Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs: Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires

Anthony Lefèvre

▶ **To cite this version:**

Anthony Lefèvre. Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs: Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires. Energie électrique. Université de Nantes, 2006. Français. NNT : . tel-00116335

HAL Id: tel-00116335
https://theses.hal.science/tel-00116335

Submitted on 25 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

UNIVERSITE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année 2006

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : Electronique et Génie Electrique

Présentée et soutenue publiquement par

Anthony LEFEVRE
Ingénieur Polytech' Nantes

Le 27 octobre 2006

à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes – site de Saint Nazaire

CONTRIBUTION A LA MODELISATION ELECTRIQUE, ELECTROMAGNETIQUE ET THERMIQUE DES TRANSFORMATEURS

Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires

Jury :

Rapporteurs :	M. Abderrezak REZZOUG	Professeur – UHP – GREEN – Vandoeuvres les Nancy
	M. Francis PIRIOU	Professeur – USTL – L2EP – Villeneuve d'Ascq
Examinateurs :	M. Olivier MOREAU	Ingénieur Chercheur – Electricité de France R&D – Clamart
	M. Javad FOULADGAR	Professeur – IUT Saint-Nazaire – IREENA Saint-Nazaire
	M. Guy OLIVIER	Professeur – Ecole Polytechnique de Montréal
	Mlle. Laurence MIEGEVILLE	Maître de conférences – Polytech'Nantes – IREENA Saint-Nazaire

Directeur de Thèse: Professeur Javad FOULADGAR
Laboratoire : IREENA – 37, Boulevard de l'Université, BP 406, 44602 Saint-Nazaire Cedex
Composante de rattachement du directeur de thèse : IUT de Saint-Nazaire
Co-Directeur de Thèse : Professeur Guy OLIVIER
Laboratoire : Ecole Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succursale Centre-ville, H3C 3A7, Montréal (QC), Canada
Co-Encadrant : Maître de conférences Laurence MIEGEVILLE
Laboratoire : IREENA – 37, Boulevard de l'Université, BP 406, 44602 Saint-Nazaire Cedex
Composante de rattachement du co-encadrant : Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes

N°ED 366-272

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

AVANT – PROPOS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués à la fois au sein de l'Institut de Recherche en Electronique et Electrotechnique de Nantes-Atlantique (IREENA, site de Saint-Nazaire), ainsi qu'au laboratoire de génie électrique de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Je souhaite tout d'abord exprimer mes plus sincères remerciements à chacun des membres du jury qui, malgré leurs responsabilités, ont bien voulu me consacrer du temps :

Monsieur **Abderrezak Rezzoug**, Professeur à l'Université Henri Poincaré de Nancy et Directeur du Groupement de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy, pour l'intérêt qu'il a su porter à ces travaux en tant que rapporteur et président du jury.

Monsieur **Francis Piriou**, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille et responsable de l'équipe modélisation, étude et conception des systèmes électromagnétiques au sein du laboratoire d'électrotechnique et d'électronique de puissance de Lille, pour avoir accepté de rapporter mon travail et son analyse fine.

Monsieur **Olivier Moreau**, Ingénieur Chercheur à Electricité de France R&D – Département Technologies et Economie des Systèmes Electriques, Groupe Machines Electrique, Equipe de Modélisation, pour sa participation et ses remarques avisées.

Monsieur **Javad Fouladgar**, Professeur à l'IUT de Saint-Nazaire et responsable du pôle énergie au sein de l'IREENA, pour son implication exemplaire dans ces travaux, ses compétences scientifiques exceptionnelles, sa très grande disponibilité et sa patience.

Monsieur **Guy Olivier**, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Montréal, pour m'avoir transmis le goût de la recherche en particulier lors de mon stage de D.E.A et m'avoir permis de disposer d'équipements importants. Mes remerciements vont également à toute sa famille pour son accueil "Québécois" très chaleureux (pléonasme).

Mademoiselle **Laurence Miègeville**, Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, pour avoir subie les tracas des administrations française et canadienne et m'avoir offert la possibilité d'utiliser un transformateur de test adapté.

Je remercie enfin Monsieur **Radu Cojocaru** (Marcus Transformer), tous les personnels administratifs et techniques ainsi que mes collègues. En particulier Monsieur **Marc Charbonneau**, technicien à l'Ecole Polytechnique de Montréal pour toute son aide, sa lucidité impressionnante et sa sagesse discrète.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

TABLE DES MATIERES

Introduction Générale.....- 13 -

Chapitre I - Le Transformateur sur Charges Non Linéaires.....- 19 -

I.1. INTRODUCTION ..... - 21 -
I.2. TYPES DE TRANSFORMATEURS ..... - 21 -
I.2.1. Transformateur à colonnes ..... - 21 -
I.2.1.1. Les Bobinages ..... - 22 -
I.2.1.2. Le Circuit Magnétique ..... - 23 -
I.2.1.3. Le Couplage ..... - 24 -
I.2.1.4. Limitations des Transformateurs à Colonnes ..... - 25 -
I.2.2. Transformateur Cuirassé ..... - 25 -
I.2.2.1. Les Bobinages ..... - 26 -
I.2.2.2. La Cuve ..... - 26 -
I.2.2.3. Les Ecrans Electrostatiques ..... - 27 -
I.2.3. Transformateur en "double T" ..... - 27 -
I.2.3.1. Les Bobinages ..... - 28 -
I.2.3.2. Le Circuit Magnétique ..... - 28 -
I.2.4. Autres Transformateurs ..... - 28 -
I.3. PERTES DANS LE TRANSFORMATEUR ..... - 29 -
I.3.1. Modèle de Kapp ..... - 29 -
I.3.2. Prise en Compte de la Fréquence ..... - 30 -
I.3.2.1. Inductance de Magnétisation ..... - 30 -
I.3.2.2. Inductances de Fuite ..... - 31 -
I.3.2.3. Résistance de Modélisation des Pertes Fer ..... - 31 -
I.3.2.4. Capacités Parasites ..... - 31 -
I.3.2.5. Résistances des Enroulements ..... - 32 -
I.3.3. Pertes dans le Noyau Ferromagnétique ..... - 34 -
I.3.4. Pertes dans la Tôle et la Structure ..... - 35 -
I.3.5. Pertes Diélectriques ..... - 36 -
I.3.6. Pertes dans les Enroulements ..... - 36 -
I.4. ECHAUFFEMENT ..... - 37 -
I.4.1. Classes Thermiques d'Isolation et Milieux Réfrigérants ..... - 37 -
I.4.2. Mesures et Calculs de Température ..... - 39 -
I.5. DECLASSEMENT ..... - 40 -
I.5.1. Facteurs de Déclassement ..... - 41 -
I.5.2. Transformateur de type K ..... - 43 -
I.6. VIEILLISSEMENT ..... - 44 -
I.6.1. Contraintes Thermiques ..... - 44 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.6.2. Contraintes Electriques..... - 44 -
I.7. Conclusion..... - 45 -

Chapitre II - Méthodes de Modélisation des Transformateurs..... - 47 -

II.1. Introduction..... - 49 -
II.2. Modeles Electromagnetiques..... - 49 -
II.2.1. Equations Electromagnétiques..... - 49 -
II.2.1.1. Equations de Maxwell ..... *- 50 -*
II.2.1.2. Relations Constitutives des Matériaux ..... *- 50 -*
II.2.1.3. Conditions de Passage ..... *- 51 -*
II.2.1.4. Conditions aux limites spatiales et temporelles ..... *- 51 -*
II.2.1.5. Conditions de Jauge ..... *- 52 -*
II.2.1.6. Régime Harmonique et Etat Quasi Stationnaire ..... *- 52 -*
II.2.1.7. Bilan des Puissances Electromagnétiques..... *- 53 -*
II.2.2. Différentes Formulations Electromagnétiques ..... - 53 -
II.2.2.1. Formulation en Potentiel Vecteur Magnétique AV, A^* ..... *- 54 -*
II.2.2.2. Formulation en Champ Magnétique H ..... *- 55 -*
II.2.2.3. Formulation en Potentiel Vecteur Electrique T - Ω..... *- 55 -*
II.2.2.4. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique ϕ_t, ϕ_r..... *- 56 -*
II.2.2.5. Synthèse du Choix des Formulations ..... *- 57 -*
II.2.2.6. Prise en Compte de la Saturation du Circuit Magnétique ..... *- 58 -*
II.3. Methode des Circuits Couples (M2C)..... - 59 -
II.3.1. Théorie Générale de la M2C..... - 59 -
II.3.2. Interaction entre les Eléments de Circuits..... - 60 -
II.3.3. Cas Axisymétrique ..... - 61 -
II.3.3.1. Expressions des Inductances Propres et Mutuelles ..... *- 62 -*
II.3.3.2. Modélisation du Noyau par des Densités Superficielles ..... *- 63 -*
II.3.4. Cas Cartésien ..... - 65 -
II.3.4.1. Expression des Inductances Propres et Mutuelles..... *- 65 -*
II.4. Modele Thermique ..... - 67 -
II.4.1. Synthèse des Différents Echanges..... - 67 -
II.4.2. Equations de Transfert de Chaleur ..... - 69 -
II.4.2.1. Conduction..... *- 69 -*
II.4.2.2. Convection ..... *- 70 -*
II.4.2.3. Rayonnement..... *- 70 -*
II.5. Couplage Electromagnetique et Thermique ..... - 71 -
II.6. Methodes de Resolution ..... - 71 -
II.6.1. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF)..... - 71 -
II.6.2. Algorithme de Calcul ..... - 72 -
II.7. Conclusion ..... - 75 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Chapitre III - Modélisation par la Méthode des Circuits Couplés.....- 77 -

III.1. Introduction ..... - 80 -
III.2. Hypotheses de Modelisation ..... - 81 -
III.2.1. Tension d'Alimentation et Couplage Harmonique ..... - 81 -
III.2.2. Influence des Enroulements Voisins ..... - 81 -
III.2.3. Etude de la Gamme de Fréquence ..... - 82 -
III.3. Modelisation des Enroulements ..... - 84 -
III.3.1. Discrétisations des Conducteurs ..... - 85 -
III.3.2. Application de la Méthode des Circuits Couplés (M2C) ..... - 86 -
III.3.2.1. Equations Caractéristiques en Axisymétrique ..... - 86 -
III.3.2.2. Extension au Bobinage Complet ..... - 87 -
III.3.3. Prise en Compte de la Source ..... - 88 -
III.3.3.1. Formulation en Alimentation en Tension ..... - 88 -
III.3.3.2. Formulation sur Sources de Courant ..... - 90 -
III.4. Prise en Compte du Circuit Magnetique ..... - 91 -
III.4.1. Modélisation par Densités Superficielles de Courant ..... - 91 -
III.4.1.1. Le Noyau en Approximation Axisymétrique ..... - 91 -
III.4.1.2. Equation Caractéristique en Axisymétrique ..... - 92 -
III.4.2. Assemblage Matriciel Complet sur Sources de Courant ..... - 94 -
III.4.3. Optimisation de la Discrétisation ..... - 94 -
III.4.3.1. Application aux Conducteurs de Section Circulaire ..... - 95 -
III.4.3.2. Application aux Conducteurs de Section Rectangulaire ..... - 97 -
III.4.3.3. Conservation de Courant dans les Spires ..... - 100 -
III.4.3.4. Influence de la Finesse de Discrétisation sur le Noyau ..... - 101 -
III.5. Couplage aux Equations Thermiques ..... - 102 -
III.5.1. Hypothèses de Modélisation ..... - 102 -
III.5.1.1. Homogénéisation des Couches d'Enroulements ..... - 102 -
III.5.1.2. Equation de Thermique en Axisymétrique ..... - 104 -
III.5.1.3. Modélisation du noyau ..... - 104 -
III.5.2. Choix des Paramètres ..... - 105 -
III.5.2.1. Conductivité Thermique ..... - 105 -
III.5.2.2. Vérification sur un Cas Simple ..... - 108 -
III.5.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs ..... - 109 -
III.5.2.4. Prise en Compte du Rayonnement ..... - 112 -
III.5.3. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF) ..... - 113 -
III.5.3.1. Méthodologie de Maillage ..... - 113 -
III.5.3.2. Assemblage Matriciel pour Résolution par MEF ..... - 115 -
III.6. Validations Experimentales ..... - 116 -
III.6.1. Présentation du Banc d'Essai ..... - 116 -
III.6.2. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable ..... - 118 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.6.2.1. Influence du Nombre de Cale - *121* -
III.6.3. Essais d'Echauffements - 122 -
III.6.3.1. Essais Linéaires - *122* -
III.6.3.2. Essais Non Linéaires à Echauffement Equivalent - *123* -
III.7. Conclusion - 126 -

Chapitre IV - Modélisation par la Méthode des Eléments Finis - 127 -

IV.1. Introduction - 129 -
IV.2. Formulation Electromagnetique - 129 -
IV.2.1. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Total - 130 -
IV.2.1.1. Prise en Compte de Région Multiplement Connexe - *130* -
IV.2.2. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Réduit - 131 -
IV.2.3. Couplage entre les Formulations en Potentiels Total-Réduit - 132 -
IV.2.4. Choix de la Méthode - 133 -
IV.3. Couplage aux Equations de Circuits - 135 -
IV.3.1. Equation de Couplage - 135 -
IV.3.1.1. Couplage en Potentiel Réduit - *137* -
IV.3.1.2. Couplage en Potentiels Combinés Total-Réduit - *138* -
IV.3.2. Choix des t_{0k} - 138 -
IV.3.2.1. Cas de Conducteurs Massifs de Section Rectangulaire - *138* -
IV.3.2.2. Cas de Conducteurs Quelconques - *139* -
IV.3.2.3. Approximation des t_{0k} - *141* -
IV.3.3. Assemblage Matriciel en Alimentation en Tension (Réduit) - 142 -
IV.3.3.1. Méthode Non Linéaire de Newton-Raphson - *143* -
IV.3.4. Assemblage Matriciel sur Sources de Courant (Total-Réduit) - 145 -
IV.3.4.1. Concaténation des Conducteurs - *146* -
IV.4. Modelisation Thermique - 147 -
IV.4.1. Hypothèses de Modélisation - 147 -
IV.4.2. Choix des Paramètres - 148 -
IV.4.2.1. Conductivités Thermiques dans le noyau - *149* -
IV.4.2.2. Tenseur de Conductivités Thermiques - *149* -
IV.4.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs et Radiatifs - *151* -
IV.5. Validation experimentale - 153 -
IV.5.1. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable - 153 -
IV.5.1.1. Influence des Coins du Bobinage - *154* -
IV.5.2. Essais d'Echauffement - 155 -
IV.5.2.1. Essais Linéaires à Courant Nominal - *156* -
IV.5.2.2. Essais Non Linéaires à Courant Efficace Equivalent - *157* -
IV.6. Conclusion - 160 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Conclusion Générale.....- 161 -

Annexes.....- 167 -

Annexe A : Caracteristiques des Charges Non Lineaires Typiques .....- 169 -
Annexe B : Calcul d'Inductances .....- 171 -
Annexe C : Methode d'Integration de Gauss-Legendre .....- 181 -
Annexe D : Methode Non Lineaire de Newton-Raphson .....- 183 -
Annexe E : Solenoïde de Reference.....- 185 -
Annexe F : Transformateurs d'Essais .....- 187 -

Bibliographie.....- 193 -

Theses de Doctorat..... - 195 -
Rapport de DEA ..... - 196 -
Articles de Revues et de Periodiques ..... - 197 -
Articles de Congres..... - 206 -
Ouvrages..... - 210 -
Normes..... - 211 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

NOMENCLATURE

Les variables définies en gras représentent des grandeurs vectorielles ou matricielles, tandis que les autres sont des scalaires. Les grandeurs entre crochet sont les unités dans le système MKSA et les valeurs entre les accolades sont les valeurs usuelles ou par défaut.

Dans la suite du mémoire des termes dénommés U_i, V_i, W_i, Δ_i, Σ_i, etc..... seront utilisés pour désigner plus simplement un terme contenu dans une équation.

NOTATIONS LATINES

a_1, a_2 : Dimension primitive de spire rectangulaire [m]
$\mathbf{A}, \mathbf{A}^*$: Potentiel vecteur magnétique (* modifié) [T·m]
b_1, b_2 : Dimension primitive de spire rectangulaire [m]
$\mathbf{B}$: Induction magnétique [T]
C : Capacité [F]
C_p : Chaleur massique (pression constante) [$J \cdot kg^{-1} \cdot °C^{-1}$]
C_Γ : Facteur de vue (rayonnement)
$\mathbf{D}$: Induction électrique [$C \cdot m^{-2}$]
$\mathbf{E}$: Champ électrique [$V \cdot m^{-1}$]
e_v : Epaisseur du vernis/émail des conducteurs [m]
e_c : Epaisseur (radiale) d'un conducteur rectangulaire [m]
f : Fréquence [Hz]
g : Accélération gravitationnelle {9.81} [$m \cdot s^{-2}$]
G_r : Nombre de Grashof
h : Rang harmonique
h_{cv} : Coefficient d'échange thermique par convection [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]
h_{ray} : Coefficient d'échange thermique par rayonnement [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]
h_Γ : Coefficient d'échange thermique global [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]
$\mathbf{H}, \mathbf{H_0}, \mathbf{h_0}$: Champ magnétique (vide, courant unitaire) [$A \cdot m^{-1}$]
I, I_m : Courant (de magnétisation) [A]
j : Opérateur complexe $\{\sqrt{-1}\}$
$\mathbf{J}$: Densité de courant [$A \cdot m^{-2}$]
$\mathbf{J_{ac}}$: Matrice Jacobienne
K, K_{AC} : Facteur de déclassement, ou de pertes additionnelles
$\mathbf{K'}$: Densité de courant superficielle et fictive [$A \cdot m^{-2}$]
l, L : Inductance [H] ou longueur caractéristique [m]
l_c : Hauteur d'un conducteur rectangulaire [m]

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Ln : Logarithme Népérien
m : Rapport de transformation
m_v : Masse volumique [kg·m^{-3}]
M : Inductance mutuelle [H]
$\mathbf{n}$: Normale unitaire (orientée) à la surface
N_1, N_2 : Nombre de spire des enroulements primaire/secondaire
N_c : Nombre de couche de conducteur
N_{gp} : Nombre de spire par paquet (MEF 3D)
n_1, n_2 : Nombre de discrétisation par spire primaire/secondaire (M2C)
n_s, n_c : Nombre de discrétisation par conducteur rond : secteur/couche (M2C)
n_r, n_z : Nombre de discrétisation par conducteur rectangulaire : radiale/axiale (M2C)
n_f : Nombre de découpage linéique de la surface du noyau (M2C)
n_g : Nombre de points d'intégration numérique (Gauss-Legendre)
p : Densité volumique de perte [W·m^{-3}]
P : Puissance active, pertes (fer, cuivre, diélectriques, vagabondes,....) [W]
P_r : Nombre de Prandtl
Q : Puissance réactive [Vars]
r_c : Rayon d'un conducteur circulaire [m]
r_1, r_2 : Rayon primitif d'une spire (cas axisymétrique) [m]
R : Résistance [Ω], ou résidu (Newton-Raphson)
R_a : Nombre de Rayleigh
S : Puissance apparente [VA] ou exposant de Steinmetz (pertes fer)
$\mathbf{S}$: Potentiel vecteur [A]
t : Temps [s]
T : Température [°C ou K]
T_x : Taux de remplissage matriciel (nombre d'éléments non nuls)
$\mathbf{T}, \mathbf{t_0}$: Potentiel vecteur électrique (courant unitaire) [A·m^{-1}]
U : Tension totale [V]
V : Tension, Potentiel scalaire électrique [V]
w : Coefficient de pondération
X : Réactance [Ω]
Z : Impédance [Ω]

NOTATIONS GRECQUES

ψ : Flux magnétique totale/élémentaire [Wb]
φ, φ_0 : Phase électrique [° ou rad]
φ_{cd} : Flux de puissance thermique par conduction [W·m^{-2}]

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

φ_{cv} : Flux de puissance thermique par convection [W·m^{-2}]
φ_{ray} : Flux de puissance thermique par rayonnement [W·m^{-2}]
φ_{Γ} : Flux de puissance thermique global à l'interface [W·m^{-2}]
ϕ_t, ϕ_r : Potentiel scalaire magnétique total, réduit [A]
λ : Conductivité thermique [W·m^{-1}·K^{-1}]
δ : Profondeur de pénétration ou épaisseur de peau [m]
α : Coefficient de température {cuivre : 3.93×10^{-3}, aluminium 4.03×10^{-3}}
α_i, α_j : Fonction d'interpolation (MEF) {2D: $a_i+b_ix+c_iy$, 3D: $a_i+b_ix+c_iy+d_iz$,}
α_a : Diffusivité thermique de l'air [m^2·s^{-1}]
β_a : Coefficient d'expansion volumétrique et thermique de l'air [K^{-1}]
ε_{Γ} : Emissivité
ε : Permittivité diélectrique absolue [F·m^{-1}]
ε_r : Permittivité diélectrique relative
ε_0 : Permittivité diélectrique du vide $\{\frac{1}{36\pi\times10^9}\}$ [F·m^{-1}]
ε_{rr} : Erreur relative [%]
ξ : Racine d'un polynôme (Intégration numérique Gauss-Legendre)
μ : Perméabilité magnétique absolue [H·m^{-1}]
μ_r : Perméabilité magnétique relative
μ_0 : Perméabilité magnétique du vide ou de l'air {4π×10^{-7}} [H·m^{-1}]
ν_a : Viscosité cinématique de l'air [m^2·s^{-1}]
ω : Pulsation $\{2\pi f\}$ [rad·s^{-1}]
ρ : Résistivité électrique {cuivre : 1.72×10^{-8}, aluminium 2.69×10^{-8}, à 0°C} [Ω·m]
ρ_e : Densité de charge électrique libre [C]
σ : Conductivité électrique $\{\frac{1}{\rho}\}$ [S·m^{-1}]
σ_{SB} : Constante de Stephan-Boltzmann {5.67×10^{-8}} [W·m^{-2}·K^{-4}]
θ : Angle [rad]
Ω : Domaine d'étude 2D/3D ou potentiel scalaire magnétique (MEF) [A]
Γ : Contour délimitant le domaine d'étude ou une des frontières de celui-ci
η : Rendement ou facteur d'espacement (homogénéisation thermique)

AUTRES NOTATIONS

$\hat{u}$: Valeur maximale
$\overline{u}$: Valeur moyenne
$\tilde{u}$: Valeur approchée
Δu : Variation, écart
Σu : Somme

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Πu : Produit
$\underline{u}$: Nombre complexe (notation omise pour ne pas alourdir les équations)
$\underline{u}^*$: Nombre complexe conjugué
$\Re(u)$: Partie réelle d'un nombre complexe
$\Im(u)$: Partie imaginaire d'un nombre complexe
$\nabla \times \mathbf{u}$: Opérateur différentiel : Rotationnel
$\nabla \cdot \mathbf{u}$: Opérateur différentiel : Divergence
∇u : Opérateur différentiel : Gradient
du : Dimension élémentaire (calcul intégral)
$\|\mathbf{u}\|_m$: Norme d'un vecteur, ou d'un nombre complexe (ordre m)
$[\mathbf{u}]$: Vecteur ou matrice dans les systèmes d'équations matriciels
$[\mathbf{u}]^{-1}$: Matrice inverse
$[\mathbf{u}]^T$: Matrice ou vecteur transposé
$F(u)$: Fonctionnelle
$\sinh(u)$: Sinus hyperbolique
$\cosh(u)$: Cosinus hyperbolique
$\mathbf{J_0}(u)$: Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0
$\mathbf{J_1}(u)$: Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1
$\mathbf{M_0}(u)$: Fonction de Kelvin de première espèce et d'ordre 0
$\mathfrak{I}_1(u)$: Intégrale elliptique de Legendre de 1ère espèce
$\mathfrak{I}_2(u)$: Intégrale elliptique de Legendre de 2ème espèce
x, y, z : Repère de coordonnées cartésiennes
r, θ, z : Repère de coordonnées cylindriques

ABREVIATIONS

MEF : Méthode des éléments finis
MDF : Méthode des différences finis
M2C : Méthode des circuits couplés
THD : Taux harmonique de distorsion
FHL : Facteur de perte harmonique (IEEE)
RC : Redresseur sur charge capacitive
RL : Redresseur sur charge inductive
LIN : Charge linéaire

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Introduction Generale

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

INTRODUCTION GENERALE

Depuis les prémisses des "générateurs secondaires" conçus par Lucien Gaulard aux alentours des années 1880 jusqu'aux modèles contemporains, les transformateurs de puissance se sont imposés comme des équipements essentiels dans les réseaux d'énergie alternative [**Pétrissans-93**]. On dénombre ainsi en moyenne sept transformateurs de la source de production au consommateur. Les matériaux et les modes de conception évoluant, les transformateurs à colonnes, cuirassés, ou encore leur variante utilisant la connexion en "double T", se partagent actuellement les marchés commerciaux du transport, de la répartition et de la distribution de l'électricité.

Initialement conçus pour évoluer dans des conditions de régime sinusoïdal, ceux-ci sont devenus victimes depuis plusieurs décennies des effets néfastes liés à l'avènement de charges dites non linéaires [**Dowell-66**], [**Venkatraman-84**], [**Carsten-86**] commandées ou non [**Ram-88**] associées à l'électronique de puissance et à l'informatisation.

La limitation de ces perturbations est possible au moyen de dispositif de filtrage actif ou passif, voire par l'emploi de convertisseur de puissance utilisant des topologies particulières associées à des lois de commandes adaptées. Cependant, même si une analyse déterministe ou encore stochastique de ces perturbations dites conduites permet de mieux cibler leurs importances dans un réseau électrique [**Miègeville-99**], les dommages occasionnés sur les transformateurs en restent pour le moins un problème d'actualité.

Ainsi, l'ouverture du marché de l'électricité et l'augmentation probable des réseaux isolés dans un avenir proche risque d'accroître la pollution harmonique et donc également les nuisances occasionnées aux transformateurs.

