'autre part, le comportement des schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis avec limiteur de flux couplés à l'ESIM sont les mêmes : les instabilités apparaissent pour les mêmes valeurs. Enfin, la valeur de k influe sur la stabilité. Dans le cas de l'interface eau-air, des instabilités apparaissent, suivant la valeur de k, à partir des valeurs de θ

$$\begin{aligned} k = 1 : &\quad \theta \geq 0.99, \\ k = 2 : &\quad \theta \geq 0.999, \\ k = 3 : &\quad \theta \geq 0.9999. \end{aligned} \tag{7.61}$$

Cependant, le fait d'augmenter k n'est pas une solution pleinement satisfaisante dans ces cas limites, car des instabilités peuvent subsister.

Résolution par moindres carrés. Nous proposons une façon empirique de résoudre les cas problématiques observés avec les schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis couplés à l'ESIM. Considérons le calcul des valeurs modifiées à droite de α. Rappelons que les valeurs modifiées à droite de α (7.12) découlent d'estimations numériques des valeurs limites de $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^{\pm},t)$ $(0 \leq m \leq 3)$. Au lieu d'estimer ces valeurs limites à partitr de $k = 2$ valeurs numériques de chaque côté de α (7.11), nous estimons alors ces valeurs limites à partir de $k = 3$ valeurs numériques de chaque côté de α. Cela revient à écrire le système

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n_{J-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{J+3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^- \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\boldsymbol{U}^- \end{pmatrix}. \tag{7.62}$$

où $\boldsymbol{M}$ est cette fois une matrice rectangulaire bloc 4×6, avec des blocs 2×2. Les composantes de $\boldsymbol{M}$ sont données par (7.10), avec $(1 \leq j \leq 6)$. L'equation (7.62) est résolue par moindres carrés ; au lieu de (7.12), les valeurs modifiées à droite de l'interface s'écrivent

$$i = 1{,}2, \qquad \boldsymbol{U}^*_i = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha)^3}{3\,!}\boldsymbol{I}_2\right) \left({}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}\right)^{-1}\,{}^T\boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n_{J-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{J+3} \end{pmatrix}. \tag{7.63}$$

La même procédure peut s'appliquer pour les valeurs modifiées à gauche de α. Ce faisant, nous n'avons jamais observé d'instabilités, quelles ques soient les valeurs des paramètres physiques et géométriques. Là encore, nous ne savons pas expliquer pourquoi le couplage obtenu est stable. L'étude générale de la stabilité de l'ESIM reste une question ouverte intéressante.

7.4 Conditions de type masse-ressort

7.4.1 Introduction

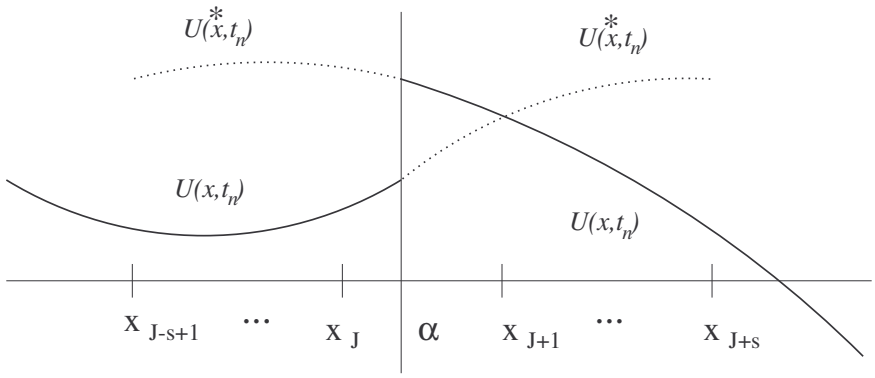

FIG. 7.3 – *Schématisation d'une composante de* $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ *(traits pleins) et de* $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ *(pointillés) pour un contact imparfait décrit par des conditions de type masse-ressort.*

Les conditions de type masse-ressort, présentées au chapitre 5, correspondent à une solution exacte $\boldsymbol{U}(x,t)$ discontinue. Nous schématisons une composante de $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ et $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ (ex : la vitesse élastique) en figure 7.3.

La procédure suivie au cours de cette section est essentiellement la même que dans le cas du contact parfait. Les différences proviennent du fait que les dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,t_n)$, d'un côté de α, dépendent des dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}(x,t_n)$, de l'autre côté de α *à des ordres de dérivation supérieurs*. De plus, les conditions de type masse-ressort n'étant pas symétriques par rapport à α, les calculs menant aux valeurs modifiées à droite puis à gauche de α présentent quelques différences.

7.4.2 Calcul des valeurs modifiées

Valeurs modifiées à droite. Nous calculons tout d'abord les valeurs modifiées $\boldsymbol{U}_i^*$ à droite de α ($J+1 \leq i \leq J+s$). Nous appliquons les conditions (5.17) dans les k développements de Taylor à droite de α ($J+1 \leq i \leq J+k$ dans (7.7)), ce qui conduit en ces points à

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}(x_i,t_n) &= \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{D}_{2m+1}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ &+ \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{D}_{2m+2}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}), \end{aligned} \tag{7.64}$$

soit, après regroupement des termes dans (7.64),

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(x_i,t_n) &= \boldsymbol{D}_1\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\
&+ \sum_{m=1}^{2\,k-1}\left(\frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{D}_{2\,m+1}+\frac{(x_i-\alpha)^{m-1}}{(m-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{2\,m}\right)\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\
&+ \frac{(x_i-\alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{4\,k}\,\frac{\partial^{2\,k}}{\partial\,x^{2\,k}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}).
\end{aligned}
\tag{7.65}
$$

Les k premières équations de (7.7) et les k équations (7.65) s'écrivent

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\,x^{2\,k-1}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta}_1 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}) \end{pmatrix},
\tag{7.66}
$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice bloc $2\,k\times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1\le j\le 2\,k)$

$$
\boldsymbol{M}[i,j] = \begin{cases}
\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \quad \text{si } 1\le i\le k, \\[2ex]
\boldsymbol{D}_1 \quad \text{si } k+1\le i\le 2\,k \text{ et si } j=1, \\[2ex]
\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{2j-1}+\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-2}}{(j-2)\,!}\,\boldsymbol{D}_{2\,j-2} \\[2ex]
\text{si } k+1\le i\le 2\,k \text{ et si } j\ne 1,
\end{cases}
\tag{7.67}
$$

et $\boldsymbol{\Delta}_1$ est un vecteur bloc $2\,k$ avec des blocs 2×2, de composantes

$$
\boldsymbol{\Delta}_1(i) = \begin{cases}
0 \quad \text{si } 1\le i\le k, \\[2ex]
\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{4\,k}\,\dfrac{\partial^{2\,k}}{\partial\,x^{2\,k}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \quad \text{si } k+1\le i\le 2\,k.
\end{cases}
\tag{7.68}
$$

Nous remplaçons les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ (membre de gauche de (7.66)) par $\boldsymbol{U}_i^n$; nous éliminons aussi le vecteur $\boldsymbol{\Delta}_1$, et les restes de Taylor (troisième membre de droite de (7.66)). Les estimations numériques de $\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)$ $(0\le m\le 2\,k-1)$, découlant de l'inversion du système obtenu, sont reportées dans l'expression de la solution modifiée à droite de α (7.6). Nous en déduisons explicitement les valeurs modifiées à droite de α, données par (7.12) comme dans le cas du contact parfait. L'inversibilité de $\boldsymbol{M}$ (7.67) est discutée plus loin.

Valeurs modifiées à gauche. Nous suivons une procédure semblable pour calculer les valeurs modifiées aux points irréguliers x_i à gauche de α $(J-s+1\le i\le J)$. Nous appliquons les conditions (5.21) dans les k développements de Taylor à gauche de α $(J-k+1\le i\le J$ dans

(7.7)), ce qui conduit en ces points à

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(x_i,t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,k-1}\sum_{\lambda=0}^{2p-m-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{E}(\lambda,k,2\,k-m)\,\frac{\partial^{m+\lambda}}{\partial\,x^{m+\lambda}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) \\
&+ \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{E}(2\,k-m,m,2\,k-m)\,\frac{\partial^{2\,k}}{\partial\,x^{2\,k}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}),
\end{aligned}
\tag{7.69}
$$

soit, après réarrangement de la double somme,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(x_i,t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,k-1}\left(\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(x_i-\alpha)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)\,!}\,\boldsymbol{E}(\lambda,m-\lambda,2\,k-m+\lambda)\right)\frac{\partial^{m}}{\partial\,x^{m}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^+,t_n) \\
&+ \left(\sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!}\boldsymbol{E}(2\,k-m,m,2\,k-m)\right)\frac{\partial^{2\,k}}{\partial\,x^{2\,k}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}).
\end{aligned}
\tag{7.70}
$$

Les k dernières équations de (7.7) et les k équations (7.70) s'écrivent

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\,x^{2\,k-1}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta}_2 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}) \end{pmatrix},
\tag{7.71}
$$

où $\boldsymbol{N}$ est une matrice bloc $2\,k\times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1\le j\le 2\,k)$

$$
\boldsymbol{N}[i,j] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1-m}}{(j-1-m)\,!}\,\boldsymbol{E}(m,j-1-m,2\,k-j+1+m) & \text{si } 1\le i\le k, \\[2ex] \displaystyle\frac{(x_{J-k+i}-\alpha)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 \quad \text{si } k+1\le 2\,k, \end{cases}
\tag{7.72}
$$

et où $\boldsymbol{\Delta}_2$ est un vecteur bloc $2\,k$ avec des blocs 2×2, de composantes

$$
\boldsymbol{\Delta}_2(i) = \begin{cases} \displaystyle\left(\sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_{J-k+i}-\alpha)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{E}(2\,k-m,m,2\,k-m)\right)\frac{\partial^{2\,k}}{\partial\,x^{2\,k}}\,\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) & \text{si } 1\le i\le k, \\[2ex] \boldsymbol{0} \quad \text{si } k+1\le i\le 2\,k. \end{cases}
\tag{7.73}
$$

Les valeurs modifiées aux points irréguliers à gauche de α sont alors données par (7.17)

7.4.3 Utilisation des valeurs modifiées

L'utilisation des valeurs modifiées aux points irréguliers est donnée par (7.18). Les remarques concernant l'avancée en temps sont les mêmes que dans le cas du contact parfait.

Cas limite du milieu homogène. Ce cas correspond non seulement à des paramètres physiques identiques de part et d'autre de α, mais aussi à une raideur K infinie et une masse M nulle. Dans ce cas, nous montrons un résultat identique au résultat 7 montré dans le cas du contact parfait.

Resultat 10 *Pour $\rho_0 = \rho_1, c_0 = c_1$, $K = +\infty$ et $M = 0$, l'ESIM coïncide avec le schéma en l'absence d'interface, i.e. l'avancée en temps (7.18) revient à l'avancée en temps classique (4.1), si*

$$k \geq s. \tag{7.74}$$

Démonstration. Dans le cas limite du milieu homogène, les matrices $\boldsymbol{D}_m$ et $\boldsymbol{E}$ (5.17) et (5.21) se simplifient et s'écrivent, pour $i \geq 0$, $k \geq 0$, et $l \geq 1$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{4\,i+1} = \boldsymbol{D}_{4\,i+3} = \boldsymbol{I}_2 \\ \\ \boldsymbol{D}_{4\,i+2} = \boldsymbol{D}_{4\,i+4} = \boldsymbol{0} \\ \\ \boldsymbol{E}(0,k,l) = \boldsymbol{I}_2 \text{ et } \boldsymbol{E}(m,k,l) = \boldsymbol{0} \text{ si } m \neq 0. \end{cases}$$

Par conséquence, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$ et sont les mêmes que dans le cas limite du contact parfait en milieu homogène. La suite de la démonstration est alors identique à celle du résultat 7. □

Inversibilité des matrices. Comme dans le cas d'une interface parfaite, nous montrons dans le prochain résultat que les déterminants de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont non nuls pour toutes valeurs des paramètres décrivant les milieux et l'interface.

Resultat 11 *Pour $k = 1,2,3$, les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toujours inversibles, quelles que soient les valeurs de ρ_0, ρ_1, c_0, c_1, K, M, Δx et α.*

Démonstration. Le calcul du déterminant est proposé pour la matrice $\boldsymbol{M}$ et $k = 2$. Les blocs de $\boldsymbol{M}$ (7.67) sont diagonaux : après permutation des lignes et colonnes, le déterminant de $\boldsymbol{M}$ s'écrit

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}, \tag{7.75}$$

avec $\boldsymbol{A}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][1,1]$ et $\boldsymbol{B}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][2,2]$ $(1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4)$. Les calculs, menés avec MAPLE, conduisent à

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \frac{1}{12\,\rho_1^2\,c_1^2\,K^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{5}\eta_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^6 + \left(\sum_{i=6}^{9}\eta_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^5 + \left(\sum_{i=10}^{12}\eta_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^4\right) \\ \det \boldsymbol{B} &= \frac{1}{12\,\rho_0^2\,c_1^4\,K}\left(\left(\sum_{i=1}^{5}\xi_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^6 + \left(\sum_{i=6}^{9}\xi_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^5 + \left(\sum_{i=10}^{12}\xi_i\,p_i(\theta)\right)\Delta x^4\right) \end{aligned} \tag{7.76}$$

avec les polynômes $p_i(\theta)$

$$
\begin{aligned}
p_1(\theta) &= -4\,\theta^4 + 16\,\theta^3 - 17\,\theta^2 - \theta + 6, & p_7(\theta) &= -12\,\theta^3 + 6\,\theta^2 + 16\,\theta + 3,\\
p_2(\theta) &= \theta^4 - 6\,\theta^3 + 13\,\theta^2 - 12\,\theta + 4, & p_8(\theta) &= 4\,\theta^3 + 6\,\theta^2 + 2\,\theta,\\
p_3(\theta) &= 6\,\theta^4 - 12\,\theta^3 - 4\,\theta^2 + 10\,\theta + 2, & p_9(\theta) &= -4\,\theta^3 + 18\,\theta^2 - 26\,\theta + 12,\\
p_4(\theta) &= \theta^4 + 2\,\theta^3 + \theta^2, & p_{10}(\theta) &= 6\,\theta^2 + 6\,\theta + 2,\\
p_5(\theta) &= -4\,\theta^4 + 7\,\theta^2 + 3\,\theta, & p_{11}(\theta) &= 6\,\theta^2 - 18\,\theta + 12,\\
p_6(\theta) &= 12\,\theta^3 - 30\,\theta^2 + 8\,\theta + 13, & p_{12}(\theta) &= -12\,\theta^2 + 12\,\theta + 9,
\end{aligned}
$$

et les coefficients η_i et ξ_i

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= \rho_0^2\, c_0^6\, K^2, & \eta_2 &= \rho_0\, c_0^6\, \rho_1\, K^2, & \eta_3 &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^2\, K^2,\\
\eta_4 &= \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^4\, K^2 & \eta_5 &= c_0^2\, \rho_1^2\, c_1^4\, K^2, & \eta_6 &= \rho_0^2\, c_0^6\, \rho_1\, c_1^2\, K,\\
\eta_7 &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1^2\, c_1^4\, K & \eta_8 &= \rho_1\, c_1^6\, K^2\, M, & \eta_9 &= \rho_0\, c_0^4\, c_1^2\, K^2\, M,\\
\eta_{10} &= \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^6\, K\, M, & \eta_{11} &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^4\, K\, M, & \eta_{12} &= \rho_0^2\, c_0^6\, \rho_1^2\, c_1^4,\\
\xi_1 &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, K, & \xi_2 &= \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^2\, K, & \xi_3 &= \rho_1^2\, c_0^2\, c_1^2\, K,\\
\xi_4 &= \rho_0\, \rho_1\, c_1^4\, K, & \xi_5 &= \rho_0^2\, c_0^2\, c_1^2\, K, & \xi_9 &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1^2\, c_1^2,\\
\xi_7 &= \rho_0\, c_0^2\, c_1^2\, K\, M, & \xi_8 &= \rho_0^2\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^4, & \xi_6 &= c_0^2\, \rho_1\, c_1^2\, K\, M,\\
\xi_{10} &= \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^4\, M, & \xi_{11} &= \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^2\, M, & \xi_{12} &= c_0^2\, c_1^2\, K\, M^2.
\end{aligned}
$$

On remarque la propriété

$$\sum_{i=1}^{12} p_i(\theta) = 63.$$

Les coefficients η_i et ξ_i étant tous positifs, on en déduit que les polynômes p_i et q_i ne sont pas tous nuls simultanément. Nous obtenons alors $\det \boldsymbol{A} > 0$ et $\det \boldsymbol{B} > 0$, d'où $\det \boldsymbol{M} > 0$. La même procédure est appliquée pour montrer $\det \boldsymbol{N} > 0$. On remarque que les 5 premiers polynômes $p_i(\theta)$ sont les mêmes que ceux obtenus dans le cas de contact parfait (voir résultat (9)). $\square$

Là encore, le calcul numérique de $\boldsymbol{M}^{-1}$ et $\boldsymbol{N}^{-1}$, réalisé en prétraitement, ne pose pas de problèmes. D'autre part, nous ne proposons pas d'analyse de stabilité. De nombreuses expériences numériques ont montré qu'il n'y a pas d'influence de K et M sur la stabilité du couplage de l'ESIM avec les schémas utilisés.

7.4.4 Analyse de l'erreur locale de troncature

Nous avons analysé précédemment l'ordre local d'un schéma couplé à l'ESIM selon (7.18), avec des conditions de contact parfait. Pour appliquer la même analyse avec les conditions de type masse-ressort, nous devons prendre en compte la nouvelle structure des matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$. Dans le cas des conditions de contact parfait, $\boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{\Delta}_2 = \mathbf{0}$, et comme pour tout i, $|x_i - \alpha| = O(\Delta\, x)$, nous avons

$$\boldsymbol{M}(i,j) = \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{j-1}), \qquad \boldsymbol{N}(i,j) = \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{j-1}), \tag{7.77}$$

pour $1 \leq i \leq 2\,k$ et $1 \leq j \leq 2\,k$. Par contre, dans le cas des conditions de type masse-ressort, $\boldsymbol{\Delta}_1$ et $\boldsymbol{\Delta}_2$ sont des vecteurs non nuls, et nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(i,j) &= \begin{cases} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{j-1}) \text{ si } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq 2\,k, \\ \boldsymbol{O}(1) \text{ si } k+1 \leq i \leq 2\,k \text{ et } j = 1, \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{j-2}) \text{ si } k+1 \leq i \leq 2\,k \text{ et } 2 \leq j \leq 2\,k, \end{cases} \\ \boldsymbol{N}(i,j) &= \begin{cases} \boldsymbol{O}(1) \text{ si } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j \leq 2\,k, \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{j-1}) \text{ si } k+1 \leq i \leq 2\,k \text{ et } 1 \leq 2\,k. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.78}$$

L'estimation d'erreurs repose alors sur le lemme suivant.

Lemme 6 *Soit $\boldsymbol{\Psi}$ un vecteur à $2\,k$ blocs 2×2 dont les composantes sont en $\boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k})$. Alors, pour $k = 1,2,3$, les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, et les vecteurs $\boldsymbol{\Delta}_1$ et $\boldsymbol{\Delta}_2$ vérifient*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Psi} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \\ \boldsymbol{O}(1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \\ \boldsymbol{O}(1) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{N}^{-1}\Psi &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \\ \boldsymbol{O}(1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-1}) \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k-2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x) \\ \boldsymbol{O}(1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.79}$$

Démonstration. Les calculs sont faits explicitement avec MAPLE à partir des expressions de $\boldsymbol{M}$ (7.67), $\boldsymbol{N}$ (7.72), $\boldsymbol{\Delta}_1$ (7.68), et $\boldsymbol{\Delta}_2$ (7.73). □

Nous pouvons écrire l'analogue du théorème 1 dans le cas des conditions de type masse-ressort. Nous ne proposons pas de démonstration, sachant qu'elle serait identique à celle du théorème 1, à la différence de l'utilisation du lemme 5. Pour illustrer cette différence et donner un exemple de calcul direct d'erreur locale de troncature dans le cas de l'ESIM, nous proposons maintenant une estimation de l'erreur locale de l'ESIM couplée au schéma de Lax-Wendroff, avec $k = 2$.

Les points irréguliers sont alors x_J et x_{J+1}. L'avancée en temps (7.18) en x_J s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{\boldsymbol{U}_J^{n+1} - \boldsymbol{U}_J^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\,\Delta x}\,\boldsymbol{A}_0\left(\boldsymbol{U}_{J+1}^* - \boldsymbol{U}_{J-1}^n\right) \\ - \;& \frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{\Delta x}\right)^2 \Delta t\left(\boldsymbol{U}_{J+1}^* - 2\,\boldsymbol{U}_J^n + \boldsymbol{U}_{J-1}^n\right) = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{7.80}$$

Chaque valeur numérique qui apparait implicitement ou explicitement dans (7.80) est remplacée par la valeur exacte correspondante. D'où l'expression de l'erreur locale de troncature $\boldsymbol{L}(x_J,t_n)$

$$\boldsymbol{L}(x_J,t_n) = \boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) + \boldsymbol{L}_2(x_J,t_n) + \boldsymbol{L}_3(x_J,t_n), \tag{7.81}$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) &= \frac{\boldsymbol{U}(x_J,t_{n+1}) - \boldsymbol{U}(x_J,t_n)}{\Delta t} \\ \boldsymbol{L}_2(x_J,t_n) &= \frac{1}{2\,\Delta x}\,\boldsymbol{A}_0\left(\mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n) - \boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n)\right) \\ \boldsymbol{L}_3(x_J,t_n) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{\Delta x}\right)^2 \Delta t\left(\mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n) - 2\,\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n)\right). \end{aligned}$$

La valeur exacte $\mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n)$ déduite de la valeur modifiée $\boldsymbol{U}_{J+1}^*$ découle de (7.12)

$$\mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n) = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_{J+1}-\alpha)^3}{3\,!}\,\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+2},t_n) \end{pmatrix}. \tag{7.82}$$

L'équation (7.9) et le lemme 6 (avec $k = 2$) conduisent à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(x_{J+1},t_n) &= \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_{J+1}-\alpha)^3}{3\,!}\,\boldsymbol{I}_2\right)\boldsymbol{M}^{-1}\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) \end{pmatrix} \\ +\boldsymbol{\Delta}_1 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta x^4) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta x^4) \end{pmatrix} \end{array}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(x_{J+1}-\alpha)^k}{k\,!}\,\frac{\partial^k}{\partial x^k}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^3). \end{aligned} \tag{7.83}$$

Nous déduisons $\boldsymbol{L}_1$ de développements de Taylor autour de (α^-,t_n)
(7.84)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_1(x_J,t_n) &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta t^2) \\
&= -\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + c_0^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(x_J,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta t^2) \\
&= -\boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \left(c_0^2\frac{\Delta t}{2} - (x_J-\alpha)\boldsymbol{A}_0\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^2).
\end{aligned}$$

Nous déduisons $\boldsymbol{L}_2$ et $\boldsymbol{L}_3$ de développements de Taylor de $\boldsymbol{U}(x_{J-1},t_n)$ et $\boldsymbol{U}(x_J,t_n)$ en α^-, et de (7.83)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_2(x_J,t_n) &= \boldsymbol{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + (x_J-\alpha)\,\boldsymbol{A}_0\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^2) \\
\boldsymbol{L}_3(x_J,t_n) &= -c_0^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{U}(\alpha^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^2).
\end{aligned} \tag{7.85}$$

Nous ajoutons $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, et $\boldsymbol{L}_3$. Nous obtenons alors

$$\boldsymbol{L}(x_J,t_n) = \boldsymbol{O}(\Delta x^2), \tag{7.86}$$

qui est l'erreur locale de troncature du schéma de Lax-Wendroff aux points réguliers. Nous pouvons faire une démonstration semblable en x_{J+1}.

7.5 Couche fine

7.5.1 Introduction

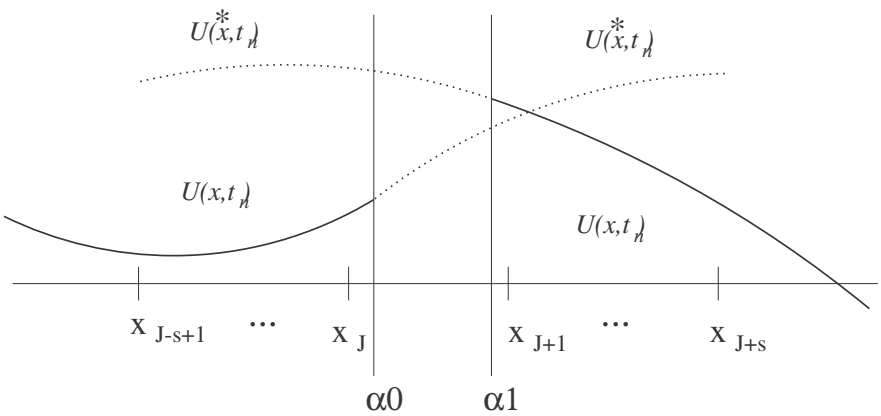

FIG. 7.4 – *Schématisation d'une composante de* $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ *(traits pleins) et de* $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ *(pointillés) dans un milieu tricouche, les deux interfaces appartenant à la même couche.*

Le cas d'un milieu avec $n > 1$ interfaces parfaites situées en α_i $(0 < i < n-1)$ ne pose pas de problèmes si

$$E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\Delta x}\right) > E\left(\frac{\alpha_i}{\Delta x}\right) + s. \tag{7.87}$$

Dans le cas contraire, certains développements de Taylor autour de α_i (7.7) coupent l'interface α_{i+1}, ce qui fait chuter l'ordre de ces développements. Il est alors nécessaire de prendre en compte les conditions vérifiées en α_{i+1} par $\boldsymbol{U}(x,t)$.

Nous considérons ici $n = 2$ interfaces, et nous supposons $\alpha_1 - \alpha_0 < \Delta x$. Deux cas peuvent alors se présenter. Le premier cas correspond à deux interfaces dans la même couche, aucun point de calcul n'existant sur l'intervalle $[\alpha_0,\alpha_1]$ (figure 7.4). Le deuxième cas est celui où un point de calcul existe entre les deux interfaces, soit $\alpha_0 < x_{J+1} < \alpha_1$.

Nous nous intéressons tout d'abord au premier cas où les deux interfaces sont situées dans la même maille, i.e. $x_J \leq \alpha_0 < \alpha_1 \leq x_{J+1}$, et nous ne voulons pas mailler l'intervalle $[\alpha_0,\alpha_1]$. Nous écrivons les solutions modifiées $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ de part et d'autre de α_0 et α_1

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \leq x \leq x_{J+s}, \qquad \boldsymbol{U}^*(x,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x-\alpha_0)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n), \\ &x_{J-s+1} \leq x \leq \alpha_1, \qquad \boldsymbol{U}^*(x,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x-\alpha_1)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n). \end{aligned} \tag{7.88}$$

Nous écrivons les développements de Taylor d'ordre $2k$ de $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ en $2k$ points de calcul de part et d'autre de α_0 et α_1

$$\begin{aligned} &J-k+1 \leq i \leq J, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha_0)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}), \\ &J+1 \leq i \leq J+k, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha_1)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}). \end{aligned} \tag{7.89}$$

7.5.2 Calcul des valeurs modifiées

Valeurs modifiées à droite. Nous calculons tout d'abord les valeurs modifiées $\boldsymbol{U}_i^*$ aux points irréguliers x_i à droite de α_1 $(J+1 \leq i \leq J+s)$. Nous appliquons les conditions (5.28), calculées jusqu'à l'ordre $l = 2k-m-1$, dans les k développements de Taylor à droite de α_1 $(J+1 \leq i \leq J+k$ dans (7.89)), ce qui conduit en ces points à

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \sum_{\lambda=0}^{2k-m-1} \frac{(x_i-\alpha_1)^m}{m\,!} \frac{h^\lambda}{\lambda\,!} \boldsymbol{D}_m(\Omega_1,\Omega_2)\, \boldsymbol{D}_{\lambda+m}(\Omega_0,\Omega_1) \frac{\partial^{\lambda+m}}{\partial x^{\lambda+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}), \tag{7.90}$$

avec $h = \alpha_1 - \alpha_0$, soit, après modification des indices,

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \left(\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(x_i-\alpha_1)^\lambda}{\lambda\,!} \frac{h^{m-\lambda}}{(m-\lambda)\,!} \boldsymbol{D}_\lambda(\Omega_1,\Omega_2)\, \boldsymbol{D}_m(\Omega_0,\Omega_1) \right) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta x^{2k}). \tag{7.91}$$

Les k premières équations de (7.89) et les k équations (7.91) s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\, x^{2\,k-1}} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \end{pmatrix}, \tag{7.92}$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice $2\,k \times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1 \le j \le 2\,k)$

$$\boldsymbol{M}[i,j] = \begin{cases} \dfrac{(x_{J-k+i} - \alpha_0)^{j-1}}{(j-1)\,!}\, \boldsymbol{I}_2 & \text{si } 1 \le i \le k \\[2ex] \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_1)^{\lambda}}{\lambda\,!}\, \frac{h^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!}\, \boldsymbol{D}_{\lambda}(\Omega_1,\Omega_2)\, \boldsymbol{D}_{j-1}(\Omega_0,\Omega_1) & \text{si } k+1 \le i \le 2\,k. \end{cases} \tag{7.93}$$

Rappelons que, à $O(h)$ près, les conditions de couche fine (5.28) reviennent aux conditions de type masse-ressort (5.14), avec K et M donnés par (5.29). Après développement des matrices $\boldsymbol{M}$ dans les deux cas (7.67), (7.93), il est possible de montrer que ces matrices sont égales à $O(h)$ près, comme attendu.

Nous remplaçons les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ (membre de gauche de (7.92)) par $\boldsymbol{U}_i^n$ et éliminons les restes de Taylor de (7.92). Les estimations numériques de $\frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n)$ $(0 \le m \le 2\,k-1)$, découlant de l'inversion du système obtenu, sont alors reportées dans l'expression de la solution modifiée à droite de α_1 (7.88). Nous en déduisons alors les valeurs modifiées à droite de α_1

$$\boxed{J+1 \le i \le J+s, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha_0)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!}\, \boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}.} \tag{7.94}$$

Valeurs modifiées à gauche. Nous suivons une procédure semblable pour calculer les valeurs modifiées aux points irréguliers à gauche de α_0 $(J-s+1 \le i \le J)$. Nous appliquons les conditions (5.28), calculées jusqu'à l'ordre $l = 2\,k - m - 1$, dans les k développements de Taylor à gauche de α_0 $(J-k+1 \le i \le J$ dans (7.89)), ce qui conduit en ces points à

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \sum_{\lambda=0}^{2\,k-m-1} \frac{(x_i - \alpha_1)^m}{m\,!}\, \frac{(-h)^{\lambda}}{\lambda\,!}\, \boldsymbol{D}_m^{-1}(\Omega_0,\Omega_1)\, \boldsymbol{D}_{\lambda+m}^{-1}(\Omega_1,\Omega_2) \frac{\partial^{\lambda+m}}{\partial\, x^{\lambda+m}} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}), \tag{7.95}$$

soit, après renumérotation des indices,

$$\boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \left(\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(x_i - \alpha_0)^{\lambda}}{\lambda\,!}\, \frac{(-h)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)\,!}\, \boldsymbol{D}_{\lambda}^{-1}(0,1)\, \boldsymbol{D}_m^{-1}(1,2) \right) \frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}). \tag{7.96}$$

Les k dernières équations de (7.89) et les k équations (7.96) s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{N} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,k-1}}{\partial\, x^{2\,k-1}} \boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{2\,k}) \end{pmatrix}, \tag{7.97}$$

où $\boldsymbol{N}$ est une matrice bloc $2\,k \times 2\,k$, avec des blocs 2×2, de composantes $(1 \leq j \leq 2\,k)$

$$\boldsymbol{N}[i,j] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_0)^{\lambda}}{\lambda\,!} \frac{(-h)^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!} \boldsymbol{D}_{\lambda}^{-1}(\Omega_0,\Omega_1)\, \boldsymbol{D}_{j-1}^{-1}(\Omega_1,\Omega_2) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \displaystyle\frac{(x_{J-k+i} - \alpha_1)^{j-1}}{(j-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 & \text{si } k+1 \leq i \leq 2\,k. \end{cases} \tag{7.98}$$

Nous remplaçons les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$ (membre de gauche de (7.97)) par $\boldsymbol{U}_i^n$ et éliminons les restes de Taylor de (7.97). Nous en déduisons alors les valeurs modifiées à gauche de α_0

$$\boxed{J+1 \leq i \leq J+s, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha_1)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}.} \tag{7.99}$$

7.5.3 Utilisation des valeurs modifiées

L'utilisation des valeurs modifiées pour l'avancée en temps aux points irréguliers est là encore donnée par (7.18). Finalement, la principale différence entre le cas d'une couche fine et le cas des interfaces parfaites ou imparfaites réside dans les expressions de $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, et des valeurs modifiées.

Cas limite du milieu homogène. Dans le cas limite d'un milieu tricouche homogène (les interfaces en α_0 et α_1 disparaissant alors), nous montrons que l'ESIM coïncide avec le schéma en l'absence d'interfaces.

Resultat 12 *Pour $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2$ et $c_0 = c_1 = c_2$, l'ESIM coïncide avec le schéma en l'absence d'interface, i.e. l'avancée en temps (7.18) revient à l'avancée en temps classique (4.1), si*

$$k \geq s.$$

Démonstration. Dans le cas limite d'un milieu homogène, $\boldsymbol{D}_m(\Omega_0,\Omega_1) = \boldsymbol{D}_m(\Omega_1,\Omega_2) = \boldsymbol{I}_2$ pour tout entier m (5.8). Cependant, à la différence du contact parfait et des conditions de type masse-ressort, on a $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{N}$ dans ce cas, ce qui amène à distinguer le calcul des valeurs modifiées à droite de α_1 et le calcul des valeurs modifiées à gauche de α_0. Considérons le premier calcul.

Nous écrivons trivialement

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix} \tag{7.100}$$

L'expression de $\boldsymbol{M}$(7.93) se simplifie en milieu homogène

$$\boldsymbol{M}[i,j] = \begin{cases} \displaystyle\frac{(x_{J-k+i} - \alpha_0)^{j-1}}{(j-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_1)^{\lambda}}{\lambda\,!} \frac{h^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 & \text{si } k+1 \leq i \leq 2\,k. \end{cases} \tag{7.101}$$

Compte-tenu de $h = \alpha_1 - \alpha_0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_1)^\lambda}{\lambda\,!} \frac{h^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!} &= \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_1 + h)^{j-1}}{(j-1)\,!} \\ &= \frac{(x_{J-k+i} - \alpha_0)^{j-1}}{(j-1)\,!}. \end{aligned} \tag{7.102}$$

De (7.100), (7.101), et (7.102), nous déduisons

$$J+1 \le i \le J+k, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \left(\boldsymbol{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha_0)^{2\,k-1}}{(2\,k-1)\,!} \boldsymbol{I}_2 \right) \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{J-k+1}^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{J+k}^n \end{pmatrix}. \tag{7.103}$$

La comparaison de (7.94) et (7.103) conduit à

$$k \ge s \quad \Rightarrow \quad J+1 \le i \le J+s, \qquad \boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{U}_i^n. \tag{7.104}$$

Nous pouvons effectuer exactement la même démonstration pour les valeurs modifiées à gauche de α_0, avec la matrice $\boldsymbol{N}$. L'avancée en temps (7.18) revient alors à l'avancée en temps (5.8) en l'absence d'interface : nous retrouvons ainsi l'expression du schéma en milieu homogène. □

Inversibilité des matrices. Comme dans le cas du contact parfait et des conditions de type masse-ressort, nous montrons que les déterminants de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont non nuls pour toutes valeurs des paramètres décrivant les milieux et les interfaces.

Resultat 13 *Pour $k = 1,2,3$, les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toujours inversibles, quelles que soient les valeurs de ρ_0, ρ_1, ρ_2, c_0, c_1, c_2, $\Delta\,x$, α_0 et α_1.*

Démonstration. Le calcul du déterminant est proposé pour la matrice $\boldsymbol{M}$ et $k = 2$. Nous posons $\theta_0 = (\alpha_0 - x_J)/\Delta x$ et $\theta_1 = (\alpha_1 - x_J)/\Delta x$, de sorte que $\theta_0 \in [0,1[$, $\theta_1 \in [0,1[$, $\theta_0 < \theta_1$. Les blocs de $\boldsymbol{M}$ (7.93) sont diagonaux : après permutation des lignes et colonnes, le déterminant de $\boldsymbol{M}$ s'écrit

$$\det \boldsymbol{M} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}, \tag{7.105}$$

avec $\boldsymbol{A}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][1,1]$ et $\boldsymbol{B}[i,j] = \boldsymbol{M}[i,j][2,2]$ $(1 \le i \le 4, 1 \le j \le 4)$. Les calculs, menés avec MAPLE, conduisent à

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \frac{\Delta\,x^6}{24\,\rho_0^2\,c_1^4\,\rho_2\,c_2^4} \sum_{i=1}^{15} \eta_i\,p_i(\theta_0,\theta_1) \\ \det \boldsymbol{B} &= \frac{\Delta\,x^6}{24\,c_0^2\,\rho_1^2\,c_1^6\,\rho_2\,c_2^4} \sum_{i=1}^{15} \xi_i\,p_i(\theta_0,\theta_1) \end{aligned} \tag{7.106}$$

avec les polynômes $p_i(\theta)$

$$p_1(\theta_0,\theta_1) = 6\,\theta_0\,\theta_1 - 6\,\theta_1^2 + 9\,\theta_1 - 9\,\theta_0,$$

$$p_2(\theta_0,\theta_1) = -12\,\theta_0^4 + 24\,\theta_0^3\,\theta_1 - 12\,\theta_0^3 - 12\,\theta_0^2\,\theta_1^2 - 12\,\theta_0\,\theta_1^2 + 24\,\theta_0^2\,\theta_1 + 4\,\theta_0\,\theta_1 - 2\,\theta_1^2 - 2\,\theta_0^2$$

$$p_3(\theta_0,\theta_1) = 4\,\theta_0^2 + 4\,\theta_1^2 - 8\,\theta_0\,\theta_1$$

$$p_4(\theta_0,\theta_1) = -2\,\theta_0^4 + 12\,\theta_1^3 - 26\,\theta_1^2 + 24\,\theta_1 - 8$$

$$p_5(\theta_0,\theta_1) = -2\,\theta_0^4 - 2\,\theta_1^4 + 8\,\theta_0^3\,\theta_1 + 8\,\theta_0\,\theta_1^3 - 12\,\theta_0^2\,\theta_1^2$$

$$p_6(\theta_0,\theta_1) = 8\,\theta_0^3\,\theta_1 - 12\,\theta_0^3 + 12\,\theta_0^2\,\theta_1 - 18\,\theta_0^2 + 4\,\theta_0\,\theta_1 - 6\,\theta_0$$

$$p_7(\theta_0,\theta_1) = -4\,\theta_1^4 - 12\,\theta_0^2\,\theta_1^2 + 4\,\theta_0^3\,\theta_1 + 12\,\theta_0\,\theta_1^3 - 18\,\theta_0\,\theta_1^2 + 18\,\theta_0^2\,\theta_1 + 6\,\theta_1^3 - 6\,\theta_0^3$$

$$p_8(\theta_0,\theta_1) = 8\,\theta_0\,\theta_1^3 + 4\,\theta_1^3 - 36\,\theta_0\,\theta_1^2 - 18\,\theta_1^2 + 52\,\theta_0\,\theta_1 - 24\,\theta_0 + 26\,\theta_1 - 12$$

$$p_9(\theta_0,\theta_1) = 8\,\theta_1^4 - 8\,\theta_0\,\theta_1^3 - 36\,\theta_1^3 + 36\,\theta_0\,\theta_1^2 + 52\,\theta_1^2 - 52\,\theta_0\,\theta_1 + 24\,\theta_0 - 24\,\theta_1$$

$$p_{10}(\theta_0,\theta_1) = 12\,\theta_0^2\,\theta_1^2 - 12\,\theta_0\,\theta_1^3 - 36\,\theta_0^2\,\theta_1 + 42\,\theta_0\,\theta_1^2 - 6\,\theta_1^3 + 18\,\theta_1^2 - 40\,\theta_0\,\theta_1 + 22\,\theta_0^2 + 11\,\theta_0 - 11\,\theta_1$$

$$p_{11}(\theta_0,\theta_1) = 12\,\theta_0^2\,\theta_1^2 - 12\,\theta_0^3\,\theta_1 + 18\,\theta_0^3 - 30\,\theta_0^2\,\theta_1 + 12\,\theta_0\,\theta_1^2 + 18\,\theta_0^2 + 4\,\theta_1^2 - 22\,\theta_0\,\theta_1 + 6\,\theta_0 - 6\,\theta_1$$

$$p_{12}(\theta_0,\theta_1) = 8\,\theta_0^4 - 8\,\theta_0^3\,\theta_1 - 12\,\theta_0^2\,\theta_1 + 12\,\theta_0^3 + 4\,\theta_0^2 - 4\,\theta_0\,\theta_1$$

$$p_{13}(\theta_0,\theta_1) = -2\,\theta_0^4 - 4\,\theta_0^3 - 2\,\theta_0^2$$

$$p_{14}(\theta_0,\theta_1) = 8\,\theta_0^4 + 24\,\theta_0^2\,\theta_1^2 - 24\,\theta_0^3\,\theta_1 - 8\,\theta_0\,\theta_1^3 + 12\,\theta_0\,\theta_1^2 - 12\,\theta_0^2\,\theta_1 + 4\,\theta_0^3 - 4\,\theta_1^3$$

$$p_{15}(\theta_0,\theta_1) = -12\,\theta_0^2\,\theta_1^2 + 36\,\theta_0^2\,\theta_1 - 12\,\theta_0\,\theta_1^2 - 26\,\theta_0^2 + 36\,\theta_0\,\theta_1 - 2\,\theta_1^2 - 26\,\theta_0 + 6\,\theta_1 - 4,$$

et les coefficients

$$
\begin{array}{lll}
\eta_1 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_2^2\, c_2^4, & \eta_2 = \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^4\, \rho_2\, c_2^2, & \eta_3 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^2\, \rho_2\, c_2^2, \\
\eta_4 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, \rho_2\, c_2^4, & \eta_5 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^4\, \rho_2, & \eta_6 = \rho_0^2\, c_0^2\, c_1^2\, \rho_2\, c_2^4, \\
\eta_7 = \rho_0\, c_0^4\, c_1^2\, \rho_2^2\, c_2^2, & \eta_8 = c_0^2\, \rho_1^2\, c_1^2\, \rho_2\, c_2^4, & \eta_9 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1^2\, c_1^2\, c_2^2, \\
\eta_{10} = c_0^2\, \rho_1\, c_1^2\, \rho_2^2\, c_2^4, & \eta_{11} = \rho_0\, c_0^2\, c_1^2\, \rho_2^2\, c_2^4, & \eta_{12} = \rho_0^2\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^4\, c_2^2, \\
\eta_{13} = \rho_0\, \rho_1\, c_1^4\, \rho_2\, c_2^4, & \eta_{14} = c_0^2\, \rho_1\, c_1^4\, \rho_2^2\, c_2^2, & \eta_{15} = \rho_0\, c_0^2\, \rho_1\, c_1^2\, \rho_2\, c_2^4, \\
\xi_1 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1^2\, c_1^2\, c_2^2, & \xi_2 = \eta_2, & \xi_3 = \eta_3 \\
\xi_4 = \eta_4 & \xi_5 = \eta_5 & \xi_6 = \rho_1^2\, c_1^4\, \rho_2\, c_2^4, \\
\xi_7 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_1^2\, c_1^4, & \xi_8 = \rho_0^2\, c_0^4\, \rho_2\, c_2^4, & \xi_9 = \rho_0\, c_0^4\, \rho_2\, c_2^4, \\
\xi_{10} = \rho_0^2\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^2\, c_2^2, & \xi_{11} = \rho_0\, c_0^2\, \rho_1^2\, c_1^4\, c_2^2 & \xi_{12} = \rho_1\, c_1^4\, \rho_2^2\, c_2^4, \\
\xi_{13} = \eta_{13}, & \xi_{14} = \rho_0^2\, c_0^4\, \rho_1\, c_1^4 & \xi_{15} = \eta_{15}.
\end{array}
\tag{7.107}
$$

Les polynômes p_i et q_i vérifient $p_i(\theta_0,\theta_1) \geq 0$ et $q_i(\theta_0,\theta_1) \geq 0$ sur [0,1] pour $\theta_0 < \theta_1$ et $\theta_0 + \theta_1 \leq \Delta\, x$, et ne sont pas tous nuls simultanément. Comme $\eta_i > 0$, $\xi_i > 0$ pour $i = 1{,}15$, nous obtenons $\det \boldsymbol{A} > 0$ et $\det \boldsymbol{B} > 0$, et donc $\det \boldsymbol{M} > 0$. La même procédure est appliquée pour montrer $\det \boldsymbol{N} > 0$. Nous avons vérifié par ailleurs des propriétés analogues pour $k = 1$ et $k = 3$ □

Là encore, le calcul numérique de $\boldsymbol{M}^{-1}$ et $\boldsymbol{N}^{-1}$, réalisé en prétraitement, ne pose pas de problèmes.

7.5.4 Analyse de l'erreur locale de troncature

Les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ (7.93) et (7.98) vérifient le lemme 5. Le théorème 1 s'applique alors aux conditions de couche fine. La démonstration est la même que dans le cas du contact parfait, en remplaçant seulement α par α_0 dans les trois parties de la démonstration.

7.5.5 Cas particulier

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas où les deux interfaces appartiennent à la même couche. Le cas où un point de calcul appartient à la couche intermédiaire, soit $x_J \leq \alpha_0 < \alpha_1 < x_{J+2}$ doit être traité à part (figure 7.5).