Une charge non linéaire se caractérise par une onde absorbée non sinusoïdale et est modélisable par un spectre de courants harmoniques. L'impact de ces harmoniques sur les transformateurs dépend alors directement de leur rang et de leur amplitude respective. Selon les rangs harmoniques, ces gênes se regroupent en deux catégories [**Béjot-92**] :

Pour des rangs modérés et associés à des fréquences inférieures à quelques kilohertz, les courants distordus causent principalement des pertes additionnelles. Ces déperditions supplémentaires se localisent dans les enroulements, le noyau ferromagnétique, la tôle et les diverses parties métalliques de la structure [**Kulkarni-00**], [**Susnjic-04**]. Elles sont causées par la manifestation de courants induits et entraînent notamment un

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

suréchauffement des enroulements du transformateur [**Olivier-98**], [**Hwang-88**]. Dès lors, un déclassement, voire l'emploi de transformateurs spécialement conçus pour ce type de charge est nécessaire, afin de se prémunir d'un vieillissement accéléré [**Pierce-96**].

Pour les harmoniques de rang plus élevé ou encore associés à des transitoires rapides, comme lors de manœuvres par exemple, les effets capacitifs au sein des enroulements engendrent des phénomènes de résonance ou d'antirésonance locale [**Bousaleh-89**], [**Ahmad-92**], [**Derbel-98**]. La distribution de tension aux bornes des enroulements n'est alors plus linéaire et les facultés diélectriques de certaines spires peuvent être mises en défaut [**Azzouz-93**], jusqu'à un claquage partiel ou total des isolants.

Finalement, pour ces deux gammes de fréquence, les sollicitations thermiques et électriques sur les isolants utilisés augmentent, en réduisant par la même occasion la durée de vie du transformateur si aucune mesure appropriée n'est envisagée [**Pandey-92**].

Dès lors, la problématique d'étude nécessite le couplage entre les modèles électromagnétiques et thermiques, afin de pouvoir retranscrire efficacement le comportement de cet équipement. De nombreuses études ont déjà été menées sur cette problématique. Certaines sont purement basées sur des formulations analytiques, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, comme celle d'un champ magnétique unidirectionnel [**Urling-89**]. D'autres sont basées sur un calcul de champ numérique [**Driesen-02**] précis mais coûteux. Enfin, une dernière famille propose l'utilisation de technique d'homogénéisation, [**Moreau-05**], [**Gyselink-06**] permettant de soulager les coûts algorithmiques.

Dans l'optique de toujours mieux cibler le comportement électromagnétique et thermique de transformateurs soumis à ce type de charge, cette thèse a pour objectif principal la présentation d'une méthodologie mixte développée pour ce type de problème.

Pour cela la modélisation électromagnétique proposée s'appuie sur des formulations analytiques et numériques basées respectivement sur la théorie des circuits couplés et la méthode des éléments finis. Un couplage avec les équations de circuit permet la corrélation directe entre les harmoniques de courant véhiculés et le calcul du champ magnétique dans le transformateur.

Ces modèles sont ensuite couplés aux équations de transfert de la chaleur résolues elles aussi par la méthode des éléments finis.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre dressera tout d'abord un panel des principaux types de transformateurs. Puis nous détaillerons comment le transit de grandeurs non sinusoïdales modifie les paramètres et engendre des pertes supplémentaires. Nous étudierons enfin les conséquences de ces pertes tel que le suréchauffement, jusqu'aux remèdes à adopter.

Le deuxième chapitre nous permettra de présenter les outils mathématiques et de modélisation utilisés pour traduire l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les différents échanges de chaleur. Nous exposerons notamment pour cela les fondements des méthodes analytiques et numériques permettant de retranscrire les effets de courants induits.

Dans le troisième chapitre nous exposerons une méthode axisymétrique et simplifiée adaptée lors d'une phase de prédimensionnement à des transformateurs de puissance modérée à forte. Après le couplage magnétothermique, les résultats de simulation seront comparés à ceux d'expérimentations menées durant un séjour à l'Ecole Polytechnique de Montréal sur un banc d'essai innovant.

Le quatrième et dernier chapitre proposera une méthode de modélisation tridimensionnelle et plus générale, pouvant convenir à des transformateurs plus "modestes". Les cartographies de température obtenues seront mises en relation avec les essais non linéaires réalisés sur un prototype de transformateur surdimensionné.

Les annexes contiennent respectivement les caractéristiques de charges non linéaires usuelles, les détails de calcul d'inductance, les développements des méthodes numériques d'intégration ou de prise en compte de la non linéarité du circuit magnétique, ainsi que les caractéristiques de nos équipements de validation expérimentale.

Finalement, ce mémoire aura pour but de proposer des méthodes de modélisations des transformateurs sur charge non linéaire, permettant en particulier de retranscrire le suréchauffement résultant. Nous critiquerons les limites et imperfections de ces modèles, proposerons les améliorations adéquates à apporter et envisagerons les études connexes à mener dans ce domaine.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

CHAPITRE I

LE TRANSFORMATEUR SUR CHARGES NON LINEAIRES

Le Transformateur sur Charges Non Lineaires

I.1. Introduction ..... - 21 -
I.2. Types de Transformateurs ..... - 21 -
I.2.1. Transformateur à colonnes ..... - 21 -
I.2.1.1. Les Bobinages ..... - 22 -
I.2.1.2. Le Circuit Magnétique ..... - 23 -
I.2.1.3. Le Couplage ..... - 24 -
I.2.1.4. Limitations des Transformateurs à Colonnes ..... - 25 -
I.2.2. Transformateur Cuirassé ..... - 25 -
I.2.2.1. Les Bobinages ..... - 26 -
I.2.2.2. La Cuve ..... - 26 -
I.2.2.3. Les Ecrans Electrostatiques ..... - 27 -
I.2.3. Transformateur en "double T" ..... - 27 -
I.2.3.1. Les Bobinages ..... - 28 -
I.2.3.2. Le Circuit Magnétique ..... - 28 -
I.2.4. Autres Transformateurs ..... - 28 -
I.3. Pertes dans le Transformateur ..... - 29 -
I.3.1. Modèle de Kapp ..... - 29 -
I.3.2. Prise en Compte de la Fréquence ..... - 30 -
I.3.2.1. Inductance de Magnétisation ..... - 30 -
I.3.2.2. Inductances de Fuite ..... - 31 -
I.3.2.3. Résistance de Modélisation des Pertes Fer ..... - 31 -
I.3.2.4. Capacités Parasites ..... - 31 -
I.3.2.5. Résistances des Enroulements ..... - 32 -
I.3.3. Pertes dans le Noyau Ferromagnétique ..... - 34 -
I.3.4. Pertes dans la Tôle et la Structure ..... - 35 -
I.3.5. Pertes Diélectriques ..... - 36 -
I.3.6. Pertes dans les Enroulements ..... - 36 -
I.4. Echauffement ..... - 37 -
I.4.1. Classes Thermiques d'Isolation et Milieux Réfrigérants ..... - 37 -
I.4.2. Mesures et Calculs de Température ..... - 39 -
I.5. Declassement ..... - 40 -
I.5.1. Facteurs de Déclassement ..... - 41 -
I.5.2. Transformateur de type K ..... - 43 -
I.6. Vieillissement ..... - 44 -
I.6.1. Contraintes Thermiques ..... - 44 -
I.6.2. Contraintes Electriques ..... - 44 -
I.7. Conclusion ..... - 45 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.1. Introduction

Ce premier chapitre recensera les principaux types de transformateurs de puissance au travers de leurs spécificités conceptuelles. Nous verrons ensuite comment le transit de grandeurs électriques et plus particulièrement de courants déformés affecte les paramètres électriques et électromagnétiques du transformateur. Un état de l'art non exhaustif des différentes études déjà menées sur ces préjudices étayera cette présentation. Puis, la considération des différentes pertes additionnelles en régime non sinusoïdal nous conduira à aborder les problèmes thermiques jusqu'au déclassement du transformateur et au vieillissement des matériaux isolants utilisés.

I.2. Types de Transformateurs

Vers la fin des années 1885 et après avoir pris possession de la licence d'exploitation des brevets nécessaires, George Westinghouse développe un nouveau type de transformateur. Pour ce modèle, le circuit magnétique entoure entièrement les enroulements d'où son nom de "cuirassé". Plus tard, dans un souci de facilité de conception, une version à "colonnes" de ce transformateur fut conçue. Ces deux types de transformateurs sont encore aujourd'hui les plus employés [**Pétrissans-93**].

La puissance des transformateurs varie de quelques kVA à plusieurs centaines de MVA. Les tensions d'usage commencent, quant à elles, à quelques centaines de volts, sur les réseaux de distribution, pour atteindre plusieurs centaines de kilovolts en sortie des centres de production. Le choix d'un type de transformateur sur cette large gamme dépend non seulement des contraintes électriques, mécaniques et thermiques, mais également des problèmes d'encombrements et économiques. Toutefois, la majorité des équipements commercialisés concernent des transformateurs à colonnes, de distribution et d'une puissance allant de quelques dizaines à quelques centaines de kVA [**Kyriakakis-01**].

I.2.1. Transformateur à colonnes

Le transformateur à colonnes est constitué de deux enroulements concentriques par phase. Ces enroulements sont montés sur un noyau ferromagnétique qui se referme à ses extrémités via des culasses afin d'assurer une bonne canalisation du flux magnétique [**Bouchard-99**]. Dans cette technologie, ce sont les enroulements qui entourent le circuit magnétique de manière à maximiser le couplage tout en minimisant le volume des conducteurs. Les conducteurs sont de dimensions variables et de topologies multiples, selon les puissances mises en jeux.

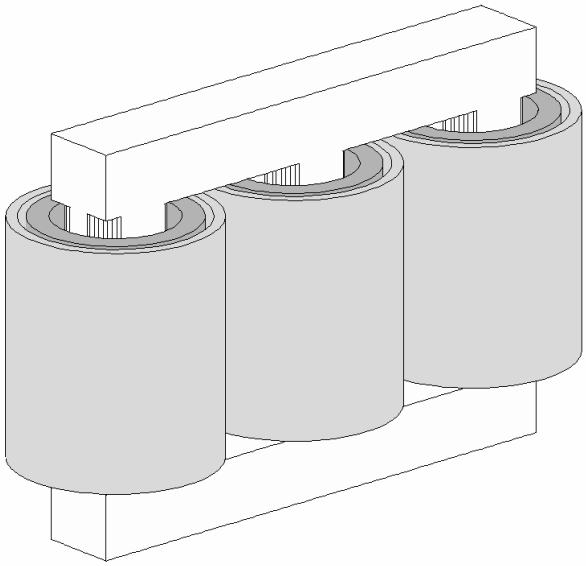


Figure I.1 - *Transformateur à colonnes à flux forcé*

Le transformateur triphasé ainsi constitué est donc composé de trois paires de bobinages indépendantes et par la suite connectées entre elles selon différents schémas récurrents. Ces couplages permettent notamment l'adaptation des niveaux de courant et de tension aux caractéristiques nominales du transformateur au sein de son réseau. On retrouve ainsi des couplages dits en "étoile", en "triangle", ou en "zig-zag", voire d'autres, dérivés de ceux-ci et permettant la compensation de certains courants harmoniques.

I.2.1.1. Les Bobinages

Les enroulements sont conçus par une juxtaposition de couches radiales et successives, composées elles mêmes de multiples spires jointives ou de feuillards. Pour des contraintes électriques et économiques, les couches extérieures et intérieures sont généralement et respectivement associées aux bobinages haute et basse tensions.

Les nombres de spires primaire et secondaire sont quant à eux imposés, par les niveaux de tension utilisés, en corrélation avec la valeur d'induction dans le circuit magnétique, la section de celui-ci, la fréquence et le rapport de transformation. Ce dernier est ajustable selon les conditions d'utilisation au moyen d'un jeu de prises de raccordement situées à différentes hauteurs du bobinage primaire.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les conducteurs sont en cuivre ou en aluminium pour les puissances plus importantes. Ces matériaux sont ainsi préférés à d'autres pour leurs bonnes propriétés conductive, thermique, massique et économique. Ils se présentent sous différents aspects selon la puissance du transformateur. On les retrouve sous la forme de fils massifs, de section circulaire, carrée ou de type méplat, ou encore laminés en fines feuilles.

Pour des gammes de petites puissances, l'emploi de conducteurs filaires et de faibles sections autorise un cintrage plus facile. Les spires s'aménagent alors en sections rectangulaires, agencées le plus proche possible du noyau, afin de minimiser le volume de matériau utilisé. La topologie de la spire rectangulaire n'est pas envisageable sur certains plus gros transformateurs [**Bouchard-99**]. En effet, le cintrage important engendrerait des diminutions de section, voire des micros fissures au niveau de coudes. Des points chauds à ces endroits pourraient alors provoquer une défaillance prématurée des isolants. Le rayon de courbure des conducteurs est pour ces cas plus grand et conduit à des spires de sections circulaires composant un enroulement essentiellement cylindrique. Dans ces conditions, l'utilisation d'un noyau de type cruciforme limite l'augmentation volumique excessive de matériaux conducteurs [**Kyriakakis-01**].

Lorsque la puissance du transformateur augmente, les flux de fuite magnétique ainsi que la section du conducteur suivent la même évolution. Par conséquent, à fréquence nominale, le comportement de l'impédance interne du transformateur devient majoritairement inductif. Un compromis fixe alors le dimensionnement des conducteurs ainsi que l'organisation des bobinages. Ce compromis repose sur une chute de tension acceptable à charge nominale, une limitation du pouvoir de coupure des protections amont, une valeur acceptable du courant d'appel, une densité de courant raisonnable dans les conducteurs, ainsi qu'un refroidissement suffisant des bobinages.

Pour les transformateurs de forte puissance, des tirants permettent de contenir les efforts électrodynamiques intervenant lors de surcharges ou de manœuvres d'enclenchement [**Kladas-94**]. Des brides similaires associées à des plaques de serrage se retrouvent au niveau du circuit magnétique pour en préserver la tenue mécanique et limiter les forces magnétostrictives [**Bousaleh-89**].

I.2.1.2. Le Circuit Magnétique

Le noyau est composé d'un empilage de tôles ferromagnétiques à cristaux orientés, isolées électriquement entre elles, afin de limiter le développement des courants de Foucault. Leur épaisseur de quelques dixièmes de millimètres ainsi que leurs découpes

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

astreignantes conduisent à un assemblage fastidieux dont dépendent les performances du futur noyau. Des joints enchevêtrés et orthogonaux effectuent la liaison entre les colonnes et les culasses sur les transformateurs de petite puissance. Des coupes obliques leurs sont préférées pour des transformateurs plus puissants. L'espace délimité par deux colonnes successives et les culasses est dénommé "fenêtre magnétique" et accueille donc les bobinages.

Il existe des circuits à trois colonnes pour un fonctionnement à "flux forcé" ou à cinq colonnes lors d'une utilisation à "flux libre" permettant de réduire la hauteur des culasses pour un volume de fer identique, ce qui facilite notamment le transport **[Tenyenhuis-00].**

Les tôles utilisent des matériaux dits de type "doux". Ainsi ils présentent un cycle d'hystérésis peu prononcé, pour réduire les pertes associées. Dans les dernières décennies, de gros progrès ont été réalisés sur les alliages, pour minimiser les pertes massiques globales malgré des plus grandes valeurs d'induction atteintes [**Kyriakakis-01**]. Ainsi l'induction dans le noyau est généralement comprise entre des valeurs de 1.3 à 2 Teslas et le point de fonctionnement se situe alors plus ou moins dans le coude de saturation de la caractéristique d'aimantation du matériau.

I.2.1.3. Le Couplage

Le triangle (D), l'étoile (Y), ou le zig-zag (Z), sont les connexions couramment utilisées dans les réseaux électriques. Plusieurs combinaisons distinctes de ces couplages sont disponibles pour les enroulements primaires et secondaires. Les plus courantes pour le continent européen sont les couplages Yy0, Dy11, Yz11, Yd11 où le nombre traduit l'indice horaire, image du déphasage entre les tensions primaires et secondaires. Il en est sensiblement de même pour le continent américain avec des variantes sur les indices horaires utilisés.

Le couplage triangle offre l'intérêt de piéger des harmoniques de séquence homopolaire et ainsi d'empêcher leur propagation sur le réseau électrique. De plus, en cas de détérioration d'un des enroulements, le transformateur reste opérationnel. Son fonctionnement, dénommé en "triangle ouvert", ne dispose plus cependant que de 58% de la puissance nominale.

Le couplage étoile permet, quant a lui, de disposer d'un conducteur de neutre. Lorsqu'il est utilisé au primaire et sans conducteur de neutre distribué, celui-ci peut créer des problèmes lors de l'alimentation de charges déséquilibrées. Dans ce cas, le point neutre

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

peut se déplacer en entraînant alors des surtensions modérées mais prolongées aux bornes des enroulements.

Le couplage zig-zag est une combinaison des deux précédents couplages. Il est réalisé grâce à l'utilisation d'enroulements fractionnés, selon un rapport permettant d'ajuster l'indice horaire. Comme le couplage étoile, un neutre est disponible et par rapport au couplage triangle, les courants harmoniques de séquence homopolaire sont ici directement éliminés.

A l'instar du couplage en zig-zag, il existe également des transformateurs possédant des enroulements multiples, dont une association judicieuse permet un filtrage des courants harmoniques jusqu'à des rangs élevés [**Bouchard-99**].

Certaines de ces connexions sont également mises à contribution lors d'applications industrielles spécifiques telles que des transformateurs de mise à la terre. Les différents types de couplage exposés précédemment sont également applicables à des transformateurs triphasés cuirassés.

I.2.1.4. Limitations des Transformateurs à Colonnes

La réluctance du circuit magnétique des transformateurs à colonnes est plus grande que celle d'un type cuirassé et diffère selon la phase considérée. Par conséquence, le nombre de spires et le rapport volumique entre les matériaux conducteurs et ferromagnétiques sont plus importants.

De plus, dans ces transformateurs, l'organisation géométrique employée pour les enroulements provoque un gradient de tension important entre les couches successives. Les sollicitations diélectriques résultantes sont donc importantes et justifie alors l'utilisation d'une topologie d'enroulement différente pour des niveaux de tension importants.

I.2.2. Transformateur Cuirassé

Pour ce type de transformateur, le circuit magnétique entoure complètement le bobinage, ce qui lui confère un fonctionnement à "flux libre". La cuve assure le serrage de l'ensemble et le transformateur ainsi constitué est alors assuré d'une excellente rigidité mécanique associée à une grande compacité. En contrepartie, le confinement résultant rend plus difficile le refroidissement de l'ensemble.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

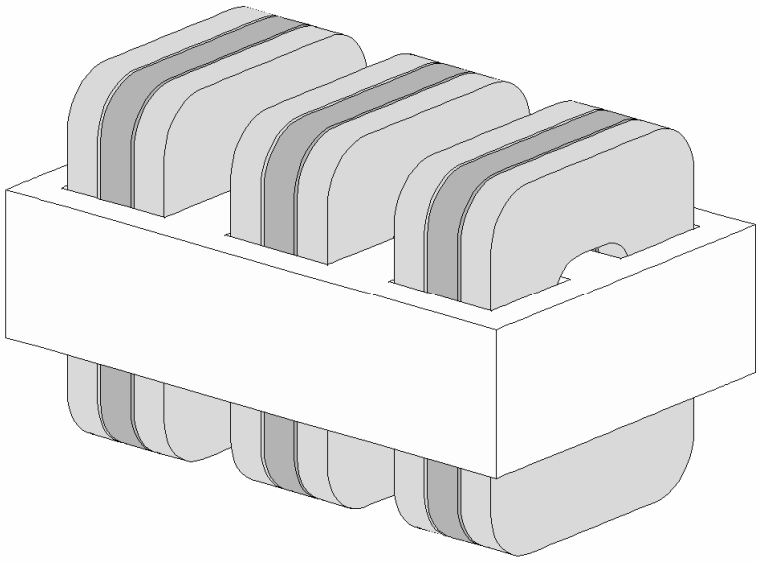


Figure I.2 - *Transformateur cuirassé*

Ces transformateurs sont utilisés principalement au sein des réseaux de transport et de répartition, où les surtensions transitoires sont fréquentes. Dans cet environnement, ils doivent se prémunir des effets néfastes, voire dévastateurs de ces surtensions sur les enroulements [**Derbel-98**]. Pour cela des écrans sont utilisés afin de réduire les contraintes liées aux champs électriques dans les bobinages.

I.2.2.1. Les Bobinages

Les enroulements sont répartis en plusieurs sous groupes de bobines. Ces bobines sont appelées "galettes" ou "disques" à cause de leur géométrie en forme de spires concentriques et de faibles hauteurs. Les galettes sont alternées entre la haute et la basse tension afin de diminuer les fuites magnétiques et le gradient de tension [**Tabaga-95**]. En outre, cette topologie offre l'avantage d'engendrer des forces en opposition entre chaque galette lors de court-circuit.

I.2.2.2. La Cuve

En plus de son rôle de réservoir au liquide diélectrique, la cuve assure le maintien mécanique du circuit magnétique et des enroulements. Elle épouse naturellement le contour de la partie active et minimise ainsi le volume d'huile donc également les coûts et

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

la masse du transformateur. Enfin, à la base de celle-ci des shunts magnétiques permettent de canaliser partiellement les flux de fuites.

I.2.2.3. Les Ecrans Electrostatiques

Des feuilles métalliques à haute résistivité et de faible épaisseur sont employées pour réduire les contraintes entre les spires. Celles-ci sont insérées entre les feuilles isolantes des bobines haute tension. L'effet capacitif, uniformément distribué de cette manière, permet alors de mieux répartir la tension sur toute la longueur de la bobine lors d'une onde de choc [**Bousaleh-89**].

Les deux types de transformateurs que nous venons de présenter ne sont néanmoins pas les seuls. Ainsi, sur le continent nord-américain, un autre type de transformateur dénommé en "double T" se rencontre dans les réseaux de distribution basse tension. Celui-ci est triphasé mais présente la particularité de n'utiliser que deux noyaux magnétiques distincts.

I.2.3. Transformateur en "double T"

Le transformateur en "double T" équivaut à placer en série deux transformateurs utilisant la connexion Scott afin de réaliser une conversion électrique, de triphasée à diphasée et vice-versa [**Brittain-02**]. Il existe trois types de connexions disponibles selon l'indice horaire souhaité : Tt0, Tt1 et Tt11.

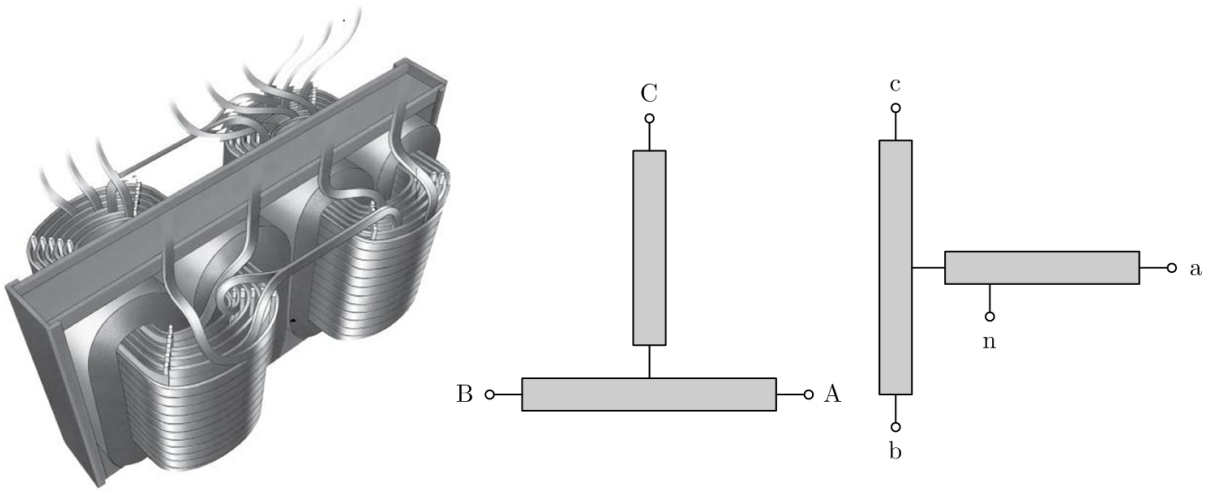


Figure I.3 - *Transformateur Tt11* (*Marcus Transformer of Canada Ltd*)

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Il est de plus possible de superposer les deux noyaux magnétiques de manière à obtenir un transformateur de type "colonnes" apprécié sous certaines contraintes de pose et d'encombrement.

I.2.3.1. Les Bobinages

Les conducteurs utilisés restent semblables à ceux utilisés sur un transformateur à colonnes. Cependant, chacun des bobinages présente une dissymétrie dans l'imbrication des enroulements primaire et secondaire (figure I.3). Ce déséquilibre inhérent à la conception se retrouve donc au niveau de l'échauffement du transformateur, ainsi qu'au niveau de ses impédances internes par phase. L'inégalité est certes faible mais peut engendrer certains désagréments, comme par exemple, un courant de séquence inverse additionnel dans le cas de l'alimentation d'une machine asynchrone, ou encore une différence de la durée d'empiètement par phase lors de l'alimentation de redresseur.

Enfin, contrairement à un transformateur triphasé à colonnes ou cuirassé la puissance nominale ne se répartit pas de manière égale sur chacune des phases. Le transformateur en "double T" doit donc être surdimensionné (7.75%) par rapport à la puissance réelle nominale [**Olivier-03**].

I.2.3.2. Le Circuit Magnétique

Un autre mode de conception du circuit magnétique que celui par assemblage de tôles prédécoupées est également possible. Ainsi, chacun des deux noyaux est composé d'un empilement de tôles en ruban formant un double anneau ferromagnétique englobant les bobinages.

Les problèmes d'entrefer inhérents au niveau des jonctions de tôles obliques ou orthogonales que l'on retrouve sur un transformateur "classique" [**Olivares-03**] sont ainsi supprimés. De plus, le flux parcourt toujours le circuit magnétique dans le sens du laminage pour une perméabilité d'usage maximale. Les pertes à vide sont moindres et donc les coûts d'utilisation réduits.

I.2.4. Autres Transformateurs

Les différents modes de conception présentés précédemment pour ces trois types de transformateur ne leurs sont pas systématiquement réservés. Il est par exemple possible de rencontrer des transformateurs à colonnes pour lesquels les enroulements sont bobinés en

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

disque, ou encore des circuits magnétiques de transformateurs cuirassés composés de tôles enrubannées.

Quelque soit la topologie de transformateur et malgré tous les efforts des différents manufacturiers, les transformateurs demeurent des équipements imparfaits. Ils sont le siège de pertes qui restent acceptables lors d'un fonctionnement en régime linéaire, mais croissent pour des applications modernes générant des distorsions et des non linéarités.

I.3. Pertes dans le Transformateur

Les déperditions sont classifiées de différentes façons. Il est en effet possible de les différencier selon le mode de fonctionnement, ou le domaine physique dans lequel elles interviennent. Dans le premier cas, on parle des pertes à vides et en charges. En se basant sur le deuxième choix, il est possible de distinguer les "pertes fer" dans le noyau ferromagnétique et les "pertes cuivre" dans les enroulements. A celles-ci il faut rajouter les "pertes vagabondes ou parasites" localisées dans la tôle, les brides de serrage et les autres parties métalliques de la structure, mais également les pertes dans les matériaux diélectriques souvent négligeables [**Kulkarni-00**]. Il est à noté que cette notion de "pertes vagabondes" peut inclure, selon les auteurs, celles additionnelles dans les enroulements [**Bouchard-99**].

I.3.1. Modèle de Kapp

Il est d'usage de représenter schématiquement le fonctionnement électromagnétique du transformateur au travers du modèle de Kapp. Il s'agit d'un modèle macroscopique traduisant le comportement simplifié, les imperfections physiques et les pertes internes.

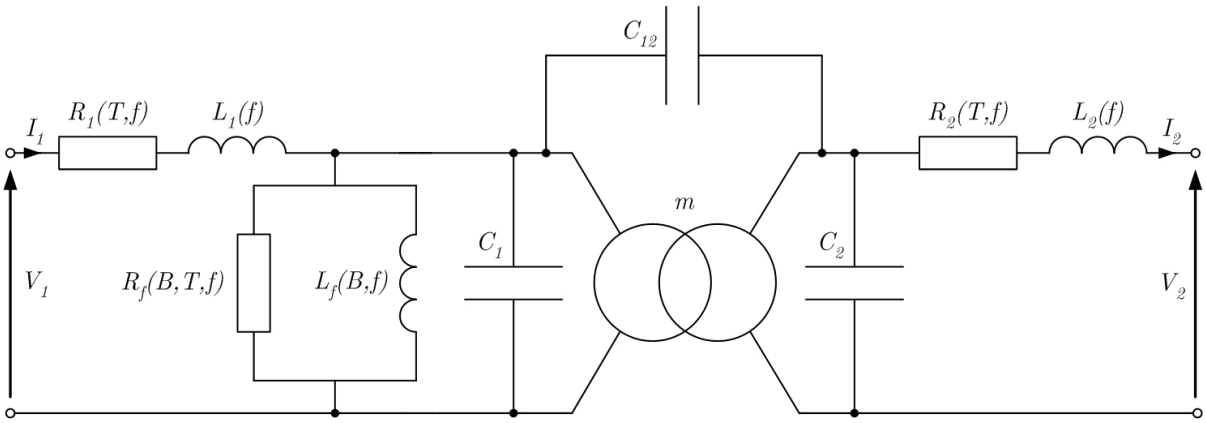


Figure I.4 - *Modèle de Kapp du transformateur*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le fonctionnement idéalisé est retranscrit à travers un transformateur parfait caractérisé par son rapport de transformation m supposé constant. Les essais à vide, en court-circuit, en opposition et en charge permettent l'évaluation des différents éléments passifs du modèle. Ce modèle fonctionne correctement dans le cas d'un transformateur alimentant des charges linéaires. Or dans notre problématique, les charges sont non linéaires et la présence des harmoniques rendent le modèle de Kapp difficilement exploitable. Néanmoins, celui-ci offre une bonne base de réflexion pour l'étude comportementale et énergétique du transformateur en régime non sinusoïdal [**Taci-00**].

I.3.2. Prise en Compte de la Fréquence

Le modèle de Kapp masque en réalité des phénomènes plus complexes et comme tout modèle souffre d'hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses sont nécessaires à l'élaboration du modèle mais conduisent cependant à des paramètres de représentation trop idéalisés pour les applications industrielles actuelles.

C'est ainsi, que l'influence importante de la fréquence f et de la température T sur les différentes composantes du transformateur est mal prise en compte au travers des différents éléments passifs du modèle (figure I.4). La non linéarité du circuit magnétique est elle aussi omise. Pourtant celle-ci est à l'origine d'une des plus anciennes sources de pollution harmonique des réseaux électriques et se traduit par la déformation du courant de magnétisation.

I.3.2.1. Inductance de Magnétisation

Dans le cas de charges linéaires, l'inductance magnétisante L_f est uniquement fonction de la tension d'excitation imposée. En présence de grandeurs non sinusoïdales, L_f est également fonction de la fréquence. Pour des fréquences modérées (quelques kHz) associées à des profondeurs de pénétration du même ordre de grandeur que les dimensions du circuit magnétique, l'induction **B** diminue si la fréquence augmente.

Au-delà de cette gamme de fréquence (quelques dizaines de kHz), la section effective du noyau ferromagnétique diminue et provoque des saturations locales importantes.

En très haute fréquence (quelques centaines de kHz), le circuit magnétique se retrouve "blindé" par les courants induits siégeant dans son épaisseur superficielle. Les lignes de champ ne pénètrent alors plus dans le noyau diminuant ainsi le couplage et donc le rapport de transformation m.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.3.2.2. Inductances de Fuite

Les flux de fuite sont majoritairement localisés entre les enroulements primaires et secondaires. Communément divisés entre ces deux bobinages, ils sont caractérisés par les inductances L_1 et L_2. Lorsque les fréquences des courants liés à la charge augmentent, le trajet des lignes de fuite est modifié et diminue par la même occasion les valeurs de ces inductances [**Keley-99**].

I.3.2.3. Résistance de Modélisation des Pertes Fer

La résistance R_f modélise, quant à elle, les pertes à vides composées majoritairement par les pertes dans le circuit magnétique, ainsi que par les pertes diélectriques et une partie des pertes vagabondes. Pour un transformateur de puissance, les pertes fer sont provoquées principalement par deux phénomènes : les cycles d'hystérésis liés à la nature du matériau ferromagnétique employé et les courants de Foucault siégeant dans les tôles. R_f dépend alors de la fréquence et des niveaux d'induction atteints. Pour des faibles fréquences ces pertes sont définies par la formule semi empirique suivante :

$$P_f = P_h + P_{cf} = K_h v_f f \hat{B}^S + K_{cf} v_f e_t f^2 \hat{B}^2 \qquad \text{(I.1)}$$

Dans celle-ci, les coefficients K_h et K_f dépendent des particularités de fabrication du noyau mais également de la fréquence et de la valeur de l'induction [**Elleuch-03**]. Les coefficients v_f et e_t représentent respectivement le volume du noyau et l'épaisseur des tôles ferromagnétiques, tandis que S est l'exposant de Steinmetz (1.7 à 2). A hautes fréquences, quand l'épaisseur de peau devient très inférieure à l'épaisseur des tôles, les pertes par courant de Foucault sont alors proportionnelles à $f^{0.5}$ [**Guérin-94**]

Il est à noter que les pertes vagabondes additionnelles et celles dûes aux flux de fuite engendrés par les courants de charge ne sont pas incluses dans cette résistance. Cette observation justifie notamment la classification des pertes du transformateur comme étant des pertes en charge ou à vide [**Pierce-96**].

I.3.2.4. Capacités Parasites

Les condensateurs C_1, C_2 et C_{12} du modèle globalisent de manière très simplifiée les capacités parasites qui apparaissent en hautes fréquences entre les spires, l'enroulement et le noyau et entre les bobinages primaire et secondaire. Plusieurs méthodologies expérimentales permettent leur détermination [**Lu-03**]. Il est également possible d'en

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

calculer une valeur approchée, à partir des données géométriques et ainsi d'estimer les premiers modes résonnants susceptibles d'être excités [**Liew-02**]. Les fréquences associées peuvent alors correspondre par exemple à celles d'une alimentation non sinusoïdale de type modulation de largeur d'impulsion (MLI), générée par des semi-conducteurs commutant toujours plus rapidement.

I.3.2.5. Résistances des Enroulements

Les résistances R_1 et R_2 sont respectivement celles des enroulements primaire et secondaire et dépendent directement des caractéristiques de conception du bobinage. De plus, leurs valeurs sont fortement affectées par la fréquence des courants véhiculés, ainsi que par la température. En effet, les flux de fuites harmoniques sont à l'origine d'une distribution non uniforme du courant dans les enroulements due aux effets de peau et de proximité. Ces effets sont plus ou moins prononcés selon les dimensions de la section des conducteurs et la topologie d'enroulement utilisée [**Kerszenbaum-91**], [**Driesen-00**].

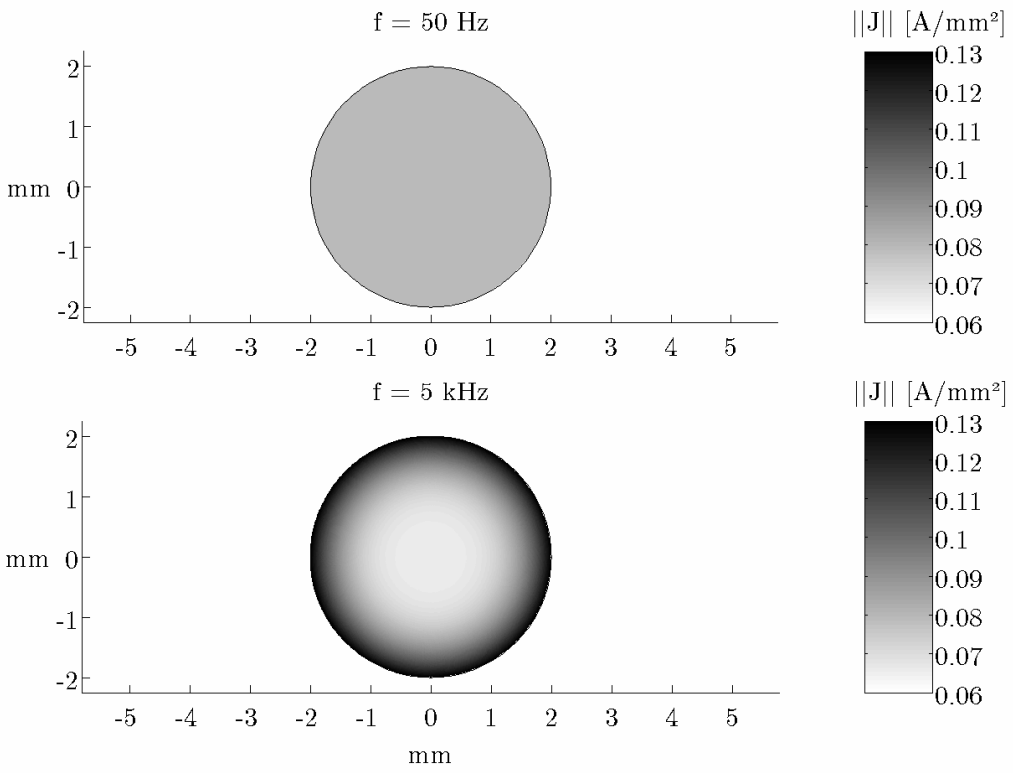


Figure I.5 – *Mise en évidence de l'effet pelliculaire* (*Courant unitaire imposé*)

L'effet pelliculaire est un effet "propre" du conducteur sur lui-même. Il est le fruit d'une contre-réaction née de la présence des courants induits et se caractérise par une profondeur de pénétration encore dénommée épaisseur de peau δ :

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{I.2}$$

Une résistance additionnelle dite de "Stoll" dont la valeur est obtenue analytiquement en permet notamment la quantification **[Joan-04]**. Celle-ci permet de quantifier les pertes supplémentaires engendrées [**Namjoshi-98**].

L'effet de proximité est quant à lui une conséquence "mutuelle" et dû à la présence de multiples inducteurs distincts. Il est plus difficilement chiffrable [**Albach-00**] et peut nécessiter un calcul plus contraignant. Cet effet dépend fortement du type de conducteur utilisé, de leur nombre ainsi que de leur agencement. Pour le diminuer, il est alors préconisé d'utiliser une disposition alternée des conducteurs ou des couches de conducteurs [**Vandelac-88**], [**Perry-79**].

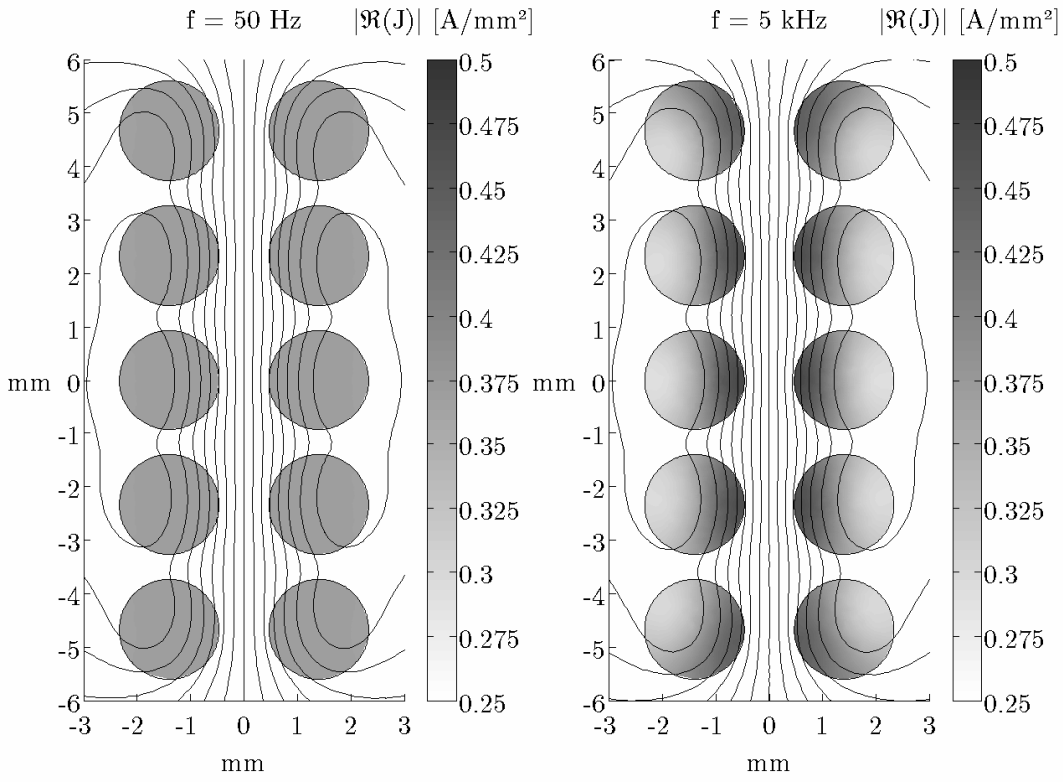


Figure I.6 – *Mise en évidence de l'effet de proximité* (*Courant unitaire imposé*)

Ces deux phénomènes provoquent un incrément de la valeur des résistances par une diminution de la section effective des conducteurs. Ils sont donc à la source de pertes Joule additionnelles en régime harmonique (I.3). Les pertes augmentent alors la température des enroulements et par conséquent leurs résistances **[Bishop-96]**.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Cette augmentation crée un échauffement supplémentaire qui par un effet d'avalanche peut provoquer la destruction du transformateur si elle n'est pas maîtrisée.

$$P_J = \sum_{h=1}^{\hat{h}} R_1(h) I_1^2(h) + \sum_{h=1}^{\hat{h}} R_2(h) I_2^2(h) \qquad \text{(I.3)}$$

La présence du noyau ferromagnétique modifie cependant le trajet des lignes de champ et par conséquent vient rajouter un effet mutuel sur les conducteurs.

I.3.3. Pertes dans le Noyau Ferromagnétique

La modélisation des pertes fer relève de phénomènes physiques complexes, où de multiples paramètres interviennent. Un essai à vide réalisé à la fréquence nominale permet la détermination des pertes fer, alors qu'un essai à fréquence variable est un moyen simplifié de séparer chacune des deux composantes (I.1) [**Bouchard-99**].

En présence d'harmoniques de tension ces pertes augmentent logiquement. Stensland fournit une étude réalisée par MEF et mettant en évidence l'impact respectif des principaux rangs harmoniques sur la variation des pertes dans le noyau [**Stensland-97**].

Delaiba propose quant à lui l'utilisation de deux formules empiriques, afin de déterminer les pertes additionnelles à partir de la connaissance de chaque rang harmonique de tension [**Delaiba-98**].

L'augmentation de l'induction magnétique augmente la surface du cycle d'hystérésis du matériau, ainsi que les pertes par courants de Foucault. Emmanuel propose une étude analytique permettant de déterminer ces déperditions dans un matériau massif ou laminé soumis à un champ ou un flux magnétique non sinusoïdal [**Emmanuel-88**]. Les résultats de ces formulations analytiques peuvent être retranscrits au travers de modèles passifs discrétisés de manière plus ou moins fine selon la précision souhaitée [**Tarasiewicz-93**].

En régime nominal et linéaire, les pertes fer restent faibles vis-à-vis des pertes dans les enroulements. Leur impact sur l'échauffement en charge du transformateur n'est alors que de quelques degrés [**Olivier-98**].

Il en est de même des différentes pertes vagabondes qui peuvent cependant provoquer des échauffements locaux dans la tôle ou la structure.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.3.4. Pertes dans la Tôle et la Structure

Les pertes vagabondes croissent logiquement au fur et à mesure que la puissance du transformateur augmente, alors que leur rapport aux autres pertes en charge lui diminue. Cette dépendance et ce rapport peuvent être approchés par des fonctions polynomiales respectivement d'ordre deux et d'ordre fractionnaire [**Olivares-03**].

La distribution des lignes de champs dans l'air est fortement dépendante des caractéristiques de conception du transformateur. Dès lors, une cartographie précise est difficilement évaluable autrement que par une résolution numérique (MEF) à deux ou trois dimensions.

Ces pertes sont surtout élevées dans les plaques et les tirants de maintien du circuit magnétique à proximité des têtes de bobines et donc soumis à des flux de fuite importants. L'utilisation de l'impédance de surface couplée à une formulation scalaire en trois dimensions permet une bonne évaluation des densités de courant induites [**Susnjic-04**].

La tôle de la cuve est également concernée par ce problème et peut être modélisée avec discrétisation [**Schmidt-02**], ou sans discrétisation [**Guérin-94**] pour un temps de calcul et des ressources moindres.

La cuve est surtout sensible à ces phénomènes de courant induits à proximité des endroits restreints, comme ceux des passages de conducteurs. Des formulations analytiques peuvent alors être envisagées [**Turowski-97**] afin de déterminer le suréchauffement local.

La perméabilité relative ainsi que la conductivité des matériaux hôtes ont une importance majeure sur l'amplitude de ces pertes. Des écrans en aluminium ou en fer, simple ou multicouche, posés en face interne de la tôle utilisent ces propriétés. Ils peuvent réduire efficacement les déperditions [**Olivares-03**] et en particulier aux alentours des passages de câbles [**Ecarela-Perez-04**].

Leur efficacité dépend alors directement de leur bonne disposition. Différentes comparaisons numériques ont été réalisées afin de connaître l'emplacement optimal d'un écran partiel [**Pavlik-93**], [**Takahashi-00**].

Nous verrons par la suite que d'autres types d'écrans sont utilisés dans la conception de transformateurs spéciaux pour réduire les couplages capacitifs entre les enroulements.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.3.5. Pertes Diélectriques

Les pertes diélectriques sont pour la plupart du temps négligeables par rapport aux autres pertes. Ces pertes sont dues à des courants de déplacement dans les isolants et sont calculables à partir de l'expression (I.4). Le facteur de dissipation tan δ $\{10^{-4}$ à $10^{-2}\}$ est fourni par le fabricant du diélectrique employé :

$$P_{di} = V^2 \omega C \tan\delta \tag{I.4}$$

Les pertes diélectriques peuvent être modélisées par un réseau de résistances et de condensateurs en cascade et en parallèle [**Ahmad-92**].

I.3.6. Pertes dans les Enroulements

Les pertes dans les enroulements, majoritairement responsables de l'échauffement en régime sinusoïdal, prennent encore plus d'importance dans le cas de l'alimentation de charges non linéaires. L'augmentation de résistance dûe aux effets pelliculaire et de proximité peut être modélisée au travers d'une composante résistive dépendante de la fréquence et de la température [**Olivier-98**] :

$$R = R_0 (1 + \alpha T) + \frac{K_R f^{A_R}}{1 + \alpha T} \tag{I.5}$$

La composante fréquentielle traduit la croissance dûe aux effets inductifs mutuels [**Kelley-99**]. Cette augmentation est cependant limitée par la température qui freine l'importance des courants induits dans les conducteurs (I.5).

L'effet de proximité est étroitement corrélé au nombre de couches d'enroulement composant le bobinage complet. Le transformateur idéal en régime non sinusoïdal serait un modèle à enroulement monocouche mais impossible à concevoir. Pour des transformateurs réels, l'exposant A_R varie selon la couche et le type de conducteurs entre 0.5 et 2 [**Driesen-00**].

Les pertes dans les transformateurs varient entre 20% de la puissance nominale pour les petites puissances et 1% voire moins pour les plus gros transformateurs. Cependant, l'alimentation de charges non linéaires augmente ces pertes de quelques pourcents [**Kerszenbaum-91**]. Le rendement est alors dégradé et leur impact sur l'échauffement nécessite un refroidissement approprié du transformateur.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.4. Echauffement

La puissance nominale du transformateur est limitée par son aptitude à dissiper les pertes intrinsèques. Dès lors, la classe d'isolation thermique des isolants employés doit être choisie en adéquation avec les températures prévisibles atteintes.

La mesure de la température moyenne d'un enroulement reste relativement accessible. A contrario, il est beaucoup plus difficile de mesurer la température du point chaud, ou la distribution axiale et radiale de température. Certaines formules empiriques permettent d'évaluer plus ou moins précisément ces températures mais deviennent inadaptées dans le cas de l'alimentation de charges non linéaires. Une modélisation appropriée doit permettre de vérifier l'adéquation entre les limitations liées aux classes d'isolation utilisées et les températures des milieux diélectriques en régime permanent [**Daponte-96**].

I.4.1. Classes Thermiques d'Isolation et Milieux Réfrigérants

Les classes thermiques d'isolation sont étroitement liées aux milieux réfrigérants utilisés. Il en existe principalement deux types pour les transformateurs de puissance : l'air et l'huile.

Les transformateurs refroidis par une circulation naturelle ou forcée de l'air ambiant sont dits de type "sec". Ce mode de refroidissement s'applique principalement aux transformateurs à colonnes ou en "double T" de puissance faible à modérée. Les températures atteintes sont relativement importantes (150°C en moyenne contre 65°C pour un transformateur à huile) et des cales disposées entre les couches maintiennent des canaux de ventilation d'une épaisseur suffisante pour assurer le refroidissement. De plus, au delà de la convection engendrée, ces cales améliorent par la même occasion la tenue diélectrique [**Pierce-94b**]. Cependant, si les niveaux de tension et les contraintes d'encombrement deviennent trop critiques il est alors préférable d'utiliser des transformateurs pour lesquels la globalité des enroulements est noyée dans une résine isolante. On parle alors du transformateur "enrobé", ou "imprégné" [**Pierce-93**], pour lequel la rigidité diélectrique et mécanique est améliorée [**Jaytener-96**].

Pour les plus fortes puissances et les niveaux de tension élevés, les transformateurs "immergés" ou "à huile" sont préférés. Le liquide oléagineux à base minérale ou de silicone assure alors à la fois les fonctions de refroidissement et d'isolation électrique. La

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

température du transformateur est limitée dans ce cas pour le liquide qui ne peut être utilisé à des températures élevées.

Les transformateurs de types secs ou immergés possèdent chacun leurs avantages et leurs inconvénients en termes d'encombrement, de surcharges, de niveau de bruit, de valeur d'impédance, ou encore de coûts d'utilisation. Dooley réalisa une étude comparative sur une gamme de puissance commerciale déjà disponible [**Dooley-98**], [**Sen-03**]. Il fournit de plus une liste détaillée des normes nord-américaines relative à ces modes de refroidissement.

Ces normes sont sensiblement différentes des normes européennes. Ainsi, pour des transformateurs de type secs, les classes thermiques d'isolation sont certes définies sur la base des mêmes grandeurs thermiques, mais conduisent à des divergences (table I.1).

	EUROPE			***AMERIQUE***		
Dénomination de la classe	**B**	**F**	**H**	**150°C**	**185°C**	**220°C**
Température ambiante [°C]	40	40	40	40	40	40
Elévation moyenne [°C]	80	105	125	80	115	150
Elévation additionnelle locale [°C]	10	10	15	30	30	30
Température maximale locale [°C]	130	155	180	150	185	220

Table I.1 – *Classes thermiques d'isolation des transformateurs de type sec* [**Bouchard-99**]

La dénomination de la classe correspond donc aux limites de température acceptables, par les diélectriques, en régime permanent. Ceux-ci sont de nature très différentes et adaptés à leur classe respective. Ainsi, les isolants couramment utilisés sont des papiers Kraft, cartons, ou autres matériaux à base d'aramide de type Nomex, de polyester pour le Mylar, ou de fibres de verre. Le vernis des conducteurs est, quant à lui, fabriqué à base de résine de polyuréthane, de polyamide, ou de polyester.