Pour simplifier la procédure en vue d'une fine couche de forme quelconque en 2D et 3D, nous ne calculons jamais la valeur numérique $\boldsymbol{U}_{J+1}^n$. Par rapport au cas où les deux interfaces appartiennent à la même couche, les modifications portent sur le choix des points x_i où nous écrivons

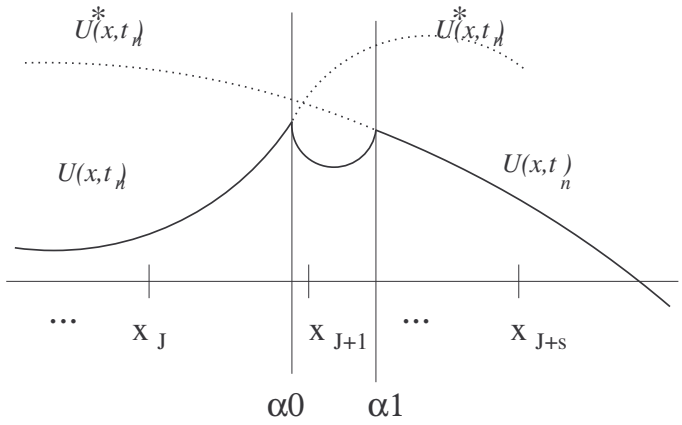

FIG. 7.5 – *Schématisation d'une composante de* $\boldsymbol{U}(x,t_n)$ *(traits pleins) et de* $\boldsymbol{U}^*(x,t_n)$ *(pointillés) dans un milieu tricouche, les deux interfaces appartenant à deux couches différentes.*

les développements de Taylor de $\boldsymbol{U}(x_i,t_n)$. Au lieu de (7.89), on écrit

$$
\begin{aligned}
&J-k+1 \le i \le J, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha_0)^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha_0^-,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}),\\
&J+2 \le i \le J+1+k, \quad \boldsymbol{U}(x_i,t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x_i-\alpha_1)^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\,x^m}\,\boldsymbol{U}(\alpha_1^+,t_n) + \boldsymbol{O}(\Delta\,x^{2\,k}).
\end{aligned}
\tag{7.108}
$$

Cela modifie les indices dans les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$: au lieu de (7.93), la matrice $\boldsymbol{M}$ s'écrit

$$
\boldsymbol{M}(i,j) = \begin{cases}
\dfrac{(x_{J-k+i}-\alpha_0)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 & \text{si } 1 \le i \le k\\[2ex]
\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J+1-k+i}-\alpha_1)^{\lambda}}{\lambda\,!}\,\frac{h^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{\lambda}(\Omega_1,\Omega_2)\,\boldsymbol{D}_{j-1}(\Omega_0,\Omega_1) & \text{si } k+1 \le i \le 2\,k.
\end{cases}
\tag{7.109}
$$

De même, au lieu de (7.98), la matrice $\boldsymbol{N}$ s'écrit

$$
\boldsymbol{N}(i,j) = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{j-1} \frac{(x_{J-k+i}-\alpha_0)^{\lambda}}{\lambda\,!}\,\frac{(-h)^{j-\lambda-1}}{(j-\lambda-1)\,!}\,\boldsymbol{D}_{\lambda}^{-1}(\Omega_0,\Omega_1)\,\boldsymbol{D}_{j-1}^{-1}(\Omega_1,\Omega_2) & \text{si } 1 \le i \le k\\[2ex]
\dfrac{(x_{J+1-k+i}-\alpha_1)^{j-1}}{(j-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_2 & \text{si } k+1 \le i \le 2\,k.
\end{cases}
\tag{7.110}
$$

Le reste de la procédure est inchangé.

7.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons développé en 1D une nouvelle méthode numérique, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM), pour prendre en compte les interfaces dans des schémas numériques classiques. La position des interfaces est quelconque par rapport au maillage régulier. Nous appliquons l'ESIM aux trois types d'interfaces vus au chapitre 5 : interface parfaite, interface imparfaite décrite par des conditions de type masse-ressort, et enfin deux interfaces parfaites proches l'une de l'autre.

Dans tous les cas, nous montrons que le couplage de l'ESIM et des schémas numériques permet de conserver l'ordre local des schémas au voisinage des interfaces. Ce résultat est une condition nécessaire pour un résultat général, à savoir : la conservation de l'ordre global de convergence des schémas sur l'ensemble du domaine. Cette dernière démonstration, nécessitant des résultats de stabilité, reste à faire. Toutefois, nous montrons numériquement au chapitre 10 que l'ordre de convergence global des schémas est effectivement conservé par couplage avec l'ESIM.

D'autre part, la modification des schémas induite par l'ESIM dépend continuement du contraste des paramètres physiques : en particulier, on retrouve l'expression des schémas en milieu homogène dans le cas limite de milieux identiques (contrairement à l'IIM). Enfin, le surcoût informatique de la méthode est négligeable par rapport au coût des schémas numériques, et l'algorithme est de programmation aisée, quel que soit le schéma numérique utilisé.

Nous abordons maintenant le couplage de l'ESIM et des schémas numériques en 2D.

Chapitre 8

Méthode d'interface 2D

Dans ce chapitre, nous étendons à la dimension deux l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM), définie au chapitre précédent. Si le principe général de la méthode est le même qu'en 1D, le cas 2D amène à des modifications importantes pour le calcul des valeurs modifiées. D'une part, la méthode doit s'accommoder d'un nombre de conditions de saut inférieur au nombre de composantes de la solution (voir chapitre 6). D'autre part, on prend en compte les conditions de milieu définies au chapitre 3. Nous présentons les algorithmes prêts à être programmés.

8.1 Objet du chapitre

Nous étendons à la dimension deux la méthode d'interface proposée au chapitre précédent, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM). L'idée de base de l'ESIM est la même qu'en 1D. A chaque pas de temps, nous construisons de part et d'autre des interfaces des prolongements suffisamment réguliers de la solution de l'autre côté de l'interface. Les valeurs de ces prolongements en des points de calcul sont appelées *valeurs modifiées*. Elles sont estimées à partir des valeurs numériques de la solution, et à partir des conditions de saut et de milieu aux interfaces. Ces valeurs modifiées sont ensuite utilisées par les schémas numériques pour l'avancée en temps aux points de calcul proches des interfaces.

Avant d'aborder les aspects techniques de la mise en œuvre, un rappel des notions vues au cours des chapitres précédents est utile.

8.2 Principe de la méthode

8.2.1 Rappels

En 2D, les interfaces sont caractérisées par des *conditions de saut* (dites "naturelles"), modélisant diverses situations physiques, et vérifiées par la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ du problème étudié. A partir de ces conditions de saut et des lois de conservation vues au chapitre 3, nous avons calculé

au chapitre 6 les conditions de saut vérifiées par les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$, jusqu'à l'ordre k de dérivation. Nous nous sommes intéressés à quatre types d'interfaces : fluide-fluide, solide-solide en contact parfait ou imparfait, et fluide-solide. En désignant par $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ le vecteur formé de $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et de ses dérivées spatiales successives jusqu'à l'ordre k, le but recherché était alors d'écrire explicitement la valeur limite de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, d'un côté de l'interface, en fonction de la valeur limite de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, de l'autre côté de l'interface.

En 2D (et 3D), il s'avère que le nombre de conditions de saut vérifiées par $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ est inférieur au nombre de composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$, ce qui interdit momentanément d'atteindre l'objectif visé. Pour résoudre ce problème, deux solutions sont possibles : soit on adjoint aux conditions de saut naturelles des *conditions de saut supplémentaires* (dont on montre qu'elles sont vérifiées par la solution exacte, et qu'elles sont indépendantes des conditions de saut naturelles), soit on utilise uniquement les conditions de saut naturelles et on résoud un système d'équations sous-déterminé.

Nous avons étudié les deux possibilités au chapitre 6. La première, classique, présente un inconvénient majeur : les conditions de saut supplémentaires n'existent pas toujours. En particulier, nous montrons au chapitre 9 qu'elles n'existent pas dans le cas de l'interface fluide-solide. Loin d'être un cas pathologique isolé, il semble que ce déficit de conditions de saut supplémentaires soit une propriété générale : d'autres types d'interfaces (non présentées dans cette étude, comme l'interface solide-solide glissant sans frottement) souffrent de la même carence.

Même dans le cas où on dispose de conditions de saut supplémentaires (et que l'on souhaite les utiliser), il manque encore des équations pour relier, de manière univoque, les valeurs limites de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ des deux côtés de l'interface considérée. Pour fermer les systèmes, nous utilisons alors des *conditions de milieu*, calculées au chapitre 3. Celles-ci désignent des équations reliant entre elles les composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$ en tout point des domaines, en particulier au niveau des interfaces. Dans l'autre cas, où on ne dispose pas de conditions de saut supplémentaires (ou que l'on ne souhaite pas les utiliser pour la raison sus-évoquée), ces conditions de milieu sont aussi utilisées avec profit : la résolution des systèmes sous-déterminés est d'autant meilleure que le nombre d'équations manquantes est faible. Ainsi, quel que soit le cas considéré, nous utilisons ces conditions de milieu. A la différence de l'IIM, nous imposons qu'elles soient rigoureusement vérifiées des deux côtés de l'interface.

Nous renvoyons au chapitre 6, section 6.6, pour un récapitulatif du nombre de toutes ces conditions : n_c (conditions de saut naturelles), n_s (conditions de saut supplémentaires), n_m (conditions de milieu), n_i (nombre de composantes de $\boldsymbol{U_k}(x,y,t)$), n_e (nombre total de conditions), en fonction de k (l'ordre de dérivation maximal utilisé). Rappelons seulement que d est le nombre de composantes de la solution : $d = 3$ pour un fluide, $d = 5$ pour un solide.

8.2.2 Notations

Ces idées étant rappelées, nous pouvons aborder la méthode d'interface proprement dite. Précisons les notations utilisées.

Soit une interface Γ séparant deux milieux Ω_0 et Ω_1 (figure 8.1). Nous supposons cette interface décrite par une équation cartésienne $F(x,y) = 0$; F est définie de sorte que $F(x,y) \leq 0$ si $M(x,y) \in \Omega_0$, et $F(x,y) > 0$ si $M(x,y) \in \Omega_1$.

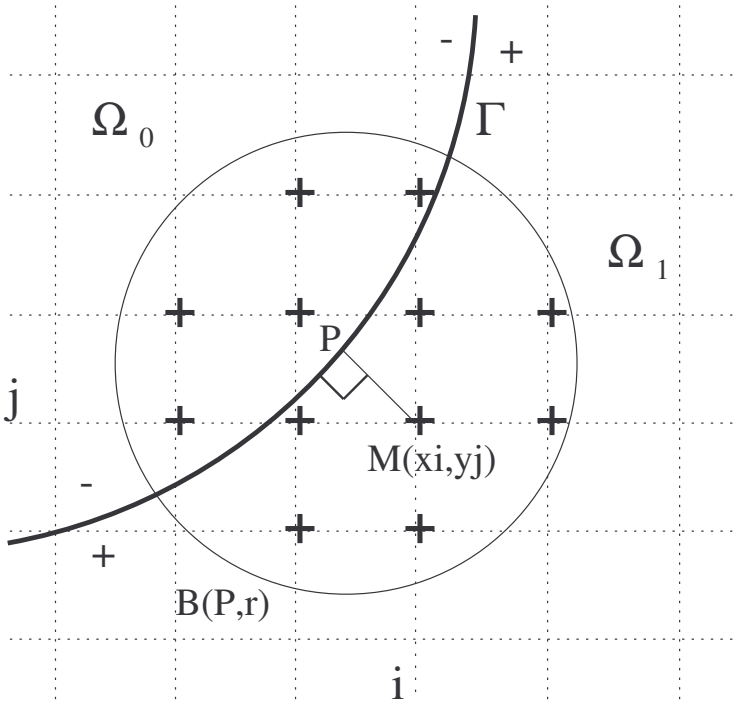

FIG. 8.1 – *Interface 2D, point irrégulier $M(x_i,y_j)$, point de projection orthogonale P.*

Etant donné un schéma numérique, nous appelons *points irréguliers* les points pour lesquels l'avancée en temps du schéma utilise des valeurs numériques en des points de l'autre côté de Γ. L'interface étant de forme quelconque, nous ne disposons pas d'une formule explicite précisant les points irréguliers en fonction du schéma, comme (7.2) en 1D. Par contre, on peut caractériser de façon simple le statut d'un point $M(x_i,y_j)$ (à savoir s'il est régulier ou pas) suivant le schéma utilisé. Pour cela, nous rappelons que les points utilisés par les schémas numériques pour l'avancée en temps sont décrits par les indices relatifs (i_l,j_l) $(0 \leq l \leq s-1$, où s est le nombre de points utilisé par le schéma), définis en (4.44). On définit alors la variable booléenne `régulier`, et on applique l'algorithme suivant

(8.1)

$l := 0$;

`régulier:=vrai`;

répéter

si $F(x_i,y_j) \times F(x_{i_l},y_{j_l}) \geq 0$, alors $l := l+1$

sinon `régulier:=faux;`

jusqu'à $l = s-1$ ou `régulier = faux`.

Si `régulier` est faux, le point $M(x_i,y_j)$ est irrégulier. Pour la suite de l'exposé et sans perte de généralité, nous isolons un tel point irrégulier $M(x_i,y_j)$ appartenant à Ω_1 (figure 8.1). Les

schémas numériques utilisés au cours de cette étude sont centrés en espace : si le point $M(x_i,y_j)$ est irrégulier parcequ'il utilise la valeur numérique en un point (x_{i_l},y_{j_l}) de l'autre côté de l'interface, le point (x_{i_l},y_{j_l}) est lui aussi irrégulier.

8.2.3 Idée générale

Le principe de base de l'ESIM est le même qu'en 1D, à des détails techniques près. Quels que soit le schéma numérique utilisé, l'ESIM réalise deux types d'opérations à chaque pas de temps : la construction de *valeurs modifiées* de la solution en chaque point irrégulier, puis l'utilisation de ces valeurs modifiées par le schéma numérique, en d'autres points irréguliers.

A l'instant t_n, on commence par définir, de chaque côté de l'interface, un prolongement suffisamment régulier $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ de l'autre côté de l'interface. Considérons un tel prolongement $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ (sur Ω_1) de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ (sur Ω_0). Ce prolongement, appelé *solution modifiée*, est défini de sorte que la fonction

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(x,y,t_n) = \begin{cases} \boldsymbol{U}(x,y,t_n) & \text{si } F(x,y) < 0 \\ \\ \boldsymbol{U}^*(x,y,t_n) & \text{si } F(x,y) \geq 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

soit suffisamment régulière en un point P de l'interface Γ. En particulier, nous définissons $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ de sorte que les dérivées spatiales de $\tilde{\boldsymbol{U}}(x,y,t_n)$ jusqu'à l'ordre k soient continues en P. La valeur de l'entier k est précisée ultérieurement ; k dépend de l'ordre du schéma numérique, mais ne dépend pas de l'expression de ce schéma. A la différence du cas 1D, le choix du *point de projection* P n'est pas unique : comme l'IIM, nous considérons pour cela la projection orthogonale $P(x_P,y_P)$ de $M(x_i,y_j)$ sur Γ (figure 8.1). Pour que la fonction (8.2) soit suffisamment régulière en P, on doit vérifier, pour $0 \leq \alpha \leq k$ et $0 \leq \beta \leq \alpha$,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha-\beta}\,\partial y^\beta}\boldsymbol{U}^*(P^+,t_n) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha-\beta}\,\partial y^\beta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n). \tag{8.3}$$

Une façon d'imposer (8.3) consiste à écrire $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ sous forme d'un polynôme en x et y de degré k

$$\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n) = \sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \\ \beta\end{pmatrix}\frac{(x-x_P)^{\alpha-\beta}\,(y-y_P)^\beta}{\alpha\,!}\,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha-\beta}\partial y^\beta}\boldsymbol{U}(P^-,t_n), \tag{8.4}$$

où les coefficients $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ sont les coefficients de la formule du binôme.

Pour écrire la solution modifiée (8.4), il faut connaître en P^- les valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ et de ses dérivées spatiales jusqu'à l'ordre k. La démarche consiste alors à approcher ces valeurs limites à partir des valeurs numériques $\boldsymbol{U}^n_{i_\theta,j_\theta}$ en des points de calcul voisins de $M(x_i,y_j)$, et à partir des conditions de saut et des conditions de milieu rappelées précédemment. Les indices (i_θ,j_θ) sont définis plus loin. L'estimation numérique de $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ au point $M(x_i,y_j)$ est alors appelée *valeur modifiée* et est notée $\boldsymbol{U}^*_{i,j}$. On calcule de la même façon les valeurs modifiées en

tout point irrégulier le long de l'interface, considérant chaque fois un nouveau point de projection P.

Chaque valeur modifiée est alors utilisée pour l'avancée en temps du schéma en des points irréguliers de l'autre côté de l'interface. Plus précisément, considérons un point irrégulier d'un côté de l'interface. En ce point, le schémas utilise les valeurs numériques aux points de calcul du même côté de l'interface que lui ; par contre, le schéma utilise les valeurs modifiées aux points de calcul de l'autre côté de l'interface que lui.

8.3 Contact parfait

8.3.1 Introduction

Nous examinons ici deux cas de contact parfait traités au chapitre 6 : interface fluide-fluide, interface solide-solide en contact parfait. Dans ces deux cas, le nombre d de composantes de la solution $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ est le même des deux côtés de l'interface (à la différence du cas fluide-solide). De plus, les conditions de saut s'expriment de la même manière des deux côtés de l'interface (à la différence de l'interface imparfaite entre deux solides, décrite par des conditions de type masse-ressort).

Pour calculer la valeur modifiée $\boldsymbol{U}^*_{i,j}$, nous considérons tout d'abord la projection orthogonale $P(x_P,y_P)$ de $M(x_i,y_j)$ sur Γ. Nous cherchons alors à estimer les valeurs limites en P^- de $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ et de ses dérivées spatiales, utilisées en (8.4). Pour cela, nous considérons un ensemble de points de calcul voisins de $M(x_i,y_j)$. Au lieu d'utiliser un "stencil" constant (c'est-à-dire de toujours considérer le même nombre de points et les mêmes positions relatives de ces points par rapport au point $M(x_i,y_j)$ considéré), nous utilisons une "patate" de points voisins, a priori variable. Cette technique, différente de l'IIM, a pour avantage d'éviter l'anisotropie numérique de la méthode d'interface (voir chapitre 2, figure 2.2). Elle conduit, de fait, à une estimation au sens des moindres carrés des valeurs limites de $\boldsymbol{U}(x,y,t_n)$ et de ses dérivées spatiales en P^-. Cette estimation est précisée plus loin dans le texte.

Précisons ces idées. Nous définissons l'ensemble $\mathcal{B}(P,r)$ des points de calcul $(x_{i_\theta},y_{j_\theta})$ situés à une distance de P inférieure ou égale à r, soit

$$\mathcal{B}(P,r) = \left\{ M(x_{i_\theta},y_{j_\theta}), / \sqrt{(x_{i_\theta} - x_P)^2 + (y_{j_\theta} - y_P)^2} \leq r \right\}, \tag{8.5}$$

de cardinal q (ex : $q = 12$ points en figure 8.1). Les entiers i_θ et j_θ s'écrivent, pour $1 \leq \theta \leq q$,

$$\begin{aligned} i_\theta &= i + r_1(\theta) \\ j_\theta &= j + r_2(\theta). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Les indices relatifs $r_1(\theta)$ et $r_2(\theta)$ du point $(x_{i_\theta},y_{j_\theta})$ par rapport au point irrégulier $M(x_i,y_j)$ dépendent de la géométrie de l'interface, et de sa position par rapport au maillage. La valeur du rayon r intervenant dans (8.5) est discutée ultérieurement. Nous mettons le lecteur en garde contre une confusion entre les points (x_{i_l},y_{j_l}) $(0 \leq l \leq s-1)$ utilisés par le schéma pour l'avancée

en temps, et les points $(x_{i_\theta},y_{j_\theta})$ $(1 \leq \theta \leq q)$, appartenant au cercle de centre P et de rayon r, et utilisés par la méthode d'interface.

Pour écrire de façon condensée la solution modifiée $\boldsymbol{U}^*(x,y,t_n)$ et les développements de Taylor d'ordre k de $\boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)$ au point P, nous définissons la matrice $\boldsymbol{\Psi}_k$, de taille $d \times n_i$: les composantes de cette matrice en un point de coordonnées (x,y) s'écrivent, pour $0 \leq \alpha \leq k$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, $1 \leq \gamma \leq d$,

$$\boldsymbol{\Psi}_k(x,y)\left[\gamma,\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,d+\beta\,d+\gamma\right]=\begin{pmatrix}\alpha\\ \\ \beta\end{pmatrix}\frac{(x_{i_\theta}-x_P)^{\alpha-\beta}\,(y_{j_\theta}-y_P)^{\beta}}{\alpha\,!}. \tag{8.7}$$

La solution modifiée (8.4) en $M(x_i,y_j)$ s'écrit alors

$$\boldsymbol{U}^*(x_i,y_j,t_n)=\boldsymbol{\Psi}_k(x_i,y_j)\,\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n). \tag{8.8}$$

Les développements de Taylor d'ordre k en $P^\pm$ de $\boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)$ s'écrivent, pour $1 \leq \theta \leq q$,

$$\begin{aligned} &F\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta}) \leq 0, \qquad \boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)=\boldsymbol{\Psi}_k\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta})\;\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{k+1}),\\ &F\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta}) > 0, \qquad \boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)=\boldsymbol{\Psi}_k\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta})\;\boldsymbol{U_k}(P^+,t_n)+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{k+1}). \end{aligned} \tag{8.9}$$

A partir de (8.9), des conditions de saut et des conditions de milieu, nous estimons maintenant les valeurs limites de $\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n)$ intervenant dans (8.8).

8.3.2 Calcul des valeurs modifiées

Conditions de saut et conditions de milieu. Pour les points de $\mathcal{B}$ appartenant à Ω_1, on applique les conditions de saut (6.134) dans les développements de Taylor (8.9). Pour $1 \leq \theta \leq q$, on écrit ainsi

$$F(x_{i_\theta},y_{j_\theta}) > 0, \qquad \boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)=\boldsymbol{\Psi}_k\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta})\;\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n)\\ \\ \boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix}+\boldsymbol{O}(\Delta\,x^{k+1}). \tag{8.10}$$

La matrice $\boldsymbol{L}$, de taille $n_i \times (2\,n_i - n_e)$, dépend du type d'interface étudié. Elle est construite au chapitre 6. $\boldsymbol{\Lambda}$ est un vecteur à $n_i - n_e$ composantes.

Au chapitre 6, nous appliquons les conditions de milieu en P^+ pour exprimer les conditions de saut. Elles sont donc prises en compte dans la matrice $\boldsymbol{L}$ de (8.10). Nous appliquons maintenant les conditions de milieu (6.122) en P^-, soit

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

où $\boldsymbol{F}$ est une matrice $n_m \times n_i$. Finalement, on rassemble les développements de Taylor aux points de $\mathcal{B}$ appartenant à Ω_0 (première relation de (8.9)), les développements de Taylor aux points de

$\mathcal{B}$ appartenant à Ω_1 (8.10), et les conditions de milieu (8.11), en écrivant

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{i_1},y_{j_1},t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{i_q},y_{j_q},t_n) \\ \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_k}(P^-,t_n) \\ \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{k+1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{O}(\Delta\, x^{k+1}) \\ \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{8.12}$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice $(d\,q + n_m) \times (2\,n_i - n_e)$, de composantes non nulles

$$\begin{aligned} &\bullet\, 1 \leq \theta \leq q, \quad 1 \leq \alpha \leq d, \quad 1 \leq \beta \leq n_i, \\ &\Rightarrow \qquad \boldsymbol{M}\,[(\theta-1)\;d + \alpha,\beta] = \begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_k\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta})\,[\alpha,\beta] & \text{si } F(x_{i_\theta},y_{j_\theta}) \leq 0, \\ \\ (\boldsymbol{\Psi}_k\,(x_{i_\theta},y_{j_\theta})\;\boldsymbol{H})\,[\alpha,\beta] & \text{si } F(x_{i_\theta},y_{j_\theta}) > 0; \end{cases} \\ &\bullet\, 1 \leq \alpha \leq n_m, \quad 1 \leq \beta \leq n_i, \\ &\Rightarrow \qquad \boldsymbol{M}\,[d\,q + \alpha,\beta] = \boldsymbol{F}(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Le rayon r du cercle de centre P (figure 8.1) est pris suffisamment grand pour que l'inégalité

$$q \geq E\left(\frac{2\,n_i - n_e - n_m}{d}\right) \tag{8.14}$$

soit vérifiée, de sorte que le système (8.12) est sur-déterminé ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

Résolution au sens des moindres carrés. Pour inverser le système (8.12), plusieurs techniques sont envisagées. Dans la plupart des cas étudiés, le système (8.12) est bien conditionné. On peut alors appliquer une résolution par équations normales : l'inverse $\boldsymbol{M}^{-1}$ de $\boldsymbol{M}$ est alors définie par

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \left({}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}\right)^{-1}\,{}^T\boldsymbol{M}, \tag{8.15}$$

avec $\left({}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}\right)^{-1}$ calculé par décomposition LU.

Dans des cas de contrastes très importants des paramètres physiques (ex : eau/air), le système (8.12) est parfois mal conditionné. On inverse alors ce système par décomposition SVD et régularisation par troncature. Plus précisément, on décompose $\boldsymbol{M}$ en valeurs singulières

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{X}_M\;\boldsymbol{Y}_M\;{}^T\boldsymbol{Z}_M, \tag{8.16}$$

avec

- $\boldsymbol{X}_M$ matrice $(d\,q + n_m) \times (2\,n_i - n_e)$ orthonormale,
- $\boldsymbol{Y}_M$ matrice diagonale $(2\,n_i - n_e) \times (2\,n_i - n_e)$,
- $\boldsymbol{Z}_M$ matrice $(2\,n_i - n_e) \times (2\,n_i - n_e)$ orthonormale.

On régularise la matrice $\boldsymbol{Y}_M$ en une matrice diagonale de même taille $\tilde{\boldsymbol{Y}}_M$, en éliminant les valeurs singulières en dessous d'un seuil ε. Pour $1 \leq \beta \leq 2\,n_i - n_e$, on écrit

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}_M\,[\beta,\beta] = \begin{cases} \boldsymbol{Y}_M\,[\beta,\beta] & \text{si } |\boldsymbol{Y}_M\,[\beta,\beta]| \geq \varepsilon \left(\max\limits_{1\leq\alpha\leq(2\,n_i-n_e)} |\boldsymbol{Y}_M\,[\alpha,\alpha]| \right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8.17}$$

Nous ne disposons pas d'une expression théorique optimale pour le choix de ε. En pratique, nous choisissons $\varepsilon = 10^{-6}$ [65]. Nous notons alors $\tilde{\boldsymbol{Y}}_M^{-1}$ la matrice diagonale dont le i-ième terme est $1/\tilde{\boldsymbol{Y}}_M\,[i,i]$ si $\tilde{\boldsymbol{Y}}_M(i,i) \neq 0$, 0 autrement. L'inverse $\boldsymbol{M}^{-1}$ de $\boldsymbol{M}$ est alors définie par

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{Z}_M\ \tilde{\boldsymbol{Y}}_M^{-1}\ {}^T\boldsymbol{X}_M. \tag{8.18}$$

Quelle que soit la technique d'inversion, la matrice $\boldsymbol{M}^{-1}$ est une matrice $(2\,n_i - n_e) \times (d\,q + n_m)$.

Valeur modifiée. Dans (8.12), on remplace les valeurs exactes $\boldsymbol{U}(x_{i_\theta},y_{j_\theta},t_n)$ par les valeurs numériques $\boldsymbol{U}^n_{i_\theta,j_\theta}$ $(1 \leq \theta \leq q)$, et on élimine les restes de Taylor. A partir de la matrice $\boldsymbol{M}^{-1}$, calculée par valeurs normales (8.15) ou par décomposition SVD (8.18), nous obtenons alors des estimations numériques de $\boldsymbol{U_k}(P^-,t_n)$ et $\boldsymbol{\Lambda}$. Ces estimations, notées symboliquement $\boldsymbol{U_k}^-$ et $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$, s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U_k}^- \\ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n_{i_1,j_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{i_q,j_q} \end{pmatrix}, \tag{8.19}$$

et sont minimales au sens des moindres carrés. La valeur de $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$ ne nous intéresse pas pour l'estimation de $\boldsymbol{U}^*(x_i,y_j,t_n)$: nous définissons la matrice $\boldsymbol{\Pi}$, à $n_i \times (2\,n_i - n_e)$ composantes

$$\boldsymbol{\Pi}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{8.20}$$

de sorte que

$$\boldsymbol{U_k}^- = \boldsymbol{\Pi} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_k}^- \\ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n_{i_1,j_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{i_q,j_q} \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

Reportée dans la solution modifiée (8.8), l'estimation (8.21) conduit finalement à la valeur explicite de la valeur modifiée $\boldsymbol{U}^*_{i,j}$

$$\boxed{\boldsymbol{U}^*_{i,j} = \boldsymbol{\Psi}_k(x_i,y_j)\,\boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{M}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n_{i_1,j_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{i_q,j_q} \end{pmatrix}.} \tag{8.22}$$

Nous suivons une procédure similaire pour calculer les valeurs modifiées en tout point irrégulier appartenant à Ω_0 ou à Ω_1.

8.3.3 Utilisation des valeurs modifiées

Comme en 1D, le principe de l'ESIM consiste à insérer dans les schémas numériques les valeurs modifiées, calculées en section précédente, pour l'avancée en temps aux points irréguliers. Pour préciser cette idée, on s'intéresse à l'avancée en temps au point irrégulier $M(x_i,y_j)$. On définit alors la variable intermédiaire $\tilde{\boldsymbol{U}}_{i_l,j_l}$ $(0 \leq l \leq s-1)$, égale à la valeur numérique $\boldsymbol{U}^n_{i_l,j_l}$ ou à la valeur modifiée $\boldsymbol{U}^*_{i_l,j_l}$, selon que le point (x_{i_l},y_{j_l}) est du même côté ou pas de l'interface que le point $M(x_i,y_j)$. On formalise cette idée en écrivant, pour $0 \leq l \leq s-1$,

$$\begin{aligned} F(x_i,y_j) \times F(x_{i_l},y_{j_l}) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{U}}_{i_l,j_l} = \boldsymbol{U}^*_{i_l,j_l}, \\ F(x_i,y_j) \times F(x_{i_l},y_{j_l}) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{U}}_{i_l,j_l} = \boldsymbol{U}^n_{i_l,j_l}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Au lieu de (4.45), l'avancée en temps au point irrégulier (x_i,y_j) s'écrit alors

$$\boxed{\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} = \boldsymbol{U}^n_{i,j} + \boldsymbol{H}_{(i,j)}\left(\tilde{\boldsymbol{U}}_{i_1,j_1},\ldots,\tilde{\boldsymbol{U}}_{i_s,j_s}\right),} \tag{8.24}$$

où $\boldsymbol{H}_{(i,j)}$ désigne l'opérateur discret $\boldsymbol{H}$ du schéma choisi, utilisant les paramètres physiques au point $M(x_i,y_j)$. En suivant le même modèle, l'application de l'ESIM à des schémas multistages comme WENO 5 est immédiate.

La position de l'interface ne variant pas avec le temps, la matrice $\boldsymbol{M}^{-1}$ est calculée une seule fois, durant un prétraitement, puis stockée. A chaque pas de temps, le calcul d'une valeur modifiée revient à un simple produit matrice-vecteur (8.22). Le coût supplémentaire engendré par l'ESIM en termes de temps de calcul et de mémoire informatique est négligeable, en 2D, devant le coût des schémas numériques.

8.3.4 Analyse de l'erreur locale de troncature

Nous terminons actuellement l'analyse de l'ordre local des schémas numériques couplés à l'ESIM. Cette analyse, menée de façon comparable à celle proposée en 1D au chapitre 7, conduit à la valeur minimale de k telle que l'erreur locale de troncature aux points irréguliers soit d'ordre r (soit l'ordre de convergence des schémas en milieu homogène). Cette analyse doit s'appliquer à tout type de schéma. A titre préliminaire (et non démontré ici), nous avons obtenu le résultat partiel suivant.

Resultat 14 *Pour $k \geq 2$, le couplage du schéma de Lax-Wendroff et de l'ESIM maintient une erreur locale de troncature d'ordre 2 aux points irréguliers.*

La valeur $k \geq 2$ est la même que celle obtenue en 1D pour le schéma de Lax-Wendroff et pour le schéma de volumes finis avec limiteur de flux. En pratique, nous utilisons $k = 2$ pour les expériences numériques du chapitre 10, tant pour le schéma de Lax-Wendroff que pour le schéma de volumes finis.

D'autre part, nous ne proposons pas de théorie de stabilité. Par contre, nous avons observé une robustesse importante des schémas couplés à l'ESIM, même pour des contrastes très importants des paramètres physiques (comme des rapports d'impédance de 1 à 500) pour lesquels les schémas sans méthode d'interface sont instables.

8.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons développé en 2D une méthode numérique, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM). Cette méthode permet de prendre en compte les interfaces dans des schémas numériques classiques. L'ESIM impose à la solution numérique de vérifier exactement les conditions de saut vérifiées par la solution exacte, en des points de l'interface (appelés "points de projection"). L'interface est "immergée" dans le maillage, au sens où elle ne coïncide a priori pas avec le maillage régulier du domaine étudié. Les conditions de saut dépendant de la géométrie locale de l'interface (voir chapitre 6), la méthode permet de prendre en compte les détails géométriques de l'interface aux points de projection.

L'analyse de l'ESIM en 2D est encore très rudimentaire. Par contre, l'algorithme proposé dans ce chapitre est opérationnel, et a été validé lors d'expériences numériques. Pour préparer ces exemples numériques du chapitre 10, aussi bien dans des cas 1D que 2D, nous abordons le calcul de solutions analytiques de référence.

Chapitre 9

Solutions analytiques

Dans ce chapitre, nous calculons les solutions analytiques dans les six configurations étudiées numériquement au chapitre 10 : une interface parfaite, une interface imparfaite, et deux interfaces parfaites en 1D ; une interface parfaite fluide-fluide, une interface parfaite solide-solide, et une interface parfaite fluide-solide en 2D. Parmi ces solutions analytiques, utilisées aux chapitres 6, 8 et 10, certaines ne sont pas, à notre connaissance, classiques. Dans tous les cas, les résultats sont directement programmables.

9.1 Objet du chapitre

9.1.1 Présentation générale

Nous calculons ici les solutions analytiques correspondant aux exemples numériques traités précédemment. Cette présentation a plusieurs intérêts. Tout d'abord, les solutions analytiques servent à valider les mesures de convergence menées au chapitre 10 ; en 2D, elles sont en plus nécessaires pour l'initialisation des calculs, ainsi que le traitement des conditions au bord.

D'autre part, certaines solutions présentées ici ne sont pas classiques dans le domaine temporel. Nous pensons en particulier au calcul des ondes réfléchies et transmises par une interface imparfaite en 1D. Le cas de l'interface fluide-fluide en 2D est lui-aussi spécialement intéressant ; si la solution analytique est triviale à calculer en-dessous de l'angle critique, il n'en est pas de même au-dessus de l'angle critique. Les résultats heurtent même le sens commun : les ondes réfléchies et transmises n'ont pas la même forme que l'onde incidente ; une onde incidente à support borné dans la direction de propagation conduit à des ondes réfléchies et transmises à support infini. A notre connaissance, le calcul a été mené seulement pour la pression acoustique [12] : nous étendons ici le calcul aux composantes de la vitesse acoustique.

Enfin, l'écriture des solutions analytiques est nécessaire pour la discussion, menée au chapitre 6, portant sur les conditions de saut supplémentaires en 2D. En particulier, en étudiant les ondes planes incidente, réfléchie et transmise par une interface plane séparant un fluide et un solide, nous montrons que des conditions de saut supplémentaires ne peuvent pas exister pour ce type d'interface.

9.1.2 Notations

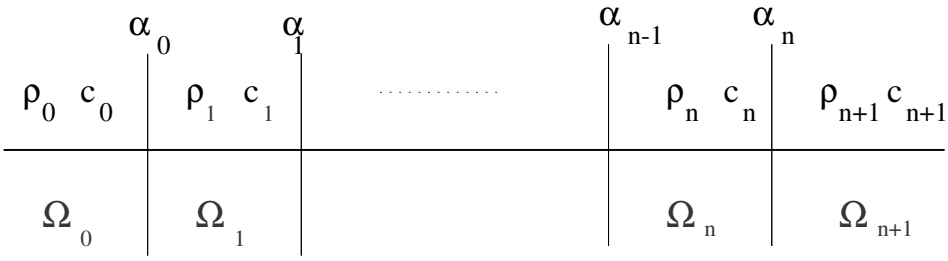

FIG. 9.1 – *Milieu multicouche 1D.*

Avant d'aborder les différentes configurations en 1D, nous considérons le cas général d'un milieu multicouche avec $n+1$ interfaces et des propriétés physiques constantes par morceaux (figure 9.1). Dans le milieu Ω_i de masse volumique ρ_i et de célérité des ondes de compression c_i, les potentiels, déplacements, vitesses et contraintes des ondes élastiques s'écrivent respectivement

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i(x,t) = f_i\left(t - \frac{x}{c_i}\right) + g_i\left(t + \frac{x}{c_i}\right),\\
&u_i(x,t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -\frac{1}{c_i}\left(f_i^{'}\left(t - \frac{x}{c_i}\right) - g_i^{'}\left(t + \frac{x}{c_i}\right)\right),\\
&v_i(x,t) = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t\, \partial x} = -\frac{1}{c_i}\left(f_i^{''}\left(t - \frac{x}{c_i}\right) - g_i^{''}\left(t + \frac{x}{c_i}\right)\right),\\
&\sigma_i(x,t) = \rho_i\, c_i^2\, \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = \rho_i\left(f_i^{''}\left(t - \frac{x}{c_i}\right) + g_i^{''}\left(t + \frac{x}{c_i}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Les fonctions f_i et g_i (supposées suffisamment régulières), ainsi que leurs dérivées, décrivent respectivement des ondes "montantes" (se propageant suivant les x croissants) et "descendantes" (se propageant suivant les x décroissants). Il n'y a pas d'onde se propageant vers les x décroissants dans le milieu Ω_{n+1} : la fonction g_{n+1} est alors nulle. Une fois ces fonctions calculées en fonction de l'onde incidente $f_0^{''}$ (ce qui fait l'objet des prochaines sections), on déduit de (9.1) l'expression de la solution exacte en tout point du domaine. Soit

$$
x \in \Omega_i, \quad \boldsymbol{U}(x,t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_i} \\ \\ \rho_i \end{pmatrix} f_i^{''}\left(t - \frac{x}{c_i}\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c_i} \\ \\ \rho_i \end{pmatrix} g_i^{''}\left(t + \frac{x}{c_i}\right). \tag{9.2}
$$

9.2 Interface parfaite 1D

9.2.1 Introduction

Nous traitons tout d'abord le cas d'une interface parfaite entre deux solides 1D. Ce cas a été examiné au chapitre 5 (figure 7.1). Par rapport à la figure 9.1, on a $n = 0$ et on note $\alpha = \alpha_0$.

Comme il n'y a pas d'onde descendante dans le milieu Ω_1, on a $g_1'' = 0$. La fonction f_0 décrivant l'onde incidente, ainsi que ses dérivées, sont supposées connues : nous cherchons ici à exprimer g_0'' et f_1'' en fonction de f_0''.

9.2.2 Ondes réfléchies et transmises

Les conditions de saut (5.5) conduisent au système

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_0}\, g_0''\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) + \frac{1}{c_1}\, f_1''\left(t-\frac{\alpha}{c_1}\right) = \frac{1}{c_0}\, f_0''\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right), \\ &\rho_0\, g_0''\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) - \rho_1\, f_1''\left(t-\frac{\alpha}{c_1}\right) = -\rho_0\, f_0''\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right). \end{aligned} \tag{9.3}$$

La résolution de (9.3) donne

$$g_0''\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) = R_{0,1}\, f_0''\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right), \qquad f_1''\left(t-\frac{\alpha}{c_1}\right) = T_{0,1}\, f_0''\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right), \tag{9.4}$$

avec les coefficients de réflexion et de transmission

$$R_{0,1} = \frac{\rho_1\, c_1 - \rho_0\, c_0}{\rho_0\, c_0 + \rho_1\, c_1}, \qquad T_{0,1} = 2\,\frac{\rho_0\, c_1}{\rho_0\, c_0 + \rho_1\, c_1}. \tag{9.5}$$

L'expression de $\boldsymbol{U}(x,t) = {}^T(v,\sigma)$ découle alors de (9.1) et (9.4)

$$\boxed{\begin{aligned} x \le \alpha \quad \boldsymbol{U}(x,t) &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix} f_0''\left(t-\frac{x}{c_0}\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix} R_{0,1}\, f_0''\left(t+\frac{x}{c_0}-\frac{2\,\alpha}{c_0}\right), \\ x > \alpha \quad \boldsymbol{U}(x,t) &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_1} \\ \rho_1 \end{pmatrix} T_{0,1}\, f_0''\left(t-\frac{x}{c_1}+\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_0}\right)\alpha\right). \end{aligned}} \tag{9.6}$$

9.3 Interface imparfaite 1D

9.3.1 Introduction

Nous traitons maintenant le cas d'une interface imparfaite, décrite par des conditions de type masse-ressort (chapitre 5, section 5.3). Ces conditions introduisent une dépendance fréquentielle des coefficients de réflexion et de transmission, ce qui alourdit le calcul.

Dans un premier temps, nous considérons le cas général d'une fonction f_0 quelconque décrivant l'onde incidente. Les expressions des ondes réfléchies et transmises reviennent alors à calculer la convolution de f_0'' avec les transformées de Fourier inverses des coefficients de réflexion et de

transmission (voir (9.15)). Ce calcul nécessite ainsi, in fine, de mettre en oeuvre des FFT et des produits de convolutions numériques.

Cependant, on peut mener à leur terme les calculs analytiques en considérant une forme d'onde incidente particulière. On considère ainsi le cas de sinusoïdes tronquées, cas qui est utilisé lors de nos expériences numériques.