L'élévation additionnelle locale pour obtenir la température du point chaud est fortement discutable. Lors de l'alimentation de charges consommant des courants déformés, les valeurs de 10, 15 et 30°C s'avèrent beaucoup trop faibles. Pierce propose alors de reconsidérer cette classification en se basant sur un nouveau rapport, défini comme celui de l'élévation de température au point chaud sur l'élévation de température moyenne de l'enroulement [**Pierce-94b**]. Néanmoins, cette proposition nécessite une connaissance précise de la température et particulièrement de celle du point chaud.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.4.2. Mesures et Calculs de Température

Pour des mesures de température moyenne, la très bonne linéarité thermique de la résistivité du cuivre et de l'aluminium est exploitée. Si une mesure de résistance lors d'un essai en charge nominale du transformateur n'est pas toujours envisageable étant donné les puissances mises en jeu, il existe cependant des méthodes empiriques basées sur des expérimentations plus faciles à mettre en œuvre. Ainsi, à partir des échauffements obtenus lors des essais à vide ΔT_0 et en court-circuit ΔT_{cc}, il est possible d'évaluer l'échauffement moyen nominal ΔT_N des enroulements :

$$\Delta T_N = \Delta T_{cc}\left[1+\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_{cc}}\right)^{\frac{1}{\chi}}\right]^{\chi} \tag{I.6}$$

Où χ est un paramètre dépendant du mode de refroidissement, naturel (χ=0.8) ou auto ventilé (χ=1) [**IEEE C57.12.91-01**].

Une mesure directe de cet échauffement peut également être obtenue, à partir d'un essai en opposition mais nécessite l'emploi d'un deuxième transformateur, d'une puissance au moins identique.

Une formulation similaire permet d'évaluer la température du point chaud pour des transformateurs secs mais reste très approximative dans le cas d'un fonctionnement sur charge non linéaire [**Pierce-94b**], [**IEEE-C57.134-00**].

Les moyens techniques permettant la mesure de température sont nombreux. Les plus utilisés sont les thermocouples, les périscopes ou caméras infrarouges, ou encore les fibres optiques couplées à des pyromètres [**Declercq-99**].

L'expérience situe généralement la position du point chaud aux alentours des premières couches de l'enroulement intérieur, les plus proches du noyau ferromagnétique et à environ 70 à 90% de la hauteur de celui-ci selon le foisonnement des différentes couches. Une localisation plus précise nécessite l'emploi d'un trop grand nombre de capteurs, qui modifie alors l'écoulement du fluide réfrigérant et fausse la mesure de température. Dès lors, l'emploi d'une modélisation précise et adaptée est préférable.

Le fonctionnement sur charge non linéaire, incrémente la température du point chaud et déplace sa position, comme l'atteste la figure suivante issue de [**Pierce-94b**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

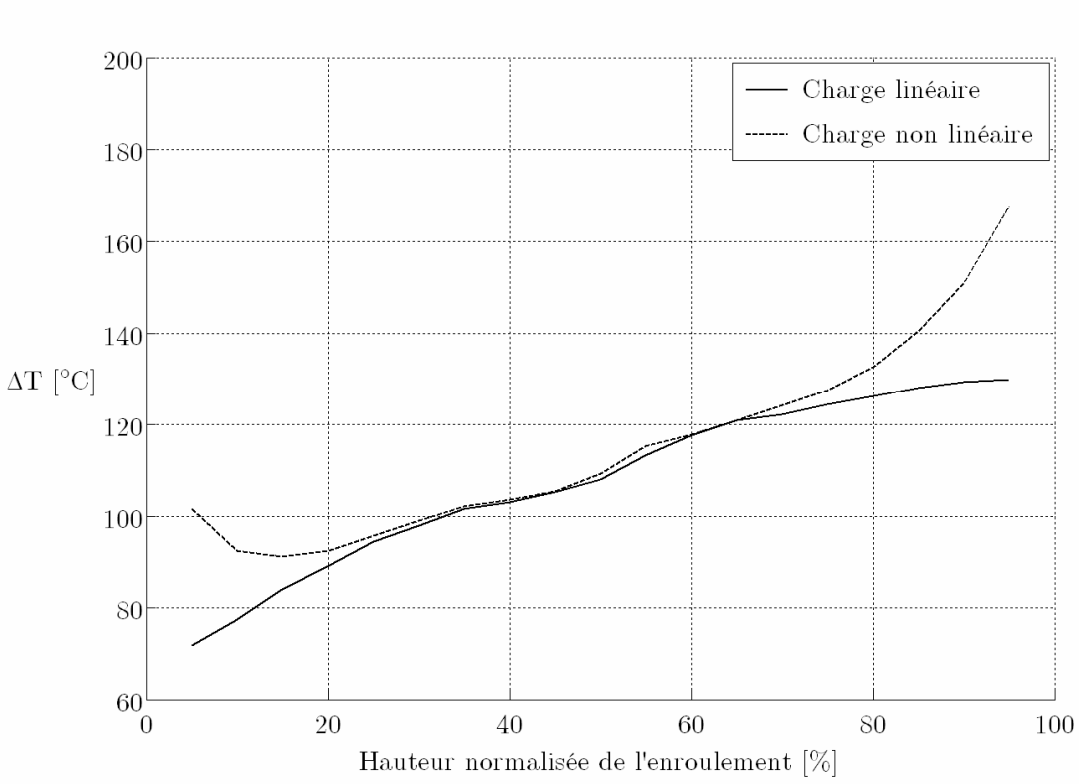


Figure I.7 – *Exemple de distribution axiale de température dans un enroulement*

Un dépassement des valeurs caractéristiques de la classe d'isolation conduit alors irrémédiablement à un déclassement voire à un remplacement du transformateur par un modèle mieux adapté.

I.5. Déclassement

Les contraintes thermiques liées au type de charge non linéaire limitent la capacité effective des transformateurs. Les essais adéquats sont difficiles à mettre en œuvre et deux solutions alternatives sont alors envisageables :

- Déclasser un transformateur classique en multipliant sa puissance nominale par un facteur correctif qui varie généralement entre 65 et 95%, selon la nature de la charge.

- Utiliser un transformateur de type K, spécialement conçu pour l'alimentation de charge non linéaire.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.5.1. Facteurs de Déclassement

Diverses méthodes de déclassement basées sur la connaissance du spectre harmonique de charge se retrouvent dans la littérature scientifique.

Une première approche est d'utiliser le taux harmonique de distorsion "THD" (annexe 1), ou encore la puissance déformante [**Béjot-92**]. Dans ce cas, le facteur de déclassement est défini par :

$$K = \frac{1}{1 + THD} \tag{I.7}$$

L'inconvénient de cette méthode est que des harmoniques de rang différent ont le même poids dans le calcul. Ceci est contraire au fait que les harmoniques de rang élevé contribuent davantage à l'échauffement du transformateur.

Une seconde méthode est basée sur l'utilisation de la résistance des enroulements et de sa dépendance fréquentielle pour traduire le surplus de pertes causé par des courants harmoniques (I.5). Cette évolution est obtenue par un essai en court-circuit à fréquence variable lorsqu'il est envisageable, ou par simulation [**Driesen-00**]. Néanmoins, cette solution ne permet pas la prise en compte de l'augmentation des pertes vagabondes dans le déclassement.

Enfin, la plupart des auteurs s'accordent sur une troisième approche basée sur la séparation des pertes dues à la charge P_{charge}. Celle-ci consiste à supposer que ces déperditions sont la somme des pertes en régimes continu et alternatif :

$$P_{\text{charge}} = P_{\text{cuivre (DC)}} + P_{\text{cuivre (AC)}} + P_{\text{vagabondes (AC)}} \tag{I.8}$$

Il suffit alors d'appliquer un coefficient K_{AC} sur les deux derniers termes, pour caractériser leur augmentation [**Pierce-96**], [**Ram-88**] :

$$P_{\text{charge NL}} = P_{\text{cuivre (DC)}} + K_{AC}\left(P_{\text{cuivre (AC)}} + P_{\text{vagabondes (AC)}}\right) \tag{I.9}$$

Le coefficient de déclassement est alors :

$$K = \frac{P_{\text{charge}}}{P_{\text{charge NL}}} \tag{I.10}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Cette vision à été retenue par les normes européennes et nord-américaines. La norme [**NF C52-112-4**] (harmonisée UTE) préconise une formulation simplifiée [**Béjot-92**] :

$$K = \left[1 + 0.1 \left(\sum_{h=2}^{\hat{h}} h^{1.6} \left(\frac{I_h}{I_1} \right)^2 \right) \right]^{-0.5} \tag{I.11}$$

Ou I_h, I_1 sont respectivement les courants harmoniques au rang h et le courant fondamental générés par la charge non linéaire.

La norme nord-américaine [**IEEE C57.110-98**] propose, quant à elle, deux formules légèrement différentes. L'une basée sur le courant efficace I_{eff} de la charge [**Yildirim-00**] et l'autre basée sur le courant nominal I_N du transformateur [**Fuchs-00**] :

$$K_{AC} = \sum_{h=1}^{\hat{h}} \left(\frac{I_h}{I} \right)^2 h^2 \tag{I.12}$$

Ou I peut être remplacé soit par I_{eff} soit par I_N.

Ce facteur quadratique conduit à priori à un déclassement plus sévère que la norme européenne. Certains auteurs proposent de modérer l'impact des harmoniques, sur les pertes vagabondes (I.9) en remplaçant h^2 par $h^{0.8}$ dans (I.12) [**Kelley-99**]. D'autres rectifient le calcul de K_{AC} en modérant sa valeur pour des conducteurs de dimensions plus réduites [**Makarov-00**].

Dans le cas de multiples charges non linéaire, Massey propose l'utilisation d'un courant harmonique global et équivalent utilisant les coefficients K_{AC} élémentaires de chaque charge non linéaire et au travers d'une somme pondérée [**Massey-94**].

Néanmoins, celui-ci pose des problèmes d'application, comme nous le verrons au troisième chapitre et pour certains types de charge. Comme le précise la norme, le rang doit donc être limité arbitrairement à un rang maximum [**Kennedy-90**] et [**Egolf-94**].

L'annexe A fournit, pour quelques charges non linéaires usuelles, les valeurs de ces coefficients qui permettent alors de les caractériser vis-à-vis de leurs conséquences sur le déclassement des transformateurs.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.5.2. Transformateur de type K

Un transformateur de type K est un équipement pour lequel les parties sensibles aux harmoniques ont été modifiées de manière à minimiser leurs effets. La conception de ce type de transformateur n'est pas foncièrement très différente de celle des transformateurs "classiques". Comme les manufacturiers cherchent à minimiser les effets nuisibles d'harmoniques de courant et de tension, le volume de matériau employé augmente et rend donc ce modèle de transformateur plus onéreux. Ceci justifie quelquefois une préférence d'achat portée vers des transformateurs plus "classiques" mais déclassés. Pour diminuer les pertes dues aux harmoniques, les fabricants portent une attention particulière sur la topologie des enroulements et des conducteurs, le type de tôles, les connecteurs et l'utilisation d'écrans [**Pierce-96**].

Les transformateurs de type K travaillent en général à des niveaux d'induction plus faible, hors du coude de saturation. On leur préfère des conducteurs volumineux et fins par exemple de type méplat et surdimensionnés pour limiter les conséquences de l'effet de proximité et de l'effet de peau sur les pertes Joule. Les dimensions des conducteurs de neutre sont doublées pour accepter le passage d'éventuels courants de séquence homopolaire.

L'augmentation de l'épaisseur des canaux de ventilation diminue le couplage capacitif entre les couches et un écran électrostatique est également employé. Ainsi l'utilisation d'un tel écran entre les bobinages primaire et secondaire permet par une judicieuse liaison à la masse de découpler l'effet capacitif entre ces deux bobinages. Par ailleurs les différentes parties actives du transformateur sont enfermées dans une cuve plus grande facilitant le refroidissement.

Toutes ces améliorations sont plus ou moins prononcées et dépendent du type de charge non linéaire à alimenter. Ces transformateurs sont caractérisés par un coefficient K relatif à (I.12) ayant pour valeurs typiques 4, 9, 13, 20 voire plus. Selon la position du transformateur dans l'arborescence du réseau électrique et donc de l'importance des propagations harmoniques, certaines valeurs de coefficient sont préconisées [**Frank-96**].

Même si des solutions sont proposées pour atténuer les dommages dûs aux harmoniques, certains transformateurs restent soumis à des contraintes importantes. Il en résulte une dégradation de l'isolation par une modification de ses propriétés physico-chimiques qui conduit définitivement à une réduction de la durée de vie.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.6. Vieillissement

Il est difficile de prévoir et même de vérifier précisément la durée de vie d'un transformateur de puissance, à cause notamment de la lenteur du processus de vieillissement. Certaines indications sur son endurance sont tout de même disponibles. En condition normale d'utilisation, la durée de vie moyenne d'un transformateur est de plusieurs dizaines d'années (typiquement supérieure à 30 ans). Pour un régime de surcharge, cette estimation chute jusqu'à quelques années, voire en deçà pour des consommateurs critiques. Des profils de charges journalières fournissent une base de calcul de ce vieillissement et des coûts d'utilisation en fonction de l'âge atteint [**Jardini-97**].

Les sollicitations d'un transformateur de puissance sont nombreuses et aussi diverses que des contraintes thermique, électrique, mécanique ou environnementale (oxydation,…). Les suréchauffements, les surtensions, ainsi que les variations rapides des grandeurs physiques qui leur sont associées (chocs thermiques, ...) restent pourtant les principaux facteurs de dégradation de l'isolation électrique [**Resende-98**]. Celle-ci s'aggrave avec l'utilisation de charges non linéaires et est modélisable par des lois mathématiques de type exponentielles ou par des méthodes probabilistes.

I.6.1. Contraintes Thermiques

Le point chaud, ou la température de l'huile au sommet de la cuve restent les grandeurs critiques de référence sur lesquelles se base la plupart des études. Le calcul de ces paramètres permet de les coupler aux équations de pertes de durée de vie [**Samesima-95**]. Une approche utilisant le THD comme paramètre a été proposé dans [**Pierrat-96**]. Cette approche souffre des mêmes lacunes que celle présentée lors de l'étude du facteur de déclassement (cf § I.5.1). Le type de matériau isolant employé est lui aussi étroitement lié au vieillissement [**Lessard-96**]. Il est soumis, au delà des critères économiques, aux contraintes thermiques et électriques.

I.6.2. Contraintes Electriques

Les phénomènes de surtension peuvent conduire à une dégradation des propriétés, voire à un claquage total ou partiel des vernis et des isolants. Dès lors, un couplage entre les sollicitations thermique et électrique est souhaitable. Pour cela l'utilisation d'une expression à base d'exponentielle est commune [**Gjaerde-97**], [**Pandey-92**], mais d'autres sont également envisageables. Une dizaine d'entre elles sont passées en revue par [**Cygan-90**] qui prodigue alors un catalogue de références pour la modélisation de ces phénomènes.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

I.7. Conclusion

Ce premier chapitre vient de dresser un vaste panorama des désagréments causés à un transformateur et liés à l'utilisation de charges non linéaires. La mise en évidence de pertes additionnelles dans les différentes parties de l'équipement et plus particulièrement dans les enroulements permet d'expliquer les problèmes de suréchauffement rencontrés. Elle permet également de justifier un déclassement nécessaire, afin d'assurer une durée de vie suffisante à cet équipement omniprésent dans les réseaux électriques.

Les facteurs de déclassement préconisés par les différents auteurs fournissent une base intéressante pour la prise en compte de l'échauffement supplémentaire provoqué par les charges non linéaires. Néanmoins, ces différentes approches sont soit applicables aux transformateurs déjà existants soit plus ou moins sélectives à tel ou tel type de transformateurs. Pour palier à ces problèmes, nous proposerons une approche phénoménologique pour le calcul de la température et du coefficient de déclassement. Basée sur les paramètres de conception (géométrie, puissance,...) et les phénomènes électromagnétiques et thermiques dans le transformateur, cette approche permet en général de répondre aux questions posées dans ce chapitre quelque soit la topologie et la puissance du transformateur. Mais nous nous sommes limités dans ce mémoire à l'étude des transformateurs de distribution de type sec.

Cette approche est bien évidemment applicable en phase de conception, mais également en phase d'exploitation. Le chapitre suivant expose les méthodes analytiques et numériques utilisées pour la résolution des équations électromagnétiques et thermiques.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

CHAPITRE II

METHODES DE MODELISATION DES TRANSFORMATEURS

Methodes de Modelisation des Transformateurs

II.1. Introduction ..... - 49 -
II.2. Modeles Electromagnetiques ..... - 49 -
II.2.1. Equations Electromagnétiques ..... - 49 -
II.2.1.1. Equations de Maxwell ..... - 50 -
II.2.1.2. Relations Constitutives des Matériaux ..... - 50 -
II.2.1.3. Conditions de Passage ..... - 51 -
II.2.1.4. Conditions aux limites spatiales et temporelles ..... - 51 -
II.2.1.5. Conditions de Jauge ..... - 52 -
II.2.1.6. Régime Harmonique et Etat Quasi Stationnaire ..... - 52 -
II.2.1.7. Bilan des Puissances Electromagnétiques ..... - 53 -
II.2.2. Différentes Formulations Electromagnétiques ..... - 53 -
II.2.2.1. Formulation en Potentiel Vecteur Magnétique AV, A^* ..... - 54 -
II.2.2.2. Formulation en Champ Magnétique H ..... - 55 -
II.2.2.3. Formulation en Potentiel Vecteur Electrique T - Ω ..... - 55 -
II.2.2.4. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique ϕ_t, ϕ_r ..... - 56 -
II.2.2.5. Synthèse du Choix des Formulations ..... - 57 -
II.2.2.6. Prise en Compte de la Saturation du Circuit Magnétique ..... - 58 -
II.3. Methode des Circuits Couples (M2C) ..... - 59 -
II.3.1. Théorie Générale de la M2C ..... - 59 -
II.3.2. Interaction entre les Eléments de Circuits ..... - 60 -
II.3.3. Cas Axisymétrique ..... - 61 -
II.3.3.1. Expressions des Inductances Propres et Mutuelles ..... - 62 -
II.3.3.2. Modélisation du Noyau par des Densités Superficielles ..... - 63 -
II.3.4. Cas Cartésien ..... - 65 -
II.3.4.1. Expression des Inductances Propres et Mutuelles ..... - 65 -
II.4. Modele Thermique ..... - 67 -
II.4.1. Synthèse des Différents Echanges ..... - 67 -
II.4.2. Equations de Transfert de Chaleur ..... - 69 -
II.4.2.1. Conduction ..... - 69 -
II.4.2.2. Convection ..... - 70 -
II.4.2.3. Rayonnement ..... - 70 -
II.5. Couplage Electromagnetique et Thermique ..... - 71 -
II.6. Methodes de Resolution ..... - 71 -
II.6.1. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF) ..... - 71 -
II.6.2. Algorithme de Calcul ..... - 72 -
II.7. Conclusion ..... - 75 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.1. Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en évidence les problèmes liés à la présence de courants harmoniques engendrés par des charges non linéaires. L'étude phénoménologique de ces problèmes nous conduit à étudier l'interaction entre les ondes électromagnétiques et le transfert de chaleur au sein du transformateur. Nous présenterons, dans ce chapitre, les bases mathématiques des équations électromagnétiques et thermiques ainsi que le couplage entre celles-ci.

Différentes formulations ont été élaborées dans la littérature pour résoudre ces équations. Parmi ces formulations, nous exposerons celles qui sont les mieux adaptées à la modélisation des transformateurs.

Les effets de peau et de proximité sont les conséquences de champs induits dans une spire par elle-même ou par les spires voisines. Ces effets peuvent être exprimés sous la forme d'inductances propres et mutuelles à travers la méthode de circuits couplés (M2C). Nous développerons donc les méthodes de calcul de ces inductances pour différentes géométries de spires utilisées dans les transformateurs.

Puis nous présenterons de manière synthétique les différents échanges de chaleur intervenant dans un transformateur ainsi que les lois qui s'y réfèrent. Leur résolution utilisera la méthode des éléments finis, via un algorithme de couplage itératif avec le modèle électromagnétique retenu.

II.2. Modèles Electromagnétiques

Ces modèles décrivent les lois et le formalisme de l'interaction entre les ondes électromagnétiques et le matériau. Ce formalisme conduit souvent à des équations aux dérivées partielles nécessitant une méthode de résolution numérique [**Trowbridge-06**].

II.2.1. Equations Electromagnétiques

Les variations temporelles et spatiales des ondes électromagnétiques sont régies par les équations de Maxwell [**Fournet-93**]. Celles-ci s'appliquent sur les grandeurs électriques et magnétiques que sont : le champ magnétique **H**, le champ électrique **E**, l'induction magnétique **B**, le déplacement ou induction électrique **D**, les densités de courant **J** et les densités de charges électriques libres ρ_e.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.2.1.1. Equations de Maxwell

Les ondes électromagnétiques et plus généralement les lois de l'électricité sont régies par quatre lois locales fondamentales :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(Equation d'Ampère)} \qquad \text{(II.1)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Equation de Faraday)} \qquad \text{(II.2)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Equation de conservation du flux magnétique)} \qquad \text{(II.3)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \qquad \text{(Equation de Gauss : Conservation de charge électrique)} \qquad \text{(II.4)}$$

Si la densité de charge ρ_e est nulle, l'équation (II.4) est remplacée par la loi de conservation de courant exprimée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

Les relations constitutives des matériaux et les conditions de passage complètent ces équations.

II.2.1.2. Relations Constitutives des Matériaux

En considérant que les champs varient lentement dans le temps, ces relations se limitent aux premiers termes de leurs développements respectifs en série de Taylor :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \qquad \text{(II.6)}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B_r} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B_r} \qquad \text{(II.7)}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J_0} + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(II.8)}$$

ε, μ, σ représente respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du matériau. $\mathbf{B_r}$ représente l'induction rémanente due au cycle d'hystérésis et sera négligée de part la nature "douce" du matériau ferromagnétique utilisé dans les transformateurs. $\mathbf{J_0}$ est la densité de courant source.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.2.1.3. Conditions de Passage

Les grandeurs électromagnétiques pourraient être discontinues à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes. Les conditions de passage (ou de transmission) permettent alors d'exprimer les relations entre deux grandeurs $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ sur ces frontières.

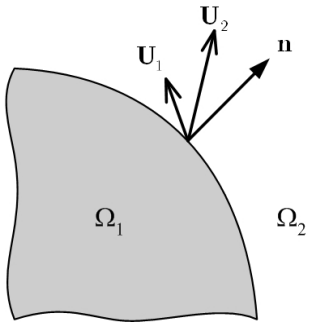


Figure II.1 – *Interface entre deux milieux*

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{D_2} - \mathbf{D_1}\right) = \rho_s \tag{II.9}$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{B_2} - \mathbf{B_1}\right) = 0 \tag{II.10}$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}\right) = 0 \tag{II.11}$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{H_2} - \mathbf{H_1}\right) = \mathbf{K_s} \tag{II.12}$$

$\mathbf{K_s}$ *et* ρ_s sont respectivement les densités de courant et de charges surfaciques et $\mathbf{n}$ la normale unitaire à l'interface orientée du milieu d'indice 1 vers celui d'indice 2 (figure II.1).

Pour $\mathbf{K_s}$ et ρ_s négligeable, les équations ci-dessus expriment une conservation des composantes normale ou tangentielle des champs associés à l'interface.

Au-delà des milieux traversés par les ondes, le domaine d'étude n'est pas infini et nécessite l'emploi de conditions supplémentaires à ses frontières.

II.2.1.4. Conditions aux limites spatiales et temporelles

Les valeurs d'un champ $\mathbf{U}$ aux frontières peuvent satisfaire principalement deux conditions simples, voire des formulations particulières [**Brunotte-91**]. Ainsi aux limites du

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

domaine, ce champ peut être soit normal (domaine symétrique) (II.13), soit de valeur connue (II.14), ce qui se traduit par :

$$\text{Condition de Neumann : } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \tag{II.13}$$

$$\text{Condition de Dirichlet : } \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{II.14}$$

Les conditions aux limites temporelles sont en général fixées à des valeurs nulles à l'instant initial.

II.2.1.5. Conditions de Jauge

Les relations constitutives des matériaux, les conditions de passage, ainsi que les conditions aux limites ne suffisent pourtant pas à assurer l'unicité d'une solution et l'utilisation de jauges est nécessaire à la résolution des équations de Maxwell.

Les champs intervenant dans les équations de Maxwell ne sont définis qu'à un gradient (champ à rotationnel), ou un rotationnel près (champ à divergence).

Selon la formulation retenue et le type d'éléments de discrétisation (MEF), certaines jauges sont alors préférables. Les principales jauges sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \qquad \text{(Jauge de Coulomb)} \tag{II.15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} + K \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{(Jauge de Lorentz)} \tag{II.16}$$

II.2.1.6. Régime Harmonique et Etat Quasi Stationnaire

Dans le cas des grandeurs sinusoïdales, l'opérateur de différentiation temporel, est remplacé par $j\omega$ et les équations d'Ampère (II.1) et de Faraday (II.2) se ramènent alors à la forme complexe suivante :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \tag{II.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \tag{II.18}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Dans notre problématique, les fréquences sont suffisamment faibles pour pouvoir négliger le courant de déplacement [**Koppikar-98**]. Ainsi, étant donné les matériaux employés dans la conception de transformateur, la condition de stationnarité $\omega << \sigma\varepsilon^{-1}$ est aisément vérifiée. La densité de courant est alors définie par la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{J} \approx \mathbf{J_0} + \sigma \mathbf{E} \tag{II.19}$$

Cette densité de courant **J** peut se décomposer en une densité source $\mathbf{J_0}$ imposée, à laquelle s'ajoute une densité induite $\mathbf{J_e}$ dans les matériaux conducteurs.

II.2.1.7. Bilan des Puissances Electromagnétiques

En conservant les hypothèses précédentes, multiplions la conjuguée de l'équation d'Ampère par **E,** ainsi que l'équation de Faraday par $\mathbf{H}^*$. En intégrant alors la différence entre ces deux équations dans le volume du domaine d'étude Ω, délimité par une surface fermée Γ, on obtient le bilan de puissance suivant :

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \mathbf{E}\mathbf{J}_0^* d\Omega}_{S_0} = \underbrace{\oiint_{\Gamma} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma}_{S_e} - \underbrace{\iiint_{\Omega} \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}^* d\Omega}_{P_J} - j\,\omega \underbrace{\iiint_{\Omega} \mu \mathbf{H}^* \mathbf{H}\, d\Omega}_{Q_f} \tag{II.20}$$

Dans cette équation, S_0, S_e, P_J *et* Q_f sont respectivement la puissance apparente émise par la source, celle échangée avec l'extérieur par le biais du flux associé au vecteur de Poynting, la puissance induite et dissipée par effet Joule et enfin la puissance réactive stockée dans le volume.

II.2.2. Différentes Formulations Electromagnétiques

Dans le cas général, le domaine de représentation d'un problème magnétodynamique est constitué (figure II.2) : d'un inducteur Ω_1 parcouru par une densité de courant $\mathbf{J_0}$, de région conductrice simplement connexe Ω_2, multiplement connexe Ω_3, ou de type mince Ω_4 et siège de courants induits. Il comporte également des régions ferromagnétiques isolantes simplement connexes (Ω_5) ou multiplement connexes (Ω_6) [**Egem-02a, 02b, 02c**].

Dans un transformateur toutes ces régions peuvent être présentes ou bien combinées.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

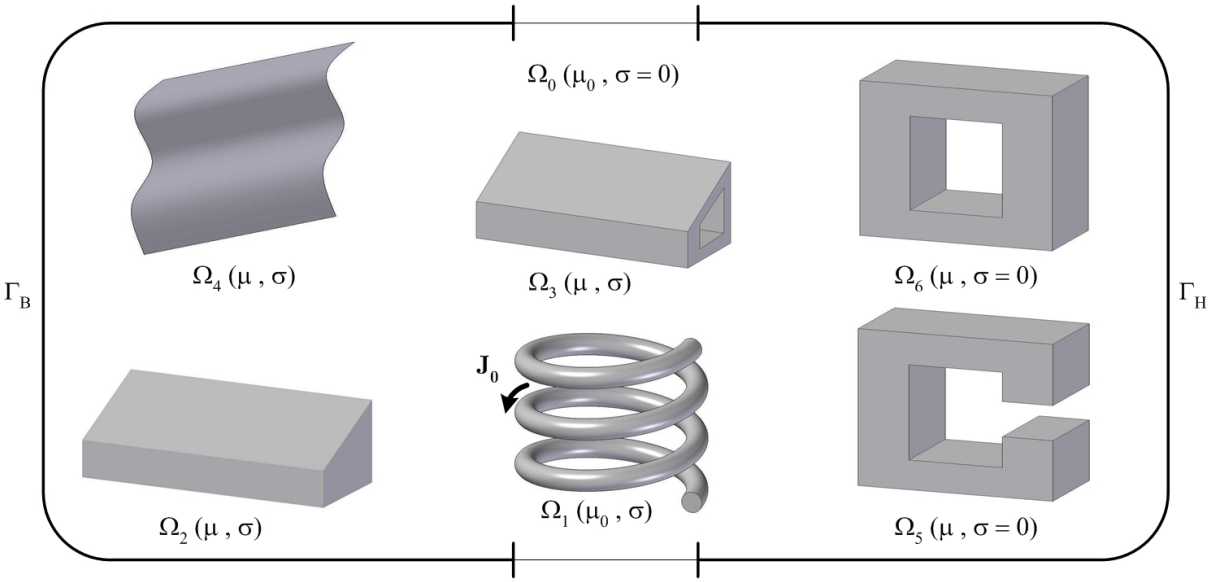


Figure II.2 – *Domaine d'étude générique d'un problème magnétodynamique*

Le domaine d'étude Ω englobe ces régions distinctes ainsi que celle du milieu environnant Ω_0. Il est notamment limité par des frontières Γ_B, Γ_H, sur lesquelles sont annulées respectivement la composante normale de l'induction magnétique et la composante tangentielle du champ magnétique.

La résolution du problème électromagnétique quasi stationnaire, dans le domaine Ω, nécessite le choix d'une formulation basée sur une grandeur caractéristique et en association avec les relations constitutives, les relations de passage, les conditions aux limites et les conditions de jauge [**Chari-93**].

On distingue deux catégories de formulations basées soit sur le champ électrique **E**, soit sur le champ magnétique **H**. La première catégorie inclut surtout la formulation en potentiel vecteur magnétique **A** et ses variantes. La deuxième catégorie comprend des formulations en **H** ou la formulation en **T**-Ω.

II.2.2.1. Formulation en Potentiel Vecteur Magnétique A *V*, A*

L'équation de conservation du flux (II.3) permet d'introduire le potentiel vecteur magnétique **A** tel que $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ [**Biro-89**]. Celui-ci est défini au gradient près d'un potentiel électrique *V*. L'utilisation des équations de Faraday et d'Ampère donne alors la formulation magnétodynamique recherchée [**Piriou-93**] :

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \mathbf{J_0} \tag{II.21}$$

Le couple de solution $\mathbf{A}$-V de cette équation n'est pas unique et tout couple $\mathbf{A'}$-V' l'est également pour u scalaire vérifiant :

$$\mathbf{A'} = \mathbf{A} + \nabla u \tag{II.22}$$

$$V' = V - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{II.23}$$

L'utilisation d'une jauge est implicite dans le cas bidimensionnel et permet d'assurer l'unicité de la solution. Dans le cas d'une résolution par les éléments finis d'arêtes, l'utilisation de l'algorithme du gradient conjuguée remplace l'utilisation de cette jauge [**Ren-96**], [**Kameari-97**].

Il est également possible de regrouper les deux inconnues, pour passer à une formulation en potentiel vecteur modifié ou $\mathbf{A}^*$:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \int \nabla V dt \tag{II.24}$$

II.2.2.2. Formulation en Champ Magnétique H

Cette formulation a été étudiée et développée par Bossavit pour l'étude des courants induits dans les dispositifs [**Bossavit-83**]. En négligeant l'induction électrique **D**, les lois (II.1) et (II.2) permettent d'aboutir à la formulation recherchée en champ magnétique **H** :

$$\nabla \times \left(\rho \nabla \times \mathbf{H} \right) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{II.25}$$

Cette formulation est duale de celle exprimée en champ électrique **E**.

II.2.2.3. Formulation en Potentiel Vecteur Electrique T - Ω

La loi de conservation du courant permet d'introduire le potentiel vecteur électrique **T**, tel que $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{T}$. En substituant dans (II.1), le champ magnétique **H** par l'expression suivante et en faisant intervenir un potentiel Ω :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla\Omega \tag{II.26}$$

On aboutit à l'expression caractéristique de la formulation **T-Ω**, pour laquelle le potentiel vecteur électrique **T** représente la combinaison d'un terme source $\mathbf{T_0}$ [**Bui-06**] et d'un terme induit $\mathbf{T_e}$ [**Biro-93b**], [**Preis-06**] :

$$\nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{T}) + \mu \frac{\partial (T - \nabla\Omega)}{\partial t} = 0 \tag{II.27}$$

II.2.2.4. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique ϕ_t, ϕ_r

Lorsqu'il n'existe aucune source de courant dans une région, le rotationnel du champ magnétique est nul (II.1), ce qui signifie que le champ dérive d'un potentiel scalaire magnétique [**Meunier-98**] :

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_t \tag{II.28}$$

Ce potentiel ϕ_t est alors dit "total" et l'équation à résoudre se déduit de (II.3) :

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \phi_t) = 0 \tag{II.29}$$

Pour tenir compte des courants sources dans une région [**Biro-93a**], le champ magnétique est décomposé en deux champs :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} - \nabla \phi_r \tag{II.30}$$

Où $\mathbf{H_0}$ est le champ source dans le vide ou l'air, calculé analytiquement par Biot et Savart (annexe B), numériquement [**Phung-05**], ou approchée par un profil simple [**Tsili-04**], [**Groh-05**].

ϕ_r est le potentiel scalaire magnétique "réduit" et l'équation à résoudre est :

$$\nabla \cdot (\mu (\mathbf{H_0} - \nabla \phi_r)) = 0 \tag{II.31}$$

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.2.2.5. Synthèse du Choix des Formulations

En fonction de la dimension et de la complexité du problème à traiter, le choix d'une formulation dépend des capacités numériques de résolution, de mise en œuvre et de précision (continuité des composantes normale et tangentielle, cf § II.2.1.3). Le tableau suivant recense les principaux avantages et inconvénients des différentes formulations présentés précédemment et pour un problème tridimensionnel [**Abakar-01**]. [**Guérin-94**].

Formulations	***Avantages***	***Inconvénients***
H	- Couplage aux équations de circuit	- Mise en œuvre, coûts (3 inconnues)
A V, **A***	- Traitement des régions multiplement connexes	- Coûts (4 ou 3 inconnues)
T-Ω	- Adapté aux régions conductrices	- Problèmes de régions multiplement connexes - Coûts (4 inconnues)
$\mathbf{H_0}$-ϕ_r	- Coûts (1 inconnue)	- Problèmes de régions multiplement connexes - Calcul nécessaire du champ source - Imprécisions pour μ grand
ϕ_t	- Coûts (1 inconnue)	- Problèmes de régions multiplement connexes - Couplage avec formulation en potentiel réduit

Table II.1 – *Synthèse des formulations magnétodynamiques*

Le couplage avec les équations de circuit permet l'imposition du courant ou de la tension, mais nécessite l'assemblage d'un système matriciel complémentaire [**Bouissou-94**], [**Henneron-06**].

Le transformateur est composé d'enroulements, du noyau et de tôles métalliques. Si on néglige les pertes par courant induits les tôles ou si celles-ci sont modélisées au moyen d'éléments coques [**Guérin-94**], il n'y a pas de région conductrice dans le domaine d'étude.

Dans ce cas et malgré les difficultés énoncées ci-dessus, la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit est très attractive et particulièrement dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle par la méthode des éléments finis nodaux.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.2.2.6. Prise en Compte de la Saturation du Circuit Magnétique

Les non linéarités se traduisent par une modification des relations constitutives des matériaux. Pour la perméabilité magnétique, celle-ci devient dépendante de l'induction ou du champ magnétique.

$$\mu = \mu\left(\|\mathbf{B}\|\right) \text{ ou } \mu = \mu\left(\|\mathbf{H}\|\right) \tag{II.32}$$

Dans ce cas, même si le champ magnétique est sinusoïdal, l'induction ne l'est pas. Il n'est donc pas possible de remplacer les dérivées temporelles par $j\omega$. La résolution de l'équation électromagnétique doit alors se faire en pas à pas dans le temps. Afin d'éviter de trop nombreuses itérations, il est néanmoins possible de conserver la notation complexe, en travaillant avec une courbe caractéristique du matériau dite "d'énergie équivalente".

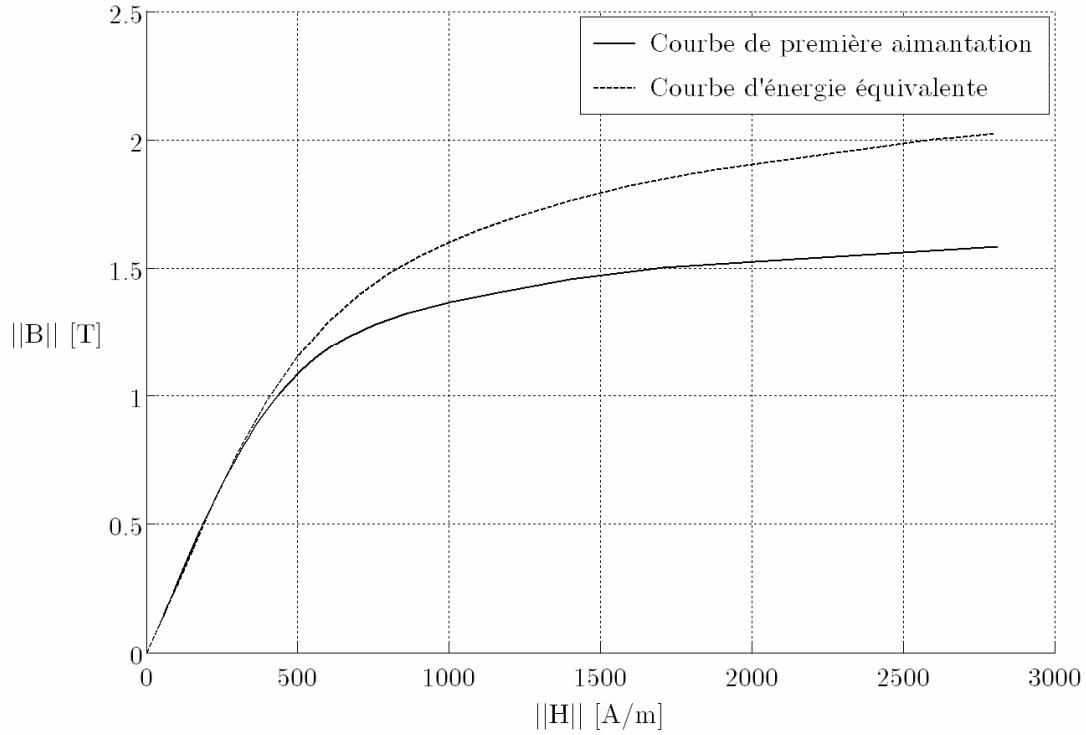


Figure II.3 – *Exemple de courbes de première aimantation et d'énergie équivalente*

Pour une excitation **H** sinusoïdale, celle ci s'obtient, à partir de la décomposition en série de Fourier de l'induction magnétique **B** [**Chauveau-01**] :

$$\left\|\mathbf{B}_{\mathbf{Wequi}}\right\| = \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} \left\|\mathbf{B}_{\mathbf{h}}\right\|^2} \tag{II.33}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le système d'équations non linéaires peut être résolu par plusieurs méthodes [**Egem-02b**]. Celle de Newton-Raphson a été choisie pour sa convergence rapide (annexe D).

II.3. Méthode des Circuits Couplés (M2C)

Cette méthode est très proche des considérations physiques et consiste à exprimer les effets inductifs propres et mutuelles entre de multiples spires et éventuellement le circuit magnétique. Pour des spires de géométrie simple, ces inductances sont calculées par des expressions analytiques.

La prise en compte du noyau est effectuée soit par des densités de courant fictives soit par une méthode numérique telle que celle des éléments finis (MEF). Dans ce dernier cas, la M2C est couplée à la formulation en potentiel scalaire magnétique, pour le calcul du champ source nécessaire à la formulation.

II.3.1. Théorie Générale de la M2C

Le principe de la M2C consiste à fractionner chaque conducteur d'une bobine de N spires (et/ou une charge) en n éléments distincts, à l'intérieur desquels la densité de courant est supposée constante. La discrétisation peut être régulière ou non, selon le type de conducteur, ses dimensions et l'épaisseur de peau dans celui-ci [**Chentouf-94**]. De manière générale, pour des spires de section quelconque, composées de conducteurs de section arbitraire, cette méthode se traduit par la figure suivante :

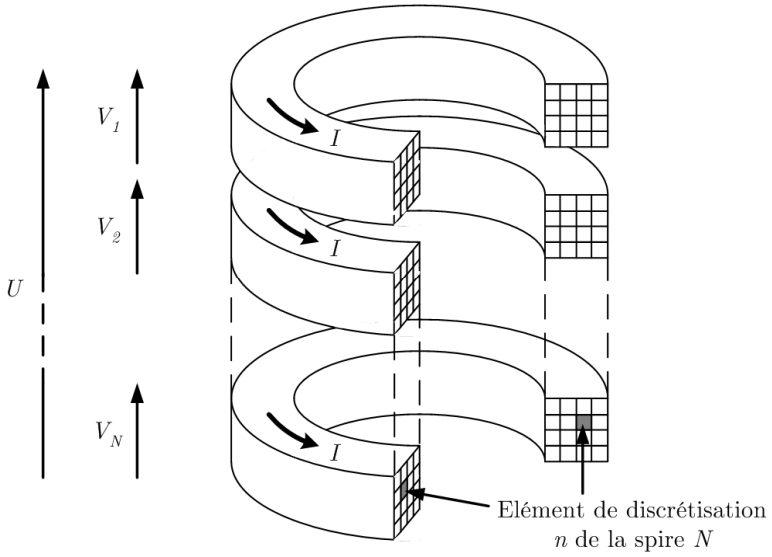


Figure II.4 – *Principe de la M2C : découpage en éléments inducteurs*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La globalité des spires élémentaires ainsi obtenues forme alors un système mutuellement couplé modélisable par un schéma électrique équivalent [**Delage-84**].

II.3.2. Interaction entre les Eléments de Circuits

En l'absence de circuit magnétique, le schéma électrique équivalent revient à un réseau associatif série-parallèle de résistances R et d'inductances propres L et mutuelles M.

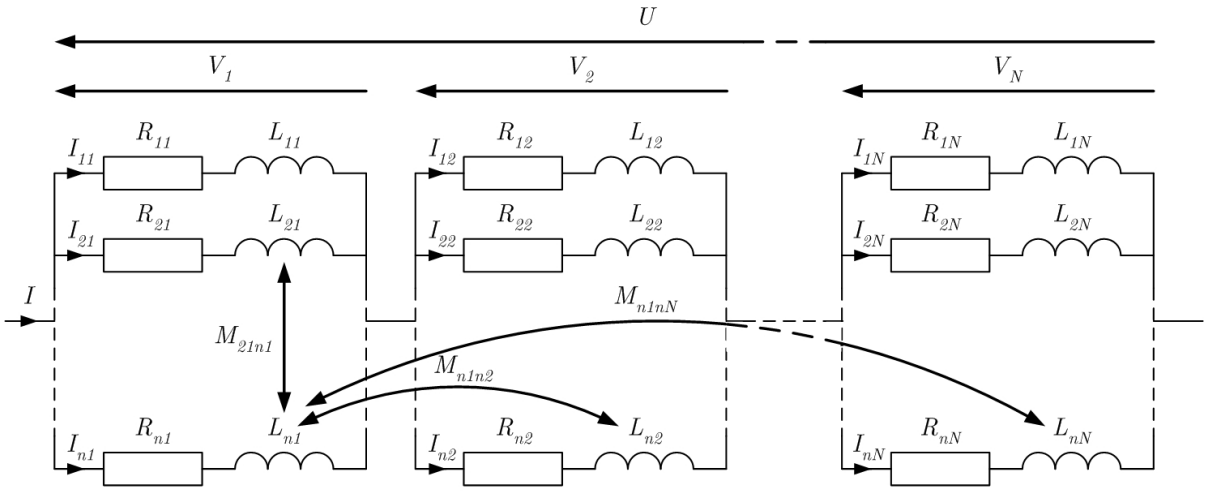


Figure II.5 – *Schéma électrique équivalent de la M2C*

Le système résultant est alors régi par nN équations différentielles du 1er ordre, liées au modèle du circuit RL et exprimées soit par rapport aux différents courants I_i, soit par rapport aux flux d'induction magnétique ψ (II.34). Si toutes les grandeurs mises en jeu sont de nature sinusoïdale, les différents opérateurs de différentiation temporelle sont alors remplacés par le coefficient $j\omega$. L'équation de circuit sur un élément récepteur k s'exprime alors en fonction des multiples autres éléments i :

$$V_k = R_k I_k + j\omega\left(L_k I_k + \sum_{i=1,\ i\neq k}^{nN} M_{k,i} I_i\right) = R_k I_k + j\omega \sum_{i=1}^{nN} \psi_{k,i} \qquad \text{(II.34)}$$

Il est également envisageable d'appliquer le principe de mutualité de la M2C à un réseau similaire prenant en compte les différentes capacités parasites entre les éléments [**Guo-01**].

Finalement, en introduisant le potentiel vecteur magnétique **A**, il est possible de remplacer ψ (II.34) par l'expression issue de l'application du théorème de Stoke :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\psi = \iint_S \mathbf{B}\mathbf{dS} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A}\mathbf{dS} = \oint_C \mathbf{A}\mathbf{dl} \tag{II.35}$$

Où **A** généré en un point m quelconque, par un inducteur filiforme, de longueur l parcouru par un courant I est calculé par la relation suivante :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\mathbf{dl}}{\|\mathbf{r}\|} \tag{II.36}$$

$||\mathbf{r}||$ représente la distance entre un point de l'inducteur et le point m.

Pour un courant unitaire, (II.34) à (II.36) fournissent alors une expression analytique directe des inductances propres et mutuelles dans le vide ou dans l'air. La présence d'un noyau ferromagnétique modifie cependant la valeur du flux magnétique et nécessite alors de le prendre en considération.

Dans la suite de cette présentation nous appliquerons la M2C à deux géométries de bobines : circulaire et rectangulaire.

II.3.3. Cas Axisymétrique

Considérons une spire filiforme, dans l'air ou le vide Ω_0, parcourue par un courant I et associée à un repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z).

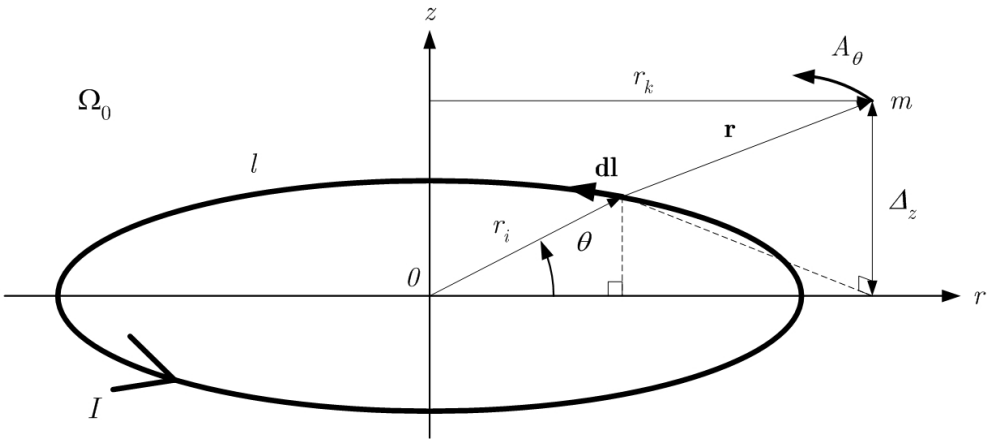


Figure II.6 – *Potentiel vecteur crée par une spire filiforme circulaire*

Le potentiel vecteur généré en m ne possède qu'une composante azimutale non nulle A_θ, dont l'expression est la suivante [**Durand-68**] :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I}{k\pi}\sqrt{\frac{r_i}{r_k}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\Im_1(k)-\Im_2(k)\right],\ \text{avec } k=\sqrt{\frac{4r_i r_k}{\left(r_i+r_k\right)^2+\Delta_z^2}} \qquad \text{(II.37)}$$

$\Im_1$ et $\Im_2$ sont respectivement les intégrales elliptiques de Legendre, de 1ère et de 2ème espèces.

II.3.3.1. Expressions des Inductances Propres et Mutuelles

Considérons le cas de la figure suivante, dans le vide (ou l'air), composé de deux spires circulaires coaxiales de rayon moyen r_1 et r_2. Celles-ci sont constituées de conducteurs de section circulaire et de rayon r_c.

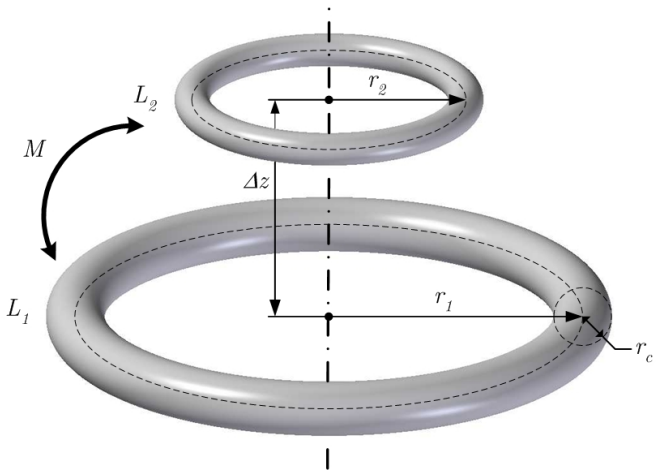


Figure II.7 – *Calcul d'inductances de spires circulaires et coaxiales*

L'inductance mutuelle M s'exprime par [**Durand-68**] :

$$M=\frac{2\mu_0\sqrt{r_1 r_2}}{k}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\Im_1(k)-\Im_2(k)\right]\ \text{avec } k=\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{\left(r_1+r_2\right)^2+\Delta z^2}} \qquad \text{(II.38)}$$

Tandis que l'inductance propre L_1 (et similairement L_2) est donnée par :

$$L_1=\mu_0 r_1\left[Ln\left(\frac{8r_1}{r_c}\right)-\frac{7}{4}\right] \qquad \text{(II.39)}$$

L'expression précédente est valide pour des conducteurs de section circulaire, mais peut également être envisagée pour des conducteurs de section carrée équivalente.

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Ainsi, une comparaison basée sur l'expression analytique (II.39) et un calcul numérique mené à partir de (II.35) et (II.36) montre que, pour un rayon moyen de spire relativement grand, cette approximation reste précise.