9.3.2 Ondes réfléchies et transmises

Calcul général. Les conditions de type masse-ressort (5.11) appliquées en $x = \alpha$ conduisent au système

(9.7)
$$\frac{K}{\rho_0\, c_0}\, g_0^{'}\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) + g_0^{''}\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) + \frac{K}{\rho_0\, c_1}\, f_1^{'}\left(t-\frac{\alpha}{c_1}\right) = \frac{K}{\rho_0\, c_0}\, f_0^{'}\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right) - f_0^{''}\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right),$$
$$\rho_0\, g_0^{''}\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) + \frac{M}{c_0}\, g_0^{'''}\left(t+\frac{\alpha}{c_0}\right) - \rho_1\, f_1^{''}\left(t-\frac{\alpha}{c_1}\right) = -\rho_0\, f_0^{''}\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right) + \frac{M}{c_0}\, f_0^{'''}\left(t-\frac{\alpha}{c_0}\right).$$

A la différence du cas du contact parfait (9.3), les potentiels des ondes réfléchie et transmise ne peuvent pas s'exprimer directement en fonction du potentiel de l'onde incidente : il y a en effet une combinaison de dérivées premières, secondes, et troisièmes dans les membres de gauche de (9.7). La détermination de $g_0^{''}$ et $f_1^{''}$ repose alors sur une transformée de Fourier de (9.7). Rappelons que les transformées de Fourier directe et inverse de fonctions $s(t)$ et $\hat{s}(\omega)$ sont notées

(9.8)
$$\mathcal{F}\left(s(t)\right) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, d\, t = \hat{s}(\omega),$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{s}(\omega)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\,\omega,$$

et $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés classiques

(9.9)
$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} s(t)\right) = (-i\,\omega)^n\, \mathcal{F}\left(s(t)\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$\mathcal{F}\left(s(t-\tau)\right) = e^{-i\,\omega\,\tau}\, \mathcal{F}\left(s(t)\right).$$

Après transformée de Fourier, le système (9.7) s'écrit

(9.10)
$$\left(\frac{K}{\rho_0\, c_0} - i\,\omega\right) e^{i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_0}}\, \hat{g}_0^{'}(\omega) + \frac{K}{\rho_0\, c_1}\, e^{-i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_1}}\, \hat{f}_1^{'}(\omega) = \left(\frac{K}{\rho_0\, c_0} + i\,\omega\right) e^{-i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_0}}\, \hat{f}_0^{'}(\omega)$$
$$\left(\rho_0 - i\,\frac{M}{c_0}\,\omega\right) e^{i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_0}}\, \hat{g}_0^{'}(\omega) - \rho_1\, e^{-i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_1}}\, \hat{f}_1^{'}(\omega) = -\left(\rho_0 + i\,\frac{M}{c_0}\,\omega\right) e^{-i\,\omega\,\frac{\alpha}{c_0}}\, \hat{f}_0^{'}(\omega).$$

En posant

(9.11)
$$Z_0 = \rho_0\, c_0, \qquad Z_1 = \rho_1\, c_1, \qquad Z_2 = \rho_0\, c_1,$$
$$Y_0 = \frac{Z_0\, Z_1}{K} - M, \quad Y_1 = \frac{Z_0\, Z_1}{K} + M, \quad Y_2 = \frac{M}{K},$$

la résolution de (9.10) conduit à

$$\hat{g}_0^{'}(\omega) = R_{0,1}(\omega)\,\hat{f}_0^{'}(\omega), \qquad \hat{f}_1^{'}(\omega) = T_{0,1}(\omega)\,\hat{f}_0^{'}(\omega) \tag{9.12}$$

avec les coefficients de réflexion et de transmission donnés par

$$\begin{aligned} R_{0,1}(\omega) &= \frac{Z_0 - Z_1 - i\,Y_0\,\omega}{Z_0 + Z_1 + i\,Y_1\,\omega}\,e^{-i\,\omega\,\frac{2\,\alpha}{c_0}}, \\ T_{0,1}(\omega) &= \frac{2\,Z_2\left(1 + Y_2\,\omega^2\right)}{Z_0 + Z_1 + i\,Y_1\,\omega}\,e^{i\,\omega\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right)\alpha}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

On remarque que $R_{0,1}$ et $T_{0,1}$ dépendent maintenant de la fréquence, contrairement au cas d'une interface parfaite (voir (9.5)). Pour $M = 0$ et $K \to +\infty$, on retrouve les valeurs de $R_{0,1}$ et $T_{0,1}$ (9.5). Dans le cas qui nous intéresse ici, il reste à exprimer $g_0^{''}\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ et $f_1^{''}\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ en fonction de $f_0^{''}(t)$. Les propriétés (9.9) impliquent

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(g_0^{''}\left(t + \frac{x}{c_0}\right)\right) &= -i\,\omega\,e^{i\,\omega\,\frac{x}{c_0}}\,\hat{g}_0^{'}(\omega), \\ \mathcal{F}\left(f_1^{''}\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right) &= -i\,\omega\,e^{-i\,\omega\,\frac{x}{c_1}}\,\hat{f}_1^{'}(\omega), \\ \mathcal{F}\left(f_0^{''}(t)\right) &= -i\,\omega\,\hat{f}_0^{'}(\omega). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Il découle alors de (9.12) et (9.14)

$$\boxed{\begin{aligned} g_0^{''}\left(t + \frac{x}{c_0}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{i\,\omega\,\frac{x}{c_0}}\,R_{0,1}(\omega)\,\hat{f}_0^{''}(\omega)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{i\,\omega\,\frac{x}{c_0}}\,R_{0,1}(\omega)\right) * f_0^{''}(t), \\ f_1^{''}\left(t - \frac{x}{c_1}\right) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\,\omega\,\frac{x}{c_1}}\,T_{0,1}(\omega)\,\hat{f}_0^{''}(\omega)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\,\omega\,\frac{x}{c_1}}\,T_{0,1}(\omega)\right) * f_0^{''}(t), \end{aligned}} \tag{9.15}$$

conduisant à l'expression de $\boldsymbol{U}(x,t)$

$$\boxed{\begin{aligned} x \le \alpha \quad \boldsymbol{U}(x,t) &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix} f_0^{''}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix} g_0^{''}\left(t + \frac{x}{c_0}\right), \\ x > \alpha \quad \boldsymbol{U}(x,t) &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_1} \\ \rho_1 \end{pmatrix} f_1^{''}\left(t - \frac{x}{c_1}\right). \end{aligned}} \tag{9.16}$$

Cas particulier d'une sinusoïde tronquée. Pour une expression quelconque de $f_0^{''}$, la détermination de $g_0^{''}$ et $f_1^{''}$ (9.15) nécessite le calcul numérique de FFT directes et inverses. Dans le

cas particulier de la sinusoïde tronquée f_0''

$$f_0''(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k \sin(\beta_k \omega_c t) = \sum_{k=1}^{q} a_k f_{0,k}''(t) & \text{si } 0 < t < \dfrac{1}{f_c}, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{9.17}$$

utilisée lors des expériences numériques du chapitre 10, on peut mener à terme les calculs analytiques de g_0'' et f_1'' ; a_k et q sont précisés au chapitre 10, et $\beta_k = 2^{k-1}$ $(k \geq 1)$. Du fait de la linéarité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$, le calcul n'est mené que pour une composante $f_{0,k}''$ et pour les composantes $g_{0,k}''$ et $f_{1,k}''$ correspondantes. Avec la convention (9.8), la transformée de Fourier de $f_{0,k}''$ est

$$\hat{f}_{0,k}''(\omega) = \frac{\beta_k \omega_c}{2\pi} \left(\frac{1}{\omega^2 - \beta_k^2 \omega_c^2} \right) \left(e^{-i \frac{2\pi}{\omega_c} \omega} - 1 \right). \tag{9.18}$$

L'expression de $g_0''\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ (9.15) découle de (9.13) et de (9.18), soit

$$g_k''\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = \frac{\beta_k \omega_c}{2\pi} (I_1 - I_2), \tag{9.19}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 - Z_1 - i Y_0 \omega}{Z_0 + Z_1 + i Y_1 \omega} \frac{e^{i\omega(\xi_R - \frac{2\pi}{\omega_c})}}{\omega^2 - \beta_k^2 \omega_c^2} d\omega, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 - Z_1 - i Y_0 \omega}{Z_0 + Z_1 + i Y_1 \omega} \frac{e^{i\omega \xi_R}}{\omega^2 - \beta_k^2 \omega_c^2} d\omega, \\ \xi_R &= t + \frac{x}{c_0} - \frac{2\alpha}{c_0}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Les pôles des intégrands de I_1 et I_2 sont $i(Z_0 + Z_1)/Y_1$, $\pm\beta_k \omega_c$. Les résidus de I_1 et I_2 sont

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{I_1}\left(i \frac{Z_0 + Z_1}{Y_1}\right) &= -\frac{1}{i} \frac{Z_0(Y_0 + Y_1) + Z_1(Y_0 - Y_1)}{(Z_0 + Z_1)^2 + (Y_1 \beta_k \omega_c)^2} e^{-\frac{Z_0 + Z_1}{Y_1}\left(\xi_R - \frac{2\pi}{\omega_c}\right)}, \\ \mathrm{Res}_{I_2}\left(i \frac{Z_0 + Z_1}{Y_1}\right) &= -\frac{1}{i} \frac{Z_0(Y_0 + Y_1) + Z_1(Y_0 - Y_1)}{(Z_0 + Z_1)^2 + (Y_1 \beta_k \omega_c)^2} e^{-\frac{Z_0 + Z_1}{Y_1} \xi_R}, \\ \mathrm{Res}_{I_1}(\pm\beta_k \omega_c) &= \frac{\pm 1}{2\beta_k \omega_c} \frac{Z_0 - Z_1 \mp i Y_0 \beta_k \omega_c}{Z_0 + Z_1 \pm i Y_1 \beta_k \omega_c} e^{\pm i \beta_k \omega_c \xi_R} = \mathrm{Res}_{I_2}(\pm\beta_k \omega_c). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Pour appliquer le lemme de Jordan, I_1 est intégré sur le chemin C_2 si $\xi_R < 2\pi/\omega_c$ et sur C_1 dans le cas contraire (voir figure 9.2) ; de même, I_2 est intégré sur C_2 si $\xi_R < 0$ et sur C_1 dans

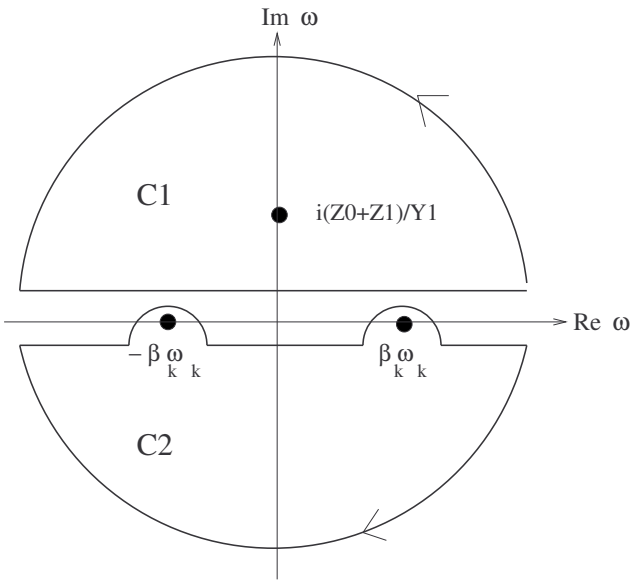

FIG. 9.2 – *Contours d'intégration pour le calcul de* $g_0''\left(t+\frac{x}{c_0}\right)$ *et* $f_1''\left(t-\frac{x}{c_1}\right)$

le cas contraire. Le théorème des résidus conduit à

$$
\begin{aligned}
\xi_R < \frac{2\,\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad I_1 &= -2\,i\,\pi\left(\mathrm{Res}_{I_1}\left(\beta_k\,\omega_c\right)+\mathrm{Res}_{I_1}\left(-\beta_k\,\omega_c\right)\right)\\
&= \frac{2\,\pi}{\beta_k\,\omega_c}\left(\frac{Z_0^2-Z_1^2-Y_0\,Y_1(\beta_k\,\omega_c)^2}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\sin(\beta_k\,\omega_c\,\xi_R)\right.\\
&\qquad \left.-\frac{Z_0(Y_0+Y_1)+Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\beta_k\,\omega_c\,\cos(\beta_k\,\omega_c\,\xi_R)\right),\\
\xi_R \geq \frac{2\,\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad I_1 &= 2\,i\,\pi\,\mathrm{Res}_{I_1}\left(i\,\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\right)\\
&= -2\,\pi\,\frac{Z_0(Y_0+Y_1)+Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\left(\xi_R-\frac{2\,\pi}{\omega_c}\right)},
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\xi_R < 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -2\,i\,\pi\left(\mathrm{Res}_{I_2}\left(\beta_k\,\omega_c\right)+\mathrm{Res}_{I_2}\left(-\beta_k\,\omega_c\right)\right) = I_1(\xi_R<0)\\
&\xi_R \geq 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 2\,i\,\pi\,\mathrm{Res}_{I_2}\left(i\,\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\right) = -2\,\pi\,\frac{Z_0(Y_0+Y_1)+Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_R}.
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

On déduit alors l'expression de $g''_{0,k}$ de (9.19), (9.22), et (9.23)
(9.24)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\bullet\, \xi_R \leq 0 : g''_{0,k}\left(t+\frac{x}{c_0}\right) = 0,\\
&\bullet\, 0 < \xi_R \leq \frac{1}{f_c} :\\
&g''_{0,k}\left(t+\frac{x}{c_0}\right) = \frac{Z_0^2 - Z_1^2 - Y_0\,Y_1\,(\beta_k\,\omega_c)^2}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\sin(\beta_k\,\omega_c\,\xi_R)\\
&\quad - \frac{Z_0(Y_0+Y_1) + Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\beta_k\,\omega_c\,\cos(\beta_k\,\omega_c\,\xi_R)\\
&\quad + \frac{Z_0(Y_0+Y_1) + Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\beta_k\,\omega_c\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_R},\\
&\bullet\, \xi_R > \frac{1}{f_c} :\\
&g''_{0,k}\left(t+\frac{x}{c_0}\right) = \frac{Z_0(Y_0+Y_1) + Z_1(Y_0-Y_1)}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\beta_k\,\omega_c\left(e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_R} - e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\left(\xi_R - \frac{2\,\pi}{\omega_c}\right)}\right),
\end{aligned}}$$

avec ξ_R donné en (9.20). Le calcul de $f''_{1,k}\left(t+\frac{x}{c_0}\right)$ (9.15) suit le même modèle et découle de (9.13) et de (9.18), soit

$$f''_{1,k}\left(t-\frac{x}{c_1}\right) = \frac{\beta_k\,\omega_c\,Z_2}{\pi}\,(J_1 - J_2), \tag{9.25}$$

avec

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+Y_2\,\omega^2}{Z_0+Z_1+i\,Y_1\,\omega}\,\frac{e^{i\,\omega\,(\xi_T - \frac{2\,\pi}{\omega_c})}}{\omega^2 - \beta_k^2\,\omega_c^2}\,d\,\omega,\\
J_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+Y_2\,\omega^2}{Z_0+Z_1+i\,Y_1\,\omega}\,\frac{e^{i\,\omega\,\xi_T}}{\omega^2 - \beta_k^2\,\omega_c^2}\,d\,\omega,\\
\xi_T &= t - \frac{x}{c_1} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right)\,\alpha.
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Les résidus de J_1 et J_2 sont

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{J_1}\left(i\,\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\right) &= -\frac{1}{i\,Y_1}\,\frac{Y_1^2 - Y_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\left(\xi_T - \frac{2\,\pi}{\omega_c}\right)},\\
\mathrm{Res}_{J_2}\left(i\,\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\right) &= -\frac{1}{i\,Y_1}\,\frac{Y_1^2 - Y_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2 + (Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_T},\\
\mathrm{Res}_{J_1}(\pm\beta_k\,\omega_c) &= \frac{\pm 1}{2\,\beta_k\,\omega_c}\,\frac{1+Y_2\,(\beta_k\,\omega_c)^2}{Z_0+Z_1 \pm i\,Y_1\,\beta_k\,\omega_c}\,e^{\pm i\,\beta_k\,\omega_c\,\xi_T} = \mathrm{Res}_{J_2}(\pm\beta_k\,\omega_c).
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Les contours d'intégration sont les mêmes que lors du calcul de I_1 et I_2. Le théorème des résidus conduit à

$$\xi_T < \frac{2\,\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad J_1 = \frac{2\,\pi}{\beta_k\,\omega_c}\left(\frac{(Z_0+Z_1)\left(1+Y_2\,(\beta_k\,\omega_c)^2\right)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\sin(\beta_k\,\omega_c\,\xi_T)\right.$$

$$\left.-\frac{Y_1\left(1+Y_2\,(\beta_k\,\omega_c)^2\right)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\beta_k\,\omega_c\,\cos(\beta_k\,\omega_c\,\xi_T)\right) \tag{9.28}$$

$$\xi_T \geq \frac{2\,\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad J_1 = -\frac{2\,\pi}{Y_1}\,\frac{Y_1^2-Y_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\left(\xi_T-\frac{2\,\pi}{\omega_c}\right)}.$$

et

$$\begin{aligned} &\xi_T < 0 \quad \Rightarrow \quad J_2 = J_1 \\ &\xi_T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad J_2 = -\frac{2\,\pi}{Y_1}\,\frac{Y_1^2-Y_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_T}. \end{aligned} \tag{9.29}$$

L'expression de $f''_{1,k}$ est alors

(9.30)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\bullet\, \xi_T \leq 0 : f''_{1,k}\left(t-\frac{x}{c_1}\right) = 0, \\
&\bullet\, 0 < \xi_T \leq \frac{1}{f_c} : \\
&f''_{1,k}\left(t-\frac{x}{c_1}\right) = \frac{2\,Z_2\,(Z_0+Z_1)\left(1+Y_2\,(\beta_k\,\omega_c)^2\right)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\sin(\beta_k\,\omega_c\,\xi_T) \\
&\quad -\frac{2\,Z_2\,Y_1\left(1+Y_2\,(\beta_k\,\omega_c)^2\right)}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,\beta_k\,\omega_c\,\cos(\beta_k\,\omega_c\,\xi_T) \\
&\quad +\frac{2\,\beta_k\,\omega_c}{Y_1}\,\frac{Y_1^2\,Z_2-Y_2\,Z_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\,e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_T}, \\
&\bullet\, \xi_T > \frac{1}{f_c} : \\
&f''_{1,k}\left(t-\frac{x}{c_1}\right) = \frac{2\,\beta_k\,\omega_c}{Y_1}\,\frac{Y_1^2\,Z_2-Y_2\,Z_2\,(Z_0+Z_1)^2}{(Z_0+Z_1)^2+(Y_1\,\beta_k\,\omega_c)^2}\left(e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\,\xi_T}-e^{-\frac{Z_0+Z_1}{Y_1}\left(\xi_T-\frac{2\,\pi}{\omega_c}\right)}\right),
\end{aligned}}$$

avec ξ_T donné par (9.26). Les composantes $g''_{0,k}$ (9.24) et $f''_{1,k}$ (9.30) décroissent exponentiellement pour $\xi_R > 1/f_c$ et $\xi_T > 1/f_c$, alors que $f''_{0,k}$ est bornée temporellement (9.17). Il reste encore à

reconstruire les fonctions g_0'' et f_1'' à partir de (9.24) et de (9.30), soit

$$
\begin{aligned}
g_0''(x,t) &= \sum_{k=1}^{q} a_k \, g_{0,k}''(x,t), \\
f_1''(x,t) &= \sum_{k=1}^{q} a_k \, f_{1,k}''(x,t).
\end{aligned}
\tag{9.31}
$$

L'expression analytique de $\boldsymbol{U}(x,t)$ découle alors de (9.16) et de (9.31).

9.4 Deux interfaces parfaites 1D

9.4.1 Introduction

Nous calculons ici la solution analytique dans un milieu tricouche 1D (voir chapitre 5, section 5.4). L'onde incidente f_0'' conduit alors à une infinité d'ondes réfléchies et transmises.

Nous rappelons par ailleurs que l'analyse de la propagation des ondes dans un milieu tricouche conduit, dans le cas limite de deux interfaces parfaites très proches, au cas d'une seule interface imparfaite avec des conditions de type masse-ressort. Nous présentons alors une comparaison des deux solutions analytiques pour différents rapports h/λ, avec $h = \alpha_1 - \alpha_0$ et λ la longueur d'onde centrale.

9.4.2 Ondes réfléchies et transmises

Les vitesses et contraintes élastiques sont définies en (9.1), avec $n = 1$. Aucune onde descendante n'existe dans le milieu Ω_2, d'où $g_2'' = 0$. La vitesse élastique et la contrainte élastique sont continues en α_0 et en α_1, ce qui conduit aux systèmes

$$
\begin{aligned}
f_0''\left(t - \frac{\alpha_0}{c_0}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{c_0}{c_1}\right) f_1''\left(t - \frac{\alpha_0}{c_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{c_0}{c_1}\right) g_1''\left(t + \frac{\alpha_0}{c_1}\right) \\
g_0''\left(t + \frac{\alpha_0}{c_0}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{c_0}{c_1}\right) f_1''\left(t - \frac{\alpha_0}{c_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{c_0}{c_1}\right) g_1''\left(t + \frac{\alpha_0}{c_1}\right),
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f_1''\left(t - \frac{\alpha_1}{c_1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{c_1}{c_2}\right) f_2''\left(t - \frac{\alpha_1}{c_2}\right) \\
g_1''\left(t + \frac{\alpha_1}{c_1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{c_1}{c_2}\right) f_2''\left(t - \frac{\alpha_1}{c_2}\right).
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

Les relations (9.32) et (9.33) impliquent

$$
\begin{aligned}
f_0''\left(t-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{c_0}{c_1}\right) f_2''\left(t+\Delta\, t_1-\frac{\alpha_1}{c_2}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}-\frac{c_0}{c_1}\right) f_2''\left(t-\Delta\, t_1-\frac{\alpha_1}{c_2}\right),
\end{aligned}
\tag{9.34}
$$

où $\Delta\, t_1 = (\alpha_1 - \alpha_0)/c_1$ est le temps de propagation des onde élastiques à travers le milieu Ω_1. L'onde incidente f_0'' conduisant a priori à une infinité d'ondes transmises f_2'', on cherche f_2'' sous la forme

$$
f_2''(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i\, f_0''(t - t_0 - 2\, i\, \Delta\, t_1),
\tag{9.35}
$$

où les amplitudes A_i et le retard t_0 sont inconnus. La substitution de (9.35) dans (9.34) conduit à

$$
\begin{aligned}
f_0''\left(t-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{c_0}{c_1}\right) A_0\, f_0''\left(t-t_0+\Delta\, t_1-\frac{\alpha_1}{c_2}\right) \\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{c_0}{c_1}\right) A_i\, f_0''\left(t-t_0-(2i-1)\Delta\, t_1-\frac{\alpha_1}{c_2}\right) \\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}-\frac{c_0}{c_1}\right) A_{i-1}\, f_0''\left(t-t_0-(2\,i-1)\Delta\, t_1-\frac{\alpha_1}{c_2}\right).
\end{aligned}
\tag{9.36}
$$

Les membres de gauche et de droite de (9.36) sont égaux à chaque instant : leur identification conduit alors aux expressions de t_0 et des amplitudes A_i

$$
\left|
\begin{aligned}
& t_0 = \Delta t_1 - \frac{\alpha_1}{c_2} + \frac{\alpha_0}{c_0} \\
& A_0 = T_{0,1}\, T_{1,2} \\
& A_i = T_{0,1}\, T_{1,2}\, (-R_{0,1}\, R_{1,2})^i\,,
\end{aligned}
\right.
\tag{9.37}
$$

où les coefficients de réflexion et de transmission sont définis en (9.5)

Les expressions de $g_0''\left(t+\frac{x}{c_0}\right)$, $f_1''\left(t-\frac{x}{c_2}\right)$ et $g_1''\left(t+\frac{x}{c_2}\right)$ découlent alors de (9.32) et (9.33).

D'où

$$
\boxed{
\begin{aligned}
g_0''\left(t+\frac{x}{c_0}\right) &= R_{0,1}\, f_0''\left(t+\frac{x-\alpha_0}{c_0}-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) \\
&\quad + T_{0,1}\, T_{1,2} \sum_{i=1}^{+\infty} (-R_{0,1})^{i-1}\, R_{1,2}^{i}\, f_0''\left(t+\frac{x-\alpha_0}{c_0}-2\,i\,\Delta\, t_1-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) \\
f_1''\left(t-\frac{x}{c_2}\right) &= T_{0,1} \sum_{i=0}^{+\infty} (-R_{0,1} R_{1,2})^{i}\, f_0''\left(t-\frac{x-\alpha_1}{c_1}-(2\,i+1)\,\Delta\, t_1-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) \\
g_1''\left(t+\frac{x}{c_1}\right) &= R_{1,2}\, T_{0,1} \sum_{i=0}^{+\infty} (-R_{0,1}\, R_{1,2})^{i}\, f_0''\left(t+\frac{x-\alpha_1}{c_1}-(2\,i+1)\,\Delta\, t_1-\frac{\alpha_0}{c_0}\right) \\
f_2''\left(t-\frac{x}{c_2}\right) &= T_{0,1}\, T_{1,2} \sum_{i=0}^{+\infty} (-R_{0,1}\, R_{1,2})^{i}\, f_0''\left(t-\frac{x-\alpha_1}{c_2}-(2\,i+1)\,\Delta\, t_1-\frac{\alpha_0}{c_0}\right).
\end{aligned}
\tag{9.38}
}
$$

On déduit directement de (9.2) et (9.38) la solution exacte en tout point.

Comparaison des solutions analytiques. Considérons un milieu tricouche, de paramètres physiques

$$
(\rho,c) = \begin{cases}
\rho_0 = 1100\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_0 = 2700\,\mathrm{m/s} \text{ si } x \le \alpha_0 = 0.537 \ \mathrm{m}, \\[2ex]
\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_1 = 1500\,\mathrm{m/s} \text{ si } \alpha_0 < x \le \alpha_1 = \alpha_0 + h, \\[2ex]
\rho_2 = 1100\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_2 = 2700\,\mathrm{m/s} \text{ si } x \ge \alpha_1.
\end{cases}
\tag{9.39}
$$

Ce cas correspond à deux morceaux de Plexiglass reliés par une couche de colle d'épaisseur $h = \alpha_1 - \alpha_0$ ayant les propriétés physiques de l'eau. A partir des calculs menés durant la présente section, nous pouvons calculer la solution analytique en tout point du milieu tricouche et à tout instant.

Comme mentionné en section 5.4, on peut décrire approximativement la propagation des ondes dans le milieu tricouche en considérant une seule interface imparfaite vérifiant les conditions de type masse-ressort (5.11), avec

$$
K = \frac{\rho_1\, c_1^2}{h}, \quad M = \rho_1\, h, \tag{9.40}
$$

et ce d'autant plus précisément que le rapport h/λ est petit (λ est la longueur d'onde centrale des ondes dans le milieu Ω_1). Les calculs menés durant la section précédente nous permettent de calculer la solution analytique, les deux interfaces parfaites étant remplacées par une seule interface imparfaite.

Nous comparons ici les deux solutions analytiques pour différentes valeurs de h. Nous utilisons comme onde incidente la sinusoïde tronquée présentée au chapitre 10, de fréquence centrale $f_c = 40$ kHz. La longueur d'onde principale est alors λ =3.75 cm. Nous considérons trois valeurs

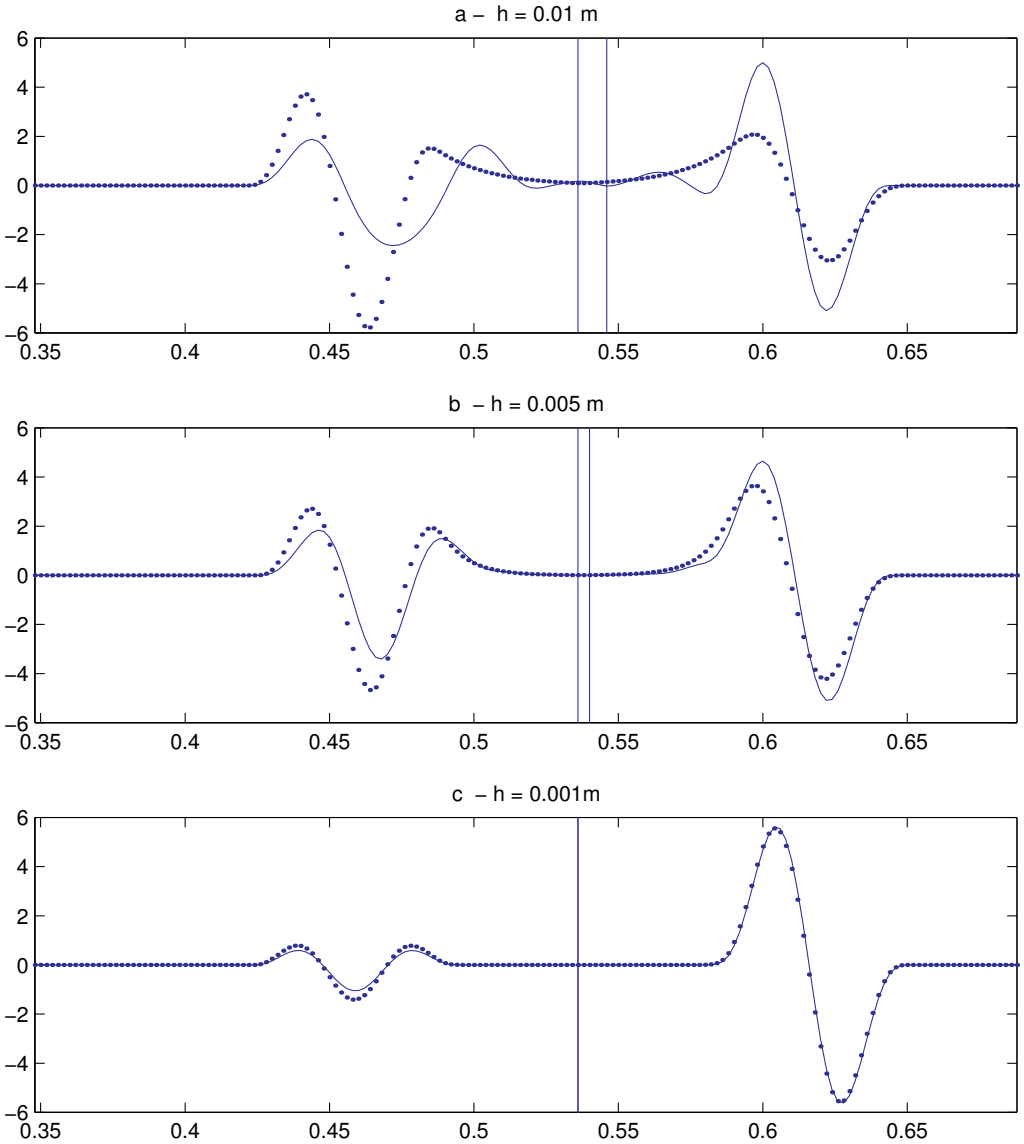

FIG. 9.3 – *Comparaison des solutions analytiques dans un milieu tricouche avec deux interfaces parfaites (traits pleins) et dans un milieu bicouche avec une interface imparfaite (pointillés), pour différents rapports λ/h : 3.75 (a), 7.5 (b), et 37.5 (c).*

de h en figure 9.3. Pour $h/\lambda \approx 1$ (figure 9.3 (a)), l'accord entre les solutions analytiques est mauvais. Par contre, pour $h/\lambda \approx 30$ (figure 9.3 (c)), les conditions de type masse-ressort décrivent très bien la propagation des ondes dans un milieu tricouche.

9.5 Interface parfaite fluide-fluide 2D

9.5.1 Introduction

Considérons une onde plane qui coupe avec l'angle θ_f la droite $x = x_0$; nous calculons ici les champs acoustiques réfléchis et transmis schématisées en figure 9.4. Pour traiter tous les cas d'incidence ($0 \leq \theta_f \leq \pi/2$) quels que soient c_0 et c_1, nous décrivons le champ transmis à partir du formalisme des ondes planes non homogènes [12], [37].

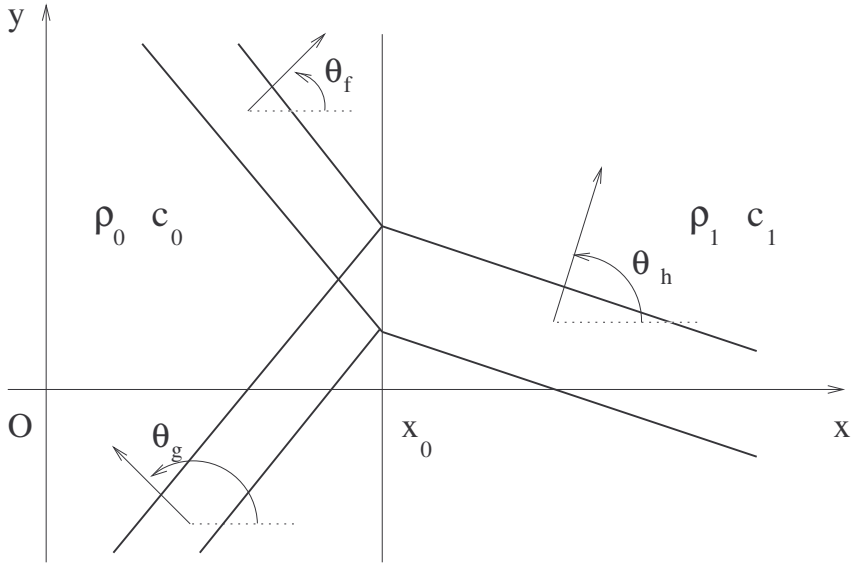

FIG. 9.4 – *Ondes planes incidente, réfléchie et transmise à l'interface plane entre deux fluides.*

9.5.2 Ondes planes non homogènes

Nous écrivons les potentiels acoustiques des ondes planes incidente, réféchie et transmise

$$\Phi_f(x,y,t) = f\left(t - \frac{\boldsymbol{n_f.OM}}{c_0}\right),$$

$$\Phi_g(x,y,t) = g\left(t - \frac{\boldsymbol{n_g.OM}}{c_0}\right), \tag{9.41}$$

$$\Phi_h(x,y,t) = h\left(t - \boldsymbol{p_h.OM}\right),$$

avec

$$\boldsymbol{n_f} = \begin{pmatrix} \cos\theta_f \\ \sin\theta_f \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n_g} = \begin{pmatrix} \cos\theta_g \\ \sin\theta_g \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p_h} = \boldsymbol{p_{h1}} + i\,\boldsymbol{p_{h2}} = \begin{pmatrix} p_{h1x} \\ p_{h1y} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} p_{h2x} \\ p_{h2y} \end{pmatrix}. \tag{9.42}$$

f, g, et h sont des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suffisamment régulières. Les potentiels Φ_f et Φ_g décrivent des ondes planes homogènes ; Φ_h, de vecteur d'onde complexe, décrit une onde plane

non homogène [37]. La vitesse acoustique $\boldsymbol{v}$ et la pression acoustique p découlant d'un potentiel Φ s'écrivant

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\,\Phi, \quad p = -\rho\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t}, \tag{9.43}$$

on a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U_f}(x,y,t) &= \boldsymbol{V_f}\,f'\left(t - \frac{x\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right),\\
\boldsymbol{U_g}(x,y,t) &= \boldsymbol{V_g}\,g'\left(t - \frac{x\cos\theta_g + y\sin\theta_g}{c_0}\right),\\
\boldsymbol{U_h}(x,y,t) &= \boldsymbol{V_h}\,h'\left(t - x\,(p_{h1x} + i\,p_{h2x}) - y\,(p_{h1y} + i\,p_{h2y})\right),
\end{aligned} \tag{9.44}$$

avec

$$\boldsymbol{V_f} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta_f}{c_0} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V_g} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta_g}{c_0} \\ \dfrac{\sin\theta_g}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V_h} = -\begin{pmatrix} p_{h1x} + i\,p_{h2x} \\ p_{h1y} + i\,p_{h2y} \\ \rho_1 \end{pmatrix}. \tag{9.45}$$

La solution exacte $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ en tout point du domaine s'écrit alors

$$\boxed{\begin{aligned} &x \le x_0, \quad \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U_f}(x,y,t) + \boldsymbol{U_g}(x,y,t),\\ &x > x_0, \quad \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U_h}(x,y,t). \end{aligned}} \tag{9.46}$$

L'onde incidente $\boldsymbol{U_f}$ étant connue, le but des calculs qui suivent est de déterminer $\boldsymbol{U_g}$ et $\boldsymbol{U_h}$. Pour cela, on utilise les conditions de saut entre deux fluides parfaits, vues au chapitre 6 ; ces conditions s'écrivent ici

$$[v_1] = 0, \quad [p] = 0, \tag{9.47}$$

et conduisent alors au système

(9.48)

$$\begin{aligned}
&-\frac{\cos\theta_g}{c_0}\,g'\left(t - \frac{x_0\cos\theta_g + y\sin\theta_g}{c_0}\right) + (p_{h1x} + i\,p_{h2x})\,h'\left(t - x_0(p_{h1x} + i\,p_{h2x}) - y(p_{h1y} + i\,p_{h2y})\right)\\
&\qquad = \frac{\cos\theta_f}{c_0}\,f'\left(t - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right),\\
&\rho_0\,g'\left(t - \frac{x_0\cos\theta_g + y\sin\theta_g}{c_0}\right) - \rho_1\,h'\left(t - x_0(p_{h1x} + i\,p_{h2x}) - y(p_{h1y} + i\,p_{h2y})\right)\\
&\qquad = -\rho_0\,f'\left(t - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right).
\end{aligned}$$

Les équations (9.48) sont vérifiées pour tout (t,y), ce qui conduit aux relations de Descartes

$$\frac{\sin\theta_f}{c_0} = \frac{\sin\theta_g}{c_0} = p_{h1y} + i\,p_{h2y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta_g = \sin\theta_f \\ p_{h1y} = \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ p_{h2y} = 0. \end{cases} \tag{9.49}$$

L'onde réfléchie se propage suivant les x décroissants, impliquant $\cos\theta_g = -\cos\theta_f$. D'autre part, le potentiel Φ_h de l'onde transmise vérifie à tout instant l'équation des ondes

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_h - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi_h}{\partial t^2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\boldsymbol{p_h}.\boldsymbol{p_h} - \frac{1}{c_1^2}\right) h''\,(t - \boldsymbol{p_h}.\boldsymbol{OM}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{p_h}.\boldsymbol{p_h} = \frac{1}{c_1^2} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} \|\,\boldsymbol{p_{h1}}\,\|^2 - \|\,\boldsymbol{p_{h2}}\,\|^2 = \dfrac{1}{c_1^2} \\ \boldsymbol{p_{h1}}.\boldsymbol{p_{h2}} = 0, \quad \text{soit } \boldsymbol{p_{h1}} \perp \boldsymbol{p_{h2}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.50}$$

En combinant (9.49) et (9.50), nous obtenons

$$\begin{cases} (p_{h1x})^2 - (p_{h2x})^2 = \dfrac{1}{c_1^2}\left(1 - \left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2\right) \\ p_{h1x}\,p_{h2x} = 0. \end{cases} \tag{9.51}$$

Les relations (9.51) impliquent $p_{h1x} = 0$ ou $p_{h2x} = 0$. Il convient alors de distinguer les cas.

Cas $\boldsymbol{p_{h2x} = 0}$. Si $p_{h2x} = 0$, nous déduisons de (9.51)

$$(p_{h1x})^2 = 1 - \frac{1}{c_1^2}\left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_f \leq \frac{c_0}{c_1}, \tag{9.52}$$

ce qui est toujours vrai si $c_0 \geq c_1$, ou si $c_0 < c_1$ et si θ_f est inférieur à l'angle critique θ_c

$$\theta_c = \arcsin\frac{c_0}{c_1}. \tag{9.53}$$

L'angle θ_h de l'onde transmise est alors différent de $\pi/2$, et il vient

$$p_{h1x} = +\frac{1}{c_1}\sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2} = \frac{\cos\theta_h}{c_1}. \tag{9.54}$$

Le signe $+$ découle de la direction de propagation de l'onde transmise vers les x croissants. Nous retrouvons alors le cas classique d'une onde plane homogène de vecteur d'onde réel.

Cas $\boldsymbol{p_{h1x} = 0}$. Si $p_{h1x} = 0$, on déduit de (9.51)

$$\sin\theta_f > \frac{c_0}{c_1}, \tag{9.55}$$

ce qui n'est possible que si $c_0 < c_1$ et $\theta_f > \theta_c$. Nous avons alors

$$p_{h2x} = \pm\frac{1}{c_1}\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2 - 1}. \tag{9.56}$$

Dans ce cas, l'onde transmise se propage uniquement suivant l'axe (Oy). Déterminons alors le signe de p_{h2x}. Comme $p_{h1x} = p_{h2y} = 0$, la transformée de Fourier en temps de $\boldsymbol{U_h}(x,y,t)$ (9.44) s'écrit

$$\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{h}}(x,y,\omega) = \boldsymbol{V_h}\,\exp\left(-\omega\,x\,p_{h2x}\right)\,\exp\left(i\,\omega\,y\,p_{h1y}\right)\,\hat{h}^{'}(x,y,\omega). \tag{9.57}$$

L'onde transmise $\boldsymbol{U_h}$ (9.44) est d'amplitude finie pour x tendant vers $+\infty$. Il en est de même pour sa transformée de Fourier $\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{h}}$. La relation (9.57) implique alors $\mathrm{sgn}(p_{h2x}) = \mathrm{sgn}(\omega)$.

9.5.3 Coefficients de réflexion et de transmission

Compte-tenu de (9.49), le système (9.48) a pour solution

$$\begin{aligned} g^{'}\left(t - \frac{x_0\cos\theta_g + y\sin\theta_g}{c_0}\right) &= R\,f^{'}\left(t - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right) \\ h^{'}\left(t - x_0(p_{h1x} + i\,p_{h2x}) - y\,p_{h1y}\right) &= T\,f^{'}\left(t - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right), \end{aligned} \tag{9.58}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f + \rho_0\,c_0\,c_1\,p_{h1x}\right)^2 + \left(\rho_0\,c_0\,c_1\,p_{h2x}\right)^2, \\ R &= \frac{\left(\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f\right)^2 - \left(\rho_0\,c_0\,c_1\,p_{h1x}\right)^2 - \left(\rho_0\,c_0\,c_1\,p_{h2x}\right)^2}{\Delta} \\ &\quad - i\,\frac{2\,\rho_0\,c_0\,\rho_1\,(c_1)^2\,p_{h2x}\cos\theta_f}{\Delta}, \\ T &= \frac{2\,\rho_0\,c_1\,\cos\theta_f\,\left(\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f + \rho_0\,c_0\,c_1\,p_{h1x}\right)}{\Delta} \\ &\quad - i\,\frac{2\,(\rho_0)^2\,c_0\,(c_1)^2\,p_{h2x}\cos\theta_f}{\Delta}. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Suivant la valeur de θ_f, on peut simplifier R et T. Si $c_0 \geq c_1$ ou ($c_0 < c_1$ et $\theta_f \leq \theta_c$) (ce qui correspond au cas $p_{h2x} = 0$), nous retrouvons à partir de (9.54) et (9.59) les expressions classiques

$$R = \frac{\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f - \rho_0\,c_0\,\cos\theta_h}{\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f + \rho_0\,c_0\,\cos\theta_h}, \qquad T = \frac{2\,\rho_0\,c_1\cos\theta_f}{\rho_1\,c_1\,\cos\theta_f + \rho_0\,c_0\,\cos\theta_h}. \tag{9.60}$$

Si $c_0 < c_1$ et $\theta_f > \theta_c$ (ce qui correspond au cas $p_{h1x} = 0$), nous posons

$$\Delta = (\rho_1\, c_1\, \cos\theta_f)^2 + (\rho_0\, c_0)^2 \left(\left(\frac{c_1}{c_0} \sin\theta_f \right)^2 - 1 \right),$$

$$B = \frac{(\rho_1\, c_1\, \cos\theta_f)^2 - (\rho_0\, c_0)^2 \left(\left(\frac{c_1}{c_0} \sin\theta_f \right)^2 - 1 \right)}{\Delta},$$

$$C = \frac{2\,\rho_0\, c_0\, \rho_1\, c_1 \cos\theta_f \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0} \sin\theta_f \right)^2 - 1}}{\Delta}, \tag{9.61}$$

$$D = \frac{2\,\rho_0\, \rho_1\, c_1^2\, \cos^2\theta_f}{\Delta},$$

$$E = \frac{2\,\rho_0^2\, c_0\, c_1\, \cos\theta_f \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0} \sin\theta_f \right)^2 - 1}}{\Delta}.$$

Les coefficients de réflexion et de transmissions (9.59) s'écrivent alors

$$R = B - i\ \mathrm{sgn}(\omega)\, C, \qquad T = D - i\ \mathrm{sgn}(\omega)\, E. \tag{9.62}$$

Nous remarquons $R(-\omega) = R^*(\omega)$ et $T(-\omega) = T^*(\omega)$.

9.5.4 Incidence en-dessous de l'angle critique

Pour $\theta_f \leq \theta_c$, nous déduisons les champs réfléchis et transmis de (9.44), (9.45), et (9.58)

(9.63)

$$\boldsymbol{U_g}(x,y,t) = -R \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos\theta_f}{c_0} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix} f'\left(t + \frac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0} - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0} \right),$$

$$\boldsymbol{U_h}(x,y,t) =$$

$$-T \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c_1}\sqrt{1 - \left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f \right)^2} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_1 \end{pmatrix} f'\left(t - \frac{x-x_0}{c_1}\sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f \right)^2} - \frac{x_0\cos\theta_f + \sin\theta_f}{c_0} \right),$$

avec R et T donnés en (9.60). L'onde réfléchie et l'onde transmise ont la même forme que l'onde incidente (c'est-àdire qu'elles s'expriment en fonction de $f^{'}$), ce qui n'est pas le cas de l'incidence sur-critique que nous examinons maintenant.

9.5.5 Incidence au-dessus de l'angle critique

Onde incidente. Pour une incidence au-dessus de l'angle critique, les coefficients de réflexion et de transmission (9.62) dépendent de la fréquence et sont discontinus, ce qui complique le calcul des ondes réfléchies et transmises. Nous ne pouvons alors pas calculer analytiquement $\boldsymbol{U_g}$ et $\boldsymbol{U_h}$ pour tout signal incident, comme dans le cas précédent. Pour simplifier les calculs, nous choisissons [12]

$$f'(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\tau^2 + t^2} \tag{9.64}$$

avec τ constante positive. Le facteur $1/\pi$ garantit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{'}(t)dt = 1. \tag{9.65}$$

La fonction $f^{'}$ tend vers $\delta(t)$ quand τ tend vers 0. La transformée de Fourier en temps de $f^{'}(t)$ est obtenue par un classique calcul des résidus

$$\hat{f}^{'}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\exp(-|\omega|\,\tau). \tag{9.66}$$

Nous remarquons $\hat{f}^{'}(-\omega) = \hat{f}^{'*}(\omega)$.

Champs réfléchis. Le champs réfléchi déduit de (9.44) et (9.58) est

$$\boldsymbol{U_g}(x,y,t) = \boldsymbol{V_g}\,R(\omega)\,f^{'}\left(t + \frac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0} - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right), \tag{9.67}$$

avec R complexe et dépendant de ω. La transformée de Fourier en temps de $\boldsymbol{U_g}(x,y,t)$ est

(9.68)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{g}}(x,y,\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{V_g}\,R(\omega)\,f^{'}\left(t + \frac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0} - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right)\exp\left(i\,\omega\,t\right)d\,t \\ &= \boldsymbol{V_g}\,R(\omega)\,\exp\left(i\,\omega\left(-\frac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0} + \frac{x\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right)\right)\hat{f}^{'}(\omega).\end{aligned}$$

La transformée de Fourier inverse en temps de (9.68) est

(9.69)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U_g}(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{g}}\exp\left(-i\,\omega\,t\right)d\,t \\ &= \boldsymbol{V_g}\int_{-\infty}^{+\infty}R(\omega)\hat{f}^{'}(\omega)\exp\left(-i\,\omega\,\left(t + \frac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0} - \frac{x\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}\right)\right)d\,\omega.\end{aligned}$$

En posant

$$\xi_g = t + \frac{(x - x_0)\cos\theta_f}{c_0} - \frac{x\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}, \tag{9.70}$$

nous écrivons

$$\boldsymbol{U_g}(x,y,t) = \boldsymbol{V_g}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega)\hat{f}'(\omega)e^{-i\,\omega\,\xi_g}d\,\omega = \boldsymbol{V_g}\,\Delta(\xi_g). \tag{9.71}$$

Le calcul de (9.71) n'est pas immédiat du fait de la discontinuité de $\mathrm{Im}\{R(\omega)\}$ en $\omega = 0$. Nous écrivons alors les parties réelles et imaginaires de $\Delta(\xi_g)$

$$\begin{aligned}
\Delta(\xi_g) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\mathrm{Re}\{R\hat{f}'\} + i\,\mathrm{Im}\{R\hat{f}'\}\Big)(\cos\omega\,\xi_g - i\,\sin\omega\,\xi_g)\exp(-i\,\omega\,\xi_g)\,d\,\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{R\hat{f}'\}\cos\omega\,\xi_g + \mathrm{Im}\{R\hat{f}'\}\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega \qquad (9.72)\\
&\quad +i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\{R\hat{f}'\}\cos\omega\,\xi_g - \mathrm{Re}\{R\hat{f}'\}\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega.
\end{aligned}$$

Nous remarquons

$$R(-\omega)\hat{f}'(-\omega) = R^*(\omega)\hat{f}^{*'}(\omega) = \Big(R(\omega)\hat{f}'(\omega)\Big)^*, \tag{9.73}$$

ce qui implique que $\mathrm{Re}\{R\hat{f}'\}$ est paire et que $\mathrm{Im}\{R\hat{f}'\}$ est impaire. Comme $\cos\omega\,\xi_g$ et $\sin\omega\,\xi_g$ sont respectivement des fonctions paires et impaires de ω, nous simplifions $\Delta(\xi_g)$

$$\Delta(\xi_g) = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}\{R\hat{f}'\}\cos\omega\,\xi_g + \mathrm{Im}\{R\hat{f}'\}\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega. \tag{9.74}$$

Pour $\omega \geq 0$, nous déduisons de (9.66)

$$\mathrm{Re}\{R\hat{f}'\} = \frac{B}{2\,\pi}\exp(-\omega\,\tau) \qquad \mathrm{Im}\{R\hat{f}'\} = -\frac{C}{2\,\pi}\exp(-\omega\,\tau), \tag{9.75}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
\Delta(\xi_g) &= 2\int_0^{+\infty}\frac{B}{2\,\pi}\exp(-\omega\,\tau)\cos\omega\,\xi_g - \frac{C}{2\,\pi}\exp(-\omega\,\tau)\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega \\
&= \frac{B}{\pi}I(\tau,\xi_g) - \frac{C}{\pi}J(\tau,\xi_g),
\end{aligned} \tag{9.76}$$

avec

$$\begin{aligned}
I(\tau,\xi_g) &= \int_0^{+\infty}\exp(-\omega\,\tau)\cos\omega\,\xi_g\,d\,\omega = \frac{\tau}{\tau^2 + \xi_g^2}, \\
J(\tau,\xi_g) &= \int_0^{+\infty}\exp(-\omega\,\tau)\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega = \frac{\xi_g}{\tau^2 + \xi_g^2}.
\end{aligned} \tag{9.77}$$

Les intégrales I et J sont obtenues par une double intégration par parties. On déduit alors le champs acoustique réfléchi $\boldsymbol{U_g}$ de (9.70), (9.71), et (9.76)

(9.78)

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{U_g}(x,y,t) &= \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos\theta_f}{c_0} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix}\left(\frac{B\,\tau}{\tau^2+\left(t+\dfrac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0}-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)^2}\right) \\ &- \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos\theta_f}{c_0} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_0 \end{pmatrix}\left(\frac{C\left(t+\dfrac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0}-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)}{\tau^2+\left(t+\dfrac{(x-x_0)\cos\theta_f}{c_0}-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)^2}\right),\end{aligned}}$$

avec B et C donnés en (9.61). La deuxième partie du champs réfléchi n'a pas la même forme que celle du champs incident (9.64).