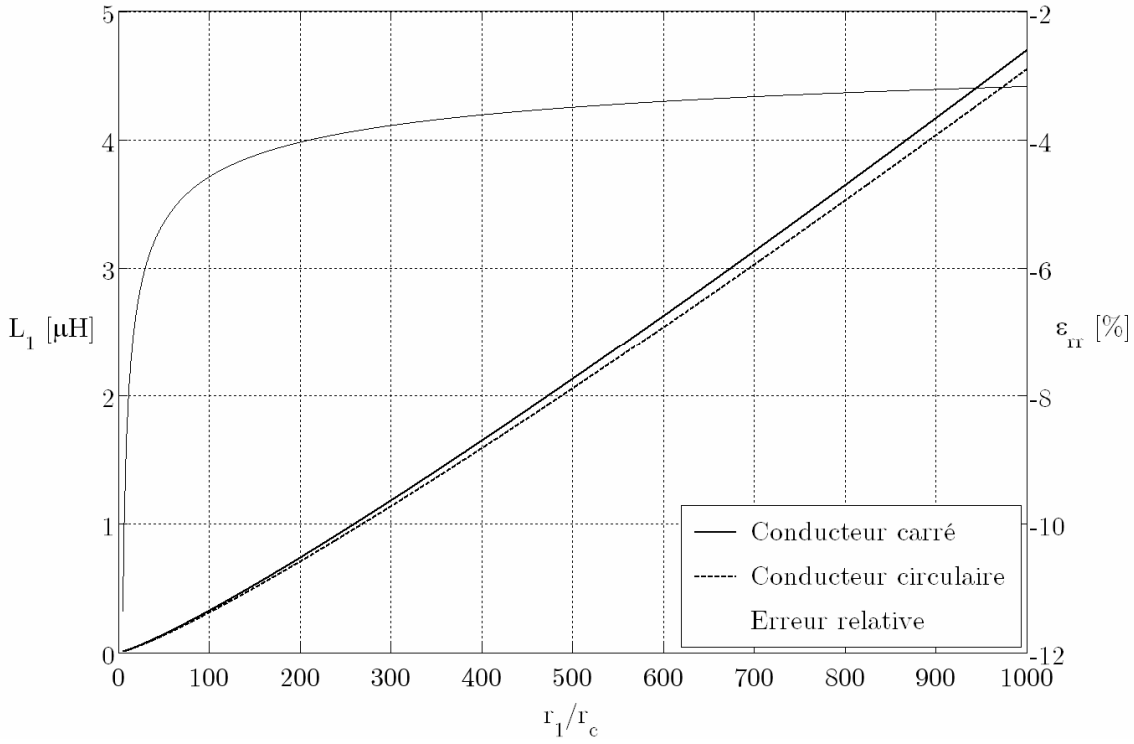


Figure II.8 – *Inductance propre d'une spire circulaire composée d'un conducteur carré, ou rond de section équivalente et erreur relative*

II.3.3.2. Modélisation du Noyau par des Densités Superficielles

La modélisation d'un circuit magnétique a été largement abordée par différents auteurs. Dans le cas des hautes fréquences, où le champ ne pénètre pas dans le noyau, Wilcox remplace celui-ci par une nappe de courant [**Wilcox-88**].

Pour le régime continu et les basses fréquences, il est remplacé par des densités de courant fictives, surfaciques [**DeLeon-92**], [**Kladas-94**] et éventuellement volumiques.

Afin de compléter le système d'équations initial, la solution retenue repose sur une vision similaire, s'appuyant sur un vecteur d'aimantation qui permet d'introduire à partir des conditions de passage (cf § II.2.1.3) des densités de courant fictives et superficielles sous une forme analytique.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Ainsi, soit le domaine de modélisation suivant dans le vide ou l'air Ω_0, issu du schéma générique de la M2C (figure II.4) et auquel on associe un repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z). Le domaine d'étude inclut des spires conductrices Ω_c et un noyau cylindrique Ω_f. Le courant véhiculé par le conducteur est caractérisé par une densité J_θ scalaire traversant la section Γ_c. Le noyau est lui délimité par sa surface extérieur Γ_f et caractérisé par sa perméabilité $\mu=\mu_r\mu_0$.

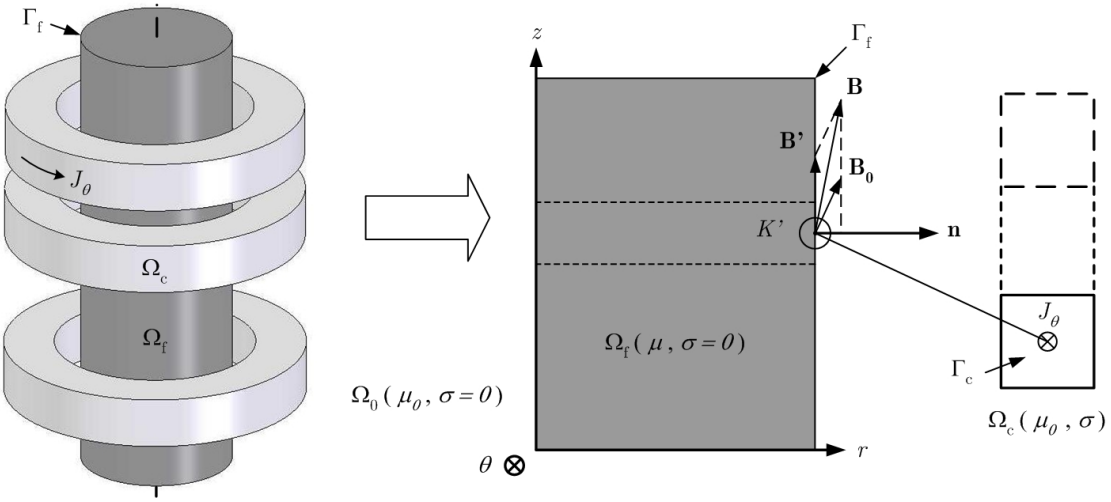


Figure II.9 – *Domaine de modélisation d'un noyau ferromagnétique par des densités superficielles et fictives de courant (M2C - cas axisymétrique)*

L'induction dans le circuit magnétique se décompose en un terme source $\mathbf{B_0}$ et un terme de magnétisation $\mathbf{B'}$. Le premier est généré par la densité J_θ tandis que le second est modélisable par des densités de courant fictives. Pour un circuit magnétique homogène et linéaire, ces densités de courant fictives sont uniquement superficielles. Dans ce cas, la relation entre l'induction $\mathbf{B_0}$ créée par la bobine sur l'interface Γ_f et la densité de courant fictives K' alors scalaire est donnée par une équation de type Fredholm de 2ème espèce :

.

$$\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\right)K'+\mathbf{n}\times\mathbf{B'}=-\mathbf{n}\times\mathbf{B_0} \qquad \text{(II.40)}$$

Dans le cas d'une spire circulaire, les composantes B_r et B_z de l'induction en un point m de la surface Γ_f sont données par les relations suivantes dérivées de (II.37) [**Durand-68**] :

$$B_r=\frac{\mu_0 k\Delta_z I}{4\pi r_i\sqrt{r_k r_i}}\left[-\Im_1(k)+\left(\frac{r_k^2+r_i^2+\Delta_z^2}{\left(r_k-r_i\right)^2+\Delta_z^2}\right)\Im_2(k)\right] \qquad \text{(II.41)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$B_z = \frac{\mu_0 k I}{4\pi\sqrt{r_k r_i}}\left[\Im_1(k) + \left(\frac{r_k^2 - r_i^2 - \Delta_z^2}{\left(r_k - r_i\right)^2 + \Delta_z^2}\right)\Im_2(k)\right] \quad \text{(II.42)}$$

Où Δ_z est l'écart suivant z entre le centre de la spire de rayon r_i et le point m de rayon r_k. Pour l'induction source $\mathbf{B_0}$, les deux composantes se calculent à partir de l'expression du courant I dans les conducteurs, tandis que pour l'induction de magnétisation **B'** (II.40) ce courant se substitue à une intégrale faisant intervenir la densité K'. Si on découpe le circuit magnétique en n_f segments élémentaires, les équations (II.40) à (II.42) fournissent autant d'équations permettant de calculer les densités de courant fictives K' et ainsi de compléter le système d'équations (II.34).

II.3.4. Cas Cartésien

La relation entre le flux magnétique et le potentiel vecteur **A** décrite en (II.35) permet également le calcul de l'inductance en espace libre pour le cas cartésien. Il est ainsi possible de distinguer les inductances propres et mutuelles de segments rectilignes et des cadres rectangulaires. Ces cas sont développés en détails dans l'annexe B. Nous présenterons dans ce chapitre uniquement les résultats de cadres rectangulaires.

II.3.4.1. Expression des Inductances Propres et Mutuelles

Considérons désormais deux cadres coaxiaux de sections rectangulaires et de côtés respectifs, a_1, b_1 et a_2, b_2 parallèles deux à deux.

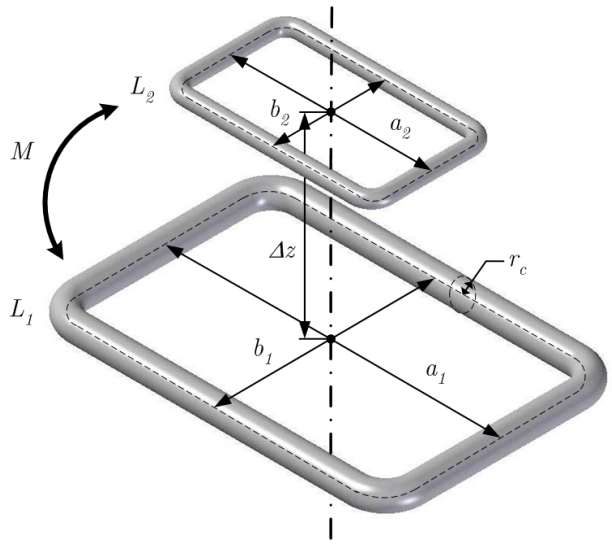


Figure II.10 – *Calcul d'inductances de cadres rectangulaires et coaxiaux*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Tout comme précédemment pour le cas axisymétrique, les conducteurs sont de section circulaire. En négligeant les arrondis aux quatre coins des rectangles, l'inductance mutuelle M entre ces deux cadres s'exprime par l'expression suivante :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\begin{array}{r} 8\left(U_1 - U_2 - V_1 + V_2\right) + \Delta a Ln\left(\frac{\left(2U_1 - \Delta a\right)\left(2U_2 + \Delta a\right)}{\left(2U_1 + \Delta a\right)\left(2U_2 - \Delta a\right)}\right) \\ - \Sigma a Ln\left(\frac{\left(2V_1 - \Sigma a\right)\left(2V_2 + \Sigma a\right)}{\left(2V_1 + \Sigma a\right)\left(2V_2 - \Sigma a\right)}\right) \\ + \Delta b Ln\left(\frac{\left(2U_1 - \Delta b\right)\left(2V_1 + \Delta b\right)}{\left(2U_1 + \Delta b\right)\left(2V_1 - \Delta b\right)}\right) \\ - \Sigma b Ln\left(\frac{\left(2U_2 - \Sigma b\right)\left(2V_2 + \Sigma b\right)}{\left(2U_2 + \Sigma b\right)\left(2V_2 - \Sigma b\right)}\right) \end{array}\right) \qquad \text{(II.43)}$$

avec $\Delta a = a_1 - a_2,\ \Delta b = b_1 - b_2,\ \Sigma a = a_1 + a_2,\ \Sigma b = b_1 + b_2$

et $U_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\Delta a^2 + \frac{1}{4}\Delta b^2 + \Delta z^2}$

$U_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\Delta a^2 + \frac{1}{4}\Sigma b^2 + \Delta z^2}$

$V_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma a^2 + \frac{1}{4}\Delta b^2 + \Delta z^2}$

$V_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma a^2 + \frac{1}{4}\Sigma b^2 + \Delta z^2}$

Tandis que celle de l'inductance propre L_1 est issue de l'application de la loi de Neumann :

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(4U - \frac{3}{2}\left(a_1 + b_1\right) + a_1 Ln\left(\frac{9a_1^2\left(U - a_1\right)}{16r_c^2\left(U + a_1\right)}\right) + b_1 Ln\left(\frac{9b_1^2\left(U - b_1\right)}{16r_c^2\left(U + b_1\right)}\right)\right) \qquad \text{(II.44)}$$

avec U=$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

La prise en compte du circuit magnétique par des densités de courant fictives est beaucoup plus difficile et coûteuse pour le cas cartésien (3D), particulièrement si la non linéarité du circuit est modélisée. Nous lui avons donc préféré une méthode de modélisation numérique basée sur les lois de l'électromagnétisme et adoptant la formulation retenue en potentiel scalaire magnétique (cf § II.2.2.5).

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.4. Modèle Thermique

Pour une classe d'isolation donnée, la température du point chaud limite la puissance du transformateur. Il est donc important d'évaluer cette température le plus précisément possible et donc pour cela d'étudier les modes de refroidissement intervenant.

II.4.1. Synthèse des Différents Echanges

Les différents échanges thermiques s'effectuent par conduction, convection ou rayonnement et diffèrent sensiblement selon la gamme et le type de transformateur. La figure suivante illustre de manière générique, les contraintes de refroidissement associées à des transformateurs de type sec. Ce schéma synoptique est en toute rigueur différent pour chaque transformateur selon sa géométrie, les matériaux employés et ses diverses autres spécificités. Il permet cependant de localiser les différents échanges et de mieux cerner les problèmes de refroidissement et de modélisation liés aux détails conceptuels.

Tout d'abord, les transferts de chaleur par conduction interviennent majoritairement dans le noyau ferromagnétique, les enroulements ainsi que les diverses parties métalliques ou isolantes. Les propriétés conductrices dans ces différents milieux hétérogènes sont anisotropes. Le noyau ferromagnétique (**A**) feuilleté présente une bonne conductivité thermique dans le sens du laminage et plus faible pour sa direction transversale. Les conducteurs (cuivre ou aluminium) (**B**) sont quant à eux généralement imprégnée, voire complètement noyés dans une résine de maintien diélectrique **[Jaytener-96], [Garcia-02]**. Celle-ci est chargée (Silice) pour améliorer sa conductivité thermique, mais reste globalement isolante. Le vernis/émail entourant les fils réduit lui aussi les échanges. L'emploi de canaux de ventilation est donc bien souvent nécessaire à un refroidissement efficace.

Dans ces zones (**D**), l'air devient le vecteur de diffusion permettant d'extraire par convection les calories engendrées. Pour les espaces "minces", la circulation de l'air est rendu difficile par sa viscosité. Par conséquence et à moins d'utiliser des systèmes de ventilation forcée, l'extraction des déperditions est atténuée. L'air devient alors très isolant ce qui a pour conséquence l'augmentation de la température des enroulements. Ces effets néfastes, peuvent intervenir entre des couches d'enroulements trop proches (**E**), entre les enroulements et le noyau (**F**), ou encore entre le noyau ou les bobinages et la tôle du boîtier (**G**). Cette même tôle (**I**), atténue de plus l'écoulement global à l'intérieur du transformateur et ce malgré l'utilisation d'ouïes de refroidissement (**H**).

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

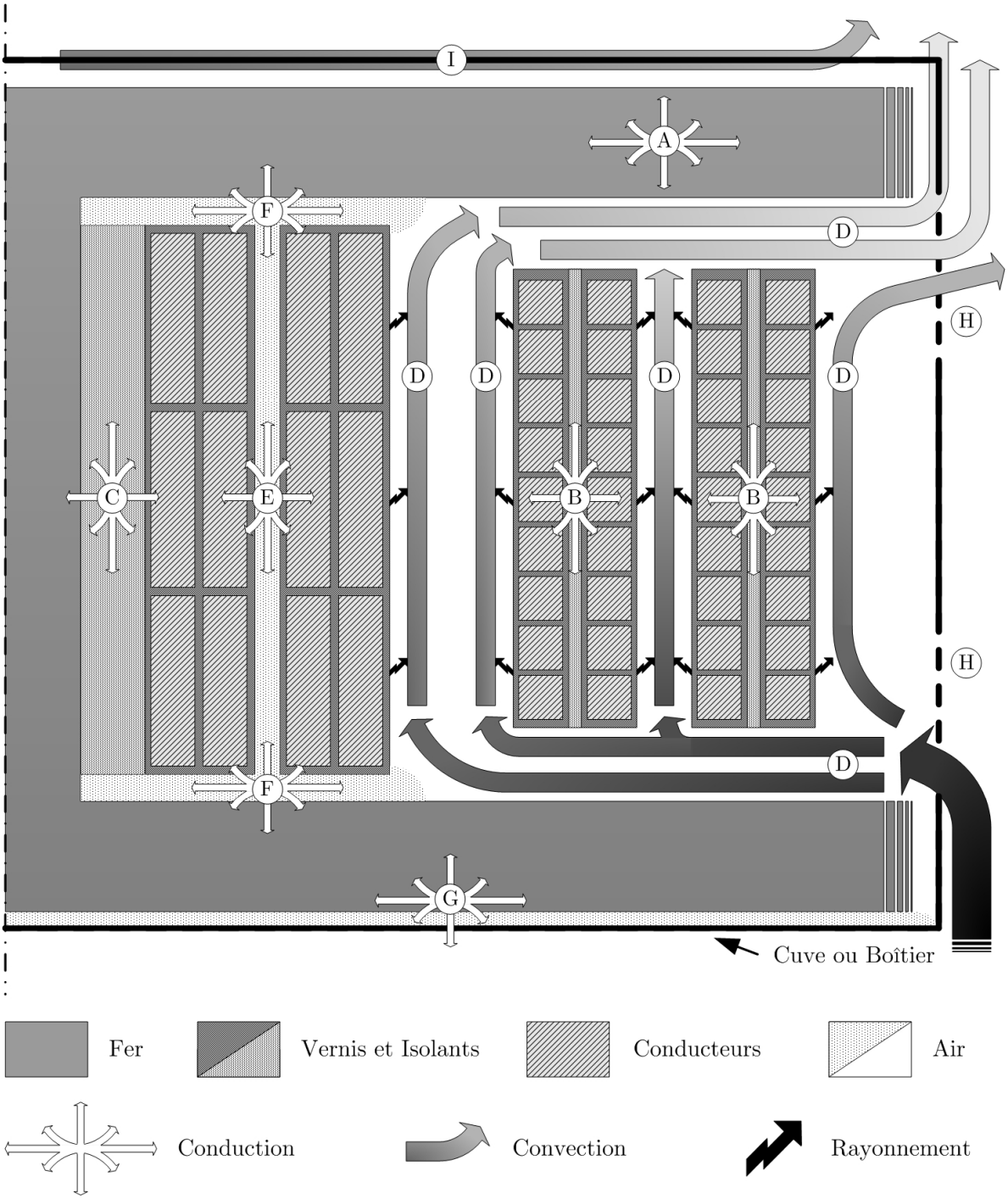


Figure II.11 – *Echanges thermiques dans un transformateur de type sec* (*Cas général*)

L'utilisation des lois mathématiques et des corrélations expérimentales régissant ces phénomènes, ainsi que la prise en compte des conditions aux limites du domaine de modélisation permet le calcul de la distribution de la température.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.4.2. Equations de Transfert de Chaleur

Etant donnée la gamme de températures dans laquelle se situe le point de fonctionnement des transformateurs, les échanges thermiques [**Thureau-01**], [**Özisik-85**], sont majoritairement dus aux phénomènes de conduction et de convection.

Le rayonnement n'est alors signifiant que pour des points chauds mais intervient mathématiquement dans la formulation des conditions aux limites.

II.4.2.1. Conduction

La conduction correspond à un transfert de chaleur, par un flux de puissance φ_{cd}, entre deux points d'un solide soumis à un gradient de température T non nul. L'équation de Fourier régit ce phénomène :

$$\varphi_{cd} = -\lambda \nabla T \tag{II.45}$$

λ représente la conductivité thermique et peut être scalaire, vectorielle, ou tensorielle. Le bilan énergétique local est donné par l'équation aux dérivées suivantes :

$$\nabla \cdot \varphi_{cd} + p = m_v C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{II.46}$$

p est la densité volumique de perte dans le matériau, m_v la masse volumique et C_p la chaleur massique à pression constante.

Cette équation exprime la relation entre la chaleur générée par les pertes dans le matériau et l'élévation de température résultante.

Nous considérerons par la suite que les charges ne sont pas intermittentes et nous nous intéresserons donc uniquement à la solution de l'équation en régime permanent, obtenue à l'équilibre thermique du transformateur (température maximale). L'équation à résoudre devient alors :

$$-\nabla \cdot \varphi_{cd} = p \tag{II.47}$$

Cette équation doit être complétée par les conditions aux limites qui sont dans notre cas dues à la convection et au rayonnement.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.4.2.2. Convection

Le transfert de chaleur par convection est assimilable à un phénomène de conduction entre deux milieux dont au moins un est un fluide en mouvement. Celui-ci s'effectue par mélange et relève de phénomène physique très complexe à l'interface entre les deux milieux [**Bensmaia-93**]. Dans nos études thermiques, nous nous sommes limités à des transformateurs secs refroidis par une convection naturelle. Dans ce cas, le mouvement vertical ascendant de l'air provient de la variation de la masse volumique en fonction de la température. Le flux de chaleur φ_{cv} à travers une paroi se calcule par :

$$\varphi_{cv} = h_{cv}\left(T_\Gamma - T_\infty\right)\cdot \mathbf{n} \tag{II.48}$$

Où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire à l'interface, T_Γ la température à la surface d'échange, T_∞ la température ambiante du fluide loin de cette surface et h_{cv} le coefficient d'échange convectif obtenu par des formulations semi-empiriques.

II.4.2.3. Rayonnement

Le rayonnement est un échange d'énergie par ondes électromagnétiques, considéré du point de vue thermique comme un flux de chaleur φ_{ray}. La longueur d'onde de ce rayonnement se situe dans les spectres des infrarouges. L'équation caractéristique est donnée par la loi :

$$\varphi_{ray} = C_\Gamma \varepsilon_\Gamma \sigma_{SB}\left(T_\Gamma^4 - T_\infty^4\right)\cdot \mathbf{n} \tag{II.49}$$

σ_{SB} désigne la constante de Stephan-Boltzmann et ε_Γ désigne l'émissivité. Celle-ci dépend de la nature et de l'état de surface du matériau émetteur. Le facteur de vue C_Γ permet de modérer l'échange par rayonnement, par exemple pour des parois en vis-à-vis [**Fernandes-Costa-92**].

Pour des températures faibles à modérées, l'équation de rayonnement peut également s'écrire en fonction d'un terme différentiel identique à celui de l'équation de convection (II.48). Un coefficient d'échange global à l'interface h_Γ peut alors être employé, tenant compte à la fois des phénomènes de convection et de rayonnement :

$$\varphi_\Gamma = \varphi_{cv} + \varphi_{ray} = h_\Gamma\left(T_\Gamma - T_\infty\right)\cdot \mathbf{n},\ \text{avec}\ h_\Gamma = h_{cv} + C_\Gamma \varepsilon_\Gamma \sigma_{SB}\left(T_\Gamma + T_\infty\right)\left(T_\Gamma^2 + T_\infty^2\right) \tag{II.50}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.5. Couplage Electromagnétique et Thermique

La résistivité ρ d'un matériau conducteur (cuivre ou aluminium) intervient dans le calcul des résistances et varie linéairement pour des températures faibles à modérées :

$$\rho(T) = \frac{1}{\sigma(T)} = \rho_0 (1 + \alpha T) \tag{II.51}$$

ρ_0 est la résistivité du matériau à 0°C et α est le coefficient de température du matériau soit 3.93×10^{-3} pour le cuivre et 4.03×10^{-3} pour l'aluminium.

La source d'échauffement dans l'équation de la chaleur (II.47) provient des pertes dans le transformateur (I.1), (I.3), (II.19), (II.20) et fait aussi intervenir cette résistivité :

$$p = \rho(T) \|\mathbf{J}\|^2 + P_f + P_{vagabondes} \tag{II.52}$$

Dans notre étude, les pertes vagabondes seront négligées.

Les deux équations électromagnétique et thermique sont donc fortement couplées. Une méthode itérative est donc nécessaire pour le calcul de la distribution de température.

II.6. Méthodes de Résolution

Dans les procédés possédant des géométries simples, la résolution des équations électromagnétique et thermique peut être effectuée analytiquement. Le modèle paramétrique réduit est alors caractérisé par des résistances et des capacités mais ne permet pas l'évaluation précise du point chaud pour une géométrie réelle de transformateur [**Swift-01a**,**01b**]. On a alors recours à des méthodes numériques. La méthode des différences finies aurait pu être envisagée ici, mais reste très contraignante à adapter à la géométrie [**Pierce-94a**], [**Dianchun-00**] et particulièrement en trois dimensions. Nous lui avons donc préféré la MEF nodaux, étant donné que les inconnues sont scalaires à la fois dans les équations électromagnétique et thermique.

II.6.1. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF)

La résolution analytique des équations de Maxwell n'est possible que dans certaines configurations simples [**Urling-89**]. Dans la majorité des cas, il convient de faire appel à des méthodes de résolutions numériques comme celle des éléments finis (MEF) [**Jin-93**],

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Bastos-93**], [**Sabonnardiere-88**]. Née de la mécanique, la méthode des éléments finis est aujourd'hui couramment employée pour la résolution des problèmes caractérisés par des équations aux dérivées partielles, comme celle des ondes électromagnétiques qui nous intéresse plus particulièrement.

Le principe bien connu de la méthode est de discrétiser le domaine d'étude en de multiples éléments puis de résoudre localement, dans chacun de ceux-ci, les équations associées à la formulation retenue. Les inconnues élémentaires sont alors définies par une combinaison linéaire, pondérée par des polynômes d'interpolation. La précision du calcul est liée à la finesse du maillage et au degré de ces polynômes. Leurs coefficients ne dépendent que de la géométrie et de sa discrétisation. Finalement, on obtient après assemblage un système matriciel d'équations, pouvant tenir compte de certaines non linéarités, comme celle intervenant dans le noyau ferromagnétique.

II.6.2. Algorithme de Calcul

A partir de la décomposition fréquentielle du courant I consommé par une charge non linéaire, un premier modèle électromagnétique vise à déterminer, pour chaque fréquence, la distribution des densités de courant dans les conducteurs.

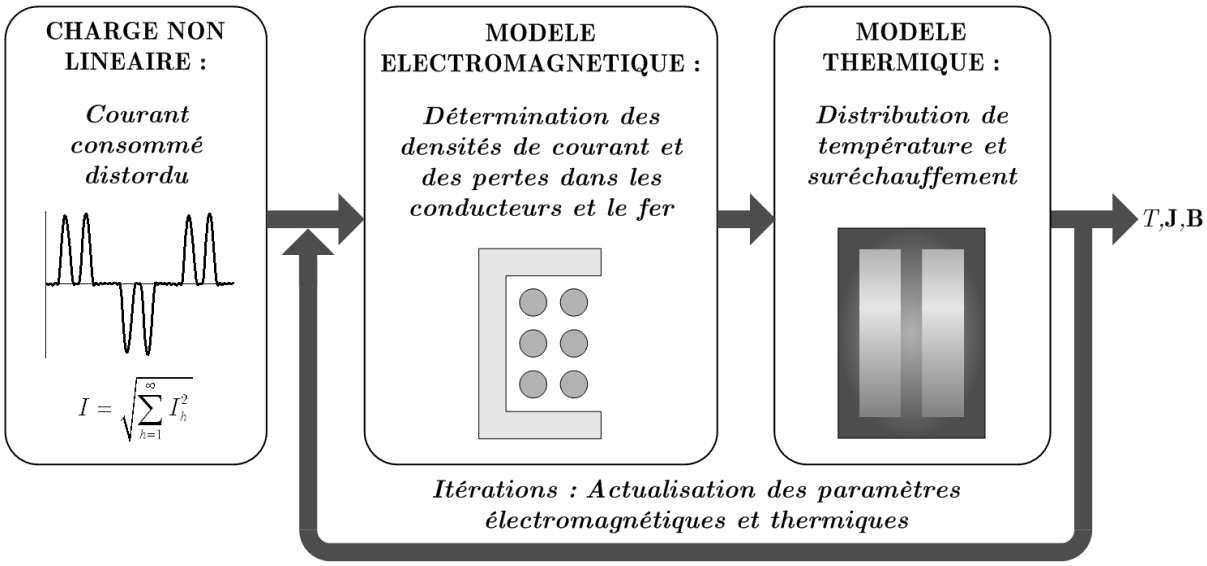


Figure II.12 – *Schéma synoptique de la problématique d'étude*

Le balayage du spectre permet alors le calcul des pertes totales [**Paun-99**] à injecter dans le modèle thermique, pour évaluer la distribution de température au sein des

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

enroulements. Les paramètres physiques tels que la résistivité ρ du matériau conducteur, mais également les différents coefficients d'échange thermique sont alors actualisés, avant de réitérer l'emploi du modèle électromagnétique puis thermique jusqu'à convergence vers un état d'équilibre.

Mis à part le calcul de la température dans les enroulements, le système complet permet également d'obtenir la variation fréquentielle et thermique de leur impédance interne, ainsi que la distribution des flux fuites ou du champ magnétique dans le noyau.

La résolution du problème d'étude nécessite donc deux boucles itératives distinctes. Une première interne et indexée sur les rangs harmoniques s'applique au modèle électromagnétique. Une seconde externe et moins contraignante assure le couplage avec les équations thermiques. La mise en œuvre de cette double itération est présentée dans l'organigramme détaillé qui suit (figure II.13).

Il apparaît cependant clairement que, la limitation du spectre à une bande de fréquence raisonnable, ainsi que la réduction des inconnues du problème électromagnétique permet de diminuer le nombre d'utilisation du modèle électromagnétique et donc la durée de calcul.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

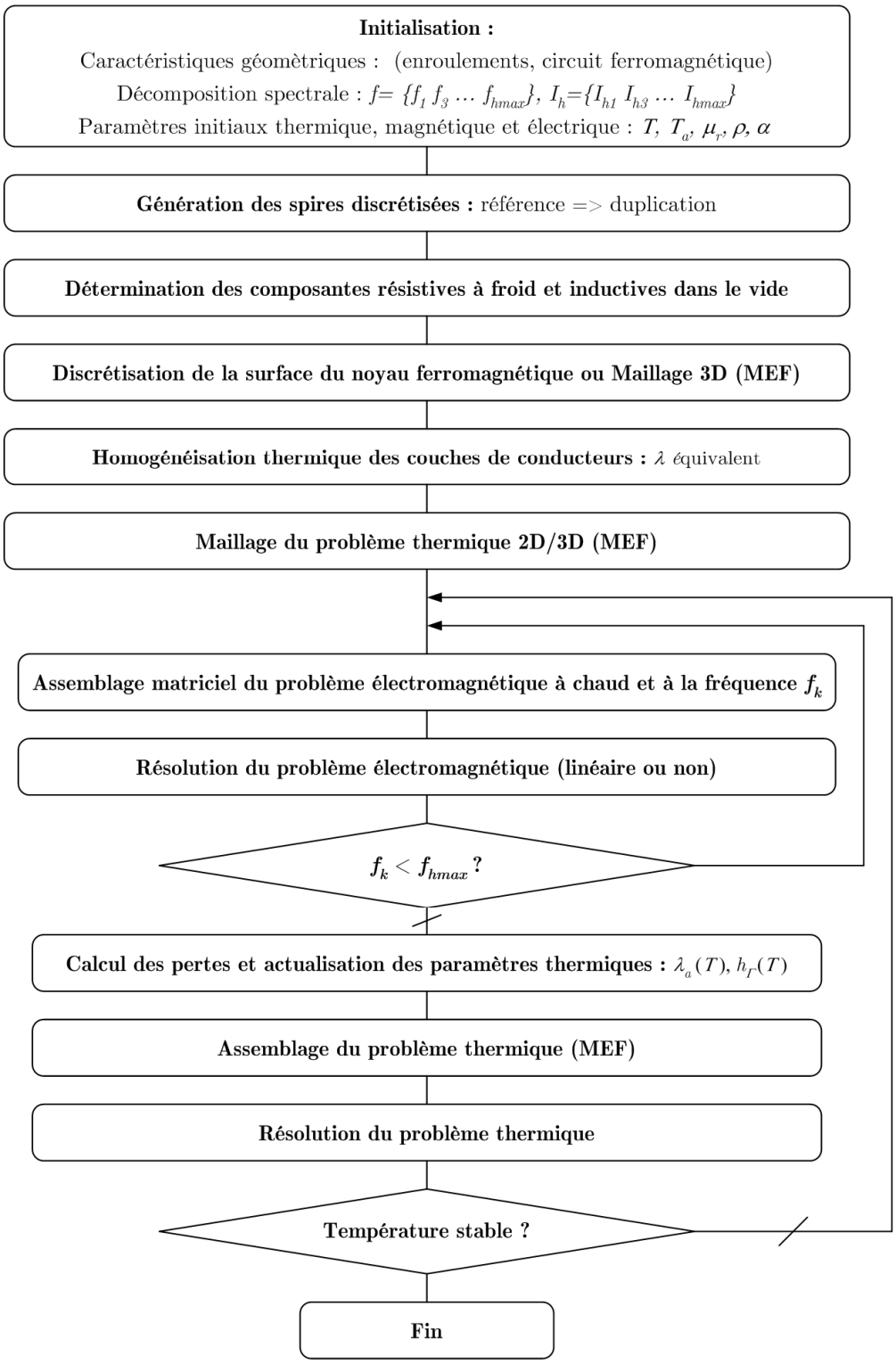


Figure II.13 – *Algorithme de résolution magnétothermique*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

II.7. Conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre à la fois les lois fondamentales de l'électromagnétisme et la méthode des circuits couplés. Pour les cas axisymétrique et cartésien les expressions introduites permettent la détermination des inductances propres et mutuelles.

La modélisation du circuit magnétique est possible analytiquement par l'utilisation de densités superficielles et fictives de courant pour un cas axisymétrique. Un calcul numérique s'appuyant sur un potentiel scalaire magnétique est fortement préférable pour le cas cartésien.

Les lois régissant les transferts de chaleur par conduction, convection et rayonnement se prêtent elles aussi mal à une résolution analytique. L'utilisation de la MEF sera donc systématiquement employée. La complexité de la géométrie et l'absence de symétrie globale dans le transformateur nécessitent alors un calcul tridimensionnel. Néanmoins, un modèle approché peut éventuellement être envisagé pour réduire les coûts algorithmiques.

Tous ces outils vont désormais être utilisés pour le calcul de la distribution des densités de courant dans les bobinages de transformateurs soumis à des courants non sinusoïdaux puis pour la caractérisation du suréchauffement résultant.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Chapitre III

Modelisation par la Methode des Circuits Couples

MODELISATION PAR LA METHODE DES CIRCUITS COUPLES

III.1. INTRODUCTION ..... - 80 -
III.2. HYPOTHESES DE MODELISATION ..... - 81 -
III.2.1. Tension d'Alimentation et Couplage Harmonique ..... - 81 -
III.2.2. Influence des Enroulements Voisins ..... - 81 -
III.2.3. Etude de la Gamme de Fréquence ..... - 82 -
III.3. MODELISATION DES ENROULEMENTS ..... - 84 -
III.3.1. Discrétisations des Conducteurs ..... - 85 -
III.3.2. Application de la Méthode des Circuits Couplés (M2C) ..... - 86 -
III.3.2.1. Equations Caractéristiques en Axisymétrique ..... - 86 -
III.3.2.2. Extension au Bobinage Complet ..... - 87 -
III.3.3. Prise en Compte de la Source ..... - 88 -
III.3.3.1. Formulation en Alimentation en Tension ..... - 88 -
III.3.3.2. Formulation sur Sources de Courant ..... - 90 -
III.4. PRISE EN COMPTE DU CIRCUIT MAGNETIQUE ..... - 91 -
III.4.1. Modélisation par Densités Superficielles de Courant ..... - 91 -
III.4.1.1. Le Noyau en Approximation Axisymétrique ..... - 91 -
III.4.1.2. Equation Caractéristique en Axisymétrique ..... - 92 -
III.4.2. Assemblage Matriciel Complet sur Sources de Courant ..... - 94 -
III.4.3. Optimisation de la Discrétisation ..... - 94 -
III.4.3.1. Application aux Conducteurs de Section Circulaire ..... - 95 -
III.4.3.2. Application aux Conducteurs de Section Rectangulaire ..... - 97 -
III.4.3.3. Conservation de Courant dans les Spires ..... - 100 -
III.4.3.4. Influence de la Finesse de Discrétisation sur le Noyau ..... - 101 -
III.5. COUPLAGE AUX EQUATIONS THERMIQUES ..... - 102 -
III.5.1. Hypothèses de Modélisation ..... - 102 -
III.5.1.1. Homogénéisation des Couches d'Enroulements ..... - 102 -
III.5.1.2. Equation de Thermique en Axisymétrique ..... - 104 -
III.5.1.3. Modélisation du noyau ..... - 104 -
III.5.2. Choix des Paramètres ..... - 105 -
III.5.2.1. Conductivité Thermique ..... - 105 -
III.5.2.2. Vérification sur un Cas Simple ..... - 108 -
III.5.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs ..... - 109 -
III.5.2.4. Prise en Compte du Rayonnement ..... - 112 -
III.5.3. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF) ..... - 113 -
III.5.3.1. Méthodologie de Maillage ..... - 113 -
III.5.3.2. Assemblage Matriciel pour Résolution par MEF ..... - 115 -
III.6. VALIDATIONS EXPERIMENTALES ..... - 116 -
III.6.1. Présentation du Banc d'Essai ..... - 116 -
III.6.2. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable ..... - 118 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.6.2.1. Influence du Nombre de Cale ..... *- 121 -*
III.6.3. Essais d'Echauffements ..... - 122 -
III.6.3.1. Essais Linéaires ..... *- 122 -*
III.6.3.2. Essais Non Linéaires à Echauffement Equivalent ..... *- 123 -*
III.7. CONCLUSION ..... - 126 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.1. Introduction

Le couplage fort entre les équations électromagnétique et thermique rend difficile la résolution simultanée ou itérative du système étudié. Dans une phase de conception préliminaire une évaluation approximative et rapide des pertes et de la distribution de température est préférable. En effet, dans cette phase, il est nécessaire d'effectuer un nombre important de calcul pour étudier l'influence des différents paramètres sur les performances du transformateur. Dans ce cas, un calcul 3D devient très vite pénalisant.

Nous présenterons dans ce chapitre certaines hypothèses simplificatrices qui permettent de réduire le temps de calcul de l'algorithme de résolution. Ces hypothèses seront ensuite appliquées aux transformateurs de type sec, possédant des bobinages à symétrie de révolution ou presque et dont les conducteurs sont de sections circulaires ou rectangulaires (méplat ou feuillard). L'utilisation de la M2C présentée précédemment, nécessite pour cela une discrétisation efficace des conducteurs afin de limiter les dimensions du système matriciel résultant.

La modélisation du noyau s'appuiera sur l'introduction des densités superficielles et fictives de courant et nécessite un découpage surfacique suffisant. Afin de pouvoir utiliser les formulations associées au cas axisymétrique, le circuit magnétique est alors transformé en un noyau axisymétrique équivalent du point de vue magnétique. Finalement la considération de contraintes de conservation en courant et tension permet l'assemblage du système matriciel électromagnétique complet nécessaire au calcul de la distribution des densités de courant et donc des pertes Joule dans les conducteurs.

Les différentes couches d'enroulement sont par la suite homogénéisées du point de vue thermique et deviennent la base géométrique nécessaire à la résolution des équations de la chaleur par MEF. Si une modélisation tridimensionnelle reste préférable, l'emploi d'une approche alternative sur un cas bidimensionnel, permet de s'affranchir d'un processus de résolution long et fastidieux.

Le calcul de la distribution de température est alors comparé aux résultats expérimentaux. Ceux-ci ont été obtenus lors de séances d'essais effectués au sein du laboratoire d'électrotechnique de l'école polytechnique de Montréal (Canada). Le banc d'essai innovant mis en œuvre a permis la réalisation de tests à fréquence variable et l'émulation de charge non linéaire via une réinjection de la puissance consommée sur le réseau électrique.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.2. Hypothèses de Modélisation

Les hypothèses simplificatrices pour la résolution d'un algorithme sont toujours basées sur les phénomènes physiques et la géométrie du dispositif. Cependant, ces hypothèses ne doivent en aucun cas altérer la précision de calcul visée.

Dans le cas des transformateurs nous avons employé trois hypothèses majeures.

III.2.1. Tension d'Alimentation et Couplage Harmonique

Pour simplifier le calcul, nous avons négligé la recombinaison harmonique et supposé que la tension d'alimentation du transformateur est parfaitement sinusoïdale [**Miègeville-99**]. Cette hypothèse se justifie par une puissance de court-circuit forte du réseau amont et par la garantie du producteur (EDF ou Hydro-Québec dans notre cas) de disposer d'une source peu perturbée.

Pour une tension sinusoïdale, les pertes fer supplémentaires n'existent plus et on peut alors les évaluer à la fréquence fondamentale.

Les pertes Joule dans les enroulements seront calculées à partir de la décomposition spectrale du courant absorbé par la charge non linéaire (cf § II.6.2). Les effets de peau et de proximité provoquant les pertes additionnelles seront alors modélisés pour chaque rang harmonique.

Comme pour la majorité des études déjà menées sur cette problématique, nous négligerons tout couplage électromagnétique entre des harmoniques de rangs différents.

III.2.2. Influence des Enroulements Voisins

Pour une spire donnée, les effets mutuels sont essentiellement dus aux spires situées sur la même colonne. Cette hypothèse est vérifiable par le calcul, mais pour la démontrer en pratique, des essais de court-circuit ont été réalisés sur un transformateur triphasé à colonne de 10kVA (annexe F).

La fréquence de la tension d'alimentation varie de quelques dizaines de Hz à plusieurs kHz. La figure III.1 montre la variation de l'impédance de court-circuit de la colonne centrale en fonction de la fréquence et vue du côté du bobinage primaire.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

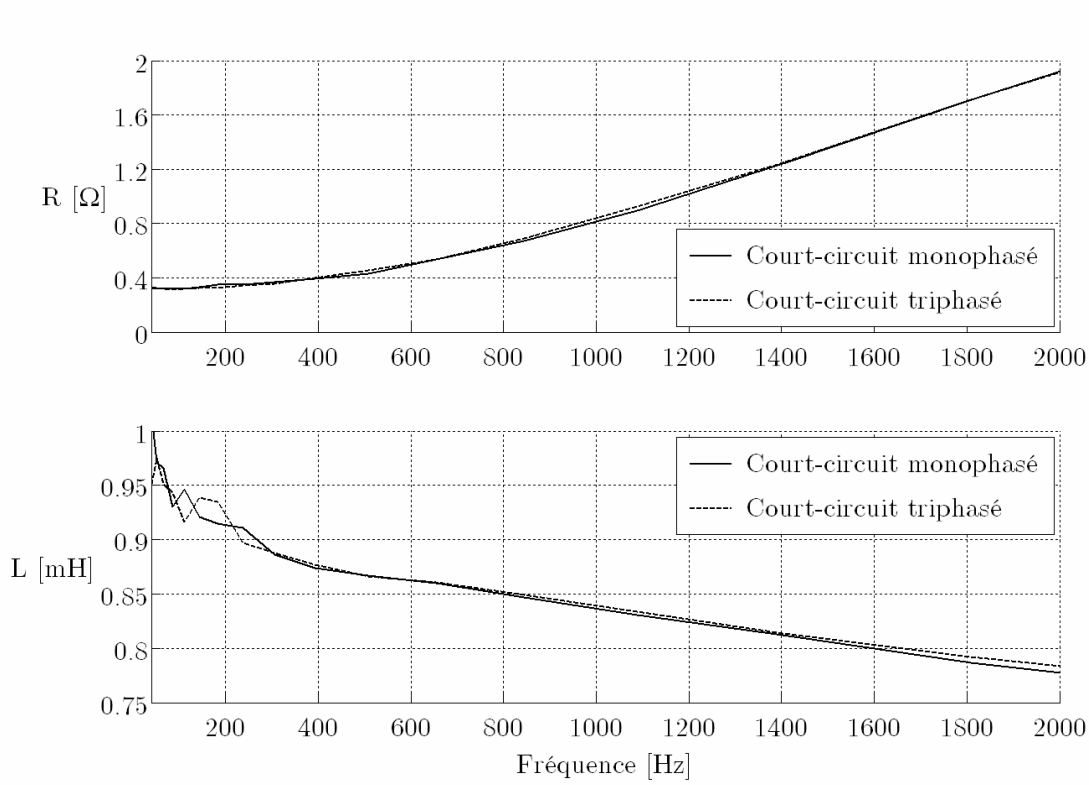


Figure III.1 – *Variation fréquentielle de l'impédance de court-circuit*

L'analyse des relevés montre que l'effet des courants induits dans les conducteurs diffère peu entre les essais monophasés et triphasés. La modélisation des enroulements d'une seule colonne s'avère donc un choix suffisant, permettant de limiter le nombre d'inconnu du modèle électromagnétique pour un couplage magnétothermique aisé.

III.2.3. Etude de la Gamme de Fréquence

Nous avons tenté d'étudier la convergence des séries sur lesquelles est basée le calcul des coefficients de déclassement ou d'incrément de la résistance cités au chapitre I. Ainsi, leur convergence est à l'image d'une stabilisation des pertes additionnelles et doit donc être associée à la gamme de fréquence de modélisation. Ces séries sont toutes de la forme :

$$S_e = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{I_h}{I} \right)^2 h^{\alpha} \qquad \text{(III.1)}$$

Dans le cas de l'équation (I.5), α est égal à A_R. et est obtenu expérimentalement. Pour la norme européenne de l'équation (I.11), il vaut 1.6 et pour la norme américaine (I.12) sa valeur est 2.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Selon la nature des charges non linéaires le rapport $(I_h/I)^2$ est proportionnel à $h^{-\beta}$, où β est un paramètre obtenu soit par la décomposition en série de Fourier du courant de charge I, soit par la mesure. Les différentes séries sont alors de la forme :

$$S_e = \sum_{h=1}^{\infty} h^{\alpha-\beta} \qquad \text{(III.2)}$$

Ces séries convergent si α - β < -1, ou encore si $\beta > \alpha+1$.

Nous avons étudié ces séries pour les charges non linéaires suivantes (annexe A) :

a) Pont redresseur monophasé sur charge inductive
b) Pont redresseur triphasé sur charge inductive
c) Pont redresseur monophasé sur charge capacitive
d) Pont redresseur triphasé sur charge capacitive
e) Gradateur monophasé à 80% de la puissance maximale

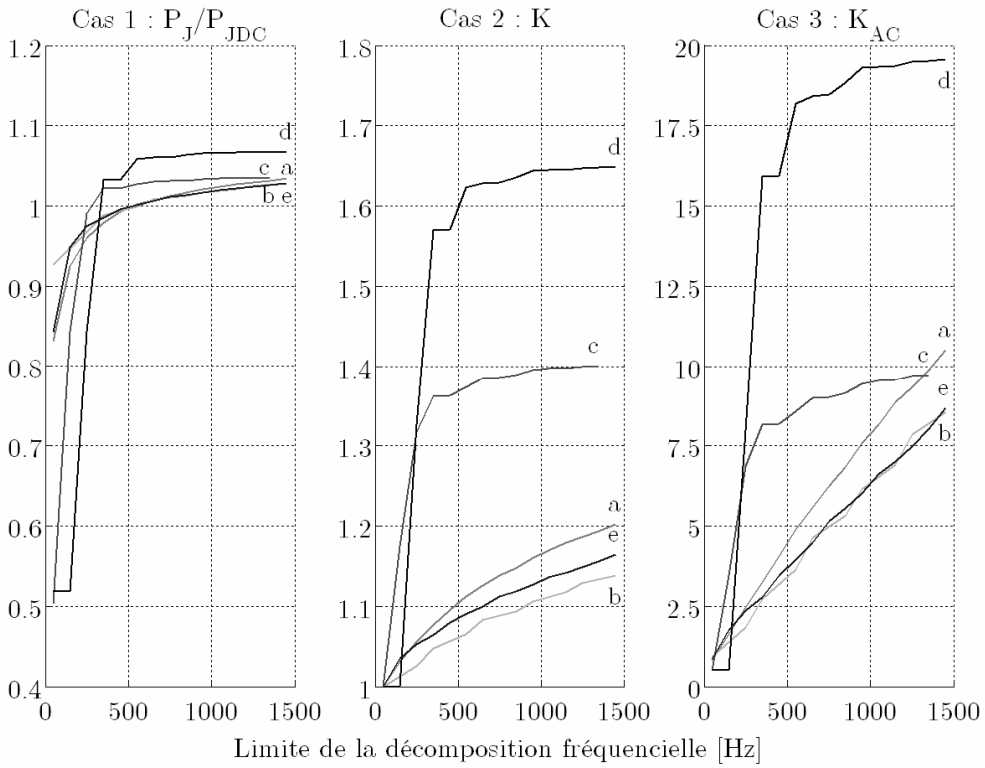


Figure III.2 – *Etude de la gamme de fréquence de modélisation*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le cas 1 montre l'évolution des pertes Joule normées par rapport aux pertes Joule obtenues pour un courant continu identique. La série associée (I.3), (I.5) converge pour les charges capacitives pour une fréquence inférieure à 1.5kHz. Par contre, elle ne converge ni pour les charges inductives ni pour le gradateur. En effet l'amplitude des harmoniques de ces charges est proportionnelle à h^{-2}. La série (I.5) se comporte alors comme une série de h^{AR-2}. Cette série converge si A_R est inférieur à 1. Nos calculs ont été faits pour un transformateur dont la valeur de A_R est de 1.87. C'est pourquoi, pour ce type de charges la convergence est impossible. Néanmoins, cette série est la seule des trois à prendre en compte l'échauffement (dont l'impact à été ici omis) et il suffirait de compléter son expression d'un terme traduisant la diminution de l'exposant A_R pour des fréquences élevées ($A_R \rightarrow 0.5$).

Le cas 2 représente la convergence de l'inverse de la série définie par (I.11). On peut constater les mêmes comportements pour les différentes charges par rapport au cas précédent. Pour les charges inductives, (I.11) se comporte comme une série proportionnelle à $h^{-0.4}$ et donc ne converge pas non plus.

Le cas 3 expose la convergence de la série associée à (I.12). Le comportement de celle-ci est semblable aux cas précédents et se comporte comme une somme de constante qui ne converge évidemment pas.

Il est important de noter que l'analyse faite pour les charges inductives repose sur les hypothèses d'un redresseur composé de semi-conducteurs parfaits et chargé par un circuit RL pur. Néanmoins, il existe pour ces charges des capacités parasites qui peuvent modifier leurs comportements en hautes fréquences.

Béjot préconise une limite de fréquence de 2kHz [**Béjot-92**]. Cette fréquence convient bien aux charges capacitives. Ne disposant à l'état actuel d'aucune autre approche significative pour les charges inductives, nous nous limiterons donc à cette fréquence dans la suite de notre travail.

III.3. Modélisation des Enroulements

L'application de la M2C au bobinage d'un transformateur conduit à un système matriciel de type "plein". Si l'assemblage final sur source de courant, permet de réduire cependant le nombre d'éléments matriciels non nuls, un contrôle de la discrétisation s'avère judicieux afin d'optimiser les coûts de stockage mémoriel et de résolution.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour prendre en compte la variation de la densité de courant dans la section des conducteurs, ces derniers sont découpés en spires élémentaires d'une section suffisamment petite. La densité de courant dans chacune de ces sections élémentaires est alors supposée constante.