Champs transmis Compte-tenu de (9.45), et (9.56), $\boldsymbol{V_h}$ s'écrit

$$\boldsymbol{V_h}(\omega) = -\begin{pmatrix} i\,\dfrac{\mathrm{sgn}(\omega)}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1} \\ \dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ \rho_1 \end{pmatrix}. \tag{9.79}$$

Nous remarquons $\boldsymbol{V_h}(-\omega) = \boldsymbol{V_h}^*(\omega)$. Le champ transmis est

(9.80)

$$\boldsymbol{U_h}(x,y,t) = \boldsymbol{V_h}(\omega)\,T(\omega)\,f'\left(t-\left(i\ \mathrm{sgn}(\omega)\,\frac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}+\frac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)\right).$$

Comme $\omega\ \mathrm{sgn}(\omega) = |\omega|$, la transformée de Fourier en temps de (9.80) s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}}(x,y,\omega) = \boldsymbol{V_h}(\omega)\,T(\omega)\,\exp\left(-|\omega|\frac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}\right)\times \\ \times\exp\left(i\,\omega\,\frac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)\,\hat{f}'(\omega)\end{aligned} \tag{9.81}$$

et décroît exponentiellement avec x. Posons

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{x - x_0}{c_1}\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2 - 1} \\
\boldsymbol{\Psi} &= \boldsymbol{V_h}(\omega)\, T(\omega)\, \exp(-\omega\,\varphi)\ \hat{f}'(\omega) \\
\xi_h &= t - \frac{x_0\cos\theta_f + y\sin\theta_f}{c_0}.
\end{aligned}
\tag{9.82}
$$

Nous calculons la transformée de Fourier inverse en temps de (9.81) de façon similaire à (9.72). Etant données les notations (9.82), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U_h}(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Psi}\exp(-i\,\omega\,\xi_h)\,d\,\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Psi}\}\cos\omega\,\xi_g + \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Psi}\}\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega \\
&+i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Psi}\}\cos\omega\,\xi_g - \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Psi}\}\sin\omega\,\xi_g\,d\,\omega.
\end{aligned}
\tag{9.83}
$$

Nous remarquons $\boldsymbol{\Psi}(-\omega) = \boldsymbol{\Psi}^*(\omega)$, ce qui conduit à

$$
\boldsymbol{U_h}(x,y,t) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\ \{\boldsymbol{\Psi}\}\cos\omega\,\xi_h + \ \mathrm{Im}\ \{\boldsymbol{\Psi}\}\sin\omega\,\xi_h\,d\,\omega.
\tag{9.84}
$$

Nous écrivons explicitement $\boldsymbol{\Psi}$ à partir de (9.79), et (9.82)

$$
\boldsymbol{\Psi}(\omega) = (\ \mathrm{Re}\ \{\boldsymbol{V_h}\} + i\ \ \mathrm{Im}\ \{\boldsymbol{V_h}\})\,(\ \mathrm{Re}\ \{T\} + i\ \ \mathrm{Im}\ \{T\})\,\frac{1}{2\,\pi}\exp(-\omega\,(\tau+\varphi)).
\tag{9.85}
$$

Le calcul de $\boldsymbol{U_h}(x,y,t)$ (9.84) revient alors à

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U_h}(x,y,t) = &- \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{E}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2 - 1} \\ D\,\dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ D\,\rho_1 \end{pmatrix}\int_0^{+\infty}\exp(-\omega(\tau+\varphi))\cos\omega\,\xi_h\,d\,\omega \\
&+ \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} -\dfrac{D}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2 - 1} \\ E\,\dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ E\,\rho_1 \end{pmatrix}\int_0^{+\infty}\exp(-\omega(\tau+\varphi))\sin\omega\,\xi_h\,d\,\omega.
\end{aligned}
\tag{9.86}
$$

Les deux intégrales figurant dans (9.86) sont déjà calculées en (9.77). Le champs transmis s'écrit alors

(9.87)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{U_h}(x,y,t) = 1/\pi\times \\
&-\begin{pmatrix} \dfrac{E}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1} \\ D\,\dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ D\,\rho_1 \end{pmatrix} \frac{\tau+\dfrac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}}{\left(\tau+\dfrac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}\right)^2+\left(t-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)^2} \\
&+\begin{pmatrix} -\dfrac{D}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1} \\ E\,\dfrac{\sin\theta_f}{c_0} \\ E\,\rho_1 \end{pmatrix} \frac{t-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}}{\left(\tau+\dfrac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}\right)^2+\left(t-\dfrac{x_0\cos\theta_f+y\sin\theta_f}{c_0}\right)^2},
\end{aligned}}$$

avec D et E donnés en (9.61). La forme du champs incident n'a rien à voir avec celle du champs incident. A la différence de $\hat{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{h}}$, $\boldsymbol{U_h}$ décroît seulement en $1/x$. A un instant donné, les composantes du champs transmis sont de signe constant de part et d'autre de droites déduites de (9.87). En particulier, la droite d'équation

$$y = \frac{c_0\left(t-\dfrac{D}{E}\left(\tau+\dfrac{x-x_0}{c_1}\sqrt{\left(\dfrac{c_1}{c_0}\sin\theta_f\right)^2-1}\right)\right)-x_0\cos\theta_f}{\sin\theta_f} \tag{9.88}$$

est le lieu des points de pression nulle.

Exemple numérique. Nous illustrons ici les calculs menés au-delà de l'angle critique. Pour cela, nous considérons deux milieux fluides, de paramètres physiques

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, & c_0 = 1500\,\mathrm{m/s}, \\ \rho_1 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, & c_1 = 2800\,\mathrm{m/s}, \end{cases} \tag{9.89}$$

séparés par une interface plane inclinée, faisant un angle de 80 degrés avec l'axe Ox. Une onde plane incidente dont le vecteur directeur fait un angle $\theta_f = 51$ degrés avec l'axe Ox correspond à un cas d'incidence au-delà de l'angle critique. Le potentiel de l'onde plane incidente est donné par (9.64). Nous calculons la pression acoustique des ondes réfléchies et transmises à partir de (9.78) et (9.87). Toutefois, nous avons mené les calculs pour une interface plane verticale. Dans le cas qui nous intéresse ici d'une interface plane faisant un angle θ avec l'axe Ox, on utilise les formules classiques de changement de repère pour des tenseurs d'ordre 0 et 1, que nous résumons

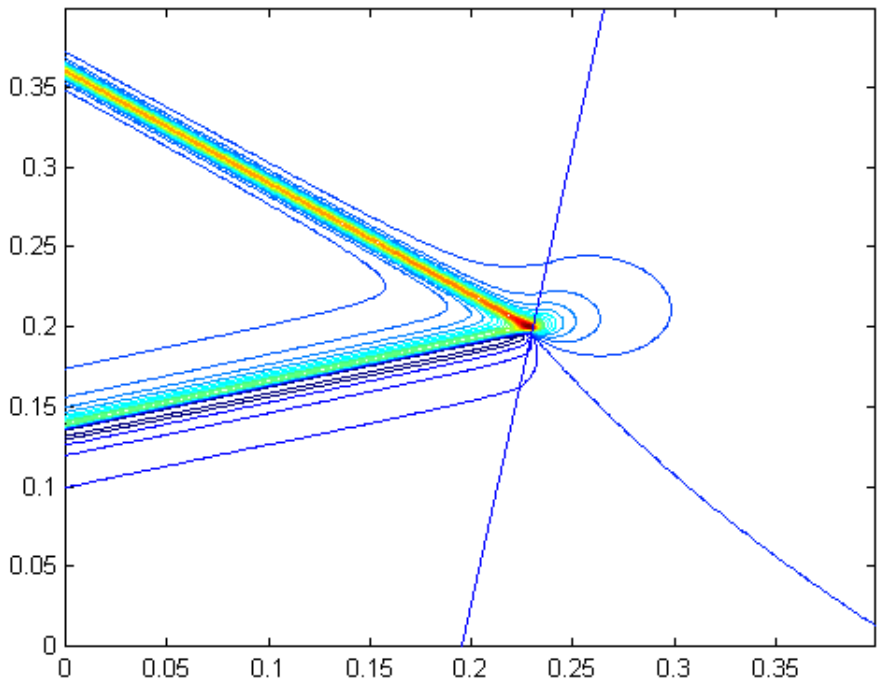

FIG. 9.5 – *Isovaleurs de la pression acoustique au-delà de l'angle critique. La droite oblique représente l'interface plane.*

en écrivant [26]

$$\begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}. \tag{9.90}$$

Les grandeurs surmontées d'un trait dans (9.90) correspondent aux grandeurs calculées dans le repère lié à l'interface ; les grandeurs sans traits sont écrites dans le repère qui nous intéresse maintenant, soit le repère Oxy.

En figure 9.5, nous présentons les isovaleurs de la pression acoustique. La représentation 3D de la pression acoustique, proposée en figure 9.6, est instructive sur plusieurs points. Tout d'abord, on observe que la pression acoustique correspondant à l'onde réfléchie présente des valeurs négatives, alors que la pression acoustique incidente est toujours positive : cela illustre le fait que les ondes incidente et réfléchie n'ont pas la même forme. D'autre part, on observe la décroissance très rapide de l'onde plane non homogène transmise (en $1/x^2$).

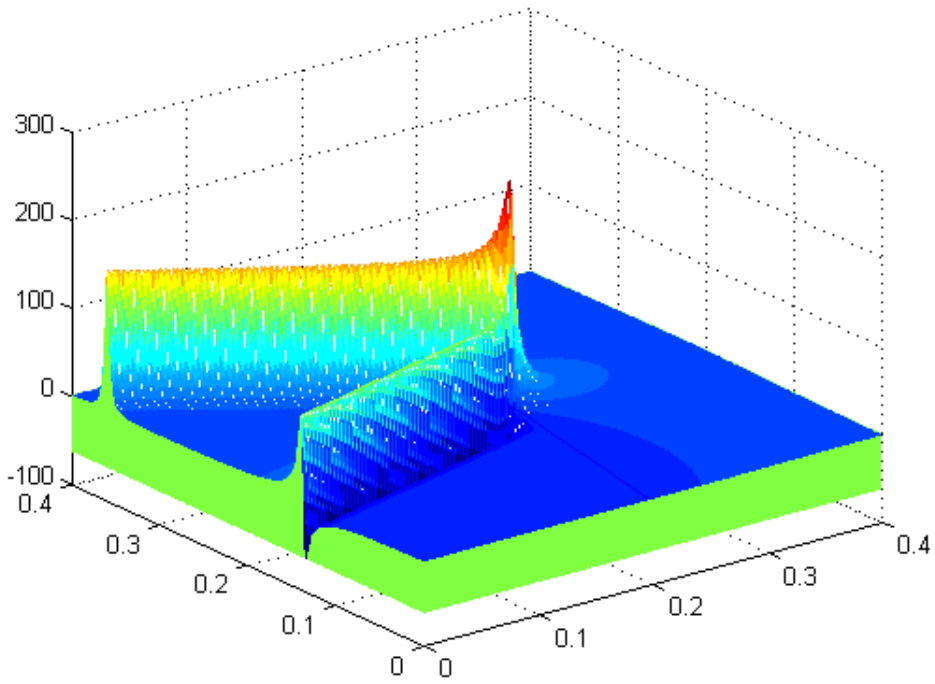

FIG. 9.6 – *Vue 3D de la pression acoustique au-delà de l'angle critique.*

9.5.6 Conditions de saut supplémentaires

Au chapitre 6, nous calculons une condition de saut supplémentaire (6.28) à partir des conditions de saut naturelles entre deux fluides (6.9). Nous cherchons ici à retrouver (6.28) pour un champ particulier d'ondes, i.e. les ondes planes étudiées dans la section précédente. Considérons l'interface plane verticale présentée en figure 9.4. Les conditions de saut naturelles (6.9) ont permis de calculer les coefficients de réflexion et de transmission, et ainsi de caractériser totalement la solution $\boldsymbol{U}(x,y,t) = {}^T(v_1,v_2,p)$ en tout point du domaine. Les composantes v_1 et v_2 étant ainsi connues, nous cherchons une deuxième condition de saut vérifiée par ces composantes, et indépendante de (6.9). A priori, on cherche cette condition de saut supplémentaire sous la forme

$$[K\, v_1 + L\, v_2] = 0, \tag{9.91}$$

où les fonctions $K(x,y)$ et $L(x,y)$ sont constantes par morceaux et s'écrivent

$$(K,L) = \begin{cases} (K_0,L_0) \text{ si } M(x,y) \in \Omega_0, \\ \\ (K_1,L_1) \text{ si } M(x,y) \in \Omega_1. \end{cases} \tag{9.92}$$

Le but du calcul qui suit est de déterminer K et L. A partir des expressions de v_1 et v_2 explicitées en (9.45), la condition de saut (9.91) s'écrit

$$\left(K_1\ (p_{h1x} + i\, p_{h2x}) + L_1 \frac{\sin\theta_f}{c_0}\right)\ h^{'}\left(t - x_0\ (p_{h1x} + i\ p_{h2x}) - y\,\frac{\sin\theta_f}{c_0}\right)$$

$$= K_0\,\frac{\cos\theta_f}{c_0}\left(f^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_f + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right) - g^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_g + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right)\right) \tag{9.93}$$

$$+L_0\,\frac{\sin\theta_f}{c_0}\ \left(f^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_f + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right) + g^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_g + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right)\right).$$

D'autre part, les conditions de saut (6.9) conduisent au système de deux équations (9.48), réécrit ici sous la forme

$$\frac{\cos\theta_f}{c_0}\left(f^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_f + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right) - g^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_g + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right)\right)$$

$$= (p_{h1x} + i\, p_{h2x})\ h^{'}\left(t - x_0\ (p_{h1x} + i\ p_{h2x}) - y\,\frac{\sin\theta_f}{c_0}\right),$$

(9.94)

$$f^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_f + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right) + g^{'}\left(t - \frac{x_0\ \cos\theta_g + y\ \sin\theta_f}{c_0}\right)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\,h^{'}\left(t - x_0\ (p_{h1x} + i\ p_{h2x}) - y\,\frac{\sin\theta_f}{c_0}\right).$$

Après quelques manipulations algébriques, on déduit de (9.93) et (9.94) l'équation

(9.95)

$$\left((K_1 - K_0)\ (p_{h1x} + i\, p_{h2x}) + \left(L_1 - L_0\,\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\ \frac{\sin\theta_f}{c_0}\right)\ h^{'}\left(t - x_0\ (p_{h1x} + i\ p_{h2x}) - y\,\frac{\sin\theta_f}{c_0}\right) = 0.$$

L'équation (9.96) est vérifiée pour tout angle d'incidence θ_f et à tout instant ; l'application $h^{'}$ n'étant pas identiquement nulle, nous déduisons que le terme en facteur est identiquement nul, soit

$$\left\{\begin{array}{l} K_1 = K_0 \\ \\ L_1 = L_0\,\dfrac{\rho_1}{\rho_0} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} K = \alpha, \\ \\ L = \beta\,\rho, \end{array}\right. \tag{9.96}$$

avec α et β constants. Reportées dans (9.91), les valeurs de K et L conduisent à

$$[\alpha\, v_1 + \beta\,\rho\, v_2] = \alpha\,[v_1] + \beta\ [\rho\, v_2] = 0. \tag{9.97}$$

Comme $[v_1] = 0$, la condition (9.97) s'écrit

$$[\rho\, v_2] = 0. \tag{9.98}$$

Passons au cas plus général d'une interface plane inclinée de θ par rapport à l'axe Ox. A partir de (6.1), on a directement

$$\cos\theta = \frac{x^{'}}{\sqrt{x^{'2} + y^{'2}}}, \quad \sin\theta = \frac{y^{'}}{\sqrt{x^{'2} + y^{'2}}}. \tag{9.99}$$

Il suffit alors d'appliquer à (9.98) les formules de changement de repère (9.90) munies de (9.99). On retrouve ainsi la condition de saut supplémentaire (6.28)

$$\left[\rho\, x^{'} v_1 + \rho\, y^{'} v_2\right] = 0. \tag{9.100}$$

9.6 Interface parfaite solide-solide 2D

9.6.1 Introduction

Considérons une onde plane P incidente, dont le vecteur d'onde fait l'angle i_0 avec l'axe Ox, et une interface plane verticale située en $x = x_0$ (figure 9.7). Nous déterminons ici les ondes P et SV réfléchies et transmises. A la différence du cas fluide-fluide, nous considérons seulement les cas d'incidence en-dessous des angles critiques. En conséquence de quoi, nous utilisons le formalisme des ondes planes homogènes.

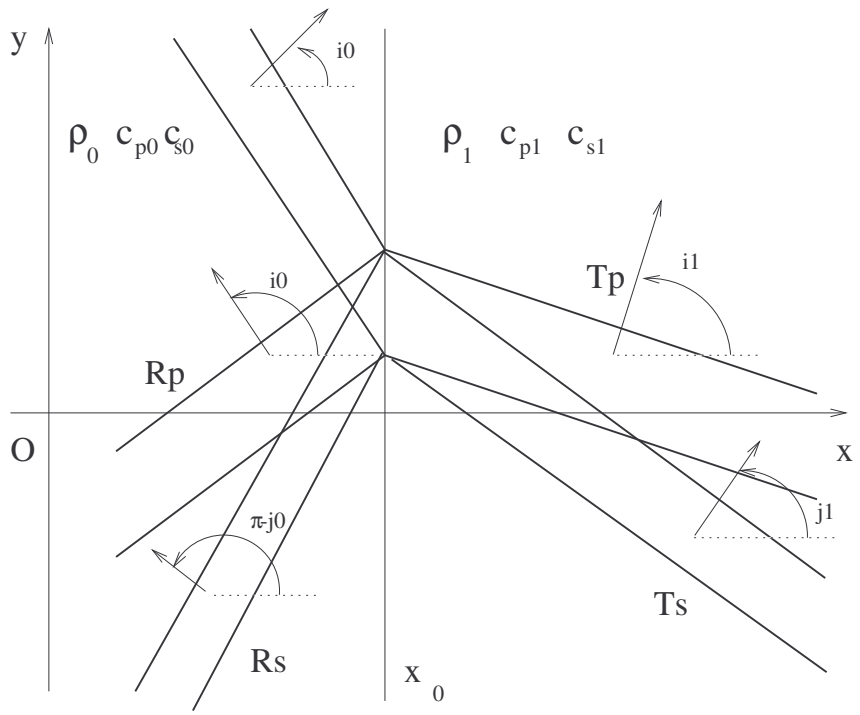

FIG. 9.7 – *Ondes planes incidente, réfléchies et transmises à l'interface plane entre deux solides.*

9.6.2 Coefficients de réflexion et de transmission

Nous écrivons les potentiels scalaires et les potentiels vecteurs des ondes P et SV incidente, réfléchies et transmises

$$
\begin{aligned}
\Phi_{IP}(x,y,t) &= \Phi_{IP}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}_{IP}.\boldsymbol{OM}}{c_{p0}}\right),\\
\Phi_{RP}(x,y,t) &= \Phi_{RP}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}_{RP}.\boldsymbol{OM}}{c_{p0}}\right),\\
\boldsymbol{\Psi}_{RS}(x,y,t) &= \boldsymbol{\Pi}\,\Psi_{RS}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}_{RS}.\boldsymbol{OM}}{c_{s0}}\right),\\
\Phi_{TP}(x,y,t) &= \Phi_{TP}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}_{TP}.\boldsymbol{OM}}{c_{p1}}\right),\\
\boldsymbol{\Psi}_{TS}(x,y,t) &= \boldsymbol{\Pi}\,\Psi_{TS}\left(t - \frac{\boldsymbol{n}_{TS}.\boldsymbol{OM}}{c_{s1}}\right),
\end{aligned}
\tag{9.101}
$$

avec les vecteurs d'onde

(9.102)

$$
\boldsymbol{n}_{IP} = \begin{pmatrix} \cos i_0 \\ \sin i_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_{RP} = \begin{pmatrix} -\cos i_0 \\ \sin i_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_{RS} = \begin{pmatrix} \cos j_0 \\ \sin j_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_{TP} = \begin{pmatrix} \cos i_1 \\ \sin i_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_{TS} = \begin{pmatrix} \cos j_1 \\ \sin j_1 \end{pmatrix}.
$$

Les indices I, R et T désignent respectivement les ondes incidente, réfléchies et transmises ; les indices P et S désignent les ondes P et SV. Le vecteur de polarisation $\boldsymbol{\Pi}$ est défini par $\boldsymbol{\Pi} = {}^T(0,0,1)$. Les déplacements élastiques $\boldsymbol{u}$ associés à un potentiel scalaire Φ (pour une onde P) ou à un potentiel vecteur $\boldsymbol{\Psi}$ (pour une onde SV) s'écrivent respectivement

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\nabla}\,\Phi,\\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\Psi}.
\end{aligned}
\tag{9.103}
$$

Après des calculs classiques d'élastodynamique [24], on obtient les solutions associées à chaque type d'onde, soit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_{IP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{IP}\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x\,\cos i_0 + y\,\sin i_0}{c_{p0}}\right),\\
\boldsymbol{U}_{RP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{RP}\,\Phi''_{RP}\left(t - \frac{-x\,\cos i_0 + y\,\sin i_0}{c_{p0}}\right),\\
\boldsymbol{U}_{RS}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{RS}\,\Psi''_{RS}\left(t - \frac{x\,\cos j_0 + y\,\sin j_0}{c_{s0}}\right),\\
\boldsymbol{U}_{TP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{TP}\,\Phi''_{TP}\left(t - \frac{x\,\cos i_1 + y\,\sin i_1}{c_{p1}}\right),\\
\boldsymbol{U}_{TS}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{TS}\,\Psi''_{TS}\left(t - \frac{x\,\cos j_1 + y\,\sin j_1}{c_{s1}}\right),
\end{aligned}
\tag{9.104}
$$

avec

(9.105)
$$\boldsymbol{V}_{IP} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos i_0}{c_{p0}} \\ -\dfrac{\sin i_0}{c_{p0}} \\ \dfrac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\cos^2 i_0}{c_{p0}^2} \\ \dfrac{2\,\mu_0\,\sin i_0\,\cos i_0}{c_{p0}^2} \\ \dfrac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\sin^2 i_0}{c_{p0}^2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_{RP} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos i_0}{c_{p0}} \\ -\dfrac{\sin i_0}{c_{p0}} \\ \dfrac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\cos^2 i_0}{c_{p0}^2} \\ -\dfrac{2\,\mu_0\,\sin i_0\,\cos i_0}{c_{p0}^2} \\ \dfrac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\sin^2 i_0}{c_{p0}^2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_{RS} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin j_0}{c_{s0}} \\ \dfrac{\cos j_0}{c_{s0}} \\ \dfrac{2\,\mu_0\,\sin j_0\,\cos j_0}{c_{s0}^2} \\ \dfrac{\mu_0}{c_{s0}^2}\left(\sin^2 j_0 - \cos^2 j_0\right) \\ -\dfrac{2\,\mu_0\,\sin j_0\,\cos j_0}{c_{s0}^2} \end{pmatrix},$$

et

(9.106)
$$\boldsymbol{V}_{TP} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos i_1}{c_{p1}} \\ -\dfrac{\sin i_1}{c_{p1}} \\ \dfrac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2} \\ \dfrac{2\,\mu_1\,\sin i_1\,\cos i_1}{c_{p1}^2} \\ \dfrac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\sin^2 i_1}{c_{p1}^2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_{RS} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin j_1}{c_{s1}} \\ \dfrac{\cos j_1}{c_{s1}} \\ \dfrac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2} \\ \dfrac{\mu_1}{c_{s1}^2}\left(\sin^2 j_1 - \cos^2 j_1\right) \\ -\dfrac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2} \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons à exprimer Φ''_{RP}, Ψ''_{Rs}, Φ''_{TP} et Φ''_{TS} en fonction du potentiel scalaire Φ''_{IP} de l'onde incidente. Les conditions de saut entre deux solides élastiques parfaitement collés, vues au chapitre 6, s'écrivent ici

(9.107)
$$[v_1] = 0, \quad [v_2] = 0, \quad [\sigma_{11}] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0.$$

Ces conditions étant vérifiées à tout instant en $x = x_0$, on déduit de (9.104) les coefficients de réflexion et de transmission R_P, R_S, T_P et T_S des ondes P et SV tels que

$$
\begin{aligned}
&\Phi''_{RP}\left(t - \frac{-x_0\,\cos i_0}{c_{p0}}\right) = R_P\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_{p0}}\right),\\
&\Psi''_{RS}\left(t - \frac{x_0\,\cos j_0}{c_{s1}}\right) = R_S\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_{p0}}\right),\\
&\Phi''_{TP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_1}{c_{p1}}\right) = T_P\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_{p0}}\right),\\
&\Psi''_{TS}\left(t - \frac{x_0\,\cos j_1}{c_{s1}}\right) = T_S\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_{p0}}\right).
\end{aligned}
\tag{9.108}
$$

On reporte alors les expressions (9.108) dans (9.104) et (9.105) ; les conditions de saut (9.107) conduisent alors à un système de quatre équations à quatre inconnues

(9.109)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{\cos i_0}{c_{p0}}\,R_P - \frac{\sin j_0}{c_{s0}}\,R_S + \frac{\cos i_1}{c_{p1}}\,T_P + \frac{\sin j_1}{c_{s1}}\,T_S = \frac{\cos i_0}{c_{p0}},\\
&-\frac{\sin i_0}{c_{p0}}\,R_P + \frac{\cos j_0}{c_{s0}}\,R_S + \frac{\sin i_1}{c_{p1}}\,T_P - \frac{\cos j_1}{c_{s1}}\,T_S = \frac{\sin i_0}{c_{p0}},\\
&\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\cos^2 i_0}{c_{p0}^2}\,R_P + \frac{2\,\mu_0\,\sin j_0\,\cos j_0}{c_{s0}^2}\,R_S - \frac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2}\,T_P - \frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\,T_S\\
&\qquad = -\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0\,\cos^2 i_0}{c_{p0}^2},\\
&-\frac{2\,\mu_0\,\sin i_0\,\cos i_0}{c_{p0}^2}\,R_P + \frac{\mu_0}{c_{s0}^2}\left(\sin^2 j_0 - \cos^2 j_0\right)\,R_S - \frac{2\,\mu_1\,\sin i_1\,\cos i_1}{c_{p1}^2}\,T_P\\
&\qquad -\frac{\mu_1}{c_{s1}^2}\left(\sin^2 j_1 - \cos^2 j_1\right)T_S = -\frac{2\,\mu_0\,\sin i_0\,\cos i_0}{c_{p0}^2}.
\end{aligned}
}
$$

La résolution analytique du système (9.109) est lourde. Le lecteur intéressé peut trouver les expressions de R_P, R_S, T_P et T_S dans Aki [2]. Pour les besoins du chapitre 10, il nous suffit d'inverser numériquement (9.109). On déduit finalement les potentiels (9.108), puis les solutions exactes (9.104) en tout point du domaine, soit

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&x \le x_0, \quad \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U}_{IP}(x,y,t) + \boldsymbol{U}_{RP}(x,y,t) + \boldsymbol{U}_{RS}(x,y,t),\\
&x > x_0, \quad \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U}_{TP}(x,y,t) + \boldsymbol{U}_{TS}(x,y,t).
\end{aligned}
}
\tag{9.110}
$$

Les calculs ont été effectués en supposant l'interface plane verticale. Dans le cas d'une interface plane inclinée faisant un angle θ avec l'axe Ox, on utilise les formules classiques de changement

de repère pour les tenseurs d'ordre un (les composantes de la vitesse élastique) et d'ordre deux (les composantes du tenseur des contraintes élastiques), soit

$$\begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\sigma}_{11} \\ \overline{\sigma}_{12} \\ \overline{\sigma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix}, \tag{9.111}$$

en adoptant les mêmes conventions d'écriture que pour (9.90).

9.6.3 Conditions de saut supplémentaires

Les conditions de saut naturelles (6.39) ont été utilisées en section précédente pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission R_P, R_S, T_P et T_S. Ces quantités étant connues, on peut retrouver la condition de saut supplémentaire (6.67). La démonstration est omise ici, car elle suit exactement la démarche adoptée en section 9.5.6 pour retrouver la condition de saut supplémentaire à l'interface fluide-fluide.

9.7 Interface parfaite fluide-solide 2D

9.7.1 Introduction

Nous considérons une onde plane P incidente dans un milieu fluide Ω_0 séparé d'un milieu solide Ω_1 par une interface plane verticale située en $x = x_0$ (figure 9.8). Nous calculons ici le coefficient de réflexion R_P de l'onde P, ainsi que les coefficients de transmission T_P et T_S des ondes P et SV transmises. Comme dans le cas de l'interface solide-solide, nous nous limitons aux cas d'incidence en-dessous des angles critiques.

9.7.2 Coefficients de réflexion et de transmission

Les notations définissant les ondes dans le fluide et dans le solide sont les mêmes que dans les deux sections précédentes, et ne sont pas répétées ici. Des calculs classiques d'élastodynamique

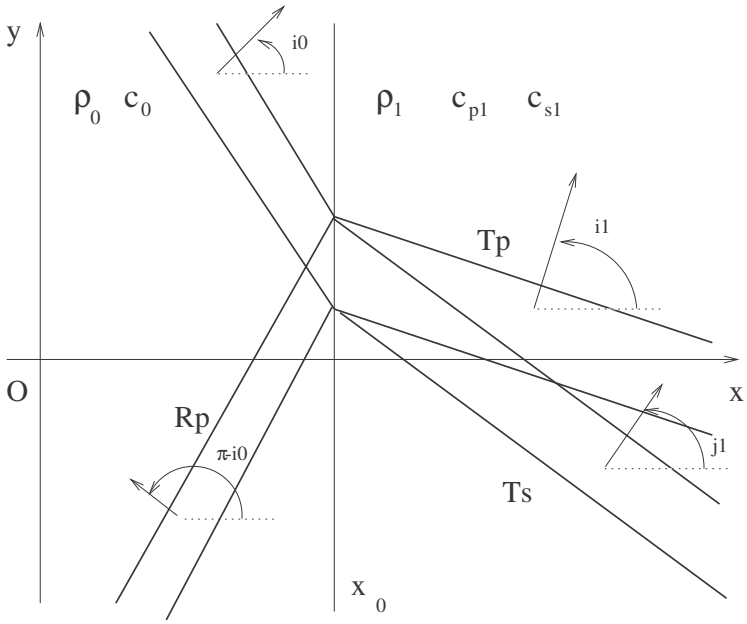

FIG. 9.8 – *Ondes planes incidente, réfléchie et transmises à l'interface fluide-solide.*

conduisent aux solutions associées à chaque type d'onde, soit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_{IP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{IP}\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x\,\cos i_0 + y\,\sin i_0}{c_p}\right),\\
\boldsymbol{U}_{RP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{RP}\,\Phi''_{RP}\left(t - \frac{-x\,\cos i_0 + y\,\sin i_0}{c_p}\right),\\
\boldsymbol{U}_{TP}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{TP}\,\Psi''_{TP}\left(t - \frac{x\,\cos i_1 + y\,\sin i_1}{c_{p1}}\right),\\
\boldsymbol{U}_{TS}(x,y,t) &= \boldsymbol{V}_{TS}\,\Phi''_{TS}\left(t - \frac{x\,\cos j_1 + y\,\sin j_1}{c_{s1}}\right),
\end{aligned}
\tag{9.112}
$$

avec

$$
\boldsymbol{V}_{IP} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\cos i_0}{c_0} \\[2ex] \dfrac{\sin i_0}{c_0} \\[2ex] \rho_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_{RP} = -\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos i_0}{c_0} \\[2ex] \dfrac{\sin i_0}{c_0} \\[2ex] \rho_0 \end{pmatrix},
\tag{9.113}
$$

et

$$\boldsymbol{V}_{TP} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos i_1}{c_{p1}} \\ -\dfrac{\sin i_1}{c_{p1}} \\ \dfrac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2} \\ \dfrac{2\,\mu_1\,\sin i_1\,\cos i_1}{c_{p1}^2} \\ \dfrac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\sin^2 i_1}{c_{p1}^2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_{RS} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin j_1}{c_{s1}} \\ \dfrac{\cos j_1}{c_{s1}} \\ \dfrac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2} \\ \dfrac{\mu_1}{c_{s1}^2}\left(\sin^2 j_1 - \cos^2 j_1\right) \\ -\dfrac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2} \end{pmatrix}. \tag{9.114}$$

Pour une interface plane verticale, les conditions vérifiées aux interfaces s'écrivent

$$[v_1] = 0, \quad -p^- = \sigma_{11}^+, \quad 0 = \sigma_{12}^+. \tag{9.115}$$

Les conditions (9.115) sont vérifiées à tout instant en $x = x_0$, conduisant aux relations de Descartes

$$\frac{\sin i_1}{c_{p1}} = \frac{\sin j_1}{c_{s1}} = \frac{\sin i_0}{c_0}. \tag{9.116}$$

On définit alors les coefficients de réflexion et de transmission R_P, T_P et T_S des ondes P et SV tels que

$$\begin{aligned} \Phi''_{RP}\left(t - \frac{-x_0\,\cos i_0}{c_0}\right) &= R_P\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_0}\right), \\ \Phi''_{TP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_1}{c_{p1}}\right) &= T_P\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_0}\right), \\ \Psi''_{TS}\left(t - \frac{x_0\,\cos j_1}{c_{s1}}\right) &= T_S\,\Phi''_{IP}\left(t - \frac{x_0\,\cos i_0}{c_0}\right). \end{aligned} \tag{9.117}$$

On reporte alors les écritures (9.117) dans (9.112) et (9.114); les conditions de saut (9.115) conduisent alors à un système de trois équations à trois inconnues

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\cos i_0}{c_0}\,R_P + \frac{\cos i_1}{c_{p1}}\,T_P + \frac{\sin j_1}{c_0}\,T_S = \frac{\cos i_0}{c_0}, \\ &\rho_0\,R_P - \frac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2}\,T_P - \frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\,T_S = -\rho_0, \\ &\frac{2\,\mu_1\,\sin i_1\,\cos i_1}{c_{p1}^2}\,T_P + \frac{\mu_1}{c_{s1}^2}\left(\sin^2 j_1 - \cos^2 j_1\right)\,T_S = 0. \end{aligned}} \tag{9.118}$$

En pratique, on résoud le système (9.118) numériquement. La solution analytique $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ en tout point du domaine s'écrit alors finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \leq x_0, & \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U}_{IP}(x,y,t) + \boldsymbol{U}_{RP}(x,y,t), \\ \\ x > x_0, & \boldsymbol{U}(x,y,t) = \boldsymbol{U}_{TP}(x,y,t) + \boldsymbol{U}_{TS}(x,y,t). \end{array}} \tag{9.119}$$

Pour passer au cas d'une interface plane inclinée, il suffit d'appliquer les formules de changement de repère (9.90) et (9.111).

9.7.3 Conditions de saut supplémentaires

Au chapitre 6, nous n'avons pas trouvé de conditions de saut supplémentaires dans le cas de l'interface fluide-solide. Pour confirmer cette absence, nous examinons une configuration particulière, à savoir : les ondes planes incidente, réfléchie et transmises par une interface plane, calculées dans la section précédente. Cette idée est motivée par le fait que, dans les cas particuliers d'interfaces planes fluide-fluide et solide-solide en contact parfait, nous avons retrouvé les conditions de saut supplémentaires correspondant à ces configurations. Rappelons que, dans ces deux cas, on trouve une condition de saut supplémentaire *indépendante de l'angle d'incidence.*

Pour une interface plane fluide-solide, nous cherchons deux conditions de saut supplémentaires, portant sur v_2 et sur σ_{22} (voir (9.115)). Nous examinons ici le cas de σ_{22}. A priori, nous cherchons à relier cette grandeur à p, σ_{11} et σ_{12}. On écrit alors

$$\alpha\, p^- = \beta\, \sigma_{11}^+ + \gamma\, \sigma_{12}^+ + \delta\, \sigma_{22}^+, \tag{9.120}$$

où α, β, γ et δ sont des constantes. Vu les conditions de saut (9.115), l'équation (9.120) revient à chercher K et L tels que

$$K\, \sigma_{11}^+ = L\, \sigma_{22}^+ \tag{9.121}$$

(il suffit de considérer $K = \alpha + \beta$ et $L = -\delta$). Les expressions de σ_{11}^+ et σ_{22}^+ sont déduites de (9.112), (9.114) et (9.117), soit

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^+ &= \left(\frac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\, \cos^2 i_1}{c_{p1}^2}\, T_P + \frac{2\,\mu_1\, \sin\, j_1\, \cos\, j_1}{c_{s1}^2}\, T_S \right) \Phi_{IP}'' \left(t - \frac{x_0\, \cos i_0}{c_0} \right), \\ \sigma_{22}^+ &= \left(\frac{\lambda_1 + 2\,\mu_1\, \sin^2 i_1}{c_{p1}^2}\, T_P - \frac{2\,\mu_1\, \sin\, j_1\, \cos\, j_1}{c_{s1}^2}\, T_S \right) \Phi_{IP}'' \left(t - \frac{x_0\, \cos i_0}{c_0} \right). \end{aligned} \tag{9.122}$$

A partir de la troisième équation du système (9.118), on peut relier les valeurs de T_P et T_S. On distingue deux cas, suivant la valeur de i_0. Pour $i_0 = 0$ (incidence normale), on montre facilement que T_S est nul ; T_P revient alors au coefficient de transmission 1D (9.5). La relation (9.121) est alors vérifiée pour $K = L$. Pour $i_0 \neq 0$, on a

$$T_P = \frac{\cos^2 j_1 - \sin^2 j_1}{2\, \sin i_1\, \cos i_1}\, T_S, \tag{9.123}$$

le dénominateur de (9.123) étant non nul. On reporte alors (9.122) et (9.123) dans (9.121), ce qui conduit à

(9.124)
$$K\left(\frac{\lambda_1+2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2}\,\frac{\cos^2 j_1-\sin^2 j_1}{2\,\sin i_1\,\cos i_1}+\frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\right)T_S\,\Phi''_{IP}\left(t-\frac{x_0\,\cos i_0}{c_0}\right)$$
$$=L\left(\frac{\lambda_1+2\,\mu_1\,\sin^2 i_1}{c_{p1}^2}\,\frac{\cos^2 j_1-\sin^2 j_1}{2\,\sin i_1\,\cos i_1}-\frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\right)T_S\,\Phi''_{IP}\left(t-\frac{x_0\,\cos i_0}{c_0}\right),$$

soit, pour $T_S\neq 0$ et $\Phi''(t-\frac{x_0\,\cos i_0}{c_0})\neq 0$,

(9.125)
$$K\left(\frac{\lambda_1+2\,\mu_1\,\cos^2 i_1}{c_{p1}^2}\,\frac{\cos^2 j_1-\sin^2 j_1}{2\,\sin i_1\,\cos i_1}+\frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\right)$$
$$=L\left(\frac{\lambda_1+2\,\mu_1\,\sin^2 i_1}{c_{p1}^2}\,\frac{\cos^2 j_1-\sin^2 j_1}{2\,\sin i_1\,\cos i_1}-\frac{2\,\mu_1\,\sin j_1\,\cos j_1}{c_{s1}^2}\right).$$

A partir des relations de Descartes (9.116) et de (9.125), on obtient l'équation

$$K\,f(i_0)=L\,g(i_0) \tag{9.126}$$

avec

(9.127)
$$\begin{aligned}
f(i_0) &= \frac{\lambda_1+2\,\mu_1\left(1-\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2\right)}{c_{p1}^2}\,\frac{1-2\left(\frac{c_{s1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}{2\,\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\sqrt{1-\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}}\\
&+ \frac{2\,\mu_1\,\sin i_0}{c_0\,c_{s1}}\sqrt{1-\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2},\\
g(i_0) &= \frac{\lambda_1+2\,\mu_1\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}{c_{p1}^2}\,\frac{1-2\left(\frac{c_{s1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}{2\,\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\sqrt{1-\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}}\\
&- \frac{2\,\mu_1\,\sin i_0}{c_0\,c_{s1}}\sqrt{1-\left(\frac{c_{p1}}{c_0}\,\sin i_0\right)^2}.
\end{aligned}$$

Les fonctions $f(i_0)$ et $g(i_0)$ ne sont pas égales. L'égalité (9.126) n'est alors possible que si K et L sont des fonctions de i_0, ce qui implique que la condition de saut supplémentaire (9.121) *dépend de l'angle d'incidence* i_0. En suivant une démarche semblable, on obtient aussi une condition de saut supplémentaire portant sur v_2, dont on montre qu'elle dépend de l'angle d'incidence.

Pour une solution $\boldsymbol{U}(x,y,t)$ et une interface fluide-solide quelconque, nous ne pouvons alors pas obtenir de conditions de saut supplémentaires indépendantes de la solution. Pour être complet,

il reste un point que nous n'avons pas examiné : existe-t-il des conditions de saut reliant v_1, v_2 et σ_{11}, σ_{22} ? Ce point est actuellement à l'étude.

Chapitre 10

Expériences numériques

10.1 Objet du chapitre

A ce niveau de l'étude, il reste à vérifier numériquement les propriétés de la méthode d'interface développée précédemment. Pour cela, nous réunissons les différents outils : les interfaces 1D et 2D, de propriétés physiques et géométriques variées (chapitres 5 et 6), sont greffées aux schémas numériques construits en milieu homogène sur un maillage régulier (chapitre 4) via l'Explicit Simplified Interface Method (ou ESIM, vue aux chapitres 7 et 8).

Les validations numériques portent sur trois points. Premièrement, nous disposons de solutions analytiques (chapitre 9). Lors des expériences numériques, nous mesurons alors systématiquement les ordres de convergence des schémas couplés ou non à l'ESIM. Deuxièmement, nous envisageons différents contrastes des paramètres physiques, et différentes positions des interfaces par rapport aux noeuds du maillage. Nous montrons en particulier que l'ESIM stabilise les schémas numériques dans le cas de contrastes extrêmes. Troisièmement, nous vérifions dans le cas limite d'un milieu homogène que les schémas couplés à l'ESIM coïncident avec les schémas en l'absence d'interfaces.

10.2 Expériences 1D

10.2.1 Introduction

Nous illustrons ici en 1D le couplage des schémas numériques, vus au chapitre 4, et de la méthode d'interface, vue au chapitre 7, et ce pour différents types d'interfaces. Avant d'aborder les expériences proprement dites, nous précisons ici le protocole expérimentale.

Mesures de convergence. Pour mesurer les ordres de convergence vers les solutions analytiques, nous procédons de façon classique. Considérons une composante de $\boldsymbol{U}_i^n$, par exemple la contrainte élastique σ_i^n. Etant donné un nombre de points de calcul k, on définit les mesures

d'erreur $\| E_k \|$ en norme L_1 et L_∞ par

$$\begin{aligned} \| E_k \|_1 &= \Delta x \sum_{i=1}^{k} \|\sigma(x_i,t_n) - \sigma_i^n\|, \\ \| E_k \|_\infty &= \max_{1\le i\le k} \|\sigma(x_i,t_n) - \sigma_i^n\|. \end{aligned} \tag{10.1}$$

L'estimation numérique de l'ordre r_N, déduit des mesures d'erreur pour $k = N$ et $k = M$ points, s'écrit

$$r_N = \frac{\log\left(\dfrac{\| E_N \|}{\| E_M \|}\right)}{\log\left(\dfrac{M}{N}\right)}. \tag{10.2}$$

En pratique, on prend $M = 2\,N$. Les calculs sont effectués en double précision sur un Pentium PC à 200 MHz. Dans le cas particulier du schéma WENO 5, on prend $\Delta t = (\Delta x)^{5/4}/c$ (où c est la plus grande vitesse des ondes dans le domaine), de sorte que l'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre conduise effectivement à un schéma d'ordre cinq en temps et en espace.

Conditions aux bords. Pour simuler la propagation des ondes en milieu infini, et éviter les réflexions parasites aux bords du domaine, nous ne calculons pas l'avancée en temps des schémas aux points x_i tels que $0 \le i \le s$ et $N - s + 1 \le i \le N$, où s est la largeur du schéma utilisé. Cela revient à imposer $\boldsymbol{U}_i^n = \boldsymbol{0}$ en ces points, conduisant à des conditions d'onde sortante parfaitement efficaces : les ondes sont intégralement transmises à l'extérieur du domaine.

Initialisation des calculs. Pour la plupart des expériences, nous initialisons le calcul dans le milieu Ω_0 (soit à gauche de la première interface) en imposant la solution

$$\boldsymbol{U}_0(x) = \boldsymbol{U}(x,t_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c_0} \\ \\ \rho_0 \end{pmatrix} f_0''\left(t_0 - \frac{x}{c_0}\right) \tag{10.3}$$

à l'instant initial t_0, où ρ_0 et c_0 sont la masse volumique et la célérité des ondes dans le milieu Ω_0, et f_0'' est une fonction suffisamment régulière. Au chapitre 9, nous montrons que cette solution (10.3) correspond à une onde incidente se propageant suivant les x croissants. L'instant initial t_0 peut être non nul, pour que le support de l'onde appartienne au domaine de calcul.

La fonction f_0'' choisie est une sinusoïde tronquée. Pour obtenir un raccord à zéro suffisamment régulier, nous considérons en pratique une combinaison linéaire de sinus, soit

$$f_0''(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k \sin(\beta_k\,\omega_c\,\xi) & \text{si } 0 < \xi < \dfrac{1}{f_c}, \\ \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases} \tag{10.4}$$

avec $\beta_k = 2^{k-1}$ et $f_c = \omega_c/(2\,\pi)$; a_k et q dépendent de la régularité souhaitée pour $\boldsymbol{U}_0(x)$. Les valeurs $q = 2$, $a_1 = 1$ et $a_2 = -1/2$, utilisées dans [35], conduisent à une fonction $\boldsymbol{U}_0(x)$ de

k	1	2	3	4
a_k	1	$-\frac{21}{32}$	$\frac{63}{768}$	$-\frac{1}{512}$
b_k	- 1	$\frac{21}{64}$	$-\frac{63}{3072}$	$\frac{1}{4096}$

TAB. 10.1 – *Coefficients a_k et b_k de la fonction $f_0''(\xi)$ utilisée pour l'initialisation ($q = 4$).*

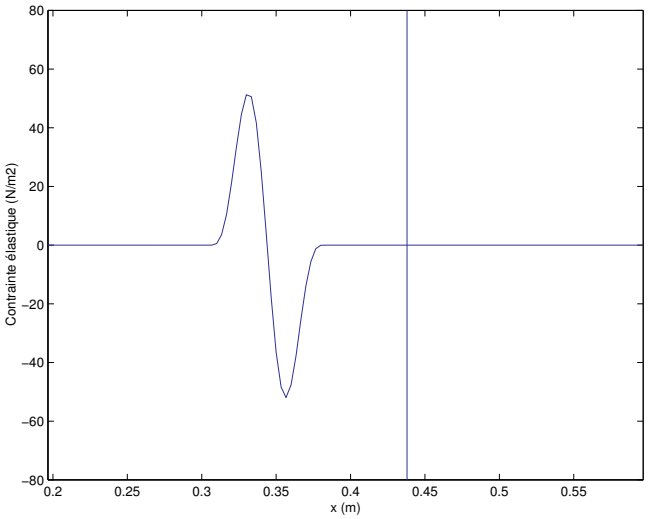

FIG. 10.1 – *Contrainte élastique à l'initialisation.*

classe C^2. Pour construire une fonction $\boldsymbol{U}_0(x)$ de classe C^5 (ce qui est nécessaire pour mesurer l'ordre 5 avec le schéma WENO 5), nous utilisons pour toutes les simulations $q = 4$. Des calculs élémentaires conduisent alors aux valeurs de a_k recensées dans le tableau 10.1. Le choix de la fonction (10.4) présente deux avantages par rapport aux gaussiennes classiquement utilisées [38]. D'une part, cette fonction est plus réaliste d'un point de vue physique. D'autre part, elle conduit à des diagnostics impitoyables : les défauts de schémas, comme la dispersion numérique ou la diffusion numérique, sont particulièrement bien mis en évidence. Nous présentons en figure 10.1 la contrainte élastique déduite de (10.3) et (10.4). La transformée de Fourier de (10.4), calculée en (9.18), est principalement centrée autour de f_c : nous parlons alors de *fréquence centrale* f_c et de longueur d'onde centrale λ_c, étant entendu que le spectre de $\boldsymbol{U}_0(x)$ est continu.

Pour certaines expériences, nous souhaitons imiter un régime sinusoïdal pur, au lieu de considérer une seule arche de sinusoïde comme (10.4). Pour cela, il suffit a priori d'imposer en un point de calcul une valeur sinusoïdale à la contrainte élastique, conduisant à des ondes montantes (se propageant selon les x croissants) et descendantes (se propageant selon les x décroissants) (figure

10.2 a). Etant données les conditions d'onde sortante imposées aux deux extrémités du domaine de calcul, on observe l'établissement d'un régime sinusoïdal au bout d'un temps suffisamment long.

Cependant, on rencontre une difficulté dans le cas d'un milieu avec interfaces. Le temps d'établissement du régime sinusoïdal est typiquement plus long que le temps mis par les ondes progressives pour se propager de la source à la première interface, puis pour revenir à la source, laquelle continue à émettre des ondes. Sans précautions particulières, la source est alors "dure", au sens où elle agit comme un diffuseur. Le régime établi n'est alors pas un régime sinusoïdal pur.

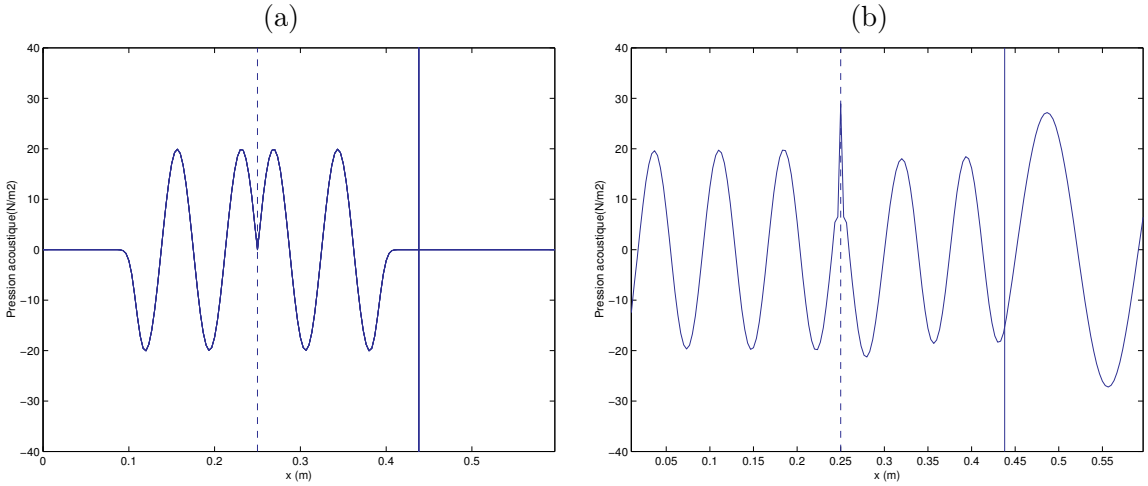

FIG. 10.2 – *Contrainte élastique émise par une source transparente (droite verticale en pointillés), en présence d'une interface (droite verticale en traits pleins) : (a) avant que l'onde progressive ne croise l'interface ; (b) après l'établissement du régime sinusoïdal.*

Une solution à ce problème est d'utiliser des sources "transparentes" développées par [70]. Sans entrer dans les détails techniques, précisons seulement l'idée sous-jacente à cette méthode. A chaque instant, le champ acoustique est obtenu par convolution d'un champ émis par la source en milieu homogène (calculé en prétraitement), et d'un champ calculé par le schéma en présence d'interfaces mais sans source (figure 10.2 b). Les ondes traversent alors la source sans être perturbées par le champ acoustique qui y est imposé.

Nous attirons l'attention du lecteur sur un point non mentionné dans [70] : cette méthode nécessite un schéma *linéaire*, comme le schéma de Yee utilisé dans [70], ou le schéma de Lax-Wendroff utilisé ici. Dans le cas de schémas non linéaires, comme les schémas de volumes finis avec limiteur de flux ou WENO 5, les sources transparentes sont inopérantes. Il reste à développer une méthode plus sophistiquée.

10.2.2 Interface parfaite

Pour illustrer le cas d'une interface parfaite, nous choisissons deux exemples traitant respectivement le cas de contrastes modérés et extrêmes des paramètres physiques. Dans le premier cas, nous insistons sur les mesures numériques d'ordre de convergence. Dans le second cas, nous

montrons la robustesse de la méthode d'interface. Dans tous les cas, le point important est le suivant : l'ESIM permet de conserver, en présence d'interface, des propriétés des schémas en milieu homogène.

Contraste modéré. Soit un milieu 1D de longueur $L = 1$ m, de paramètres physiques

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_0 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x \leq \alpha, \\ \\ \rho_1 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_1 = 2800\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x > \alpha, \end{cases} \tag{10.5}$$

correspondant respectivement aux propriétés de l'eau et du Plexiglass, avec $\alpha = 0.438$ m. La fréquence centrale est $f_c = 2\,10^4$ Hz, et l'instant initial est $t_0 = 2.6\,10^{-4}$ s.

Dans un premier temps, nous réalisons une expérience avec $N = 200$ points de calcul et CFL=0.8 dans le milieu Ω_1, soit environ 25 points par longueur d'onde centrale dans le milieu Ω_0. Nous présentons en figure 10.3 les valeurs théoriques (traits pleins) et numériques (pointillés) de la contrainte élastique à $t_1 = 3.7\,10^{-4}$ s ; les valeurs numériques sont calculées par les trois schémas couplés à l'ESIM. Nous observons les propriétés classiques déjà mentionnées au chapitre 4, à savoir : la dispersion numérique du schéma de Lax-Wendroff (a) ; la très bonne localisation des ondes calculées par le schéma de volumes finis, dégradée par l'écrêtage des ondes dû à la diffusion numérique (b) ; enfin, l'excellente qualité du schéma WENO 5 (c).

Cet exemple seul n'est pas suffisant pour démontrer les qualités de l'ESIM : à l'échelle de la figure, on ne distingue pas les valeurs numériques obtenues sans méthode d'interface (non présentées ici) de celles proposées en figure 10.3, car les contrastes sont faibles. Dans un deuxième temps, nous proposons alors dans le tableau 10.2 les mesures de convergence vers la solution exacte (calculée au chapitre 9), avec et sans couplage des schémas numériques et de l'ESIM. Les mesures d'ordre (en gras dans le tableau 10.2) sont sans appel : sans méthode d'interface, l'ordre de convergence est inférieur à l'ordre théorique, et évolue de façon apparemment imprévisible. Au contraire, le couplage des schémas numériques et de l'ESIM permet de conserver, en présence d'une interface, l'ordre de convergence théorique des schémas en milieu homogène, soit : 2 pour le schéma de Lax-Wendroff, 1.6 (en norme L_∞) et 2 en (norme L_1) pour le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, 5 enfin pour le schéma WENO 5.

Par ailleurs, nous avons vérifié le point suivant : dans le cas limite de milieux identiques de part et d'autre de α, les valeurs modifiées sont égales aux valeurs numériques à la précision machine près (soit 10^{-14}). Le couplage des schémas numériques et de l'ESIM revient alors aux schémas numériques en milieu homogène, à cette précision près.

Contraste extrême. Soit un milieu de paramètres physiques

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_0 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x \leq \alpha, \\ \\ \rho_1 = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_1 = 340\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x > \alpha, \end{cases} \tag{10.6}$$

correspondant aux propriétés physiques de l'eau et de l'air. Les autres caractéristiques des milieux et du calcul (longueur L, position α, fréquence centrale f_c, instants initial t_0 et final t_1, nombre de points de calcul N, nombre CFL) sont les mêmes que dans l'exemple précédent.

Le premier intérêt de cet exemple est de montrer numériquement la stabilité du couplage des schémas et de l'ESIM. Sans la méthode d'interface, des instabilités numériques apparaissent au

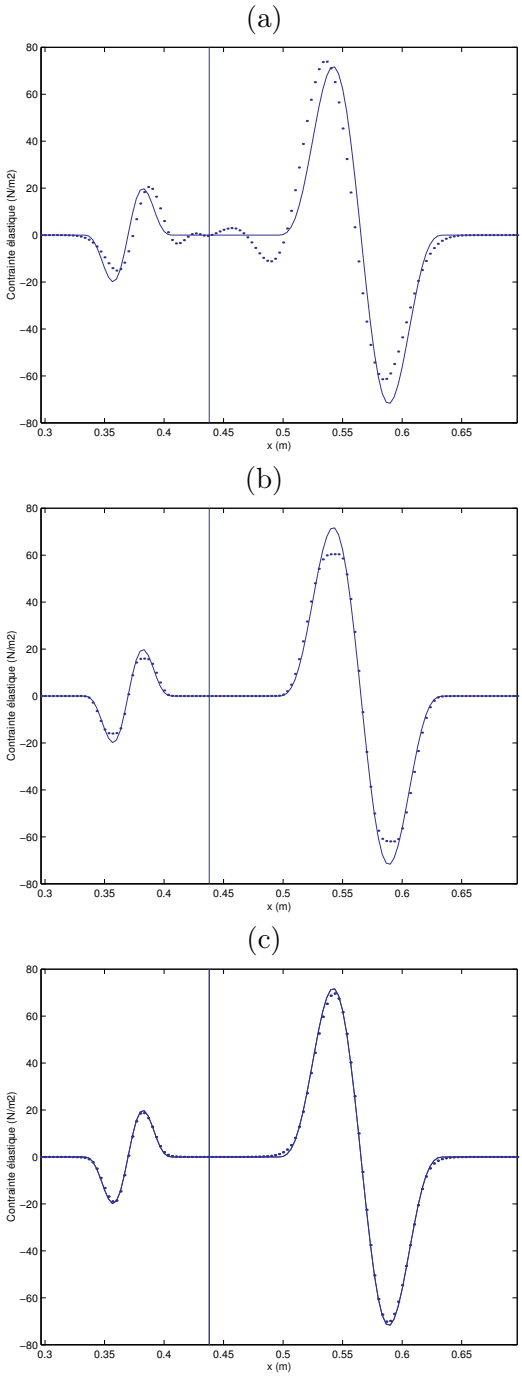

FIG. 10.3 – *Interface parfaite (droite verticale) : valeurs exactes (ligne pleine) et valeurs numériques (pointillés) de σ. Lax-Wendroff + ESIM 2-2 (a), volumes finis + ESIM 2-2 (b), WENO 5 + ESIM 3-3 (c), à $t_1 = 3.7\,10^{-4}$ s.*

Méthode	N	Erreur L_∞	Ordre L_∞	Erreur L_1	Ordre L_1
Lax-Wendroff	400	8.81e-1	-	2.71e+1	-
	800	2.15e-1	**2.03**	7.22e00	**1.90**
	1600	5.99e-2	**1.84**	2.06e00	**1.81**
	3200	3.13e-2	**0.93**	9.90e-1	**1.06**
	6400	1.77e-2	**0.82**	5.73e-1	**0.79**
Lax-Wendroff	400	1.14e00	-	3.20e+1	-
	800	3.30e-1	**1.78**	8.49e00	**1.91**
+	1600	7.80e-2	**2.08**	2.13e00	**1.99**
	3200	1.93e-2	**2.01**	5.33e-1	**2.00**
ESIM 2-2	6400	4.82e-3	**2.00**	1.33e-1	**2.00**
Volumes finis	400	6.03e-1	-	1.41e+1	-
	800	2.91e-1	**1.05**	9.47e00	**0.57**
	1600	1.14e-1	**1.34**	3.28e00	**1.53**
	3200	3.48e-2	**1.72**	1.26e00	**1.37**
	6400	2.10e-2	**0.72**	6.94e-1	**0.86**
Volumes finis	400	6.32e-1	-	9.94e00	-
	800	2.18e-1	**1.53**	2.47e00	**2.01**
+	1600	7.35e-2	**1.57**	6.38e-1	**1.95**
	3200	2.44e-2	**1.59**	1.59e-1	**2.00**
ESIM 2-2	6400	8.19e-3	**1.57**	4.05e-2	**1.97**
WENO 5	400	2.20e-1	-	6.12e00	-
	800	1.30e-1	**0.76**	4.35e00	**0.49**
	1600	3.36e-2	**1.95**	1.05e00	**2.04**
	3200	4.10e-2	**-0.28**	9.59e-1	**0.14**
	6400	1.15e-2	**1.83**	1.89e-1	**2.34**
WENO 5	400	6.13e-2	-	1.44e00	-
	800	2.96e-3	**4.37**	8.12e-2	**4.15**
+	1600	1.23e-4	**4.58**	2.99e-3	**4.76**
	3200	4.50e-6	**4.77**	1.03e-4	**4.85**
ESIM 3-3	6400	1.55e-7	**4.86**	3.43e-6	**4.90**

TAB. 10.2 – *Ordres de convergence. Interface parfaite 1D avec contrastes modérés.*

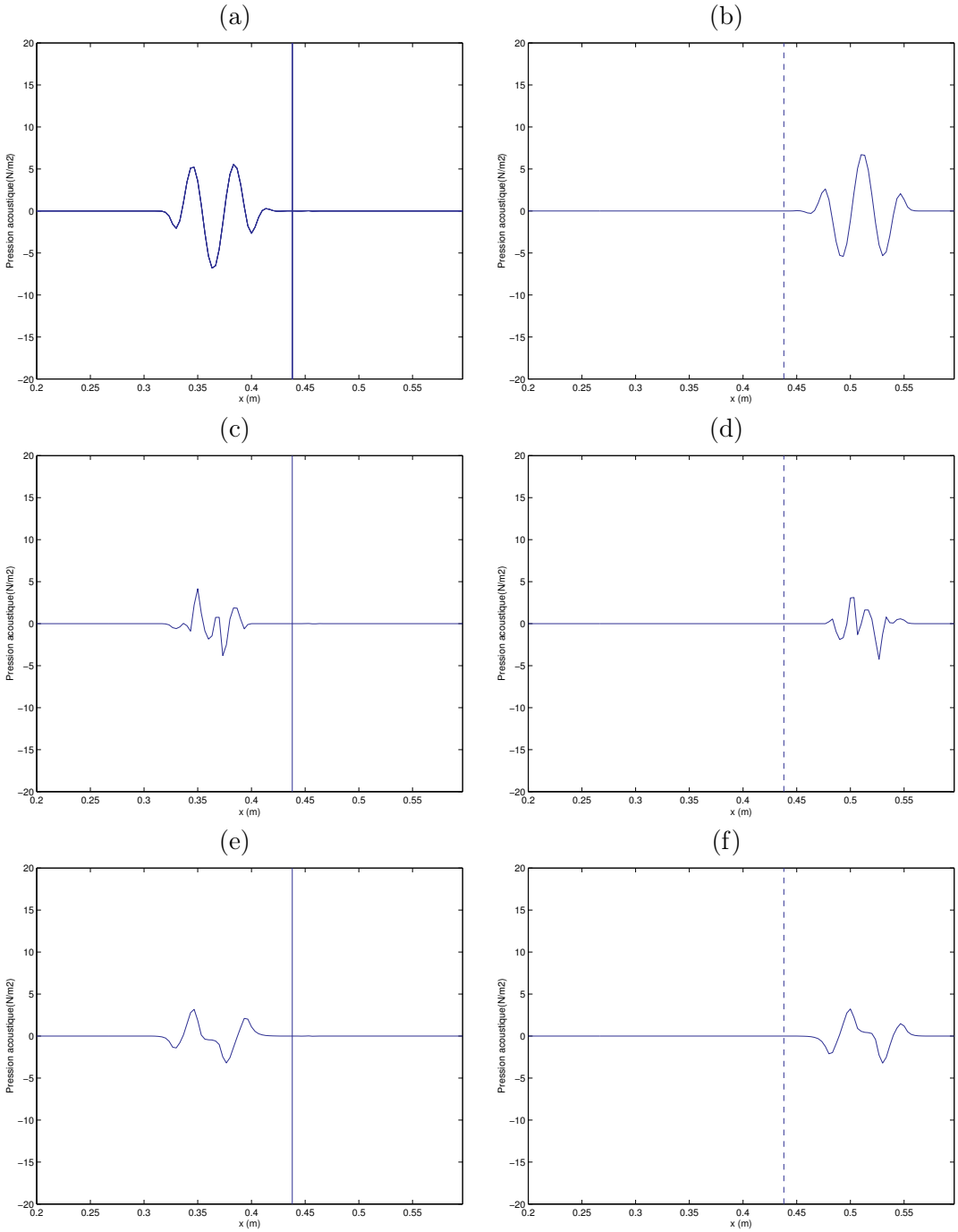

FIG. 10.4 – *Interface parfaite et contrastes extrêmes : erreurs commises sur la pression acoustique. Lax-Wendroff + ESIM 2-2 (a-b), volumes finis + ESIM 2-2 (c-d), WENO 5 + ESIM 3-3 (e-f). Colonne de gauche : interface eau-air (droite verticale); colonne de droite : milieu homogène (la droite verticale en pointillés rappelle la position de l'interface en colonne de gauche).*

niveau de l'interface à cause des contrastes extrêmes de paramètres, rendant inopérant le calcul (nous ne présentons pas ici de telles courbes). Des mesures d'ordre de convergence (non présentées ici) amènent aux mêmes conclusions que les mesures présentées dans le tableau 10.2 : l'ordre des schémas est conservé malgré la discontinuité des coefficients du système hyperbolique.

Au lieu de présenter les valeurs théoriques et numériques de la pression acoustique réfléchie et transmise, nous soustrayons ces valeurs (figure 10.4, colonne de gauche). A droite de chaque courbe, nous présentons la différence entre les valeurs théoriques et numériques de la pression acoustique propagée *en milieu homogène* Ω_0, ayant les propriétés acoustiques de l'eau : la droite en pointillés n'a alors évidemment aucune signification, mais elle rappelle la position de l'interface dans le cas présenté dans la colonne de gauche.

L'intérêt de cet exemple ne porte alors pas sur le niveau des erreurs propres à chaque schéma, mais sur leur géométrie. Il est en effet instructif de comparer les colonnes de gauche et de droite de la figure 10.4. A cause des contrastes extrêmes d'impédances, les ondes sont presque totalement réfléchies par l'interface eau/air (colonne de gauche). De plus, les ondes en milieu hétérogène (colonne de gauche) et en milieu homogène (colonne de droite) se sont propagées de la même distance dans l'eau à l'instant t_1 où nous présentons le calcul. On observe alors que les erreurs sont quasiment identiques dans les deux cas (après deux symétries dans les figures de la colonne de gauche, la première par rapport à l'interface, la deuxième par rapport à l'axe Ox, pour prendre en compte le changement de signe lors de la réflexion). Nous en déduisons que la présence d'une interface n'introduit pas d'erreur supplémentaire par rapport à la propagation en milieu homogène, si les schémas sont couplés à l'ESIM.

10.2.3 Interface imparfaite

Pour illuster le cas d'une interface imparfaite avec conditions de type masse-ressort, nous choisissons deux exemples. Le premier exemple, avec une seule interface, permet de mesurer des ordres de convergence, et démontre la nécessité d'une méthode d'interface. Le deuxième exemple, avec une succession régulière d'interfaces, est intéressant d'un point de vue physique.

Collage. Soit un milieu 1D de longueur $L = 1$ m. Les paramètres physiques sont constants et égaux de part et d'autre d'une interface imparfaite avec conditions de type masse-ressort en $\alpha = 0.53$ m, soit

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_0 = \rho_1 = 1200 \ \text{kg/m}^3, \\ \\ c_0 = c_1 = 2800 \ \text{m/s}, \\ \\ K = 2.25.10^{11} \ \text{kg/m}^2/\text{s}^2, \\ \\ M = 10 \ \text{kg}. \end{array}\right. \tag{10.7}$$

Les propriétés décrivent par exemple un collage entre deux barreaux de Plexiglass. Les valeurs de raideur K et de masse M, décrivant la qualité du collage, correspondent par exemple à une couche de colle ayant les propriétés acoustiques de l'eau ($\rho = 1000$ kg/m^3, $c = 1500$ m/s) et d'épaisseur $h = 0.01$ m (voir (5.29)). L'instant initial est $t_0 = 1.6\,10^{-4}$ s, et la fréquence centrale est $f_c = 2\,10^4$ Hz.

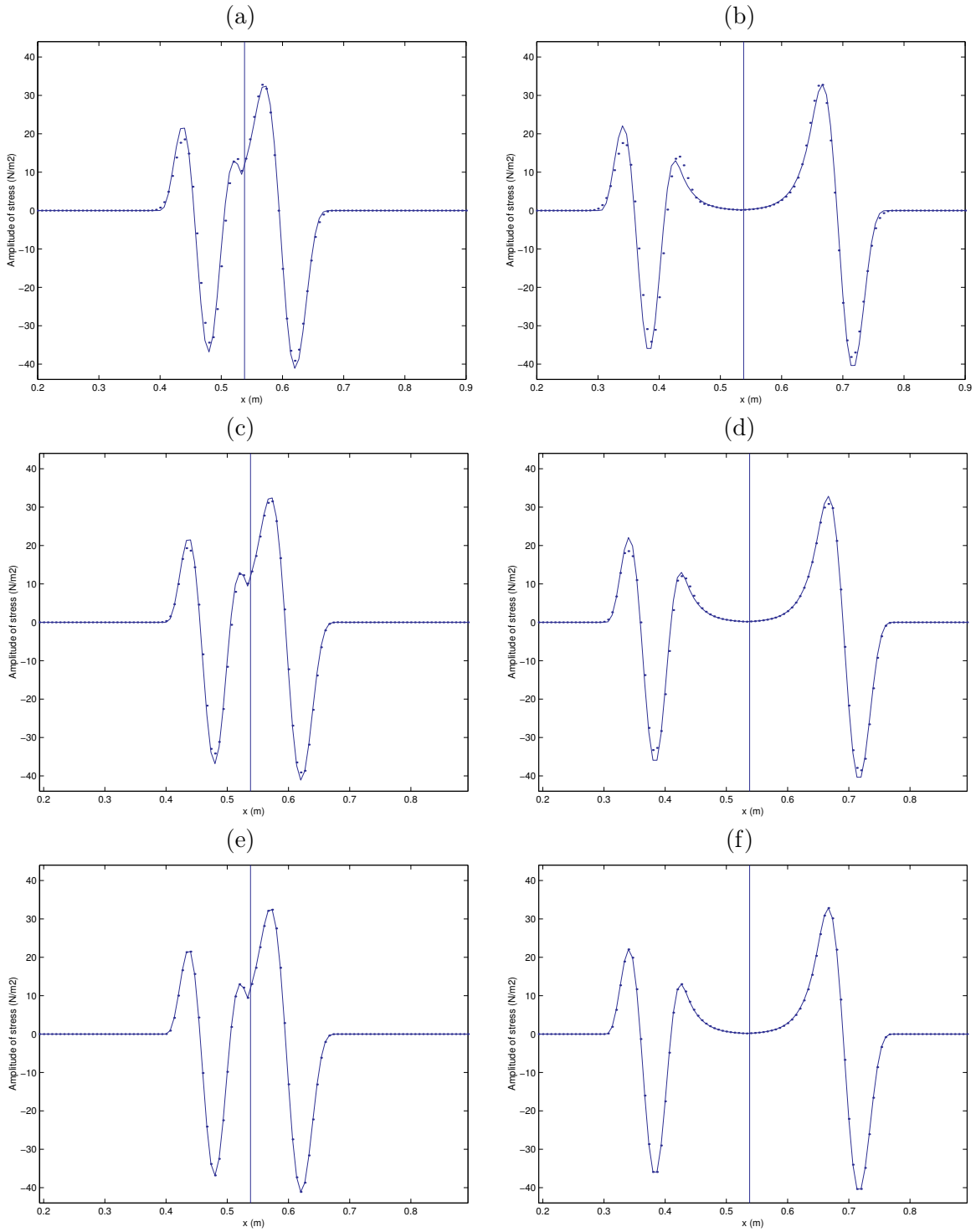

FIG. 10.5 – *Interface imparfaite (droite verticale) : valeurs exactes (ligne pleine) et valeurs numériques (pointillés) de σ. Lax-Wendroff + ESIM2-2 (a-b), volumes finis + ESIM2-2 (c-d), WENO 5 + ESIM3-3 (e-f), à $t_1 = 2.6\,10^{-4}$ s (colonne de gauche) et $t_2 = 2.9\,10^{-4}$ s (colonne de droite).*

Méthode	N	Erreur L_∞	Ordre L_∞	Erreur L_1	Ordre L_1
Lax-Wendroff	100	1.12e01	-	1.43e00	-
	200	4.03e00	**1.47**	4.60e-1	**1.61**
+	400	9.75e-1	**2.04**	1.19e-1	**1.96**
	800	2.45e-1	**1.99**	3.04e-2	**1.97**
ESIM 2-2	1600	5.95e-2	**2.04**	7.57e-3	**2.00**
	3200	1.48e-2	**2.01**	1.89e-3	**2.00**
Volumes finis	100	6.05e00	-	5.05e-1	-
	200	2.00e00	**1.59**	1.31e-1	**1.94**
+	400	6.77e-1	**1.56**	3.45e-2	**1.92**
	800	2.35e-2	**1.52**	9.76e-3	**1.82**
ESIM 2-2	1600	7.92e-2	**1.56**	2.59e-3	**1.91**
	3200	2.63e-2	**1.59**	6.39e-4	**2.02**
WENO 5	100	6.05e00	-	3.20e00	-
	200	2.08e-1	**4.85**	1.09e-1	**4.86**
+	400	6.60e-3	**4.98**	3.71e-3	**4.88**
	800	2.21e-4	**4.89**	1.19e-4	**4.95**
ESIM 3-3	1600	7.39e-6	**4.90**	4.06e-6	**4.88**
	3200	2.45e-7	**4.91**	1.34e-7	**4.92**

TAB. 10.3 – *Ordres de convergence. Interface imparfaite 1D.*

Dans un premier temps, nous réalisons une expérience numérique avec N=150 points de calcul et CFL=0.9, soit environ 20 points de calcul par longueur d'onde centrale. Nous présentons en figure 10.5 les valeurs théoriques (traits pleins) et numériques (pointillés) de la contrainte élastique après réflexion sur l'interface, aux instants $t_1 = 2.6\,10^{-4}$ s et $t_2 = 2.9\,10^{-4}$ s. Les valeurs théoriques sont calculées au chapitre 9 ; les valeurs numériques sont calculées par les trois schémas couplés à l'ESIM. L'accord théorie-numérique est excellent, suivant les qualités propres de chaque schéma : dispersion numérique du schéma de Lax-Wendroff (a-b), dispersion numérique du schéma de volumes finis avec limiteur de flux (c-d) ; à cette échelle, nous ne distinguons pas les valeurs numériques calculées avec WENO 5 et l'ESIM des valeurs théoriques (e-f).

Cet exemple démontre la nécessité d'utiliser une méthode d'interface. Sans méthode d'interface, les schémas numériques ne "voient" pas les conditions imposées en α : comme les milieux de propagation sont les mêmes de part et d'autre de l'interface, les ondes calculées par les schémas numériques se propageraient sans déformation, contrairement à la solution exacte. Ainsi, l'onde réfléchie découle uniquement de l'application de l'ESIM aux points irréguliers (voir chapitre 7). Le fait de choisir des milieux identiques de part et d'autre de l'interface est volontairement

caricatural ; la méthode d'interface s'applique évidemment (et a été testée avec succès) dans le cas de milieux différents de part et d'autre de l'interface. Nous avons par ailleurs vérifié que, pour $K = +\infty$ et $M = 0$, on retrouve les schémas en milieu homogène, à la précision machine près.

Nous présentons dans un deuxième temps des mesures d'ordre de convergence vers la solution exacte, obtenues en raffinant le maillage (tableau 10.3). Comme attendu, les ordres de convergence des trois schémas sont conservés en présence de l'interface.

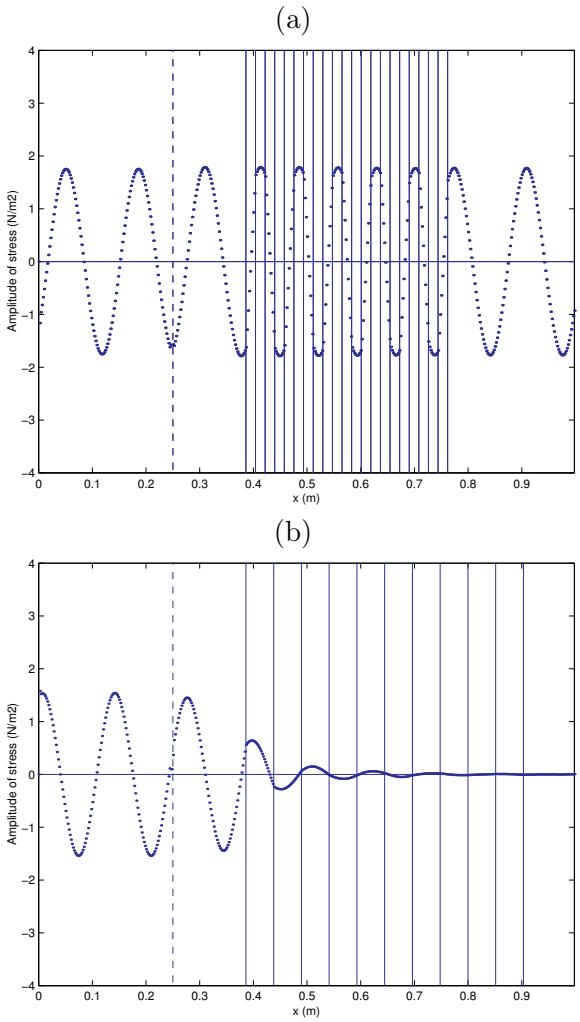

FIG. 10.6 – *Contrainte élastique à travers une succession finie d'interfaces imparfaites régulièrement réparties de ξ, avec (a) $\xi = \xi_0$ et (b) $\xi = \xi_1$. La droite en pointillés représente la position de la source transparente.*

Milieu stratifié périodique. Soit un milieu élastique 1D, de masse volumique $\rho = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$ et de célérité des ondes $c = 2800\,\mathrm{m/s}$, ponctué par une succession finie et régulière d'interfaces avec conditions de type masse-ressort. L'analyse théorique de la propagation des ondes pour un ensemble *infini* d'interfaces et une source monochromatique est proposée dans [59]. Suivant l'espacement ξ entre les interfaces, les valeurs des paramètres physiques et la fréquence de l'onde,

les auteurs démontrent l'existence d'un comportement passe-bande : ondes se propageant sans atténuation, ou ondes évanescentes. L'expérience numérique que nous proposons a pour but de vérifier si l'analyse théorique conduit à des résultats valables pour un nombre *fini* d'interfaces (le seul cas réellement intéressant en pratique).

Nous envoyons une onde sinusoïdale en $x_s = 0.24$ m, de fréquence $f_c = 2\,10^4$ Hz, et nous attendons l'établissement d'un régime sinusoïdal pur. Nous utilisons pour cela une source transparente. Les simulations numériques sont réalisées sur $N = 250$ points de calcul avec le schéma de Lax-Wendroff (comme précisé en introduction, nous ne disposons pas de sources transparentes pour les schémas non linéaires, comme le schéma de volumes finis avec limiteur de flux, ou le schéma WENO 5).

Considérons des conditions de type ressort ($K = 2.25\,10^{11}\mathrm{kg/m^2/s^2}$, $M = 0\,\mathrm{kg}$). L'analyse théorique [59] montre alors que pour $\xi = \xi_0 = 1.76\,10^{-2}$ m, le nombre d'onde Floquet est réel : les ondes se propagent sans atténuation. Par contre, pour $\xi = \xi_1 = 5.17\,10^{-2}$ m, le nombre d'onde Floquet est complexe : les ondes décroissent exponentiellement avec la distance à la source.

Nous présentons en figure 10.6 les expériences numériques réalisées pour ces deux espacements, avec un nombre fini d'interfaces. On observe le comportement passe-bande (a) ou coupe-bande (b) prévu théoriquement pour un nombre infini d'interfaces. Dans le cas d'ondes évanescentes (figure 10.6 b), nous présentons en figure 10.7 la décroissance de l'amplitude des ondes prévue théoriquement et mesurée numériquement. L'accord entre les deux courbes est très bon.

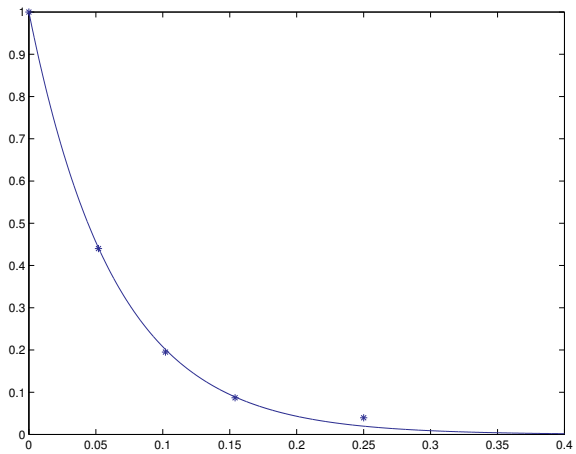

FIG. 10.7 – *Valeurs théoriques (traits pleins) et numériques (étoiles) de l'atténuation des ondes à travers la succession d'interfaces imparfaites.*

10.2.4 Deux interfaces parfaites

Le dernier cas traité en 1D est celui de deux interfaces parfaites, plus proches l'une de l'autre que le pas en espace Δx. Pour illustrer ce cas, nous considérons un domaine tricouche de longueur

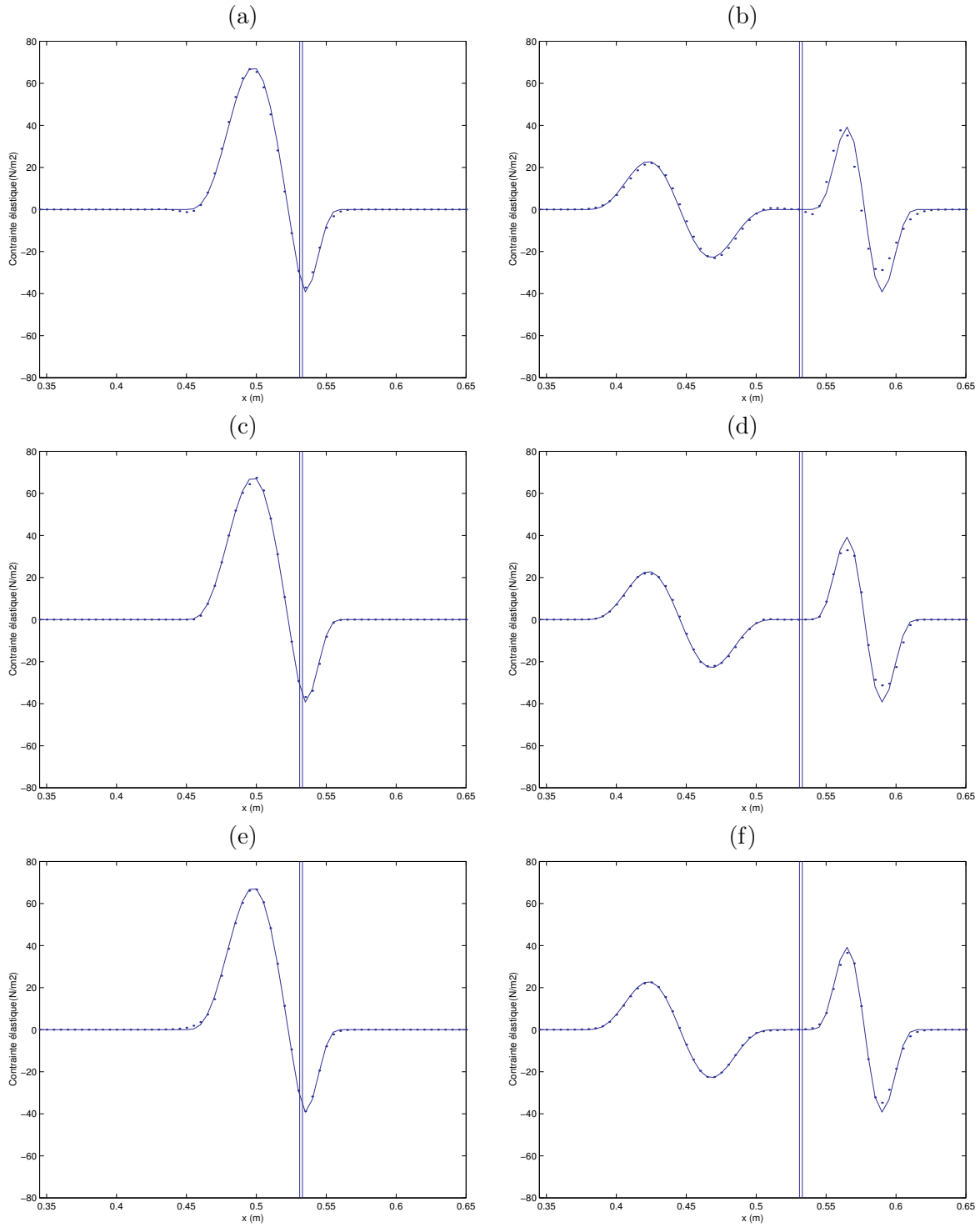

FIG. 10.8 – *Deux interfaces parfaites (droites verticales) : valeurs exactes (ligne pleine) et valeurs numériques (pointillés) de σ. Lax-Wendroff + ESIM 2-2 (a-b), volumes finis + ESIM 2-2 (c-d), WENO 5 + ESIM 3-3 (e-f), à $t_1 = 2.2\,10^{-4}$ s (colonne de gauche) et $t_2 = 2.5\,10^{-4}$ s (colonne de droite).*

L=1 m, de paramètres physiques

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, & c_0 = 2700\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x \leq \alpha_0 = 0.53\,\mathrm{m}, \\ \rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, & c_1 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } \alpha_0 < x \leq \alpha_1 = 0.533\,\mathrm{m}, \\ \rho_2 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, & c_2 = 2700\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } x > \alpha_1. \end{cases} \tag{10.8}$$

L'instant initial est $t_0 = 1.6\,10^{-4}$ s, et la fréquence centrale est $f_c = 2\,10^{-4}$ Hz.

Nous réalisons une expérience numérique avec $N = 200$ points de calcul, soit $\Delta x = 5\,10^{-3}$ m. Les deux interfaces sont situées dans la même maille, de sorte qu'aucun point de calcul n'utilise les valeurs ρ_1 et c_1. Les milieux Ω_0 et Ω_2 ont les mêmes propriétés physiques l'un et l'autre : sans couplage avec une méthode d'interface, les ondes numériques ne "voient" pas le milieu Ω_1, ne conduisant alors à aucune onde réfléchie (contrairement à la solution exacte).

Nous présentons en figure 10.8 les valeurs théoriques (traits pleins) et numériques (pointillés) de la contrainte élastique à $t_1 = 2.2\,10^{-4}$ s et à $t_2 = 2.5\,10^{-4}$ s. Les ondes réfléchies eont très bien calculés : l'ESIM conduit à une très bonne prise en compte des propriétés du milieu intermédiaire Ω_1 sans avoir à mailler ce dernier. Pour conclure cette section, rappelons que les deux interfaces parfaites et le milieu intermédiaire Ω_1 étudiés dans cette section pourraient aussi être décrits par une interface imparfaite. Vu les paramètres physiques et géométriques, les valeurs de raideur et de masse données par (5.29) seraient $K = 2.25.10^{12}$ kg/m^2/s^2 et $M = 3$ kg. Ces valeurs de K et M sont respectivement 10 fois plus grande et 3.3 fois plus petites que les valeurs de K et M données en (10.7). Cela explique que le comportement dispersif soit moins prononcé en figure 10.8 qu'en figure 10.5.

10.3 Expériences 2D

10.3.1 Introduction

Nous illustrons maintenant en 2D le couplage des schémas numériques, vus au chapitre 4, et de la méthode d'interface, vue au chapitre 8. Avant d'aborder les expériences proprement dites, nous précisons quelques points touchant aux calculs.

Description géométrique des interfaces. Les interfaces utilisées lors des simulations numériques sont soit des droites, soit des ellipses, a priori inclinées sur leurs axes. Nous rappelons ici l'écriture paramétrique et l'équation cartésienne $F(x,y) = 0$ décrivant ces courbes. Nous omettons seulement d'écrire les dérivées successives de la représentation paramétrique, nécessaires pour l'écriture des conditions de saut (voir chapitre 6).

Soit une droite inclinée de θ par rapport à l'axe Ox, et soit un point de coordonnées (x_0,y_0) de cette droite (figure 10.9). L'écriture paramétrique de cette droite est

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + \tau \cos\theta, \\ y(\tau) &= y_0 + \tau \sin\theta, \end{aligned} \tag{10.9}$$

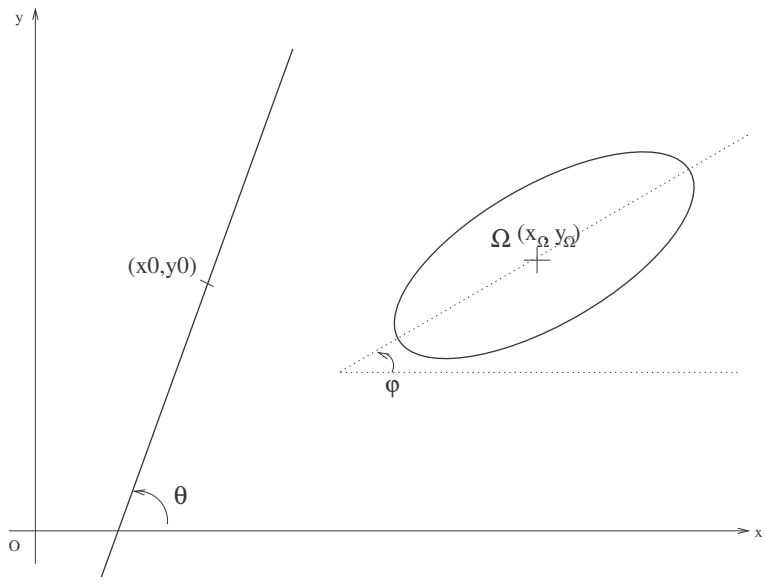

FIG. 10.9 – *Interfaces utilisées lors des expériences numériques 2D.*

avec $\tau \in \mathbb{R}$. De (10.9), on déduit

$$F(x,y) = -\sin\theta\,(x - x_0) + \cos\theta\,(y - y_0). \tag{10.10}$$

Soit une ellipse de centre $\Omega(x_\Omega,y_\Omega)$, inclinée de l'angle φ par rapport au repère (O,x,y), de grand axe a et de petit axe b (figure 10.9). L'écriture paramétrique de cette ellipse est

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a\,\cos\varphi\,\cos\tau - b\,\sin\varphi\,\sin\tau + x_\Omega, \\ y(\tau) &= a\,\sin\varphi\,\cos\tau + b\,\cos\varphi\,\sin\tau + y_\Omega, \end{aligned} \tag{10.11}$$

avec $\tau \in [0,2\,\pi]$. De (10.11), on déduit

$$F(x,y) = \left(\frac{(x - x_\Omega)}{a}\cos\varphi + \frac{(y - y_\Omega)}{a}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\frac{(x - x_\Omega)}{b}\sin\varphi + \frac{(y - y_\Omega)}{b}\cos\varphi\right)^2 - 1. \tag{10.12}$$

Initialisation des calculs. Nous étudions fréquemment le cas d'ondes planes sur des interfaces planes ; les solutions analytiques étant connues, on mesure ainsi facilement des ordres de convergence. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 9 pour les expressions des ondes planes incidente, réfléchie et transmise utilisées lors de l'initialisation des calculs. Celles-ci s'expriment à partir d'une fonction $f^{'}$, déterminant la forme de l'onde.

En-dessous de l'angle critique, la fonction $f^{'}$ choisie est la même sinusoïde tronquée qu'en 1D, soit (10.4). Au-dessus de l'angle critique, la fonction $f^{'}$ choisie est définie au chapitre 9 par (9.64), soit

$$f^{'}(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\dfrac{\tau}{2\,\pi\,f_c}}{\left(\dfrac{\tau}{2\,\pi\,f_c}\right)^2 + t^2}, \tag{10.13}$$

avec f_c la fréquence centrale et τ un paramètre déterminant la largeur de l'onde.

Nous présentons en figure 10.10 les deux cas d'ondes planes, en-dessous et au-dessus de l'angle critique, en vue 2D et en coupe. Les paramètres physiques et les angles d'incidence sont précisés plus loin. La palette de couleurs utilisée repose sur des dégradés de vert et de rouge, représentant respectivement les valeurs positives et négatives de la pression acoustique. Pour l'incidence au-delà de l'angle critique (figure 10.10 b-d), on note un phénomène remarquable, mentionné au chapitre 9 : les valeurs de la pression acoustique incidente, toujours positives, conduisent à des valeurs positives et négatives (en rouge) de la pression acoustique réfléchie et transmise.

Pour certaines simulations, nous cherchons à construire des ondes cylindriques divergentes, centrées en un point (x_s,y_s) (on s'intéresse ici uniquement au cas fluide). En 2D, le potentiel acoustique Φ des ondes cylindriques s'exprime à partir de fonctions de Hankel. Pour construire de façon simple une onde cylindrique, nous retenons seulement le premier terme du développement asymptotique des fonctions de Hankel, et écrivons

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{r^{1/2}}\, f\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{10.14}$$

avec $r = \left((x-x_s)^2 + (y-y_s)^2\right)^{1/2}$, et f une fonction suffisamment régulière. A partir de (10.14), les expressions de la vitesse acoustique $\boldsymbol{v}$ et de la pression acoustique p

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\,\Phi, \qquad p = -\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} \tag{10.15}$$

conduisent à l'expression de l'onde divergente en milieu homogène

$$\boldsymbol{U}(x,y,t) = -\begin{pmatrix} \dfrac{x-x_s}{c\,r^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{y-y_s}{c\,r^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{\rho}{r^{1/2}} \end{pmatrix} f'\left(t-\frac{r}{c}\right) - \begin{pmatrix} \dfrac{x-x_s}{2\,r^{5/2}} \\[2ex] \dfrac{y-y_s}{2\,r^{5/2}} \\[2ex] 0 \end{pmatrix} f\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{10.16}$$

On choisit comme fonction f' la sinusoïde tronquée (10.3). Sa primitive f s'écrit

$$f(\xi) = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{q} b_k\, \cos(\beta_k\,\omega_c\,\xi) - \gamma\right) / \,(2\,\pi\,f_c) & \text{si } 0 < \xi < \dfrac{1}{f_c}, \\[2ex] 0 \ \text{ sinon.} \end{cases} \tag{10.17}$$

Les coefficients b_k sont consignés dans le tableau 10.1. La constante γ est déterminée de sorte que le raccord de f à zéro soit suffisamment régulier, soit

$$\gamma = -1 + \frac{21}{64} - \frac{63}{3072} + \frac{1}{4096}. \tag{10.18}$$

Conditions aux bords du domaine. L'avancée en temps aux points de calcul aux bords du domaine pose problème, pour deux raisons. D'une part, aux points de calcul (x_i,y_j) tels que

$0 \leq i \leq s$, $N_x - s + 1 \leq i \leq N_x$, $0 \leq j \leq s$, $N_y - s + 1 \leq j \leq N_y$ (où s désigne la largeur du schéma, dimension par dimension, et où N_x et N_y sont le nombre de points de calcul dans les directions x et y), l'avancée en temps des schémas utilise en effet des valeurs numériques en dehors du domaine. D'autre part, nous cherchons à simuler la propagation des ondes en milieu infini : les bords du domaine apparaissent comme une rupture d'impédance, conduisant à des ondes réfléchies à l'intérieur du domaine de calcul.

Pour résoudre ce problème, considérons deux cas. Dans le cas particulier d'ondes planes croisant une ou deux interfaces planes (parallèles entre elles), nous disposons de solutions analytiques. Nous imposons alors aux points (x_i,y_j) $(0 \leq i \leq s$, $N_x - s + 1 \leq i \leq N_x$, $0 \leq j \leq s$, $N_y - s + 1 \leq j \leq N_y)$ la valeur exacte $\boldsymbol{U}(x_i,y_j,t_n)$ à chaque pas de temps. Cette procédure ne conduit à aucun problème de stabilité. De plus, cette procédure ne perturbe pas les mesures de convergence, à condition de réaliser les mesures d'ordre suffisamment loin des bords du domaine.

Le cas d'ondes non planes ou d'interfaces de forme quelconque est plus délicat. En effet, nous ne connaissons évidemment pas, dans le cas général, la solution analytique à imposer aux bords du domaine. Plusieurs méthodes existent alors pour simuler la propagation des ondes en milieu infini.

La première classe de méthodes consiste à utiliser des *conditions aux bords absorbantes* (Absorbing Boundary Conditions, ou ABC), introduites dans le cas de l'acoustique par Engquist et Majda [22]. Ces méthodes, simulant des conditions d'ondes sortantes, sont délicates à mettre en oeuvre pour les problèmes d'élastodynamique 2D-3D, et conduisent à des problèmes de stabilité [79].

Nous suivons ici une deuxième classe de méthodes, qui consiste à entourer le domaine de calcul de couches absorbantes, où les ondes sont atténuées artificiellement. La principale difficulté est alors de minimiser la réflexion des ondes à la frontière entre le domaine de calcul et ces couches, qui sont vues par les ondes comme des ruptures d'impédance. Une avancée majeure est due à Bérenger [8], lequel définit des *conditions de couches parfaitement adaptées* (Perfectly Matched Layers, ou PML), limitant les réflexions parasites. Nous renvoyons à [79] pour l'analyse de la méthode et sa mise en oeuvre.

10.3.2 Interface parfaite fluide-fluide

Pour illustrer le cas de l'interface entre deux fluides parfaits, nous proposons trois exemples : une interface avec des contrastes modérés (en-dessous et au-dessus de l'angle critique), deux interfaces avec des contrastes modérés, et enfin des interfaces avec des contrastes extrêmes. Les deux premiers cas permettent des mesures d'ordre de convergence. Le dernier cas démontre la robustesse du couplage des schémas et de la méthode d'interface, et ce pour des interfaces de forme quelconque.

Contrastes modérés. Cas d'une interface. Soit un milieu fluide 2D, de dimensions $L_x = L_y = 0.2$ m. Les paramètres physiques sont discontinus de part et d'autre de la droite Γ, faisant l'angle $\theta = 80$ degrés avec l'axe Ox ; le point $M(x_0 = 0.1, y_0 = 0)$ appartient à Γ. Soit

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_0 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F(x,y) \leq 0, \\ \rho_1 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_1 = 2800\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F(x,y) > 0. \end{cases} \tag{10.19}$$

L'équation cartésienne $F(x,y)$ est donnée par (10.10). Une onde plane incidente à support dans le milieu Ω_0, dont le vecteur d'onde fait l'angle θ_f avec l'axe Ox (figure 9.4 au chapitre 9), fait l'angle

$$\theta_f^{'} = \theta_f + 90 - \theta \text{ degrés} \tag{10.20}$$

avec la droite Γ ; les paramètres (10.19) définissent un angle critique θ_c

$$\theta_c = \arcsin \frac{c_1}{c_0} = 32.4 \text{ degrés} \tag{10.21}$$

au-delà duquel l'onde transmise est non homogène.

Dans un premier temps, nous étudions une onde plane incidente, dont le vecteur d'onde fait l'angle $\theta_f = 21$ degrés avec l'axe Ox, soit $\theta_f^{'} = 31$ degrés $< \theta_c$ avec la normale à la droite Γ. Les expériences numériques sont réalisées pour une fréquence centrale $f_c = 5\,10^4$ Hz, $N_x = N_y = 200$ points de calcul et CFL=0.69 dans le milieu Ω_1, soit environ 30 points par longueur d'onde centrale dans le milieu Ω_0. L'instant initial est $t_0 = 9\,10^{-5}$ s.

Nous présentons en figures 10.11 et 10.12 les cartes et coupes (en $y = 0.05$ m) de la pression acoustique à $t_1 = 2\,10^{-4}$ s, obtenues par les schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis, avec et sans méthode d'interface. Pour les calculs réalisés en couplant les schémas numériques et l'ESIM, nous n'utilisons pas les conditions de saut supplémentaires (voir chapitre 6). Pour les calculs réalisés sans aucune méthode d'interface, l'interface est représentée en "marches d'escalier", sans homogénéisation des paramètres physiques au voisinage de l'interface.

A la différence de l'interface parfaite en 1D (section 10.2.2), nous observons des différences nettes entre les valeurs numériques obtenues avec et sans méthode d'interface, sous forme de diffraction parasite. Celle-ci est due à la description en "marches d'escalier" de l'interface. Ces artefacts sont limités, voire éliminés, lorsque les schémas sont couplés à la méthode d'interface.

Nous présentons les résultats de convergence vers la solution analytique dans le tableau 10.4. Sans méthode d'interface, l'ordre de convergence mesuré numériquement est inférieur à l'ordre des schémas en milieu homogène. Lorsque les schémas sont couplés à l'ESIM, l'ordre mesuré est égal à l'ordre théorique en milieu homogène : 2 pour le schéma de Lax-Wendroff, 1.6 (en norme L_∞) et 2 (en norme L_1) pour le schéma de volumes finis. Nous ne présentons pas ici les cartes et coupes de la pression acoustique calculées avec la méthode d'interface utilisant les conditions de saut supplémentaires (voir chapitre 6) : les deux cartes sont quasi identiques ; dans les deux cas, les diffractions parasites sont réduites, et les ordres de convergence sont maintenus.

Nous consignons dans le tableau 10.5 les temps de calcul pour le prétraitement numérique nécessaire à l'ESIM (recherche des points irréguliers, calcul et stockage des matrices de conditions de saut). La durée du prétraitement est de l'ordre d'une dizaine d'avancées en temps des schémas, ce qui est parfaitement négligeable.

Dans un deuxième temps, nous étudions une onde plane incidente, dont le vecteur d'onde fait l'angle $\theta_f = 40$ degrés avec l'axe Ox, soit $\theta_f^{'} = 51$ degrés $> \theta_c$ avec la normale à la droite Γ. Ce cas d'incidence au-dessus de l'angle critique est particulièrement intéressant pour nous, pour la raison suivante. L'onde plane transmise est non homogène (voir chapitre 9) : son amplitude décroît alors en $1/x^2$, où x est la distance à l'interface. Le calcul numérique de cette onde de surface est

alors prépondérant au voisinage de l'interface, i.e. aux points irréguliers. En conséquence de quoi, cette simulation numérique est particulièrement sensible aux artefacts induits par la présence de l'interface. Il est alors crucial, pour obtenir des résultats quantitatifs, de décrire précisément la géométrie et les conditions de saut vérifiées à l'interface.

Les données du calcul sont les mêmes que dans l'exemple précédent d'incidence sous-critique ; la seule donnée supplémentaire est τ=0.5 (10.13). Nous présentons en figures 10.13 et 10.14 les cartes et coupes de la pression acoustique, calculées par les schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis avec limiteur de flux, couplés ou non à l'ESIM. Les cartes et coupes sont présentées à $t_1 = 1.1\,10^{-4}$ s. Les coupes, effectuées en $y = 0.1$ m, sont repérées sur les cartes par des droites horizontales en pointillés.

Sans méthode d'interface, nous observons nettement les effets de la diffraction parasite (colonnes de gauche des figures 10.13 et 10.14). Les mesures de convergence (non présentées ici) amènent aux mêmes conclusions que dans le cas de l'incidence sous-critique : l'ESIM maintient en présence d'une interface l'ordre des deux schémas considérés.

Contrastes modérés. Cas de deux interfaces. Soit un milieu fluide tricouche, de dimensions $L_x = L_y = 0.2$ m. Les paramètres physiques sont constants par morceaux et discontinus de part et d'autre des droites Γ_0 et Γ_1, faisant chacune l'angle $\theta = 80$ degrés par rapport à l'axe Ox. Les points $M_0(x_0 = 0.1, y_0 = 0)$ et $M_1(x_1 = 0.13, y_1 = 0)$ appartiennent respectivement à Γ_0 et Γ_1, caractérisant les fonctions $F_0(x,y)$ et $F_1(x,y)$ (10.10), soit

$$(\rho,c) = \begin{cases} \rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, & c_0 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F_0(x,y) \leq 0, \\ \rho_1 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}, & c_1 = 2800\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F_0(x,y) > 0 \text{ et } F_1(x,y) \leq 0, \\ \rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, & c_2 = 1500\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F_1(x,y) > 0. \end{cases} \tag{10.22}$$

L'intérêt de cette configuration découle des réflexions multiples dans le milieu intermédiaire Ω_1 : les artefacts numériques, provenant des calculs sans méthode d'interface aux points irréguliers, sont accumulés à chaque avancée en temps. Les paramètres physiques des milieux Ω_0 et Ω_2 sont identiques, de sorte que les ondes transmises dans le milieu Ω_2 sont parallèles à l'onde incidente dans le milieu Ω_0. L'angle critique θ_c est le même que (10.21).

Nous étudions ici uniquement un cas d'incidence en-dessous de l'angle critique. Nous initialisons les calculs par une onde plane incidente, dont le vecteur d'onde fait l'angle $\theta_f = 20$ degrés avec l'axe Ox (soit $\theta_f' = 31$ degrés $< \theta_c$ par rapport à Γ_0), ainsi que par la succession d'ondes réfléchies et transmises à l'instant $t_0 = 10^{-4}$ s (figure 10.15). La solution analytique n'est pas explicitée au chapitre 9, son calcul étant voisin de celui proposé en 1D pour deux interfaces parfaites.

Les expériences numériques sont réalisées pour une fréquence centrale $f_c = 5\,10^4$ Hz, $N_x = N_y$=200 points de calcul et CFL=0.69. Les cartes de la pression acoustique à l'instant $t_1 = 1.25\,10^{-4}$ s ne sont pas proposées : les diffractions parasites observées au cours des exemples précédents sont toujours présentes, mais sont ici mélangées aux multiples ondes réfléchies et transmises. Ces diffractions paraistes sont alors indiscernables vue la palette de couleurs choisie.

Par contre, les coupes proposées en figure 10.16 sont sans équivoque : en l'absence de méthode d'interface, les défauts accumulés à chaque pas de temps dans le domaine intermédiaire Ω_1 conduisent à une erreur très importante. Au contraire, les courbes obtenues en couplant les schémas numériques et l'ESIM sont très proches de la solution analytique. Les résultats de convergence, non proposés ici, confirment le maintien de l'ordre des schémas par couplage avec l'ESIM.

Contrastes extrêmes. Soit un domaine rempli d'eau ($\rho_0 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}, c_0 = 1500$ m/s), de dimension $L_x = L_y = 0.4$ m, rempli de 20 bulles d'air ($\rho_0 = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}, c_0 = 340$ m/s) en forme d'ellipse. Celles-ci sont aléatoirement placées et inclinées sur leur axe ; les tailles moyennes des grands axes et petits axes sont $a = 8\,10^{-3}$ m et $b = 6\,10^{-3}$ m. Pour une fréquence centrale $f_c = 5\,10^4$ Hz, la longueur d'onde centrale dans l'eau est $\lambda_c = 3\,10^{-2}$ m, soit approximativement la taille des hétérogénéités.

Les expériences numériques sont réalisées avec $N_x \times N_y = 400 \times 400$ points de calcul et CFL =0.69. Les calculs sont initialisés par une onde cylindrique centrée en ($x_s = 0.2, y_s = 0.24$) à l'instant $t_0 = 5\,10^{-5}$ s (figure 10.17). Nous présentons en figure 10.18 les cartes et coupes de la pression acoustique à $t_1 = 1.4\,10^{-4}$ s, calculées par les schémas de Lax-Wendroff et de volumes finis couplés à l'ESIM.

Même si le cas présenté ici n'est pas forcément très représentatif de situations concrètes (bulles d'air elliptiques...), il montre que l'on peut accéder à des expériences intéressantes d'un point de vue physique. De plus, cet exemple démontre numériquement la stabilité du couplage des schémas et de l'ESIM, et ce pour des interfaces de forme quelconque. Sans méthode d'interface, ou avec l'IIM, des instabilités apparaissent au niveau des interfaces, invalidant le calcul.

10.3.3 Interface parfaite solide-solide

Nous illustrons enfin le cas de deux solides parfaitement collés. Pour cela, nous considérons un milieu solide 2D, de dimensions $L_x = L_y = 0.3$ m. Les paramètres physiques sont discontinus et constants par morceaux de part et d'autre de la droite Γ, d'angle $\theta = 80$ degrés avec l'axe Ox, avec $M(x_0 = 0.1, y_0 = 0)$ appartenant à Γ, soit

$$(\rho, c_p, c_s) = \begin{cases} \rho_0 = 1800\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_{p0} = 1900\,\mathrm{m/s}, \quad c_{s0} = 750\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F(x,y) \leq 0, \\ \rho_1 = 2600\,\mathrm{kg/m^3}, \quad c_{p1} = 6400\,\mathrm{m/s}, \quad c_{s1} = 3200\,\mathrm{m/s} \quad \text{si } F(x,y) > 0. \end{cases} \tag{10.23}$$

Les propriétés élastiques (10.23) correspondent à celles du Plexiglass et de l'aluminium, et définissent un premier angle critique

$$\theta_c = \arcsin \frac{c_{p1}}{c_{p0}} = 17.1 \text{ degrés.} \tag{10.24}$$

Les calculs sont initialisés par une onde plane P incidente, dont le vecteur d'onde fait l'angle $\theta_f = 7$ degrés avec l'axe Ox, soit $\theta_f' = 17$ degrés $< \theta_c$ avec la normale à la droite Γ. Dans cette configuration, l'onde SV réfléchie est très faible, et est à peine visible sur les cartes théoriques de σ_{11} (première composante du tenseur des contraintes élastiques) à l'instant initial $t_0 = 8.4\,10^{-5}$ s (figure 10.19).

Les expériences numériques sont alors réalisées avec $N_x \times N_y = 300 \times 300$ points de calcul, pour une fréquence centrale $f_c = 5\,10^4$ Hz, soit environ 38 points par longueur d'onde centrale dans le milieu Ω_0, et CFL=0.69 dans le milieu Ω_1.

En figure 10.20, nous présentons les cartes et coupes de σ_{11} à $t_1 = 9.6\,10^{-5}$ s, calculées numériquement par le schéma de Lax-Wendroff, couplé ou non à l'ESIM. Sans méthode d'interface (figure 10.20 a-c), les artefacts numériques introduits par l'interface sont très importants, alors que l'onde s'est propagée sur moins d'une longueur d'onde centrale dans le milieu Ω_1. Au contraire, la solution numérique calculée avec l'ESIM ne présente pas d'artefacts, et est très bien résolue.

Les calculs mettant en oeuvre l'ESIM ont été effectués en ne considérant que les conditions de saut naturelles (voir chapitre 6). Les cartes et coupes obtenues en utilisant les conditions de saut supplémentaires sont indiscernables de celles présentées en figure 10.20 b-d. Par ailleurs, nous avons mesuré numériquement les ordres de convergence (résultats non présentés ici). L'ordre du schéma de Lax-Wendroff, sans méthode d'interface, s'effondre. Par contre, le couplage avec l'ESIM permet de maintenir l'ordre 2.

10.4 Conclusion

Les expériences numériques présentées ici démontrent les propriétés de la méthode d'interface construite au cours des chapitres précédents. L'ordre de convergence des schémas numériques, fortement dégradé en présence d'interfaces, est maintenu si les schémas sont couplés à l'ESIM. Ce couplage est particulièrement robuste, conduisant à des schémas stables même pour des contrastes élevés des paramètres physiques. Les artefacts d'origine géométrique, dus à la représentation en "marches d'escalier" des interfaces, sont fortement atténués. Enfin, l'ESIM permet de décrire très simplement des situations physiques complexes, comme la modélisation d'un contact imparfait, que les schémas ne peuvent décrire directement. Cela conduit à la réalisation d'expériences numériques intéressantes pour le physicien (comme la visualisation du comportement passe-bande d'une succession finie d'interfaces imparfaites).

L'implémentation informatique et la validation de plusieurs configurations exposées précédemment est actuellement en cours. Dans l'ordre croissant des priorités, citons le couplage de l'ESIM à

- WENO 5, dans tous les cas 2D,
- volumes finis, dans les cas solides 2D,
- tous les schémas, pour une interface solide-solide imparfaite décrite par des conditions de type masse-ressort.

Précisons que l'ESIM a été appliquée avec succès au cas de l'interface fluide-solide. Néanmoins, les résultats étant récents, ils ne sont pas présentés ici.

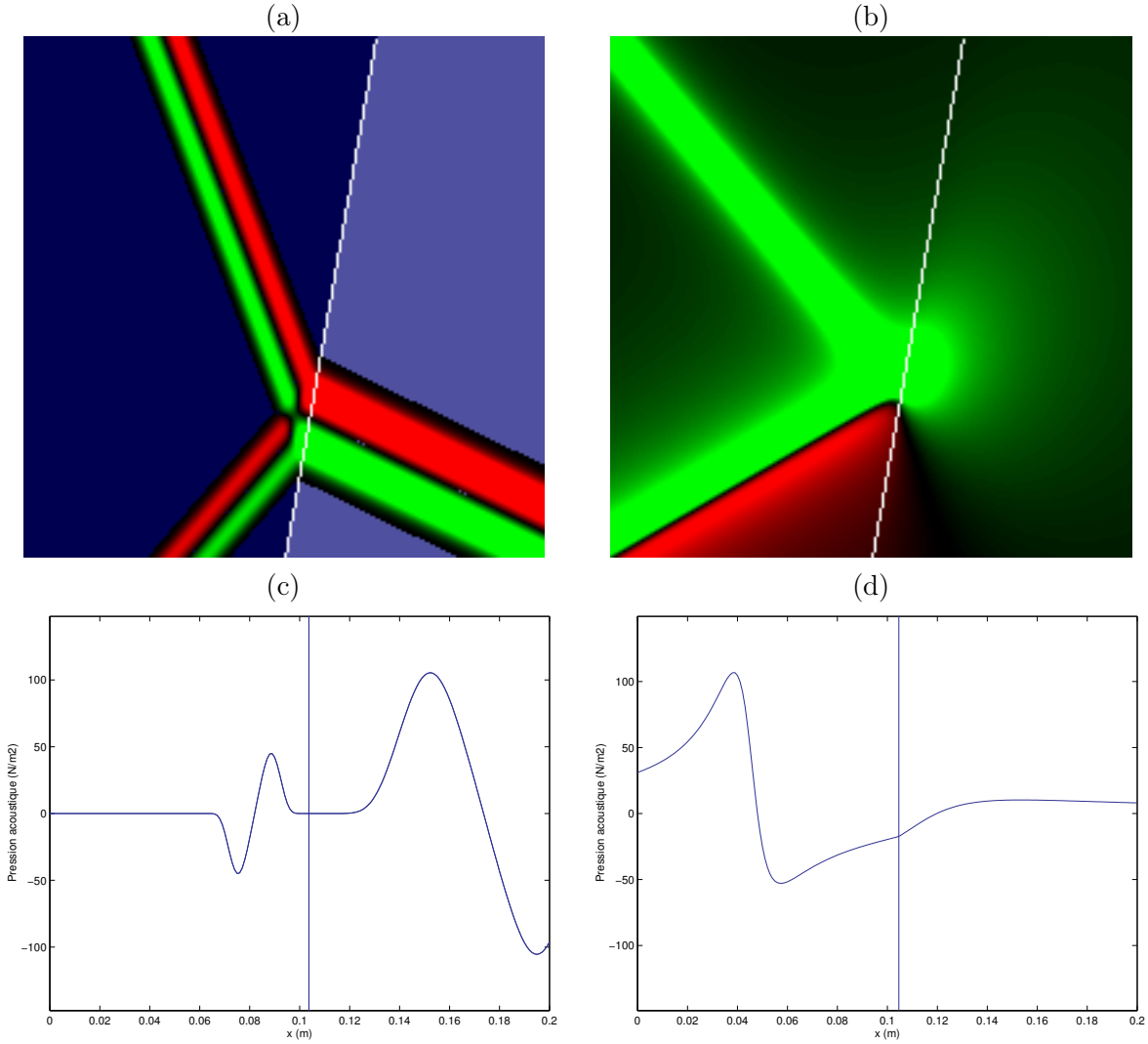

FIG. 10.10 – *Cartes et coupes de p à l'initialisation : (a-c) en-dessous de l'angle critique, (b-d) au-dessus de l'angle critique.*

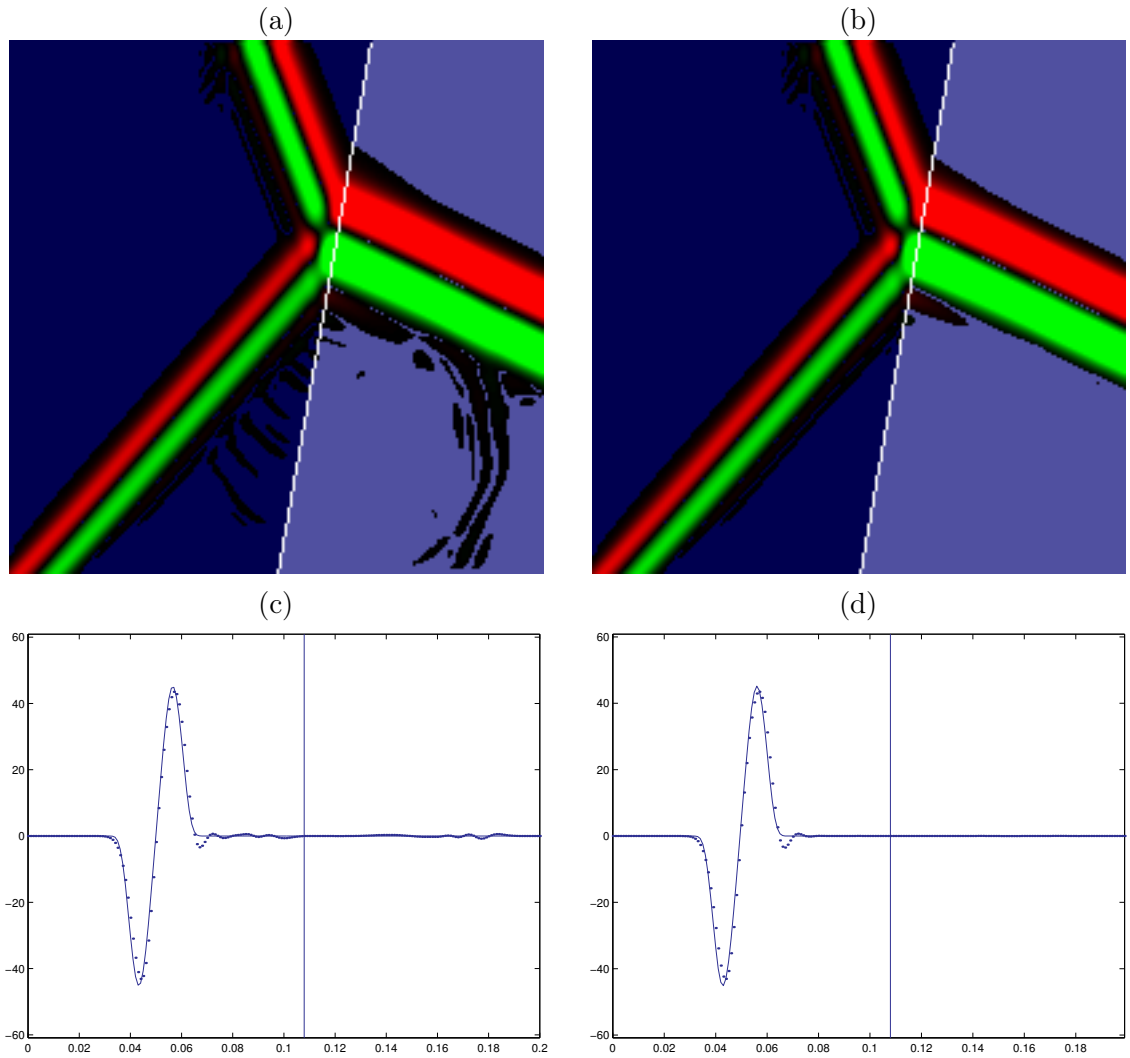

FIG. 10.11 – *Incidence sous-critique. Pression acoustique à* $t_1 = 2\,10^{-4}$ *s. Lax-Wendroff : pas de méthode d'interface (a-c) ; couplage avec l'ESIM (b-d).*

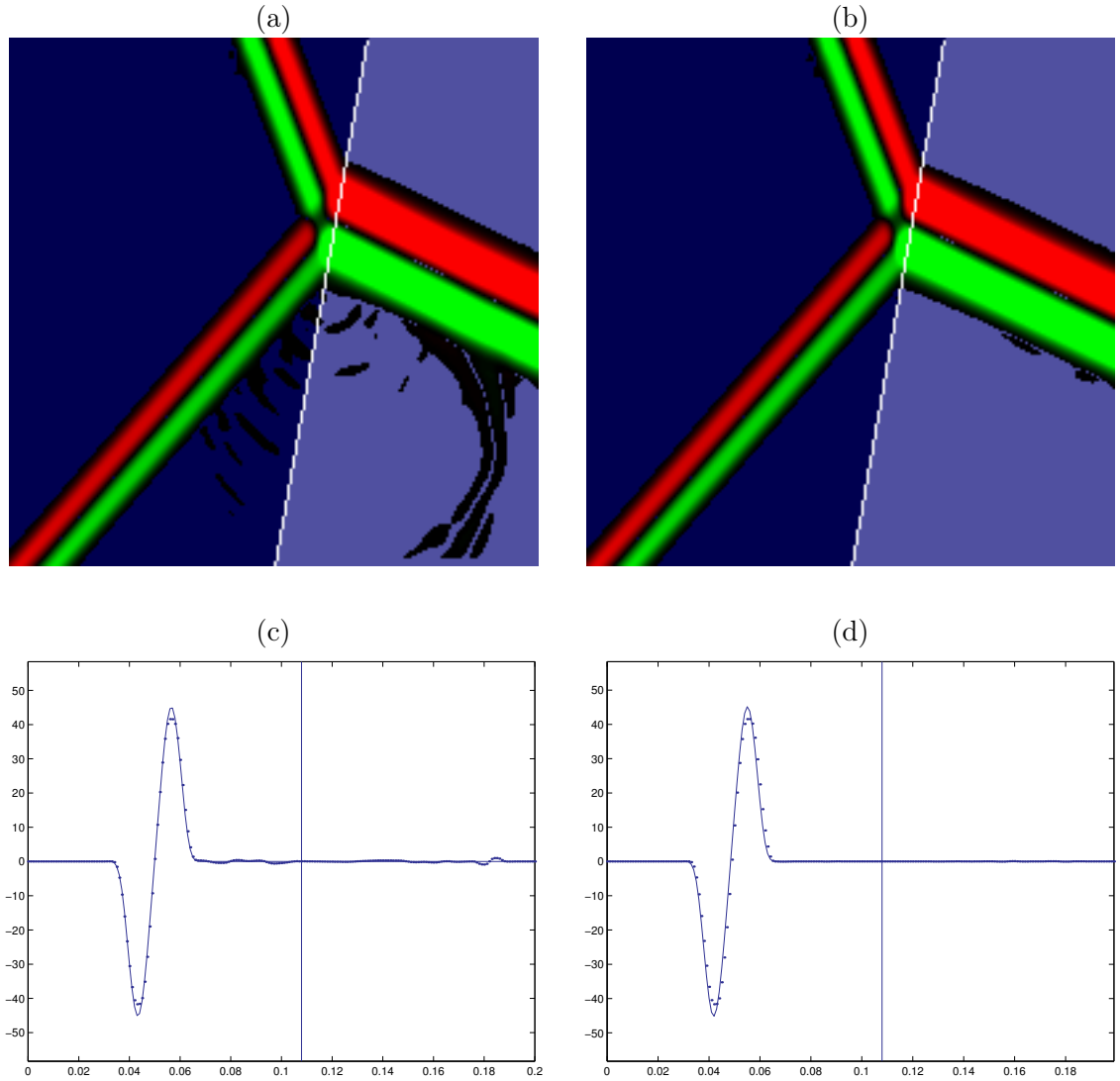

FIG. 10.12 – *Incidence sous-critique. Pression acoustique à* $t_1 = 2\,10^{-4}$ *s. Volumes finis avec limiteur de flux : pas de méthode d'interface (a-c) ; couplage avec l'ESIM (b-d).*

Méthode	N	Erreur L_∞	Ordre L_∞	Erreur L_1	Ordre L_1
Lax-Wendroff	100	1.79e+1	-	7.73e-1	-
	200	7.46e00	**1.26**	2.75e-1	**1.39**
	400	2.39e00	**1.64**	9.00e-2	**1.61**
	800	8.18e-1	**1.54**	3.45e-2	**1.38**
	1600	4.18e-1	**0.96**	1.46e-2	**1.24**
	3200	1.97e-1	**1.08**	6.31e-3	**1.21**
Lax-Wendroff	100	2.51e+1	-	8.33e-1	-
	200	8.73e00	**1.52**	2.48e-1	**1.74**
+	400	2.61e00	**1.74**	6.01e-2	**2.04**
	800	6.31e-1	**2.04**	1.50e-2	**2.00**
ESIM	1600	1.54e-1	**2.03**	3.76e-3	**1.99**
	3200	3.89e-2	**1.98**	9.46e-4	**1.97**
Volumes finis	100	1.30e+1	-	3.55e-1	-
	200	5.51e00	**1.23**	1.45e-1	**1.29**
	400	2.22e00	**1.31**	6.12e-2	**1.24**
	800	7.64e-1	**1.53**	2.67e-2	**1.19**
	1600	3.18e-1	**1.26**	1.12e-2	**1.25**
	3200	1.44e-1	**1.13**	5.33e-3	**1.07**
Volumes finis	100	1.05e+1	-	3.15e-1	-
	200	4.08e00	**1.36**	8.56e-2	**1.88**
+	400	1.33e00	**1.61**	2.02e-2	**2.08**
	800	4.42e-1	**1.59**	5.30e-3	**1.93**
ESIM	1600	1.45e-1	**1.61**	1.32e-3	**2.00**
	3200	4.83e-2	**1.58**	3.41e-4	**1.95**

TAB. 10.4 – *Ordres de convergence. Interface parfaite 2D entre deux fluides.*

Schémas	Nombre de points irréguliers	Prétraitement (s)	Itération (s)
Lax-Wendroff	398	10.4	0.6
Volumes finis	856	28.2	2.5

TAB. 10.5 – *Temps de calcul : interface plane entre deux fluides parfaits.*

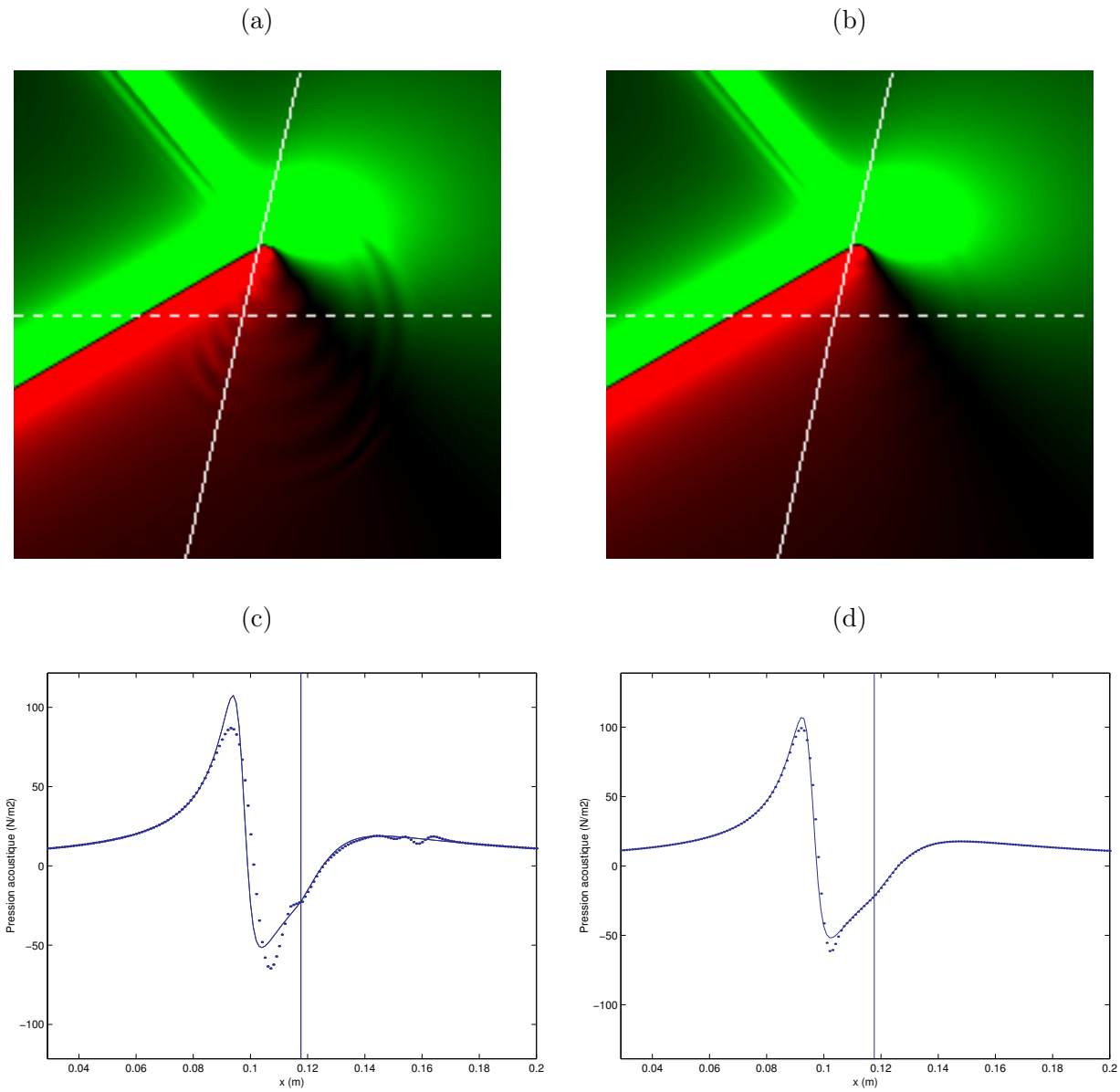

FIG. 10.13 – *Incidence sur-critique. Pression acoustique à* $t_1 = 1.1\,10^{-4}$ *s. Schéma de Lax-Wendroff : pas de méthode d'interface (a-c) ; couplage avec l'ESIM (b-d).*

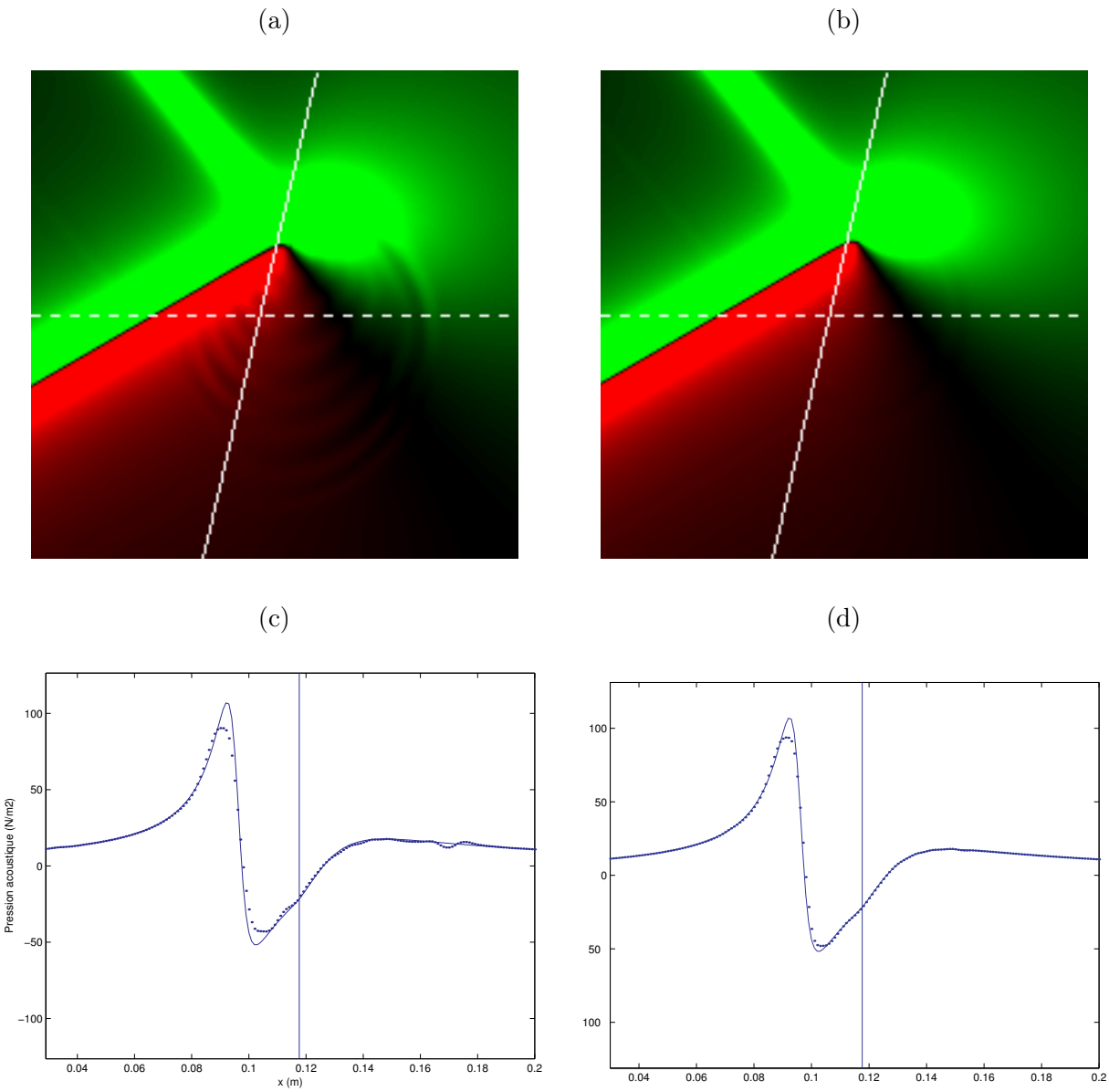

FIG. 10.14 – *Incidence sur-critique. Pression acoustique à* $t_1 = 1.1\,10^{-4}$ *s. Volumes finis avec limiteur de flux : pas de méthode d'interface (a-c) ; couplage avec l'ESIM (b-d).*

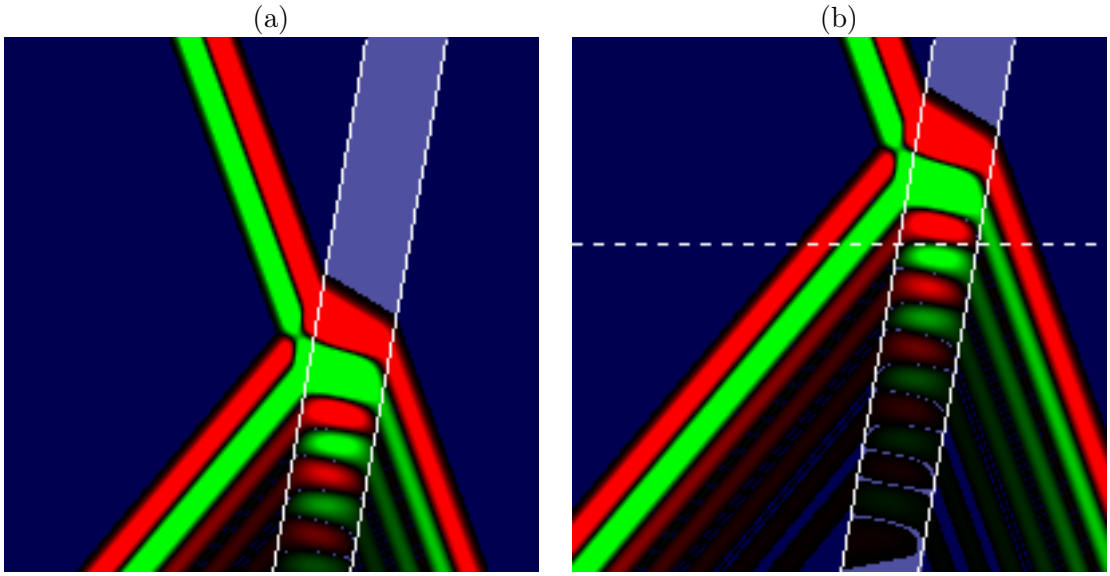

FIG. 10.15 – *Cartes théoriques de p à $t_0 = 10^{-4}$ s (a) et à $t_1 = 1.25\,10^{-4}$ s (b). La droite horizontale en pointillés repère l'ordonnée $y = 0.12$ m où sont effectuées les coupes en figure 10.16.*

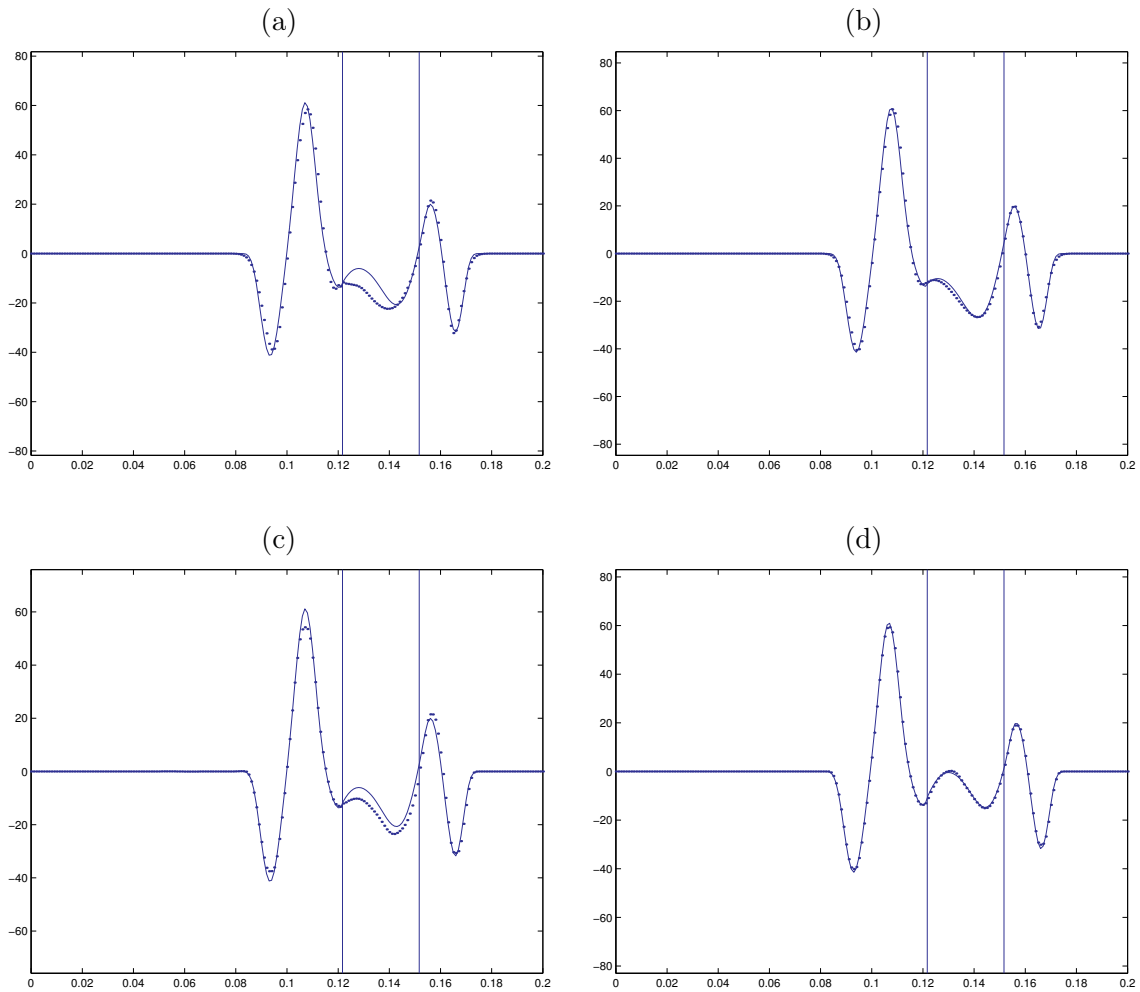

FIG. 10.16 – *Milieu tricouche fluide. Valeurs exactes (traites pleins) et numériques (pointillés) de la pression acoustique à* $t_1 = 1.25\,10^{-4}$ *s. Lax-Wendroff : pas de méthode d'interface (a) ; couplage avec l'ESIM (b). Volumes finis avec limiteur de flux : pas de méthode d'interface (c) ; couplage avec l'ESIM (d).*

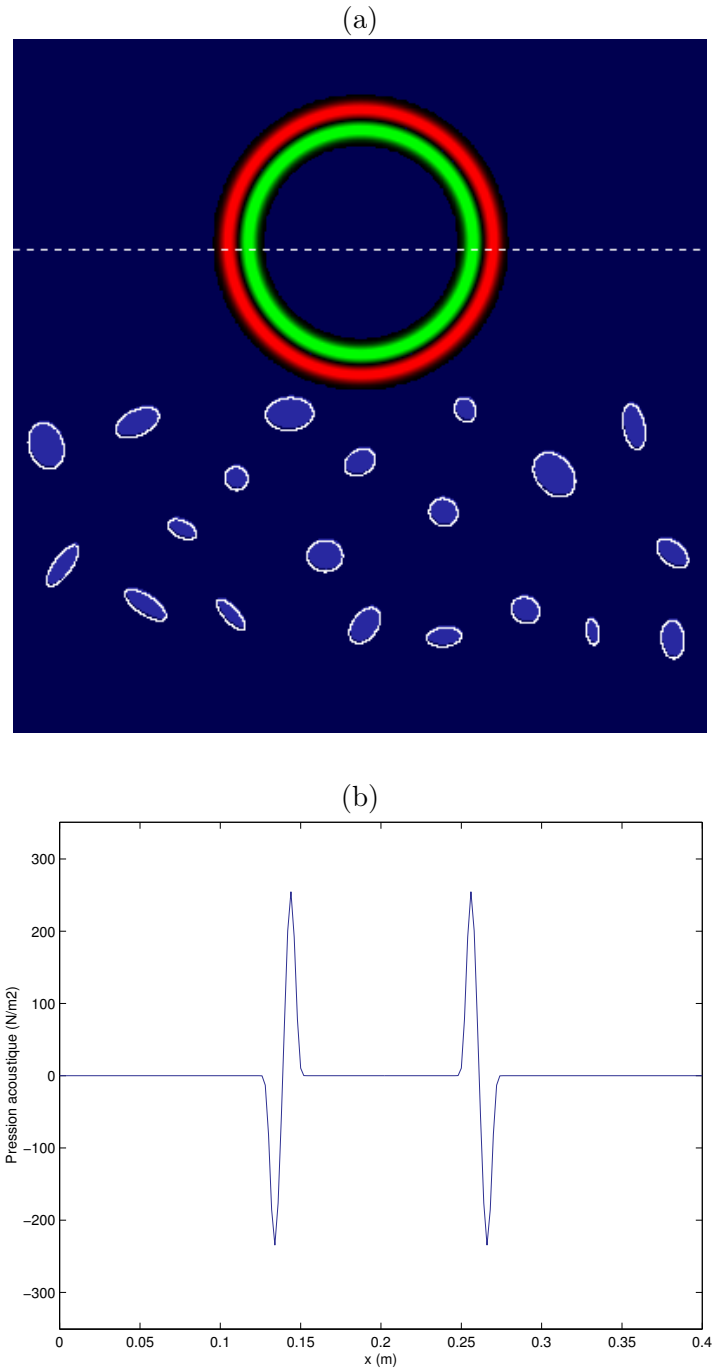

FIG. 10.17 – *Carte et coupe théoriques de* p *à* $t_0 = 5\,10^{-5}$ *s.*

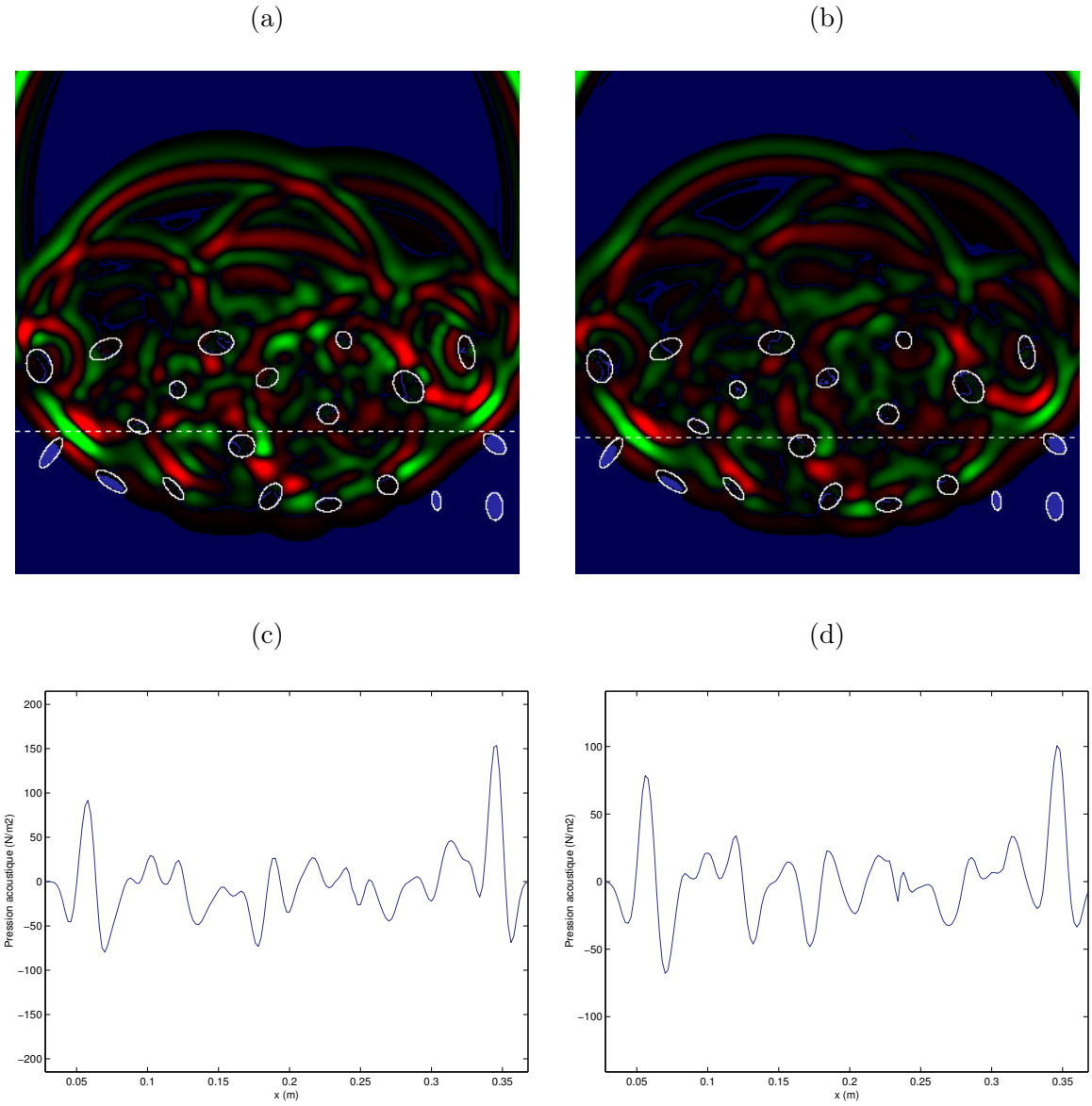

FIG. 10.18 – *Cartes et coupes numériques de p à $t_1 = 1.4\,10^{-4}$ s. Lax-Wendroff + ESIM (a-c) ; volumes finis + ESIM (b-d).*

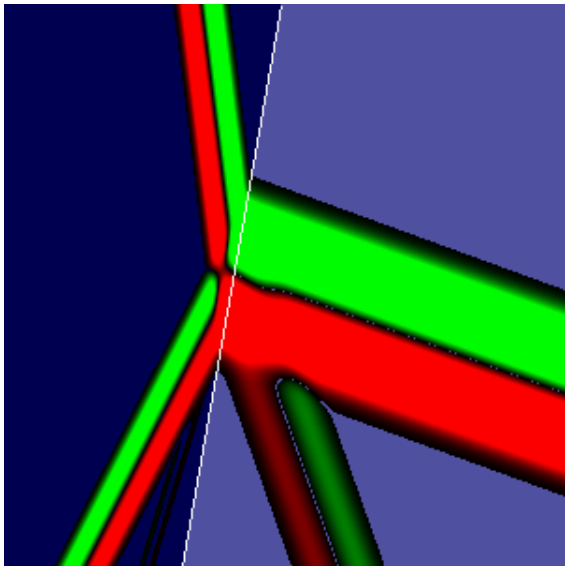

FIG. 10.19 – *Carte théorique de* σ_{11} *à* $t_0 = 8.4\,10^{-5}$ *s.*

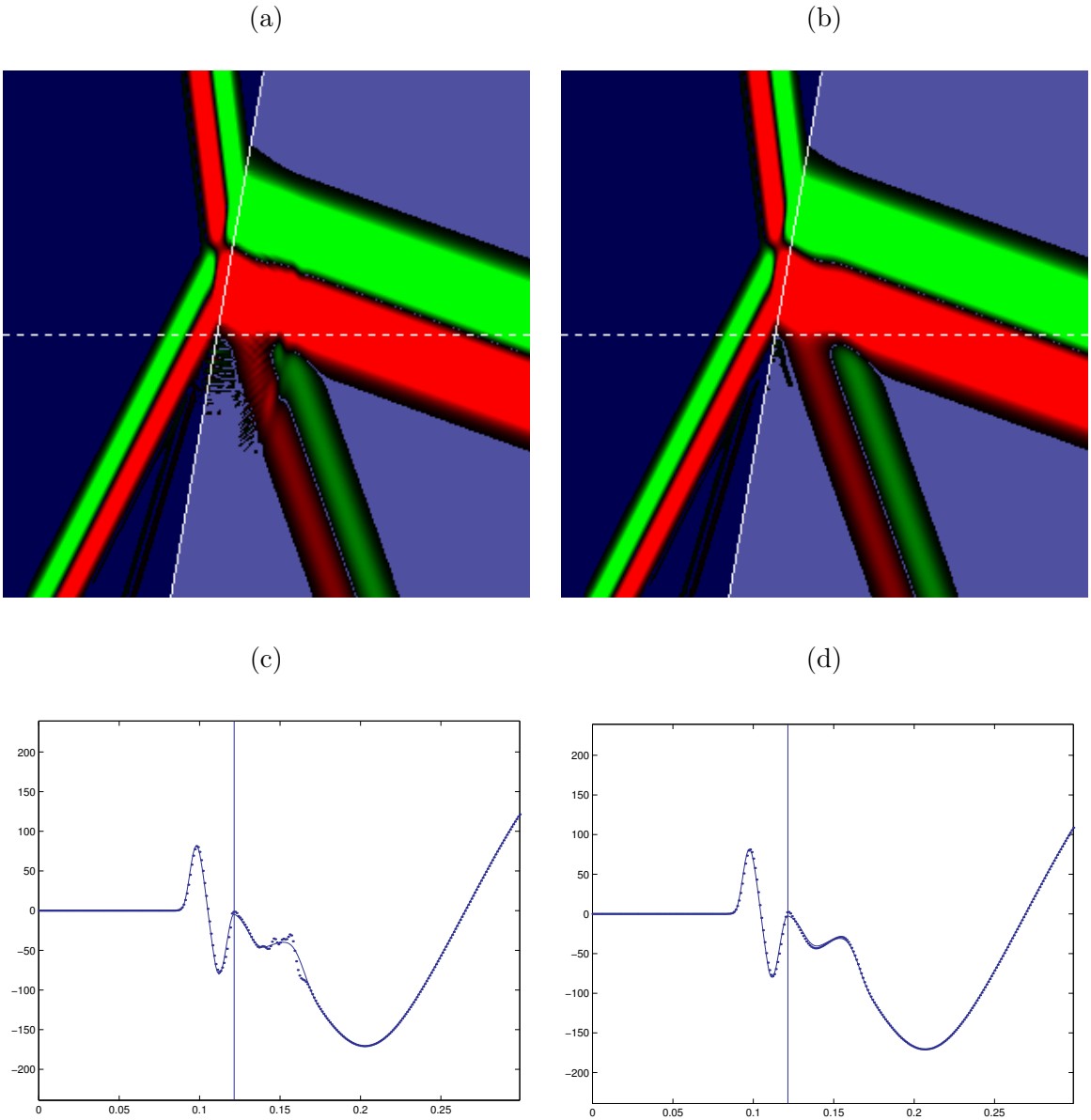

FIG. 10.20 – *Cartes et coupes de* σ_{11} *à* $t_1 = 9.6\,10^{-4}$ *s (traits pleins : solution exacte ; pointillés : valeurs numériques). Lax-Wendroff (a-c), Lax-Wendroff + ESIM (b-d).*

Chapitre 11

Conclusion et perspectives

11.1 Bilan

11.1.1 Méthode proposée

Au terme de cette étude, rappelons l'objectif qui nous a motivé : il s'agissait d'offrir au physicien intéressé par un problème de propagation d'ondes en présence d'interfaces un outil fiable pour réaliser ses expériences numériquement. Les difficultés inhérentes à cette entreprise sont de deux types. D'une part, les interfaces conduisent à une irrégularité de la solution qui se répercute sur les qualités des schémas numériques, ces qualités étant dégradées, voire anéanties. D'autre part, on se heurte à un problème de description des interfaces dans les schémas numériques, tant pour leur représentation géométrique que pour la prise en compte des conditions de saut physiques. Une réponse incomplète à un seul de ces problèmes invalide la portée des expériences numériques, transformant ce qui doit être un outil de haute précision en un logiciel de démonstration vaguement qualitatif.

La méthode que nous proposons consiste en la construction d'une méthode numérique, l'Explicit Simplified Interface Method (ESIM) [64, 53]. Cette méthode maintient, en présence d'interfaces, les propriétés numériques qu'ont les schémas en milieu homogène. A la différence des autres méthodes d'interface, l'ESIM s'adapte automatiquement à une large gamme de schémas numériques explicites en temps, ne nécessitant pas l'écriture explicite d'un nouveau schéma près des interfaces (avec les difficultés que cela comporte). Au contraire, la méthode consiste à modifier certaines valeurs numériques sur lesquelles s'appuie le schéma pour l'avancée en temps. Ces valeurs modifiées sont des estimations numériques de prolongements réguliers de la solution, de part et d'autre des interfaces. Ces prolongements sont construits à partir des conditions de saut vérifiées par la solution et ses dérivées spatiales, en des points (de "projection") des interfaces. Ces points de projection ne coïncident pas forcément avec un noeud du maillage régulier. L'ESIM est robuste même pour des contrastes extrêmes des paramètres physiques. Enfin, en imposant à la solution numérique le respect des conditions de saut du problème exact, la méthode permet de prendre en compte la géométrie de l'interface en chaque point de projection.

De façon schématique, l'ESIM procède en trois étapes, modulaires. A partir des conditions de saut vérifiées par la solution, la première étape consiste à calculer les conditions de saut vérifiées par les

dérivées spatiales successives de cette solution. L'ordre maximal de dérivation nécessaire dépend de l'ordre de convergence des schémas en milieu homogène. A des ordres élevés, ce calcul peut facilement être réalisé en utilisant des langages de calcul formel, comme MAPLE. La deuxième étape consiste à préparer le calcul des valeurs modifiées : recherche des points irréguliers, inversion des matrices de conditions de saut. Cette étape dépend de l'ordre de convergence des schémas et du nombre de points qu'ils utilisent pour l'avancée en temps, mais pas de leur expression, ce qui simplifie grandement la procédure. Le temps de calcul associé à cette étape, effectuée en prétraitement, est négligeable. La troisième étape est réalisée à chaque pas de temps : au voisinage des interfaces, le schéma s'applique sur les valeurs modifiées, déduites des deux premières étapes. Le surcoût informatique induit par le calcul et l'utilisation des valeurs modifiées est négligeable devant le coût des schémas numériques.

11.1.2 Démarche suivie

Pour proposer cette méthode, nous sommes passés par plusieurs étapes. Tout d'abord, nous avons recensé les problèmes induits par la présence d'une interface dans un schéma numérique ; cet examen s'est aussi porté sur des méthodes classiques pour résoudre le problème, à savoir les méthodes d'interface comme l'IIM. Il nous a conduit à un "cahier des charges" de ce qu'est, à notre sens, une méthode d'interface optimale. La suite du travail a consisté à la construire.

Nous avons commencé par régler la question des schémas numériques, en proposant une palette de schémas aux propriétés remarquables en milieu homogène. Le choix de ces schémas, issus de la mécanique des fluides numérique, ne restreint en rien la généralité du propos.

Après quoi, nous avons abordé différents cas d'interfaces entre milieux fluides et/ou solides, modélisant des contacts simples : contact parfait, contact imparfait (décrit par des conditions de saut de type masse-ressort). Dans chaque cas, nous avons étudié les conditions de saut vérifiées par les dérivées spatiales successives de la solution exacte. Pour faire face à un problème majeur en dimensions deux et trois, à savoir un déficit de conditions de saut, nous avons proposé une nouvelle stratégie. Au lieu de rechercher des conditions de saut supplémentaires (stratégie de l'IIM), nous proposons de n'utiliser que les conditions de saut données par la physique, ce qui conduit à la résolution de systèmes sous-déterminés. Cette stratégie a pour avantage de rendre possible l'étude de configurations où les conditions de saut supplémentaires n'existent pas : c'est le cas pour l'interface fluide-solide.

Nous avons ensuite exposé le principe de la nouvelle méthode d'interface, présentant les algorithmes sous une forme directement programmable. Nous avons montré certaines propriétés de l'ESIM, comme le maintien de l'ordre local de troncature des schémas. Nous avons aussi examiné l'inversibilité des matrices permettant le calcul des valeurs modifiées.

En vue des expériences numériques, nous avons calculé différentes solutions analytiques correspondant à des problèmes de propagation d'ondes en présence d'interfaces, dans le domaine temporel. Certaines solutions sont originales, à notre connaissance (contact imparfait en 1D, onde de surface en 2D). D'autres solutions analytiques apportent un éclairage particulier à la discussion sur les conditions de saut supplémentaires.

Enfin, nous avons réalisé des expériences numériques de propagation d'ondes en présence d'interfaces, couplant l'ESIM aux schémas numériques. Nous avons alors mesuré la qualité des résultats

obtenus.

11.2 Perspectives

Cette thèse est la photographie, à un instant donné, d'un travail. Il nous semble important de préciser dans quelle direction nous nous dirigeons maintenant. Pour cela, nous indiquons ici des axes de recherche liés aux problèmes de propagation d'ondes en présence d'interfaces. Certains axes sont des généralisations du travail effectué, ou un examen plus approfondi de questions restées en suspens. D'autres axes, plus aventureux, sont en particulier consacrés à des interfaces dont les propriétés et la position peuvent varier avec le temps. Dans tous les cas, il s'agit d'explorer des voies et de développer des outils directement utilisables par le physicien.

Avant d'aborder ces axes, une certaine prudence est de mise. Comme toute méthode, celle que nous proposons ne prétend pas à l'universalité, et a certainement ses limites : "si ma théorie s'applique à tous les problèmes, c'est qu'elle n'est pas bonne" (Kachanov).

11.2.1 Approfondissement de la méthode

Analyse numérique. Même dans le cas simple 1D avec des propriétés physiques constantes par morceaux et une interface parfaite, la méthode d'interface ne nous paraît pas encore totalement aboutie. Nous pensons (croyons ? espérons ?...) que des améliorations sont possibles. Pour réaliser ces dernières, l'analyse doit être poussée plus loin. Le premier point, laissé en suspens, concerne une démonstration de stabilité. Ce point est d'autant plus important qu'il conditionne les estimations théoriques d'ordres de convergence globale (théorème de Lax-Richtmyer) et d'erreurs commises. A la différence de l'IIM, nous avons observé une grande robustesse de l'ESIM, même pour de très forts contrastes des paramètres physiques. Cependant, dans le cas de contrastes extrêmes et d'une interface très proche d'un point de calcul, des instabilités peuvent apparaître. En 1D, nous avons proposé une technique permettant d'éviter ce défaut. Cette technique demande elle aussi à être justifiée.

Le deuxième point concerne la *conservativité* des schémas couplés à l'ESIM. Ces schémas étant conservatifs en milieu homogène, certaines grandeurs sont alors conservées (les "variables caractéristiques"). Sans précautions particulières, les schémas conservatifs ne garantissent pas la conservation des variables caractéristiques en présence d'interfaces. Cela peut d'ailleurs expliquer les instabilités observées alors dans le cas de contrastes extrêmes. Nous pensons que l'ESIM permet de conserver les variables caractéristiques, à un ordre de précision près. Pour étayer cette idée, nous nous basons sur un argument simple : la méthode d'interface que nous proposons impose à la solution numérique le respect des conditions de saut aux interfaces, lesquelles conditions de saut ne sont qu'une expression des lois de conservation à l'interface même. La question de la conservativité est importante, car elle conditionne l'application de l'ESIM à des problèmes non linéaires, comme ceux rencontrés en mécanique des fluides, où il n'y a pas unicité de la solution. Dans ces cas, la conservativité d'un schéma numérique garantit la convergence vers la bonne solution (ou solution entropique) du problème.

La construction de l'ESIM a été essentiellement réalisée en partant d'une critique systématique de l'IIM. Insistons une dernière fois sur le fait que cette critique systématique a été faite dans

un bon esprit, les avancées de l'IIM ayant été majeures. Il reste un aspect que nous n'avons pas encore remis en cause en 2D (et a fortiori en 3D), par défaut d'une meilleure idée. La construction de chaque valeur modifiée en chaque point de calcul proche de l'interface nécessite de considérer un point P de l'interface : comme l'IIM, l'ESIM choisit comme point P la projection orthogonale du point de calcul étudié. Rien ne justifie ce choix, ce qui ne nous satisfait pas. Cette question mérite d'être creusée plus en avant.

Cas 3D. Pour aborder des problèmes concrets et non académiques, il est nécessaire de poursuivre cette étude en 3D. Du point de vue des schémas numériques, le problème est résolu ; en particulier, nous avons étudié la parallélisation en 3D des schémas présentés au cours de cette étude. Par contre, l'écriture en 3D des conditions de saut, puis de l'ESIM, constituent une tâche importante.

Pour mener à terme cette tâche, certains points techniques, mais importants, doivent être résolus. Citons en particulier la parallélisation des algorithmes couplant la méthode d'interface et les schémas numériques. A priori, ce problème semble bien posé, au sens où le traitement que nous proposons est local à chaque point de l'interface. Cependant, il reste à montrer que la méthode d'interface ne dégrade pas les performances de la parallélisation, ce qui peut survenir si trop de données doivent être transférées d'un process à l'autre.

Représentation géométrique. L'étude de cas 3D amène à considérer en détail les problèmes de description des interfaces (ce qui s'avère aussi utile en 2D). Au cours du présent travail, nous avons considéré des interfaces planes ou elliptiques, décrites par leur représentation paramétrée. Que se passe-t-il si nous ne disposons que de points de contrôle décrivant l'interface, issus par exemple d'un scanner ? Il s'agit alors d'examiner l'influence de représentations approchées (comme des splines) sur la qualité de la méthode d'interface. Voyons un intérêt immédiat de cet examen.

Le calcul des conditions de saut vérifiées par les dérivées spatiales de la solution, à un ordre donné, mettait en jeu les dérivées spatiales de la représentation de l'interface, à l'ordre suivant. Pour un schéma d'ordre élevé, on est ainsi amené à définir des dérivées d'ordre élevé de la représentation géométrique, ce qui peut faire sourire l'expérimentateur : quel sens donner à la dérivée sixième de la courbure d'une pièce, lorsque l'on dispose, au maximum, de la dérivée première de sa courbure ?... Une technique consiste dans ce cas à annuler les dérivées spatiales à partir d'un certain ordre. Une technique non brutale consiste peut-être à utiliser systématiquement des représentations approchées des interfaces, les dérivées de ces représentations s'annulant toutes à partir d'un certain ordre.

Milieux continûment variables. Une autre voie de recherche consiste à examiner le cas des milieux de propagation plus complexes. Nous pensons en particulier au cas des milieux continûment variables, comme la couche d'eau océanique. Les schémas numériques, puis la dérivation des conditions de saut, sont à reprendre entièrement.

Dans le cas de milieux de propagation aux propriétés physiques constantes par morceaux, nous avons seulement prolongé la solution numérique d'un milieu à l'autre milieu. Dans le cas de milieux continument variables, il se peut qu'il faille aussi prolonger les propriétés physiques de chaque milieu de part et d'autre des interfaces, conduisant à une modification profonde de l'ESIM. En tout cas, cette étude se doit de commencer par un examen approfondi de configurations 1D.

Sources numériques. L'étude de milieux continûment variables nous amène à une question, apparemment déconnectée du problème, mais pourtant essentielle, à savoir : comment initialiser

proprement les calculs ? Dans le cas de milieu constants par morceaux, nous rencontrons déjà une difficulté. Par exemple, comment fabriquer un paquet d'ondes représentant le plus fidèlement possible le signal émis par un transducteur ?

De façon générale, l'examen de la littérature nous amène à la réflexion suivante : la modélisation numérique de sources pour des problèmes de propagation tient souvent plus de la cuisine (et pas la meilleure...) que de la science, et ce aussi bien dans le domaine fréquentiel (exemple : start-up de l'équation parabolique) que dans le domaine temporel. Dans le cas de milieux continûment variables, le problème est rendu encore plus ardu par le fait que nous ne disposons pas, à notre connaissance, de sources élémentaires simples. Une solution consiste à modéliser directement le phénomène qui donne naissance à une onde, à savoir le mouvement vibratoire d'une structure. Nous avons examiné, à titre préliminaire et non développé ici, comment utiliser l'ESIM pour décrire une structure vibrante dans un fluide avec des propriétés physiques constantes par morceaux. L'approfondissement de cette voie conduirait, en retour, à de nouveaux problèmes d'analyse numérique.

11.2.2 Voies de recherche

Couplage fluide-structure. Une fois le cas d'une interface fluide-solide 3D résolu, il est possible d'aborder le cas de deux interfaces fluide-solide en vis-à-vis. Si le nombre de points de calcul dans la structure solide intermédiaire est suffisant, le travail ne revient qu'à des problèmes de gestion informatique. Par contre, si les deux interfaces sont plus proches l'une de l'autre que le pas de discrétisation en espace, une méthode consiste à développer une technique vue en 1D : dans ce cas, nous avons adapté l'ESIM pour prendre en compte la propagation des ondes dans le milieu intermédiaire, sans avoir à raffiner le maillage. Ces idées sont une façon originale d'envisager le couplage fluide-structure dans le domaine temporel, sans avoir à calculer d'opérateurs de plaque ou de coque mince.

Ondes et contacts imparfaits. La littérature consacrée à la simulation numérique de la propagation des ondes dans le domaine temporel est abondante lorsqu'il s'agit d'étudier des milieux aux propriétés physiques complexes. Par contre, cette même littérature devient fort discrète pour décrire des degrés de contact complexes entre les milieux. Cette lacune est d'autant plus grave que la propagation des ondes dépend fortement de la nature des contacts aux interfaces, et permet de caractériser le degré d'adhésion des milieux. Pour combler cette lacune, une possibilité consiste à étendre l'ESIM à des lois de contact connues en mécanique des solides.

L'étude menée ici en 1D de la propagation des ondes à travers un contact imparfait, décrit par un modèle rhéologique simple et indépendant du temps, n'est qu'un prélude à l'étude de lois de contact plus complexes. Nous pensons en particulier à des lois décrivant un degré d'adhésion dépendant du temps et de l'état d'usure, modélisant des interfaces fibre-matrice.

Ondes thermoélastiques et interfaces. Le cas d'interfaces en mouvement et dont la position dépend de la solution est un domaine où les méthodes d'interface sont essentielles. Rappelons que les méthodes d'interface ont été développées, à l'origine, pour traiter numériquement sur un maillage régulier des interfaces mobiles (problème de Stefan [52], membrane élastique dans un fluide de Stokes [50]...). L'étude de la propagation des ondes thermoélastiques en présence d'un front de fusion est un exemple qui nous tient particulièrement à cœur.

Avant d'aborder un tel problème couplé, il convient déjà de définir des méthodes numériques efficaces pour calculer la propagation des ondes thermoélastiques avec une interface fixe. Pour cela, une méthode consiste à appliquer en tout point de calcul des schémas de volumes finis avec limiteur de flux (les mêmes que ceux que nous utilisons, à une modification près), en homogénéisant les propriétés physiques au voisinage des interfaces [9].

Au lieu d'homogénéiser les coefficients, il serait intéressant d'appliquer les idées présentées au cours de cette thèse, et ainsi de prendre en compte précisément les conditions de saut mécaniques et thermiques aux interfaces. Cette description de la physique à l'interface doit améliorer la qualité de la solution numérique du problème à interface fixe, et ainsi s'avérer utile pour le problème à interface mobile.

Annexe A

Matrices de saut 2D

A.1 Objet de l'annexe

Dans cette annexe, nous écrivons les composantes des matrices de saut, déduites des calculs menés au chapitre 6. Les indices des différentes matrices découlent directement du lemme 1 présenté au chapitre 3. Pour chque type d'interface, nous précisons uniquement les composantes non nulles des différentes matrices. Celles-ci permettent une programmation directe des algorithmes présentés aux chapitre 6 et 8.

A.2 Interface parfaite fluide-fluide

Nous commençons par écrire les conditions de saut naturelles. La condition (6.9) implique

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}[1,1] = y^{'} \qquad && \boldsymbol{C}[2,3] = 1 \\ &\boldsymbol{C}[1,2] = -x^{'} \end{aligned} \tag{A.1}$$

La condition (6.11) implique

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}[3,1] = y^{''} \qquad && \boldsymbol{C}[4,6] = x^{'} \\ &\boldsymbol{C}[3,2] = -x^{''} && \boldsymbol{C}[4,9] = y^{'} \\ &\boldsymbol{C}[3,4] = x^{'}y^{'} \\ &\boldsymbol{C}[3,5] = -x^{'2} \\ &\boldsymbol{C}[3,7] = y^{'2} \\ &\boldsymbol{C}[3,8] = -x^{'}y^{'}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

La condition (6.13) implique

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}[5,6] &= -\frac{y^{'}}{\rho} \qquad & \boldsymbol{C}[6,4] &= \rho\, c^2 \\ \boldsymbol{C}[5,9] &= \frac{x^{'}}{\rho} \qquad & \boldsymbol{C}[6,8] &= \rho\, c^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

La condition (6.18) implique

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}[7,1] &= y^{'''} & \boldsymbol{C}[8,6] &= x^{''} \\ \boldsymbol{C}[7,2] &= -x^{'''} & \boldsymbol{C}[8,9] &= y^{''} \\ \boldsymbol{C}[7,4] &= 2\, x^{'} y^{''} + x^{''} y^{'} & \boldsymbol{C}[8,12] &= x^{'2} \\ \boldsymbol{C}[7,5] &= -3\, x^{'} x^{''} & \boldsymbol{C}[8,15] &= 2\, x^{'} y^{'} \\ \boldsymbol{C}[7,7] &= 3\, y^{'} y^{''} & \boldsymbol{C}[8,18] &= y^{'2} \\ \boldsymbol{C}[7,8] &= -\left(2\, x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right) \\ \boldsymbol{C}[7,10] &= x^{'2} y^{'} \\ \boldsymbol{C}[7,11] &= -x^{'3} \\ \boldsymbol{C}[7,13] &= 2\, x^{'} y^{'2} \\ \boldsymbol{C}[7,14] &= -2\, x^{'2} y^{'} \\ \boldsymbol{C}[7,16] &= y^{'3} \\ \boldsymbol{C}[7,17] &= -x^{'} y^{'2}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

La condition (6.20) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[9,6] = -\frac{y''}{\rho} && \boldsymbol{C}[10,10] = \rho\, c^2\, x' \\
&\boldsymbol{C}[9,9] = \frac{x''}{\rho} && \boldsymbol{C}[10,13] = \rho\, c^2\, y' \\
&\boldsymbol{C}[9,12] = -\frac{x'\, y'}{\rho} && \boldsymbol{C}[10,14] = \rho\, c^2\, x' \\
&\boldsymbol{C}[9,15] = \frac{x'^2 - y'^2}{\rho} && \boldsymbol{C}[10,17] = \rho\, c^2\, y' \\
&\boldsymbol{C}[9,18] = \frac{x'\, y'}{\rho}.
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

La condition (6.22) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[11,10] = c^2\, y' && \boldsymbol{C}[12,12] = c^2 \\
&\boldsymbol{C}[11,13] = -c^2\, x' && \boldsymbol{C}[12,18] = c^2 \\
&\boldsymbol{C}[11,14] = c^2\, y' \\
&\boldsymbol{C}[11,17] = -c^2\, x'.
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

On continue le remplissage de $\boldsymbol{C}$ avec les conditions de saut supplémentaires. Les conditions (6.28), (6.32) et (6.33) impliquent

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[13,1] = \rho\, x^{'} && \boldsymbol{C}[14,1] = \rho\, x^{''} && \boldsymbol{C}[15,1] = \rho\, x^{'''} \\
&\boldsymbol{C}[13,2] = \rho\, y^{'} && \boldsymbol{C}[14,2] = \rho\, y^{''} && \boldsymbol{C}[15,2] = \rho\, y^{'''} \\
& && \boldsymbol{C}[14,4] = \rho\, x^{'2} && \boldsymbol{C}[15,4] = 3\,\rho\, x^{'} x^{''} \\
& && \boldsymbol{C}[14,5] = \rho\, x^{'} y^{'} && \boldsymbol{C}[15,5] = \rho\left(2\, x^{'} y^{''} + x^{''} y^{'}\right) \\
& && \boldsymbol{C}[14,7] = \rho\, x^{'} y^{'} && \boldsymbol{C}[15,7] = \rho\left(2\, x^{''} y^{'} + x^{'} y^{''}\right) \\
& && \boldsymbol{C}[14,8] = \rho\, y^{'2} && \boldsymbol{C}[15,8] = 3\,\rho\, y^{'} y^{''} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,10] = \rho\, x^{'3} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,11] = \rho\, x^{'2} y^{'} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,13] = 2\,\rho\, x^{'2} y^{'} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,14] = 2\,\rho\, x^{'} y^{'2} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,16] = \rho\, x^{'} y^{'2} \\
& && && \boldsymbol{C}[15,17] = \rho\, y^{'3}.
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

A.3 Interface parfaite solide-solide

Nous commençons par les conditions de saut naturelles. La condition (6.39) conduit à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[1,1] = y^{'} && \boldsymbol{C}[2,1] = x^{'} && \boldsymbol{C}[3,3] = y^{'2} && \boldsymbol{C}[4,3] = x^{'} y^{'} \\
&\boldsymbol{C}[1,2] = -x^{'} && \boldsymbol{C}[2,2] = y^{'} && \boldsymbol{C}[3,4] = -2\, x^{'} y^{'} && \boldsymbol{C}[4,4] = -\left(x^{'2} - y^{'2}\right) \\
& && && \boldsymbol{C}[3,5] = x^{'2} && \boldsymbol{C}[4,5] = -x^{'} y^{'}.
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

La condition (6.44) conduit à
(A.9)

$$\boldsymbol{C}[5,1] = y''$$
$$\boldsymbol{C}[5,2] = -x''$$
$$\boldsymbol{C}[5,6] = x'y'$$
$$\boldsymbol{C}[5,7] = -x'^2$$
$$\boldsymbol{C}[5,11] = y'^2$$
$$\boldsymbol{C}[5,12] = -x'y'$$

$$\boldsymbol{C}[6,1] = x''$$
$$\boldsymbol{C}[6,2] = y''$$
$$\boldsymbol{C}[6,6] = x'^2$$
$$\boldsymbol{C}[6,7] = x'y'$$
$$\boldsymbol{C}[6,11] = x'y'$$
$$\boldsymbol{C}[6,12] = y'^2$$

$$\boldsymbol{C}[7,3] = 2\,y'y''$$
$$\boldsymbol{C}[7,4] = -2\left(x''y' + x'y''\right)$$
$$\boldsymbol{C}[7,5] = 2\,x'x''$$
$$\boldsymbol{C}[7,8] = x'y'^2$$
$$\boldsymbol{C}[7,9] = -2\,x'^2y'$$
$$\boldsymbol{C}[7,10] = x'^3$$
$$\boldsymbol{C}[7,13] = y'^3$$
$$\boldsymbol{C}[7,14] = -2\,x'y'^2$$
$$\boldsymbol{C}[7,15] = x'^2y'$$

$$\boldsymbol{C}[8,3] = x''y' + x'y''$$
$$\boldsymbol{C}[8,4] = -2\left(x'x'' - y'y''\right)$$
$$\boldsymbol{C}[8,5] = -\left(x''y' + x'y''\right)$$
$$\boldsymbol{C}[8,8] = x'^2y'$$
$$\boldsymbol{C}[8,9] = -\left(x'^3 - x'y'^2\right)$$
$$\boldsymbol{C}[8,10] = -x'^2y'$$
$$\boldsymbol{C}[8,13] = x'y'^2$$
$$\boldsymbol{C}[8,14] = -\left(x'^2y' - y'^3\right)$$
$$\boldsymbol{C}[8,15] = -x'y'^2.$$

La condition (6.48) conduit à
(A.10)

$$\boldsymbol{C}[9,8] = \frac{y'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[9,9] = -\frac{x'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[9,14] = \frac{y'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[9,15] = -\frac{x'}{\rho}$$

$$\boldsymbol{C}[10,8] = \frac{x'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[10,9] = \frac{y'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[10,14] = \frac{x'}{\rho}$$
$$\boldsymbol{C}[10,15] = \frac{y'}{\rho}$$

$$\boldsymbol{C}[11,6] = x'^2\lambda + y'^2\,(\lambda + 2\,\mu)$$
$$\boldsymbol{C}[11,7] = -2\,x'y'\mu$$
$$\boldsymbol{C}[11,11] = -2\,x'y'\mu$$
$$\boldsymbol{C}[11,12] = y'^2\lambda + x'^2\,(\lambda + 2\,\mu)$$

$$\boldsymbol{C}[12,6] = 2\,x'y'\mu$$
$$\boldsymbol{C}[12,7] = -\left(x'^2 - y'^2\right)\mu$$
$$\boldsymbol{C}[12,11] = -\left(x'^2 - y'^2\right)\mu$$
$$\boldsymbol{C}[12,12] = -2\,x'y'\mu.$$

La condition (6.52) conduit à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[13,1] = y^{'''} && \boldsymbol{C}[14,1] = x^{'''} \\
&\boldsymbol{C}[13,2] = -x^{'''} && \boldsymbol{C}[14,2] = y^{'''} \\
&\boldsymbol{C}[13,6] = x^{''}y^{'} + 2\,x^{'}y^{''} && \boldsymbol{C}[14,6] = 3\,x^{'}x^{''} \\
&\boldsymbol{C}[13,7] = -3\,x^{'}x^{''} && \boldsymbol{C}[14,7] = x^{''}y^{'} + 2\,x^{'}y^{''} \\
&\boldsymbol{C}[13,11] = 3\,y^{'}y^{''} && \boldsymbol{C}[14,11] = 2\,x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''} \\
&\boldsymbol{C}[13,12] = -\left(2\,x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''}\right) && \boldsymbol{C}[14,12] = 3\,y^{'}y^{''} \\
&\boldsymbol{C}[13,16] = x^{'2}y^{'} && \boldsymbol{C}[14,16] = x^{'3} \\
&\boldsymbol{C}[13,17] = -x^{'3} && \boldsymbol{C}[14,17] = x^{'2}y^{'} \\
&\boldsymbol{C}[13,21] = 2\,x^{'}y^{'2} && \boldsymbol{C}[14,21] = 2\,x^{'2}y^{'} \\
&\boldsymbol{C}[13,22] = -2\,x^{'2}y^{'} && \boldsymbol{C}[14,22] = 2\,x^{'}y^{'2} \\
&\boldsymbol{C}[13,26] = y^{'3} && \boldsymbol{C}[14,26] = x^{'}y^{'2} \\
&\boldsymbol{C}[13,27] = -x^{'}y^{'2} && \boldsymbol{C}[14,27] = y^{'3},
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[15,3] = 2\left(y''^2 + y'y'''\right) && \boldsymbol{C}[16,3] = x'''y' + 2x''y'' + x'y''' \\
&\boldsymbol{C}[15,4] = -2\left(x'''y' + 2x''y'' + x'y'''\right) && \boldsymbol{C}[16,4] = -2\left(x''^2 + x'x''' - y''^2 - y'y'''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,5] = 2\left(x''^2 + x'x'''\right) && \boldsymbol{C}[16,5] = -\left(x'''y' + 2x''y'' + x'y'''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,8] = x''y'^2 + 4x'y'y'' && \boldsymbol{C}[16,8] = 3x'x''y' + 2x'^2y'' \\
&\boldsymbol{C}[15,9] = -2\left(3x'x''y' + 2x'^2y''\right) && \boldsymbol{C}[16,9] = -\left(5x'^2x'' - x''y'^2 - 3x'y'y''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,10] = 5x'^2x'' && \boldsymbol{C}[16,10] = -\left(3x'x''y' + 2x'^2y''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,13] = 5y'^2y'' && \boldsymbol{C}[16,13] = 2x''y'^2 + 3x'y'y'' \\
&\boldsymbol{C}[15,14] = -2\left(2x''y'^2 + 3x'y'y''\right) && \boldsymbol{C}[16,14] = -\left(4x'x''y' + x'^2y'' - 5y'^2y''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,15] = 3x'^2x'' + 2x'x''y' && \boldsymbol{C}[16,15] = -\left(2x''y'^2 + 3x'y'y''\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,18] = x'^2y'^2 && \boldsymbol{C}[16,18] = x'^3y' \\
&\boldsymbol{C}[15,19] = -2x'^3y' && \boldsymbol{C}[16,19] = -\left(x'^4 - x'^2y'^2\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,20] = x'^4 && \boldsymbol{C}[16,20] = -x'^3y' \\
&\boldsymbol{C}[15,23] = 2x'y'^3 && \boldsymbol{C}[16,23] = 2x'^2y'^2 \\
&\boldsymbol{C}[15,24] = -4x'^2y'^2 && \boldsymbol{C}[16,24] = -2\left(x'^3y' - x'y'^3\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,25] = x'^3y' + x'^4 && \boldsymbol{C}[16,25] = -2x'^2y'^2 \\
&\boldsymbol{C}[15,28] = y'^4 && \boldsymbol{C}[16,28] = x'y'^3 \\
&\boldsymbol{C}[15,29] = -2x'y'^3 && \boldsymbol{C}[16,29] = -\left(x'^2y'^2 - y'^4\right) \\
&\boldsymbol{C}[15,30] = x'^3y' && \boldsymbol{C}[16,30] = -x'y'^3.
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

La condition (6.56) conduit à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[17,8] = \frac{y''}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,8] = \frac{x''}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,9] = -\frac{x''}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,9] = \frac{y''}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,14] = \frac{y''}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,14] = \frac{x''}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,15] = -\frac{x''}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,15] = \frac{y''}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,18] = \frac{x'y'}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,18] = \frac{x'^2}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,19] = -\frac{x'^2}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,19] = \frac{x'y'}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,23] = \frac{y'^2}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,23] = \frac{x'^2 + y'^2}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,25] = -\frac{x'^2}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,24] = \frac{x'y'}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,29] = \frac{y'^2}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,25] = \frac{x'y'}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[17,30] = -\frac{x'y'}{\rho} && \boldsymbol{C}[18,29] = \frac{x'y'}{\rho} \\
& && \boldsymbol{C}[18,30] = \frac{y'^2}{\rho}
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[19,6] = 2\left(x'x''\lambda + y'y''\,(\lambda + 2\,\mu)\right) && \boldsymbol{C}[20,6] = 2\left(x''y' + x'y''\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,7] = -2\left(x''y' + x'y''\right)\,\mu && \boldsymbol{C}[20,7] = -2\left(x'x'' - y'y''\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,11] = -2\left(x''y' + x'y''\right)\,\mu && \boldsymbol{C}[20,11] = -2\left(x'x'' - y'y''\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,12] = 2\left(y'y''\lambda + x'x''\,(\lambda + 2\,\mu)\right) && \boldsymbol{C}[20,12] = -2\left(x''y' + x'y''\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,16] = x'y'^2\,(\lambda + 2\,\mu) + x'^3\lambda && \boldsymbol{C}[20,16] = 2\,x'^2y'\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,17] = -2\,x'^2y'\,\mu && \boldsymbol{C}[20,17] = -\left(x'^3 - x'y'^2\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,21] = x'^2y'\,(\lambda - 2\,\mu) + y'^3\,(\lambda + 2\,\mu) && \boldsymbol{C}[20,21] = \left(3\,x'y'^2 - x'^3\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,22] = x'y'^2\,(\lambda - 2\,\mu) + x'^3\,(\lambda + 2\,\mu) && \boldsymbol{C}[20,22] = -\left(3\,x'^2y' - y'^3\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,26] = -2\,x'y'^2\mu && \boldsymbol{C}[20,26] = -\left(x'^2y' - y'^3\right)\,\mu \\
&\boldsymbol{C}[19,27] = y'^3\lambda + x'^2y'\,(\lambda + 2\,\mu) && \boldsymbol{C}[20,27] = -2\,x'y'^2\mu.
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

La condition (6.60) conduit à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[21,16] = y'\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,16] = x'\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[21,17] = -x'\,\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,17] = y'\,\frac{\mu}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[21,21] = -x'\,\frac{\lambda + \mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,21] = y'\,\frac{\lambda + \mu}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[21,22] = y'\,\frac{\lambda + \mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,22] = x'\,\frac{\lambda + \mu}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[21,26] = y'\,\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,26] = x'\,\frac{\mu}{\rho} \\
&\boldsymbol{C}[21,27] = -x'\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[22,27] = y'\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho},
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[23,18] = \frac{1}{\rho}\left(x^{'2}\lambda + y^{'2}\left(\lambda + 2\,\mu\right)\right) && \boldsymbol{C}[24,18] = 2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,19] = -2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[24,19] = -\left(x^{'2} - y^{'}\right)\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,23] = -2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[24,23] = -\left(x^{'2} - y^{'2}\right)\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,24] = 2\left(x^{'2} + y^{'2}\right)\frac{\lambda + \mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[24,25] = -\left(x^{'2} - y^{'2}\right)\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,25] = -2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[24,29] = -\left(x^{'2} - y^{'2}\right)\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,29] = -2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho} && \boldsymbol{C}[24,30] = -2\,x^{'}y^{'}\frac{\mu}{\rho}\\
&\boldsymbol{C}[23,30] = \frac{1}{\rho}\left(y^{'2}\lambda + x^{'2}\left(\lambda + 2\,\mu\right)\right).
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

Nous continuons le remplissage de $\boldsymbol{C}$ avec les conditions de saut supplémentaires. La condition (6.67) conduit à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}[25,3] = x^{'2}\alpha_1 + y^{'2}\alpha_2\\
&\boldsymbol{C}[25,4] = \frac{x^{'}y^{'}}{\mu}\\
&\boldsymbol{C}[25,5] = x^{'2}\alpha_2 + y^{'2}\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

La condition (6.72) conduit à

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}[26,3] &= 2\left(x^{'}x^{''}\alpha_1 + y^{'}y^{''}\alpha_2\right) \\
\boldsymbol{C}[26,4] &= \frac{1}{\mu}\left(x^{'}y^{''} + x^{''}y^{'}\right) \\
\boldsymbol{C}[26,5] &= 2\left(x^{'}x^{''}\alpha_2 + y^{'}y^{''}\alpha_1\right) \\
\boldsymbol{C}[26,8] &= x^{'3}\alpha_1 + x^{'}y^{'}\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[26,9] &= \frac{x^{'2}y^{'}}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[26,10] &= x^{'3}\alpha_2 + x^{'}y^{'2}\alpha_1 \\
\boldsymbol{C}[26,13] &= x^{'2}y^{'}\alpha_1 + y^{'3}\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[26,14] &= \frac{x^{'}y^{'2}}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[26,15] &= x^{'2}y^{'}\alpha_2 + y^{'3}\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Suivant que $\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \tau} \neq \mathbf{0}$ ou $\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \tau} = \mathbf{0}$, la condition (6.76) ou la condition (6.80) implique

$$
\begin{aligned}
&\text{si } \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \tau} \neq \mathbf{0} && \text{si } \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \tau} = \mathbf{0} \\
&\boldsymbol{C}[27,3] = x''^2\alpha_1 + y''^2\alpha_2 && \boldsymbol{C}[27,8] = x'^2y'\,(\alpha_1 - 2\,\alpha_2) - y'^3\alpha_2 \\
&\boldsymbol{C}[27,4] = \frac{x''y''}{\mu} && \boldsymbol{C}[27,9] = -\frac{x'^3}{\mu} \\
&\boldsymbol{C}[27,5] = x''^2\alpha_2 + y''^2\alpha_1 && \boldsymbol{C}[27,10] = x'^2y'\,(\alpha_2 - 2\,\alpha_1) - y'^3\alpha_1 \\
&\boldsymbol{C}[27,8] = \left(2\,x'y'y'' - x''y'^2\right)\,\alpha_2 + x'^2x''\alpha_1 && \boldsymbol{C}[27,13] = x'^2y'\,(2\,\alpha_1 - \alpha_2) + x'^3\alpha_1 \\
&\boldsymbol{C}[27,9] = \frac{x'^2y''}{\mu} && \boldsymbol{C}[27,14] = \frac{y'^3}{\mu} \\
&\boldsymbol{C}[27,10] = \left(2\,x'y'y'' - x''y'^2\right)\,\alpha_1 + x'^2x''\alpha_2 && \boldsymbol{C}[27,15] = x'^2y'\,(2\,\alpha_2 - \alpha_1) + x'^3\alpha_2 \\
&\boldsymbol{C}[27,13] = \left(2\,x'x''y' - x'^2y''\right)\,\alpha_1 + y'^2y''\alpha_2 \\
&\boldsymbol{C}[27,14] = \frac{x''y'^2}{\mu} \\
&\boldsymbol{C}[27,15] = \left(2\,x'x''y' - x'^2y''\right)\,\alpha_2 + y'^2y''\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

La condition (6.81) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}[28,3] &= 2\left(\left(x''^2 + x'x'''\right)\alpha_1 + \left(y''^2 + y'y'''\right)\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[28,4] &= \frac{1}{\mu}\left(x'y''' + 2\,x''y'' + x'''y'\right)\\
\boldsymbol{C}[28,5] &= 2\left(\left(x''^2 + x'x'''\right)\alpha_2 + \left(y''^2 + y'y'''\right)\alpha_1\right)\\
\boldsymbol{C}[28,8] &= 5\,x'^2x''\alpha_1 + \left(x''y'^2 + 4\,x'y'y''\right) : \alpha_2\\
\boldsymbol{C}[28,9] &= \frac{3}{\mu}\left(x'x''y' + x'^2y''\right)\\
\boldsymbol{C}[28,10] &= 5\,x'^2x''\alpha_2 + \left(x''y'^2 + 4\,x'y'y''\right)\alpha_1\\
\boldsymbol{C}[28,13] &= \left(4\,x'x''y' + x'^2y''\right)\alpha_1 + 5\,y'^2y''\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[28,14] &= \frac{1}{\mu}\left(3\,x'y'y'' + 2\,x''y'^2\right)\\
\boldsymbol{C}[28,15] &= 5\,y'^2y''\alpha_1 + \left(4\,x'x''y' + x'^2y''\right)\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[28,18] &= x'^4\alpha_1 + x'^2y'^2\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[28,19] &= \frac{x'^3y'}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[28,20] &= x'^4\alpha_2 + x'^2y'^2\alpha_1\\
\boldsymbol{C}[28,23] &= 2\,\left(x'^3y'\alpha_1 + x'y'^3\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[28,24] &= \frac{2\,x'^2y'^2}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[28,25] &= 2\left(x'^3y'\alpha_2 + x'y'^3\alpha_1\right)\\
\boldsymbol{C}[28,28] &= x'^2y'^2\alpha_1 + y'^4\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[28,29] &= \frac{x'y'^3}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[28,30] &= x'^2y'^2\alpha_2 + y'^4\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

Si $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\boldsymbol{t} \neq \mathbf{0}$, la condition (6.83) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}[29,3] &= x'''^2\alpha_1 + y'''^2\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[29,4] &= \frac{x'''y'''}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[29,5] &= x'''^2\alpha_2 + y'''^2\alpha_1 \\
\boldsymbol{C}[29,8] &= 3\left(x'x''x'''\alpha_1 - \left(x'y''y''' + x''y'y''' + x'''y'y''\right)\alpha_2\right) \\
\boldsymbol{C}[29,9] &= \frac{3\,x'x''y'''}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[29,10] &= 3\left(\left(x'y''y''' + x''y'y''' - x'''y'y'''\right)\alpha_1 + x'x'x'''\alpha_2\right) \\
\boldsymbol{C}[29,13] &= 3\left(\left(x'x'''y'' + x''x'''y' - x'x''y'''\right)\alpha_1 + y'y'y'''\alpha_2\right) \\
\boldsymbol{C}[29,14] &= \frac{3\,x'''y'y''}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[29,15] &= 3\left(y'y''y''\alpha_1 + \left(x''x'''y' + x'x'''y'' - x'x''y'''\right)\alpha_2\right) \\
\boldsymbol{C}[29,18] &= x'^3x'''\alpha_1 + 3\,x'^2y'y'''\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[29,19] &= \frac{x'^3y'''}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[29,20] &= x'^3x'''\alpha_2 + 3\,x'^2y'y'''\alpha_1 \\
\boldsymbol{C}[29,23] &= \left(3\,x'^2x'''y' - x'^3y'''\right)\alpha_1 \\
\boldsymbol{C}[29,24] &= \left(3\,x'y'^2y''' - x'''y'^3\right)\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[29,25] &= \left(3\,x'y'^2y''' - x'''y'^3\right)\alpha_1 + \left(3\,x'^2x'''y' - x'^3y'''\right)\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[29,28] &= 3\,x'x'''y'^2\alpha_1 + y'^3y'''\alpha_2 \\
\boldsymbol{C}[29,29] &= \frac{x'''y'^3}{\mu} \\
\boldsymbol{C}[29,30] &= 3\,x'x'''y'^2\alpha_2 + y'^3y'''\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

Si $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, la condition (6.85) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}[29{,}8] &= 3\left(x'x''y'\alpha_1 - \left(x'x''y' + x'^2y'' + y'^2y''\right)\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[29{,}9] &= -\frac{3\,x'^2x''}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[29{,}10] &= -3\left(\left(x'x''y' + x'^2y'' + y'^2y''\right)\alpha_1 - x'x''y'\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[29{,}13] &= 3\left(\left(x'^2x'' + x''y'^2 + x'y'y''\right)\alpha_1 - x'y'y''\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[29{,}14] &= \frac{3\,y'^2y''}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[29{,}15] &= -3\left(x'y'y''\alpha_1 - \left(x'^2x'' + x''y'^2 + x'y'y''\right)\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[29{,}18] &= x'^3y'\alpha_1 - 3\,x'^3y'\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[29{,}23] &= \left(x'^4 + 3\,x'^2y'^2\right)\alpha_1 - \left(y'^4 + 3\,x'^2y'^2\right)\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[29{,}25] &= -\left(\left(y'^4 + 3\,x'^2y'^2\right)\alpha_1 - \left(x'^4 + 3\,x'^2y'^2\right)\alpha_2\right)\\
\boldsymbol{C}[29{,}28] &= 3\,x'y'^3\alpha_1 - x'y'^3\alpha_2\\
\boldsymbol{C}[29{,}29] &= \frac{y'^4}{\mu}\\
\boldsymbol{C}[29{,}30] &= 3\,x'y'^3\alpha_2 - x'y'^3\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

A.4 Interface imparfaite solide-solide

La matrice $\boldsymbol{C}$ est identique à celle présentée en section 6.3 et n'est donc pas répétée ici. Pour $K_N = +\infty$, $K_T = +\infty$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$, la matrice $\boldsymbol{K}$ est identiquement nulle : on retrouve alors le cas de deux solides parfaitement collés. On écrit maintenant explicitement $\boldsymbol{K}$ pour $k = 1$. Pour alléger les notations, nous posons

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{K_N}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \beta_3 = M_N\sqrt{x'^2 + y'^2},\\
\beta_2 &= \frac{1}{K_T}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \beta_4 = M_T\sqrt{x'^2 + y'^2}.
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

Les conditions (6.90) conduisent à

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}[1,6) = \beta_1 \left(\left(x'^2 + y'^2 \right) \lambda_0 + 2\, y'^2 \mu_0 \right) && \boldsymbol{K}[2,6) = \beta_2 2\, x' y' \mu_0 \\
&\boldsymbol{K}[1,7) = \beta_1 \left(-2\, x' y' \mu_0 \right) && \boldsymbol{K}[2,7) = \beta_2 \left(y'^2 - x'^2 \right) \mu_0 \\
&\boldsymbol{K}[1,11] = \beta_1 \left(-2\, x' y' \mu_0 \right) && \boldsymbol{K}[2,11] = \beta_2 \left(y'^2 - x'^2 \right) \mu_0 \\
&\boldsymbol{K}[1,12] = \beta_1 \left(\left(x'^2 + y'^2 \right) \lambda_0 + 2\, x'^2 \mu_0 \right) && \boldsymbol{K}[2,12] = \beta_2 \left(-2\, x' y' \mu_0 \right)
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}[3,8) = \beta_3 \frac{y'}{\rho_0} && \boldsymbol{K}[4,8) = \beta_4 \frac{x'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[3,9) = \beta_3 \left(-\frac{x'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[4,9) = \beta_4 \frac{y'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[3,14] = \beta_3 \frac{y'}{\rho_0} && \boldsymbol{K}[4,14] = \beta_4 \frac{x'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[3,15] = \beta_3 \left(\frac{x'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[4,15] = \beta_4 \frac{y'}{\rho_0}
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

La condition (6.94) conduit à

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}[5,6] = \quad & \beta_1 \left(\left(x' x'' + y' y'' \right) \lambda_0 + \left(4\, y' y'' - 2\, \frac{x' x'' + y' y''}{x'^2 + y'^2}\, y'^2 \right) \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,7] = & \beta_1 \left(-2\, \frac{x'' y'^3 + x'^3 y''}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,11] = & \beta_1 \left(-2\, \frac{x'' y'^3 + x'^3 y''}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,12] = & \beta_1 \left(\left(x' x'' + y' y'' \right) \lambda_0 + \left(4\, x' x'' - 2\, \frac{x' x'' + y' y''}{x'^2 + y'^2}\, x'^2 \right) \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,16] = & \beta_1 \left(\left(x'^3 + x' y'^2 \right) \lambda_0 + 2\, x' y'^2 \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,17] = & \beta_1 \left(-2\, x'^2 y' \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,21] = & \beta_1 \left(\left(x'^2 y' + y'^3 \right) \lambda_0 + 2 \left(y'^3 - x'^2 y' \right) \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,22] = & \beta_1 \left(\left(x'^3 + x' y'^2 \right) \lambda_0 + 2 \left(x'^3 - x' y'^2 \right) \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,26] = & \beta_1 \left(-2\, x' y'^2 \mu_0 \right) \\
\boldsymbol{K}[5,27] = & \beta_1 \left(\left(x'^2 y' + y'^3 \right) \lambda_0 + 2 \left(y'^3 - x'^2 y' \right) \mu_0 \right)
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

et

$$\boldsymbol{K}[6,6] = \beta_2\, 2\, \frac{x'^3 y'' + y'' y'^3}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,7] = \beta_2 \left(-\frac{x'^3 x'' - 3\, x'^2 y' y'' + 3\, x' x'' y'^2 - y'^3 y''}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0 \right)$$

$$\boldsymbol{K}[6,11] = \beta_2 \left(-\frac{x'^3 x'' - 3\, x'^2 y' y'' + 3\, x' x'' y'^2 - y'^3 y''}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0 \right)$$

$$\boldsymbol{K}[6,12] = \beta_2 \left(-2\, \frac{x'^3 y'' + y'' y'^3}{x'^2 + y'^2}\, \mu_0 \right)$$

(A.27) $$\boldsymbol{K}[6,16] = \beta_2\, 2\, x'^2 y' \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,17] = \beta_2 \left(x' y'^2 - x'^3 \right)\, \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,21] = \beta_2 \left(x' y'^2 - x'^3 \right)\, \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,22] = \beta_2 \left(y'^3 - 3\, x'^2 y' \right)\, \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,26] = \beta_2 \left(y'^3 - 3\, x'^2 y' \right)\, \mu_0$$

$$\boldsymbol{K}[6,27] = \beta_2 \left(-2\, x' y'^2 \mu_0 \right)$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}[7,8] = \beta_3 \left(\frac{y''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{y'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,8] = \beta_4 \left(\frac{x''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{x'}{\rho_0} \right) \\
&\boldsymbol{K}[7,9] = \beta_3 \left(-\frac{x''}{\rho_0} - \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{x'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,9] = \beta_4 \left(\frac{y''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{y'}{\rho_0} \right) \\
&\boldsymbol{K}[7,14] = \beta_3 \left(\frac{y''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{y'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,14] = \beta_4 \left(\frac{x''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{x'}{\rho_0} \right) \\
&\boldsymbol{K}[7,15] = \beta_3 \left(-\frac{x''}{\rho_0} - \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{x'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,15] = \beta_4 \left(\frac{y''}{\rho_0} + \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2} \frac{y'}{\rho_0} \right) \\
&\boldsymbol{K}[7,18] = \beta_3 \frac{x'y'}{\rho_0} && \boldsymbol{K}[8,18] = \beta_4 \frac{x'^2}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[7,19] = \beta_3 \left(-\frac{x'^2}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,19] = \beta_4 \frac{x'y'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[7,23] = \beta_3 \frac{y'^2}{\rho_0} && \boldsymbol{K}[8,23] = \beta_4 \frac{x'y'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[7,24] = \beta_3 \left(-\frac{x'^2}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,24] = \beta_4 \frac{x'^2 + y'^2}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[7,29] = \beta_3 \frac{y'^2}{\rho_0} && \boldsymbol{K}[8,25] = \beta_4 \frac{x'y'}{\rho_0} \\
&\boldsymbol{K}[7,30] = \beta_3 \left(-\frac{x'y'}{\rho_0} \right) && \boldsymbol{K}[8,29] = \beta_4 \frac{x'y'}{\rho_0} \\
& && \boldsymbol{K}[8,30] = \beta_4 \frac{y'^2}{\rho_0}.
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

La condition (6.98) conduit à

(A.29)

$$\boldsymbol{K}[9,18] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(\left(x'^2 + y'^2\right)\lambda_0 + 2\,y'^2\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,18] = \beta_2\,2\,x'\,y'\,\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[9,19] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(-2\,x'\,y'\,\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,19] = \beta_2\left(y'^2 - x'^2\right)\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[9,23] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(-2\,x'\,y'\,\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,23] = \beta_2\left(y'^2 - x'^2\right)\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[9,24] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(2\left(x'^2 + y'^2\right)\lambda_0 + \left(x'^2 + y'^2 - x'\,y'\right)\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,24] = \beta_2\left(y'^2 - x'^2\right)\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[9,29] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(-2\,x'\,y'\,\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,29] = \beta_2\left(y'^2 - x'^2\right)\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[9,30] = \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(\left(x'^2 + y'^2\right)\lambda_0 + 2\,x'^2\mu_0\right) \qquad \boldsymbol{K}[10,30] = \beta_2\left(-2\,x'\,y'\,\frac{\mu_0}{\rho_0}\right)$$

et

(A.30)

$$\boldsymbol{K}[11,16] = \beta_3\,y'\,\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0}{\rho_0} \qquad \boldsymbol{K}[12,16] = \beta_4\,x'\,\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[11,17] = \beta_3\left(-x'\,\frac{\mu_0}{\rho_0}\right) \qquad \boldsymbol{K}[12,17] = \beta_4\,y'\,\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[11,21] = \beta_3\left(-x'\,\frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0}\right) \qquad \boldsymbol{K}[12,21] = \beta_4\,y'\,\frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[11,22] = \beta_3\,y'\,\frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0} \qquad \boldsymbol{K}[12,22] = \beta_4\,x'\,\frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[11,26] = \beta_3\,y'\,\frac{\mu_0}{\rho_0} \qquad \boldsymbol{K}[12,26] = \beta_4\,x'\,\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

$$\boldsymbol{K}[11,27] = \beta_3\left(-x'\,\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0}{\rho_0}\right) \qquad \boldsymbol{K}[12,27] = \beta_4\,y'\,\frac{\lambda_0 + 2\,\mu_0}{\rho_0}.$$

A.5 Interface parfaite fluide-solide

Commençons par les conditions de saut.

Ordre 0. Les deux premières équations de (6.104) impliquent

(A.31)

$$\boldsymbol{C}_0[1,1] = y', \qquad \boldsymbol{C}_1[1,1] = y',$$

$$\boldsymbol{C}_0[1,2] = -x', \quad \boldsymbol{C}_1[1,2] = -x',$$

et

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[2,3] = -y'^2, \quad \boldsymbol{C}_1[2,3] = \left(x'^2 + y'^2\right), \\
&\boldsymbol{C}_0[2,4] = 2\,x'\,y', \\
&\boldsymbol{C}_0[2,5] = -x'^2.
\end{aligned} \tag{A.32}
$$

Ordre 1. L'équation (6.105) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[3,1] = y'', && \boldsymbol{C}_1[3,1] = y'', \\
&\boldsymbol{C}_0[3,2] = -x'', && \boldsymbol{C}_1[3,2] = -x'', \\
&\boldsymbol{C}_0[3,6] = x'\,y', && \boldsymbol{C}_1[3,4] = x'\,y', \\
&\boldsymbol{C}_0[3,7] = -x'^2, && \boldsymbol{C}_1[3,5] = -x'^2, \\
&\boldsymbol{C}_0[3,11] = y'^2, && \boldsymbol{C}_1[3,7] = y'^2, \\
&\boldsymbol{C}_0[3,12] = -x'\,y', && \boldsymbol{C}_1[3,8] = -x'\,y'.
\end{aligned} \tag{A.33}
$$

L'équation (6.106) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[4,3] = -2\,y'\,y'', && \boldsymbol{C}_1[4,3] = 2\left(x'\,x'' + y'\,y''\right), \\
&\boldsymbol{C}_0[4,4] = 2\left(x''\,y' + x'\,y''\right), && \boldsymbol{C}_1[4,6] = x'^3 + x'\,y'^2, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,5] = -2\,x'\,x'', && \boldsymbol{C}_1[4,9] = x'^2 y' + y'^3, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,8] = -x'\,y'^2, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,9] = 2\,x'^2 y', \\
&\boldsymbol{C}_0[4,10] = -x'^3, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,13] = -y'^3, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,14] = 2\,x'\,y'^2, \\
&\boldsymbol{C}_0[4,15] = -x'^2 y'.
\end{aligned} \tag{A.34}
$$

L'équation (6.108) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[5,8] = \frac{y^{'}}{\rho_0}, \qquad \boldsymbol{C}_1[5,6] = -\frac{y^{'}}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[5,9] = -\frac{x^{'}}{\rho_0}, \qquad \boldsymbol{C}_1[5,9] = \frac{x^{'}}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[5,14] = \frac{y^{'}}{\rho_0},\\
&\boldsymbol{C}_0[5,15] = -\frac{x^{'}}{\rho_0}.
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

L'équation (6.109) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[6,6] = -\left(\left(x^{'2} + y^{'2}\right)\lambda_0 + 2\,y^{'2}\mu_0\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[6,4] = -\left(x^{'2} + y^{'2}\right)\,\rho_1\,c_1^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[6,7] = 2\,x^{'}y^{'}\mu_0, \qquad \boldsymbol{C}_1[6,8] = -\left(x^{'2} + y^{'2}\right)\,\rho_1\,c_1^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[6,11] = 2\,x^{'}y^{'}\mu_0,\\
&\boldsymbol{C}_0[6,12] = -\left(\left(x^{'2} + y^{'2}\right)\lambda_0 + 2\,x^{'2}\mu_0\right).
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

Ordre 2. L'équation (6.111) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[7,1] = y^{'''}, && \boldsymbol{C}_1[7,1] = y^{'''},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,2] = -x^{'''}, && \boldsymbol{C}_1[7,2] = -x^{'''},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,6] = 2\,x^{'}y^{''} + x^{''}y^{'}, && \boldsymbol{C}_1[7,4] = 2\,x^{'}y^{''} + x^{''}y^{'},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,7] = -3\,x^{'}x^{''}, && \boldsymbol{C}_1[7,5] = -3\,x^{'}x^{''},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,11] = 3\,y^{'}y^{''}, && \boldsymbol{C}_1[7,7] = 3\,y^{'}y^{''},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,12] = -2\,x^{''}y^{'} - x^{'}y^{''}, && \boldsymbol{C}_1[7,8] = -2\,x^{''}y^{'} - x^{'}y^{''},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,16] = x^{'2}y^{'}, && \boldsymbol{C}_1[7,10] = x^{'2}y^{'},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,17] = -x^{'3}, && \boldsymbol{C}_1[7,11] = -x^{'3},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,21] = 2\,x^{'}y^{'2}, && \boldsymbol{C}_1[7,13] = 2\,x^{'}y^{'2},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,22] = -2\,x^{'2}y^{'}, && \boldsymbol{C}_1[7,14] = -2\,x^{'2}y^{'},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,26] = y^{'3}, && \boldsymbol{C}_1[7,16] = y^{'3},\\
&\boldsymbol{C}_0[7,27] = -x^{'}y^{'2}, && \boldsymbol{C}_1[7,17] = -x^{'}y^{'2}.
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

L'équation (6.112) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[8,3] = -2\left(y''^2 + y'y'''\right) && \boldsymbol{C}_1[8,3] = 2\left(x''^2 + x'x''' + y''^2 + y'y'''\right),\\
&\boldsymbol{C}_0[8,4] = 2\left(x'''y' + 2\,x''y'' + x'y'''\right), && \boldsymbol{C}_1[8,6] = 5\,x'^2x'' + 4\,x'y'y'' + x''y'^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,5] = -2\left(x''^2 + x'x'''\right) && \boldsymbol{C}_1[8,9] = 5\,y'^2y'' + 4\,x'x''y' + x'^2y'',\\
&\boldsymbol{C}_0[8,8] = -\left(x''y'^2 + 4\,x'y'y''\right), && \boldsymbol{C}_1[8,12] = x'^4 + x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,9] = 2\left(3\,x'x''y' + 2\,x'^2y''\right), && \boldsymbol{C}_1[8,15] = 2\left(x'^3y' + x'y'^3\right),\\
&\boldsymbol{C}_0[8,10] = -5\,x'^2x'', && \boldsymbol{C}_1[8,18] = x'^2y'^2 + y'^4,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,13] = -5\,y'^2y'',\\
&\boldsymbol{C}_0[8,14] = 2\left(3\,x'y'y'' + 2\,x''y'^2\right),\\
&\boldsymbol{C}_0[8,15] = -\left(x'^2y'' + 4\,x'x''y'\right),\\
&\boldsymbol{C}_0[8,18] = -x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,19] = 2\,x'^3y',\\
&\boldsymbol{C}_0[8,20] = -x'^4,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,23] = -2\,x'y'^3,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,24] = 4\,x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,25] = -2\,x'^3y',\\
&\boldsymbol{C}_0[8,28] = -y'^4,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,29] = 2\,x'y'^3,\\
&\boldsymbol{C}_0[8,30] = -x'^2y'^2.
\end{aligned}
\tag{A.38}
$$

L'équation (6.114) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[9,8] = \frac{y''}{\rho_0}, && \boldsymbol{C}_1[9,6] = -\frac{y''}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,9] = -\frac{x''}{\rho_0}, && \boldsymbol{C}_1[9,9] = \frac{x''}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,14] = \frac{y''}{\rho_0}, && \boldsymbol{C}_1[9,12] = -\frac{x'y'}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,15] = -\frac{x''}{\rho_0}, && \boldsymbol{C}_1[9,15] = \frac{x'^2 - y'^2}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,18] = \frac{x'y'}{\rho_0}, && \boldsymbol{C}_1[9,18] = \frac{x'y'}{\rho_1},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,19] = -\frac{x'^2}{\rho_0},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,23] = \frac{y'^2}{\rho_0},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,25] = -\frac{x'^2}{\rho_0},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,29] = \frac{y'^2}{\rho_0},\\
&\boldsymbol{C}_0[9,30] = -\frac{x'y'}{\rho_0}.
\end{aligned}
\tag{A.39}
$$

L'équation (6.115) implique

(A.40)

$$\boldsymbol{C}_0[10,6] = -2\left(\left(x'x'' + y'y''\right)\lambda_0 + 2\,y'y''\mu_0\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[10,4] = -2\left(x'x'' + y'y''\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,7] = 2\left(x''y' + x'y''\right)\mu_0, \qquad \boldsymbol{C}_1[10,8] = -2\left(x'x'' + y'y''\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,11] = 2\left(x''y' + x'y''\right)\mu_0, \qquad \boldsymbol{C}_1[10,10] = -\left(x'^3 + x'y'^2\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,12] = -2\left(\left(x'x'' + y'y''\right)\lambda_0 + 2\,x'x''\mu_0\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[10,13] = -\left(x'^2y' + y'^3\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,16] = -\left(\left(x'^3 + x'y'^2\right)\lambda_0 + 2\,x'y'^2\mu_0\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[10,14] = -\left(x'^3 + x'y'^2\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,17] = 2\,x'^2y'\mu_0, \qquad \boldsymbol{C}_1[10,17] = -\left(x'^2y' + y'^3\right)\rho_1\,c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,21] = -\left(\left(x'^2y' + y'^3\right)\lambda_0 - 2\left(x'^2y' - y'^3\right)\mu_0\right),$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,22] = -\left(\left(x'y'^2 + x'^3\right)\lambda_0 - 2\left(x'y'^2 - x'^3\right)\mu_0\right),$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,26] = 2\,x'y'^2\mu_0,$$

$$\boldsymbol{C}_0[10,27] = -\left(\left(x'^2y' + y'^3\right)\lambda_0 + 2\,x'^2y'\mu_0\right).$$

L'équation (6.117) implique

(A.41)

$$\boldsymbol{C}_0[11,16] = y'c_{p0}^2, \qquad \boldsymbol{C}_1[11,10] = y'c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[11,17] = -x'c_{s0}^2, \qquad \boldsymbol{C}_1[11,11] = -x'c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[11,21] = -x'\left(c_{p0}^2 - c_{s0}^2\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[11,16] = y'c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[11,22] = y'\left(c_{p0}^2 - c_{s0}^2\right), \qquad \boldsymbol{C}_1[11,17] = -x'c_1^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[11,26] = y'c_{s0}^2,$$

$$\boldsymbol{C}_0[11,27] = -x'c_{p0}^2.$$

L'équation (6.118) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_0[12,18] = -\left(\left(x'^2 + y'^2\right) c_{p0}^2 - 2\,x'^2 c_{s0}^2\right), && \boldsymbol{C}_1[12,12] = \left(x'^2 + y'^2\right) c_1^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[12,19] = 2\,x'y'c_{s0}^2, && \boldsymbol{C}_1[12,18] = \left(x'^2 + y'^2\right) c_1^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[12,23] = 2\,x'y'c_{s0}^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[12,24] = -2\left(x'^2 + y'^2\right)\left(c_{p0}^2 - c_{s0}^2\right),\\
&\boldsymbol{C}_0[12,25] = 2\,x'y'c_{s0}^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[12,29] = 2\,x'y'c_{s0}^2,\\
&\boldsymbol{C}_0[12,30] = -\left(\left(x'^2 + y'^2\right) c_{p0}^2 - 2\,y'^2 c_{s0}^2\right),
\end{aligned}
\tag{A.42}
$$

Examinons enfin les conditions aux limites.
Ordre 0. La troisième équation de (6.104) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}_0[1,3] = x'y',\\
&\boldsymbol{L}_0[1,4] = y'^2 - x'^2,\\
&\boldsymbol{L}_0[1,5] = -x'y'.
\end{aligned}
\tag{A.43}
$$

Ordre 1. L'équation (6.107) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}_0[2,3] = x''y' + x'y'',\\
&\boldsymbol{L}_0[2,4] = 2\left(y'y'' - x'x''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[2,5] = -\left(x''y' + x'y''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[2,8] = x'^2y',\\
&\boldsymbol{L}_0[2,9] = x'y'^2 - x'^3,\\
&\boldsymbol{L}_0[2,10] = -x'^2y',\\
&\boldsymbol{L}_0[2,13] = x'y'^2,\\
&\boldsymbol{L}_0[2,14] = y'^3 - x'^2y',\\
&\boldsymbol{L}_0[2,15] = -x'y'^2.
\end{aligned}
\tag{A.44}
$$

L'équation (6.110) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_0[3,6] &= 2\,x^{'}y^{'}, \\
\boldsymbol{L}_0[3,7] &= y^{'2} - x^{'2}, \\
\boldsymbol{L}_0[3,11] &= y^{'2} - x^{'2}, \\
\boldsymbol{L}_0[3,12] &= -2\,x^{'}y^{'}.
\end{aligned}
\tag{A.45}
$$

Ordre 2. L'équation (6.113) implique

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}_0[4,3] = x'''y' + 2\,x''y'' + x'y''',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,4] = 2\left(y''^2 + y'y''' - x''^2 - x'x'''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[4,5] = -\left(x'''y' + 2\,x''y'' + x'y'''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[4,8] = 3\,x'x''y' + 2\,x'^2y'',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,9] = x''y'^2 + 4\,x'y'y'' - 5\,x'^2x'',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,10] = -\left(3\,x'x''y' + 2\,x'^2y''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[4,13] = 2\,x''y'^2 + 3\,x'y'y'',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,14] = 5\,y'^2y'' - 4\,x'x''y' - x'^2y'',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,15] = -\left(2\,x''y'^2 + 3\,x'y'y''\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[4,18] = x'^3y',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,19] = x'^2y'^2 - x'^4,\\
&\boldsymbol{L}_0[4,20] = -x'^3y',\\
&\boldsymbol{L}_0[4,23] = 2\,x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{L}_0[4,24] = 2\left(x'y'^3 - x'^3y'\right),\\
&\boldsymbol{L}_0[4,25] = -2\,x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{L}_0[4,28] = x'y'^3,\\
&\boldsymbol{L}_0[4,29] = y'^4 - x'^2y'^2,\\
&\boldsymbol{L}_0[4,30] = -x'y'^3.
\end{aligned}
\tag{A.46}
$$

L'équation (6.116) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_0[5,6] &= 2\left(x''y' + x'y''\right), \\
\boldsymbol{L}_0[5,7] &= 2\left(y'y'' - x'x''\right), \\
\boldsymbol{L}_0[5,11] &= 2\left(y'y'' - x'x''\right), \\
\boldsymbol{L}_0[5,12] &= -2\left(x''y' + x'y''\right), \\
\boldsymbol{L}_0[5,16] &= 2\,x'^2y', \\
\boldsymbol{L}_0[5,17] &= x'y'^2 - x'^3, \\
\boldsymbol{L}_0[5,21] &= 3\,x'y'^2 - x'^3, \\
\boldsymbol{L}_0[5,22] &= y'^3 - 3\,x'^2y', \\
\boldsymbol{L}_0[5,26] &= y'^3 - x'^2y', \\
\boldsymbol{L}_0[5,27] &= -2\,x'y'^2.
\end{aligned}
\tag{A.47}
$$

L'équation (6.119) implique

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_0[6,18] &= 2\,x'y', \\
\boldsymbol{L}_0[6,19] &= y'^2 - x'^2, \\
\boldsymbol{L}_0[6,23] &= y'^2 - x'^2, \\
\boldsymbol{L}_0[6,25] &= y'^2 - x'^2, \\
\boldsymbol{L}_0[6,29] &= y'^2 - x'^2, \\
\boldsymbol{L}_0[6,30] &= -2\,x'y'.
\end{aligned}
\tag{A.48}
$$

Bibliographie

[1] J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, Elsevier Science, Publ. B.V., 1984.

[2] K. Aki, P. G. Richards, *Quantitative Seismology. Theory and Methods. Vol. 1*, , Freeman, New-York, 1980.

[3] Y. C. Angel, J. D. Achenbach, *Reflexion of ultrasonic waves by an array of microcracks*, Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 4 (1985), pp. 83–89.

[4] P. Angot, *Finite volume methods for non smooth solution of diffusion models; application to imperfect contact problems*, soumis à World Scientific.

[5] J. M. Baik, R. B. Thompson, *Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model*, Journal of Nondestructive Evaluation, 4-3 (1985), pp. 177–196.

[6] D. S. Balsara, C. W. Shu, *Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy*, J. Comput. Phys., 160 (2000), pp. 405–452.

[7] A. Bamberger, R. Glowinsky, Q. H. Tran, *A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and change grids*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 603–639.

[8] J. P. Berenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 185–200.

[9] A. Berezovski, G. A. Maugin, *Simulation of thermoelastic wave propagation by means of a composite wave-propagation algorithm*, J. Comput. Phys., 168-1 (2001), pp. 249–264.

[10] C. Bogey, C. Bailly, D. Juvé, *Calcul direct du rayonnement acoustique d'une zone de mélange par macrosimulation*, C.R.A.S., Paris, IIb, 327 (1999), pp. 1029–1034.

[11] C. E. Bradley, *Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part 1: Theory*, J. Acoust. Soc. Am., 96-3 (1994), pp. 1844–1853.

[12] L. M. Brekhovskikh, O. A. Godin, *Acoustics of Layered Media 1- Plane and Quasi-Plane Waves*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

[13] L. Brillouin, M. Parodi, *Propagation des Ondes dans les Milieux Périodiques*, Masson, 1956.

[14] D. Calhoun, *A Cartesian grid method for solving the streamfunction vorticity equations in irregular geometries*, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1999.

[15] D. Calhoun, R. J. LeVeque, *Solving the advection-diffusion equation in irregular geometries*, J. Comput. Phys. 156 (2000) pp. 1–38.

[16] G. Cohen, *Higher Order Numerical Methods for Wave Equations in the Time Domain*, Springer-Verlag, preprint.

[17] G. Cohen, P. Joly, *Construction and analysis of fourth-order finite difference schemes for the elastic wave equation in nonhomogeneous media*, SIAM J. Numer. Anal, 33-4 (1996), pp. 1266–1302.

[18] F. Collino, P. Joly, F. Millot, *Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering*, J. Comput. Phys., 138 (1997), pp. 907–938.

[19] P. P. Delsanto, M. Scalerandi, *A spring-model for the determination of the propagation of ultrasonic pulses through imperfect contact interfaces*, J. Acoust. Soc. Am., 104-5 (1998), pp. 120–127.

[20] T. A. Driscoll, B. Fornberg, *A block pseudospectral method for Maxwell's equations. I One-dimensional case*, J. Comput. Phys., 140 (1998), pp. 47–65.

[21] T. A. Driscoll, B. Fornberg, *Block pseudospectral methods for Maxwell's equations. II Two-dimensional discontinuous-coefficient case*, SIAM J. Scient. Comput., 21-3 (1999), pp. 1146–1167.

[22] B. Engquist, A. Majda, *Absorbing Boundary Conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput., 31 (1977), pp. 629–651.

[23] R. P. Fedkiw, B. Merriman, R. Donat, S. Osher, *The penultimate scheme for systems of conservation laws: finite difference ENO with Marquina's flux splitting*, Progress in Numerical Solutions of Partial Differential Equations, M. Hafez (Arcachon, France, 1998).

[24] P. J. T. Filippi et al, *Cours d'Acoustique Générale*, Publication L.M.A., 1987.

[25] B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, 1998.

[26] P. Germain, P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, deuxième édition, 1995.

[27] T. R. Fogarty, R. J. LeVeque, *High-resolution finite-volume methods for acoustic waves in periodic and random media*, J. Acoust. Soc. Am, 1-106 (1999), pp. 17–28.

[28] X. Gloerfelts, C. Bailly, D. Juvé, *Calcul direct du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité*, C.R.A.S., Paris, IIb, 328 (1999), pp. 1–7.

[29] E. Godlewski, P. A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, 1996.

[30] G. H. Golub, C. F Van Loan, *Matrix Computations*, Baltimore, John Hopkins University Press, 1989.

[31] B. Gu, K. Nihei, L. Myer, *Numerical investigation of fracture interface waves*, J. Acoust. Soc. Am., 102-1 (1997), pp. 120–127.

[32] B. Gu, K. Nihei, L. Myer, *Numerical simulation of elastic wave propagation in fractured rock with the boundary integral equation method*, J. of Geophys. Res., 101-B7 (1996), pp. 933–943.

[33] A. Harten, *High-resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 49 (1983), pp. 357–393.

[34] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. J. Chakravarthy, *Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes*, J. Comput. Phys., 71 (1987), pp. 231–247.

[35] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*, American Institute of Physics, New-York, 1993.

[36] G. S. Jiang, C. W. Shu, *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, J. Comput. Phys., 126 (1996), pp. 202–228.

[37] P. Joly, *Les ondes de Rayleigh numériques*, Rapport de Recherche INRIA 107, 1982.

[38] D. Komatitsch, *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*, thèse de l'Institut de Physique du Globe de Paris, 1997.

[39] D. Komatitsch, C. Barnes, J. Tromp, *Wave propagation near a fluid-solid interface: a spectral-element approach*, Geophysics, 65-2 (2000), pp. 623–631.

[40] D. Komatitsch, J.P. Vilotte, *The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures*, Bull. Seis. Soc. Am., 88 (1998), pp. 368–392.

[41] J. O. Langseth, R. J. LeVeque, *A wave-propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws*, à paraître dans le J. Comput. Phys.

[42] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser, 1990.

[43] R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Differential Equations*, Notes de cours à l'Université de Washington, 1998.

[44] R. J. LeVeque, *High-resolution algorithms for advection in incompressible flows*, SIAM J. Numer. Anal, 33 (1996), pp. 627–665.

[45] R. J. LeVeque, *Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems*, J. Comput. Phys., 13 (1997), pp. 327–353.

[46] R. J. LeVeque, *Finite volume for non-linear elasticity in heterogeneous media*, Proceedings of the IFCD Conference (2001).

[47] R. J. LeVeque, K. M. Shyue, *One-dimensional front-tracking based on high resolution wave propagation methods*, SIAM J. Sci. Comput., 16 (1995), pp. 348–379.

[48] R. J. LeVeque, K. M. Shyue, *Two-dimensional front-tracking based on high resolution wave propagation methods*, J. Comput. Phys., 123 (1996), pp. 354–368.

[49] Z. Li, *The Immersed Interface Method - A Numerical Approach for Partial Differential Equations with Interfaces*, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1994.

[50] Z. Li, R. J. LeVeque, *Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension*, SIAM J. Sci. Comput., 18 (1997), pp. 709–735.

[51] Z. Li, R. J. LeVeque, *The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources*, SIAM J. Num. Anal., 31 (1994), pp. 1019–1044.

[52] Z. Li, R. J. LeVeque, *Immersed interface methods for moving interface problems*, Numerical Algorithms, 14-4 (1997), pp. 269–293.

[53] B. Lombard, J. Piraux, *How to incorporate the spring-mass conditions in finite-difference schemes*, soumis en mars 2001 au SIAM J. Sci. Comput.

[54] E. Luo, H. O. Kreiss, *Pseudospectral vs. finite difference methods for initial value problems with discontinuous coefficients*, SIAM J. Sci. Comput., 20 (1997), pp. 148–163.

[55] D. K. Mao, *A treatment of discontinuities in shock-capturing finite difference methods*, J. Comput. Phys., 92 (1991), pp. 422–455.

[56] D. K. Mao, *A treatment of discontinuities for finite difference methods in the two-dimensional case*, J. Comput. Phys., 104 (1993), pp. 377–397.

[57] G. I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, Applications (1977).

[58] Y. Monnerie, *Fissuration pour les matériaux composites : rôle des interfaces fibre/matrice*, thèse de l'Université de la Méditerranée, 2000.

[59] S. Nakagawa, K. Nihei, R. Myer, *Stop-pass behavior of acoustic waves in a 1D fractured system*, J. Acoust. Soc. Am., 107-1 (2000), pp. 40–50.

[60] C. S. Peskin, *Numerical analysis of blood flow in the heart*, J. Comput. Phys., 25 (1977), pp. 220–252.

[61] A. Pilarsky, *The coefficient of reflection of ultrasonic waves from an adhesive bond interface*, Archives of Acoustics, 3, 1 (1983), pp. 41–54.

[62] A. Pilarsky, J. L. Rose, *A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds*, J. Acoust. Soc. Am., 63-2 (1988), pp. 300–307.

[63] A. Pilarsky, J. L. Rose, K. Balasubramaniam, *The angular and frequency characteristics of reflectivity from a solid layer embedded between two solids with imperfect boundary conditions*, J. Acoust. Soc. Am., 87-2 (1990), pp. 532–542.

[64] J. Piraux, B. Lombard, *A new interface method for hyperbolic problems with discontinuous coefficients: one-dimensional acoustic example*, J. Comput. Phys., 168-1 (2001), pp. 227–248.

[65] W. H. Press, S. A. Teukolskyn, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, second edition, 1992.

[66] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 (1999), pp. 383–399.

[67] S. I. Rokhlin, Y. J. Wang, *Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids*, J. Acoust. Soc. Am., 89-2 (1991), pp. 503–515.

[68] A. A. Samarskii, *Theory of Finite Difference Schemes*, Moscow, Nauka (1977).

[69] G. Scarella, *Analyse mathématique et numérique des équations de l'élastodynamique en présence de contact unilatéral*, thèse en cours (INRIA-LMA).

[70] J. B. Schneider, C. L. Wagner, S. L. Broschat, *Implementation of transparent sources embedded in acoustic finite-difference time-domain grids*, J. Acoust. Soc. Am., 103-1 (1998), pp. 136–142.

[71] M. Schoenberg, *Elastic wave behavior across linear slip interfaces*, J. Acoust. Soc. Am., 68-5 (1980), pp. 1516–1521.

[72] C. W. Shu, *High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin Methods for CFD*, Rapport ICASE 11 (2001).

[73] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1968), pp. 506–517.

[74] J. S. Strickwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth-Brooks, New-York, 1989.

[75] F. Sturm, *Modélisation mathématique et numérique d'un problème de propagation en acoustique sous-marine : prise en compte d'un environnement variable tridimensionnel*, thèse de l'Université du Var, 1997.

[76] H.G. Tattersall, *The ultrasonic pulse-echo technique as applied to adhesion testing*, J. App. Phys., 6 (1973), pp. 819–832.

[77] J. N. Tjotta, S. Tjotta, *Transmission of a pulsed acoustic signal at a two-fluid interface*, J. Acoust. Soc. Am., 73-3 (1983), pp. 826–834.

[78] J. D. Towers, *Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux*, SIAM J. Numer. Anal., 38-2 (2000), pp. 681–698.

[79] C. Tsogka, *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés*, thèse de l'Université Paris IX, 1999.

[80] A. Wiegmann, *The Explicit Jump Immersed Interface Method and Interface Problems for Differential Equations*, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1998.

[81] A. Wiegmann, Z. Li, R. J. LeVeque, *Crack jump conditions for elliptic problems*, Appl. Math. Letters 12 (1999) pp. 81–88.

[82] A. Wiegmann, K. Bube, *The immersed interface method for nonlinear differential equations with discontinuous coefficients and singular sources*, SIAM J. Numer. Anal, 35 (1998), pp. 177–200.

[83] A. Wiegmann, K. Bube, *The explicit jump immersed interface method: finite difference methods for PDE with piecewise smooth solutions*, SIAM J. Numer. Anal, 37 (2000), pp. 827–862.

[84] S. T. Zalesak, *Fully mutidimensional flux corrected transport algorithms for fluids*, J. Comput. Phys., 31 (1979), pp. 335–362.

[85] C. Zhang, *Immersed Interface Method for Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients*, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1996.

[86] C. Zhang, R. J. LeVeque, *The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients*, Wave Motion, 25 (1997), pp. 237–263.