III.3.1. Discrétisations des Conducteurs

La discrétisation doit permettre de retranscrire précisément la distribution non uniforme de densités de courant, sur la gamme de fréquence de modélisation retenue (0-2kHz). Le découpage en éléments inducteurs s'effectue selon deux dimensions :

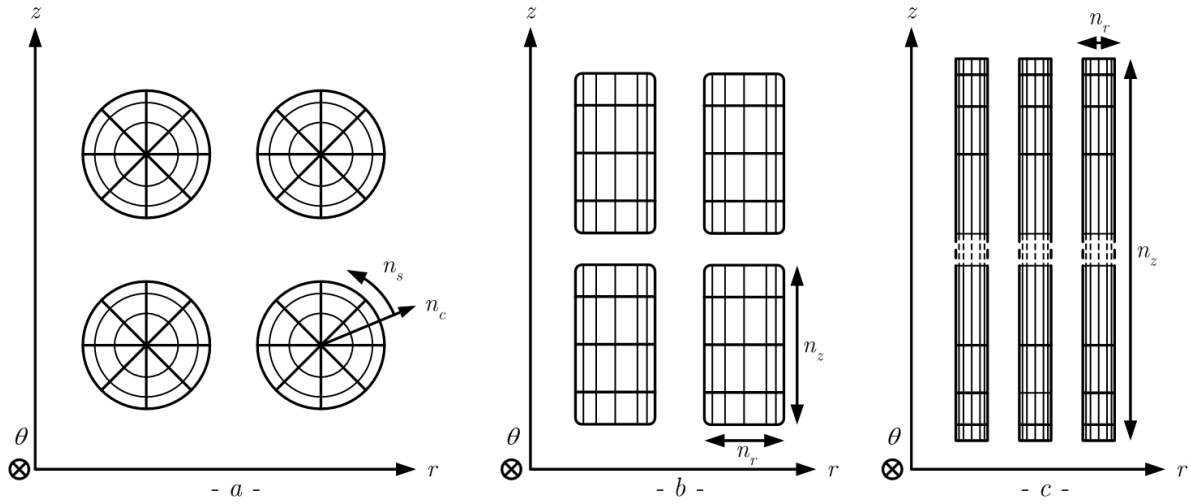


Figure III.3 – *Discrétisation des conducteurs de section circulaire et rectangulaire*

Pour des conducteurs de section circulaire (a), le fractionnement s'effectue tout d'abord en n_s secteurs réguliers puis en n_c couches radiales.

Pour des conducteurs de sections rectangulaires de type carré ou méplat (b) et feuillard (c), les arrondis de coin sont négligés et la discrétisation s'appuie sur la direction de chacun des axes caractéristiques, soit n_r couches radiales et n_z empilements axiaux.

Ces discrétisations peuvent être régulières, géométriques, ou s'appuyer sur des lois analytiques définissant les profondeurs de pénétration et permettant ainsi d'optimiser le nombre d'inconnues lié à l'application de la M2C. Ceci est particulièrement le cas pour le découpage en couche des conducteurs ronds et en empilement radiaux des conducteurs rectangulaires à condition de toutefois vérifier certaines contraintes.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.3.2. Application de la Méthode des Circuits Couplés (M2C)

L'application de la M2C revient à calculer les différents effets inductifs, propres et mutuels entre des inducteurs distincts. Ces multiples termes peuvent également s'exprimer à partir du potentiel vecteur magnétique **A**, (II.34) à (II.37). Celui-ci est créé par les densités de courant recherchées qui traversent les conducteurs des enroulements primaires et secondaires auxquels sont associés, pour le cas axisymétrique, un repère de coordonnées cylindriques [**Rezzoug-92**].

III.3.2.1. Equations Caractéristiques en Axisymétrique

L'hélicité des enroulements étant négligée, les composantes vectorielles des densités de courant **J,** du champ électrique **E**, ainsi que du potentiel vecteur magnétique **A**, se limitent à une seule composante scalaire et azimutale que nous noterons respectivement J, E et A. De ce fait, l'utilisation des lois de Maxwell en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante [**Delage-84**] :

$$J = -\frac{\nabla V}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial t} \tag{III.3}$$

Le gradient du potentiel scalaire électrique V ne possède donc qu'une composante liée à la tension appliquée U.

$$\nabla V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-U}{2\pi r} \tag{III.4}$$

A partir des équations (III.3) et (III.4), on obtient la loi électromagnétique d'Ohm locale en coordonnés cylindriques et pour laquelle les grandeurs sont supposées parfaitement sinusoïdales.

$$U = 2\pi r\rho J + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\pi r\left(\rho J + j\omega A\right) \tag{III.5}$$

Sachant que la résistance d'un conducteur de longueur l et de section S s'exprime en courant continu par la relation suivante :

$$R = \rho\frac{l}{S} \tag{III.6}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

On retrouve bien l'expression caractéristique de la M2C (II.34) exprimée en fonction de la densité de courant J et du potentiel vecteur magnétique A.

III.3.2.2. Extension au Bobinage Complet

La forme discrète de l'équation précédente (III.5) exprime la tension V_{kl} aux bornes d'un élément k d'une spire l, en fonction de sa densité de courant propre J_{kl} et des multiples contributions inductives, images des potentiels vecteurs élémentaires $A_{kl,ij}$:

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + j\omega\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1} A_{kl,ij} + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2} A_{kl,ij}\right)\right] \qquad \text{(III.7)}$$

L'expression précédente intègre l'influence des N_1 et N_2 spires des enroulements primaires et secondaires dont chacune est respectivement fractionnés en n_1 et n_2 éléments (découpages radiaux et axiaux confondus).

Dans (III.7) $A_{kl,ij}$ correspond alors au potentiel vecteur magnétique au sein de la boucle élémentaire réceptrice k de la spire l, créé par la densité de courant J_{ij} dans la boucle élémentaire émettrice i de la spire j.

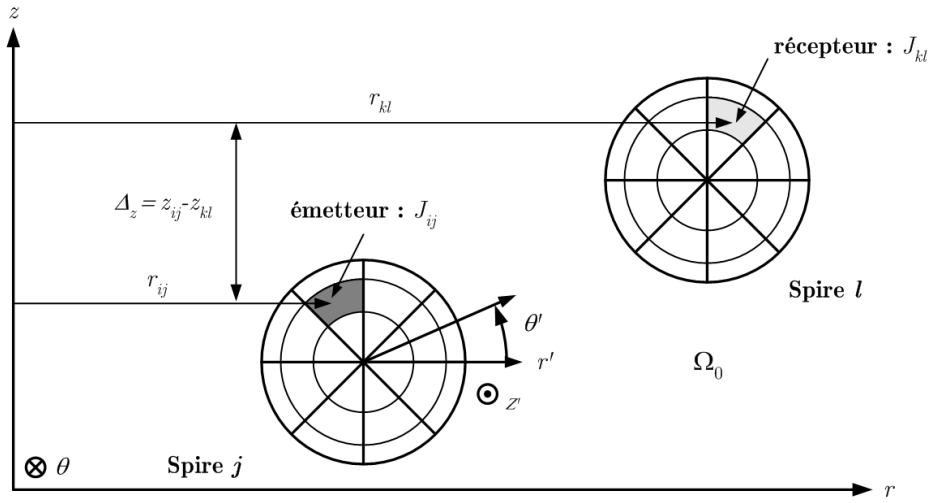


Figure III.4 – *Conducteurs discrétisés dans le repère axisymétrique*

Il s'exprime alors à partir de (II.37) en fonction des densités de courant inconnues :

$$A_{kl,ij} = \frac{\mu_0 J_{ij}}{\pi}\iint_{S_{ij}} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{r_{ij}}{r_{kl}}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\Im_1(k) - \Im_2(k)\right]dS_{ij}, \text{ et } k = \sqrt{\frac{4r_{ij}r_{kl}}{\left(r_{ij}+r_{kl}\right)^2 + \Delta_z^2}} \qquad \text{(III.8)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

A partir du système d'équation obtenu par la concaténation de (III.7) et (III.8), une "pseudo matrice impédance" **Z** complexe est formée. Celle-ci est composée des sous-matrices $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_{12}}$ et $\mathbf{Z_{21}}$, associées aux enroulements primaires (indice 1) et secondaires (indice 2).

$$\left[\mathbf{V_{12}}\right] = \left[\mathbf{Z}\right]\left[\mathbf{J_{12}}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \mathbf{V_1} \\ \hline \mathbf{V_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z_1} & \mathbf{Z_{12}} \\ \hline \mathbf{Z_{21}} & \mathbf{Z_2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{J_1} \\ \hline \mathbf{J_2} \end{array}\right] \qquad \text{(III.9)}$$

Les vecteurs $\mathbf{V_{12}}$ et $\mathbf{J_{12}}$, sont respectivement composés des vecteurs $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{J_2}$, et contiennent les tensions et les densités de courant élémentaires inconnues associées à chaque élément de discrétisation.

La diagonale de cette matrice **Z** contient les termes résistifs et inductifs propres, tandis que les autres éléments sont associés aux différentes inductances mutuelles. **Z** peut être totalement symétrique, voire composée de certaines sous matrices symétrique. Cette propriété dépend non seulement des types de conducteurs employés pour les bobinages primaire et secondaire mais également de leur discrétisation. La vérification de cette faculté de symétrie permet de limiter le calcul et le stockage des coefficients.

Les dimensions des sous matrices et des vecteurs associées sont au format {nombre de lignes, nombre de colonnes} : $\{n_1N_1,n_1N_1\}$ pour $\mathbf{Z_1}$, $\{n_2N_2,n_2N_2\}$ pour $\mathbf{Z_2}$, $\{n_2N_2,n_1N_1\}$ pour $\mathbf{Z_{21}}$ et $\{n_1N_1,n_2N_2\}$ pour $\mathbf{Z_{12}}$.

III.3.3. Prise en Compte de la Source

Pour sa résolution, le système matriciel (III.9) nécessite la connaissance des tensions aux bornes de chaque élément. Celles-ci étant inconnues, elles se substituent alors à un jeu d'équations complémentaires. Ces relations proviennent des contraintes de préservation en courant et tension appliquées sur chaque spire et permettent alors d'imposer dans le vecteur source la grandeur électrique connue. Il s'agit soit de la valeur de la tension appliquée aux bornes de l'enroulement, soit celle des courants véhiculés.

III.3.3.1. Formulation en Alimentation en Tension

L'analyse structurelle du schéma caractéristique de la M2C (figure II.5) dénote que tous les éléments d'une même spire possèdent une tension identique à leurs bornes.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le nombre de tensions inconnues est alors N_1+N_2. La tension totale U aux bornes de l'enroulement est au facteur de discrétisation près la somme des tensions des spires individuelles :

$$\begin{cases} V_{1N_1} = V_{2N_1} = \cdots = V_{kN_1}, \text{ et } \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{N_1} V_{kl} = n_1 U_1 \\ V_{1N_2} = V_{2N_2} = \cdots = V_{kN_2}, \text{ et } \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{N_2} V_{kl} = n_2 U_2 \end{cases} \quad \text{(III.10)}$$

De plus, les courants primaire I_1 et secondaire I_2 restent égaux d'une spire à l'autre :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1}\int_{S_{i1}} J_{i1}dS = \sum_{i=1}^{n_1}\int_{S_{i2}} J_{i2}dS = \cdots = \sum_{i=1}^{n_1}\int_{S_{iN_1}} J_{iN_1}dS = I_1 \\ \sum_{i=1}^{n_2}\int_{S_{i1}} J_{i1}dS = \sum_{i=1}^{n_2}\int_{S_{i2}} J_{i2}dS = \cdots = \sum_{i=1}^{n_2}\int_{S_{iN_2}} J_{iN_2}dS = I_2 \end{cases} \quad \text{(III.11)}$$

Ces relations fournissent les équations supplémentaires pour le calcul des tensions inconnues. Afin de réduire le nombre d'inconnue nous avons éliminé les tensions individuelles aux bornes de chaque spire par une simple manipulation des équations. Ainsi, à partir de (III.9) la forme matricielle du système d'équations associée aux enroulements et en l'absence de circuit magnétique devient [**Delage-84**] :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A_2} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{J_1} \\ \hline \mathbf{J_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ n_1 U_1 \\ \hline \mathbf{0} \\ n_2 U_2 \end{array}\right] \quad \text{(III.12)}$$

Les matrices $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ sont creuses et construites de telle manière que la différence de courant entre deux spires du même bobinage soit nulle (III.11). Pour une spire fixée comme référence, leurs dimensions respectives sont donc $\{N_1\text{-}1, n_1 N_1\}$ et $\{N_2\text{-}1, n_2 N_2\}$.

Les matrices $\mathbf{B_{11}}$, $\mathbf{B_{12}}$ et $\mathbf{B_{21}}$, $\mathbf{B_{22}}$ sont pleines et assemblées de façon à annuler la différence de tension entre deux éléments de discrétisation d'une même spire (III.10). Pour un élément de référence, leurs tailles respectives sont donc respectivement $\{N_1(n_1\text{-}1), n_1 N_1\}$, $\{N_1(n_1\text{-}1), n_2 N_2\}$, $\{N_2(n_2\text{-}1), n_1 N_1\}$ et $\{N_2(n_2\text{-}1), n_2 N_2\}$.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les vecteurs lignes $\mathbf{C_{11}}$, $\mathbf{C_{12}}$ et $\mathbf{C_{21}}$, $\mathbf{C_{22}}$ sont construit par une simple somme appliquée à (III.9) permettant d'imposer la tension dans le vecteur source (III.10). Leur nombre de colonnes est alors respectivement le même que celui des matrices $\mathbf{B_{ij}}$ précédentes.

Etant donné notre problématique il est plus judicieux de pouvoir imposer dans le vecteur source le courant consommé par une charge non linéaire. Nous avons donc préféré une formulation sur sources de courant à celle en alimentation en tension.

III.3.3.2. Formulation sur Sources de Courant

Dans cette formulation on suppose que les courants I_1, I_2, en opposition de signe l'un de l'autre, sont connus. Dans ce cas la loi de conservation du courant d'une spire à l'autre (III.11) permet d'imposer les courants dans le terme source [**Lefèvre-04a**].

De la même manière que le cas précédent, nous éliminons les tensions inconnues V_{kl} par une simple manipulation des équations pour obtenir un système matriciel de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E_2} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{J_1} \\ \hline \mathbf{J_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I_1} \\ \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I_2} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{III.13}$$

La différence intervient alors dans la construction des matrices $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$. Celles-ci sont creuses et permettent d'imposer un courant dans chaque spire. Ces courants sont alors contenus dans les vecteurs $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$ et sont associés à des matrices de dimensions $\{N_1,n_1N_1\}$ et $\{N_2,n_2N_2\}$.

Les taux de remplissage matriciel T_{xI} de ce système (III.13) et celui de l'alimentation en tension T_{xV} (III.12) sont les suivants :

$$\begin{cases} T_{xV} = 1 - \dfrac{\big((N_1+N_2)-4\big)\big(N_1n_1+N_2n_2\big)+2\big(n_1+n_2\big)}{\big(N_1n_1+N_2n_2\big)^2} \\ T_{xI} = 1 - \dfrac{\big(N_1+N_2\big)+1}{\big(N_1n_1+N_2n_2\big)} \end{cases} \tag{III.14}$$

T_{xI} est sensiblement meilleur que T_{xV} pour des nombres N_1, N_2 faibles. Au-delà de plusieurs dizaines de spires, les deux taux convergent vers des valeurs identiques et

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

croissantes avec le nombre de discrétisation. Pour un nombre de découpage suffisant la matrice devient quasi-parfaitement pleine. Le gain est donc faible d'autant plus que celle-ci doit être complétée des sous matrices associées à la modélisation du noyau.

III.4. Prise en Compte du Circuit Magnétique

Le noyau sur lequel s'appuient les bobinages est caractérisé par une perméabilité magnétique supposée constante et est par conséquent modélisé par des densités de courant superficielles et fictives. Le calcul de ces densités de courant ajoute au système matriciel un nombre d'inconnu égal à celui de découpage linéique de la surface du noyau.

III.4.1. Modélisation par Densités Superficielles de Courant

En terme de coûts de stockage mémoriels, la modélisation d'un milieu ferromagnétique, par des densités superficielles et fictives de courant n'est réellement intéressante que pour un noyau possédant une symétrie de révolution (cf § II.3.3.2). Le circuit magnétique réel d'un transformateur ne présente au mieux qu'une symétrie partielle (colonne) et nécessite alors une transformation géométrique permettant l'utilisation des équations associées à un repère de coordonnées cylindriques. Celles-ci sont finalement discrétisées et associées aux découpages surfaciques du noyau équivalent obtenu.

III.4.1.1. Le Noyau en Approximation Axisymétrique

Sur la base d'un transformateur triphasé, à colonnes, pour lequel seul le bobinage de la colonne centrale est modélisé, le circuit magnétique original est transformé en un noyau cylindrique entourant la bobine (figure III.5). Ce noyau approché n'a bien sûr aucune réalité physique mais conserve certaines propriétés magnétiques.

Qu'il s'agisse d'un circuit magnétique dont les colonnes sont de section rectangulaire ou cruciforme (préférentielle), la méthodologie de transformation utilisée respecte les mêmes critères. Tout d'abord, il s'agit de conserver une section et donc un flux magnétique identique, tout le long du parcours guidé par la ligne de champ moyenne. Ceci se traduit alors par une décroissance hyperbolique de l'épaisseur de la culasse, théoriquement en $1/r$. Pour des problèmes de connexion et de continuité de l'interface équivalent obtenu, l'épaisseur peut cependant suivre la loi à deux paramètres suivante :

$$E_c(r) = \frac{\alpha}{\beta + r} \tag{III.15}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

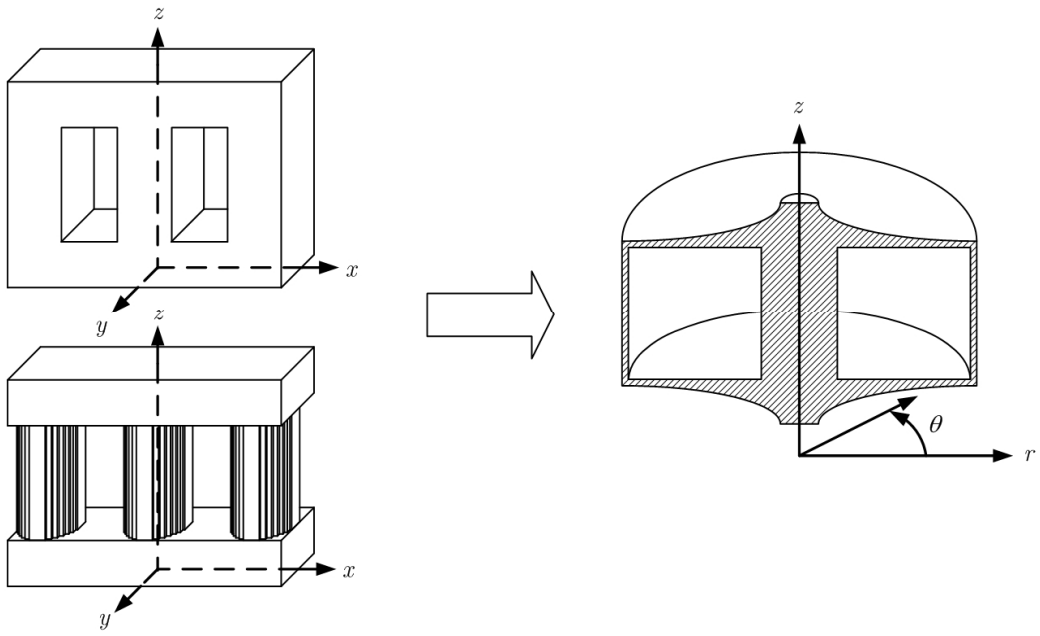


Figure III.5 – *Transformation du noyau en un circuit équivalent et axisymétrique*

Le rayon de la colonne centrale, ainsi que l'épaisseur des colonnes latérales doivent également satisfaire cette équivalence [**Mimoune-95**].

De plus, la dimension de la fenêtre magnétique est augmentée afin d'assurer une ligne de champ moyenne de longueur similaire et donc un champ magnétique moyen identique. Cet ajustement a été vérifié par un calcul numérique (MEF) basé sur une formulation en potentiel vecteur magnétique mais diffère pour notre cas peu des dimensions réelles. Finalement et sur la base de ces deux critères, on peut dire que le noyau résultant est donc "énergétiquement équivalent".

III.4.1.2. Equation Caractéristique en Axisymétrique

L'introduction de densités surfaciques et fictives de courant est liée à l'application de l'équation de Fredholm de 2ème espèce [**Ernst-87**]. Tout comme précédemment, pour les conducteurs, le contour du noyau est discrétisé (figure III.6).

L'interface Γ_f est découpé en n_f éléments linéiques, de normale extérieure $\mathbf{n_k}$ et sur chacun desquels les densités élémentaires K'_k sont supposées constantes. La forme discrète de l'équation caractéristique de la M2C pour le cas axisymétrique (III.7) est alors complétée d'un terme traduisant la contribution ces densités de courant fictives (III.16).

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

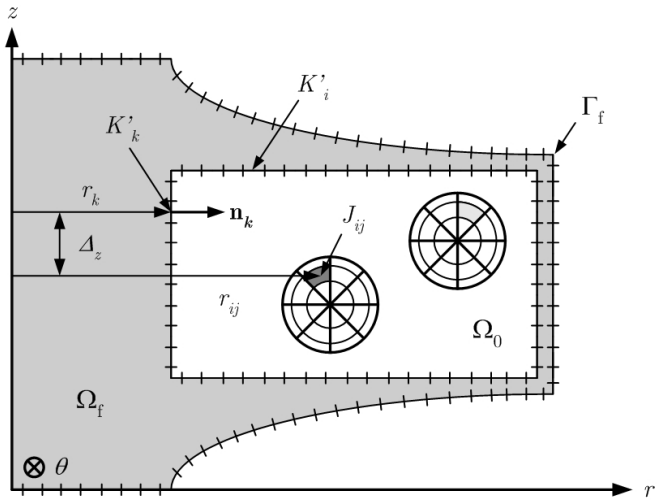


Figure III.6 –*Discrétisation du contour du noyau ferromagnétique*

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + j\omega\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1} A_{kl,ij} + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2} A_{kl,ij} + \sum_{i=1}^{n_f} A_{kl,i}\right)\right] \quad \text{(III.16)}$$

L'expression du potentiel vecteur $A_{kl,i}$ au sein de l'élément k d'une spire l, créé par une densité superficielle et fictive K'_i s'obtient de manière similaire par l'expression (III.8), en intégrant sur la longueur de l'élément i ferromagnétique.

Pour un élément d'indice k, l'équation initiale (II.40) se ramène alors à une forme intégrale discrète faisant intervenir un terme source (W) et deux termes de magnétisation l'un "propre" (U) et l'autre "mutuelle" (V).

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{(\mu_r+1)}{(\mu_r-1)}\mu_0 K'_k}_{U} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_f}\mathbf{n_k}\times\int_{l_i} K'_i\mathbf{B_{k,i}}dl}_{V} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1}\mathbf{n_k}\times\iint_{S_{ij}} J_{ij}\mathbf{B_{k,ij}}dS - \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2}\mathbf{n_k}\times\iint_{S_{ij}} J_{ij}\mathbf{B_{k,ij}}dS}_{W} \quad \text{(III.17)}$$

L'induction source est ici liée aux multiples densités de courant inconnues J_{ij} dans les enroulements primaires et secondaires.

L'induction de magnétisation provient à la fois de la densité de courant superficielle dans l'élément k et de celle dans les autres éléments surfaciques du noyau.

En définitive, le système d'équation (III.16) et (III.17) fournit les n_f équations pour compléter le système matriciel initial (III.13) sur source de courant.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.4.2. Assemblage Matriciel Complet sur Sources de Courant

En intégrant les densités fictives contenues dans **K'** et inconnues, on obtient :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} & \mathbf{B_{1F}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} & \mathbf{B_{2F}} \\ \hline \mathbf{D_{F1}} & \mathbf{D_{F2}} & \mathbf{D_{FF}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{K'} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I_1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I_2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad \text{(III.18)}$$

Les matrices $\mathbf{D_{FP}}$, $\mathbf{D_{FS}}$ (W de III.17) et $\mathbf{D_{FF}}$ (U,V de III.17) sont pleines. Elles alourdissent énormément les dimensions de la matrice globale et dégradent son taux de remplissage. Ainsi, leurs dimensions respectives sont : $\{n_f,n_1N_1\}$, $\{n_f,n_2N_2\}$. et $\{n_f,n_f\}$. Une optimisation de la discrétisation des conducteurs et du noyau est donc souhaitable.

III.4.3. Optimisation de la Discrétisation

Le découpage suivant deux directions augmente considérablement le nombre d'inconnues. Une résolution monodimensionnelle de l'équation électromagnétique nous permet de s'affranchir du découpage dans une direction et de diminuer ainsi considérablement le nombre d'inconnues et par conséquent les coûts algorithmiques.

L'obtention de la distribution des densités de courant dans un conducteur unique (effet de peau seul), revient à résoudre l'équation de diffusion exprimée en fonction de la densité de courant **J**. Pour des cas simples, la résolution de celle-ci conduit à des formulations analytiques [**Desesquelles-92**]. Deux cas, liés à notre problématique se distinguent : celui d'un conducteur de section circulaire et celui d'une plaque mince.

Pour un conducteur circulaire de rayon r_c et de longueur infinie, cette distribution radiale $J_z(r')$ et fréquentielle est régie par la fonction de Kelvin $\mathbf{M_0}$ [**Gaba-98**], [**Angot-72**].

$$J_z'(r') = J_0 \frac{\mathbf{M_0}(r'\chi)}{\mathbf{M_0}(r_c\chi)} \mathrm{e}^{j\left(\varphi_0(r'\chi)-\varphi_0(r_c\chi)\right)} \text{ avec } \chi=\frac{\sqrt{2}}{\delta} \qquad \text{(III.19)}$$

Où δ est l'épaisseur de peau (I.2) et $\mathbf{M_0}$ est défini par la somme d'une suite géométrique et calculable numériquement. J_0 et $\varphi_0(r_c\chi)$ sont respectivement la densité de courant et la phase à la périphérie du conducteur.

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Dans le cas d'une plaque mince, centrée dans un repère locale (r',θ',z') et d'épaisseur e_c la distribution transversale est une expression hyperbolique complexe [**Niemela-89**] :

$$J_z(r') = \frac{1}{\sinh(ae_c)}\left[J_1 \sinh\left(\frac{ae_c}{2} + ar'\right) + J_2 \sinh\left(\frac{ae_c}{2} - ar'\right)\right] \text{ avec } a = \frac{1+j}{\delta} \qquad \text{(III.20)}$$

Où J_1 et J_2 représentent les densités surfaciques de part et d'autre de la plaque.

III.4.3.1. Application aux Conducteurs de Section Circulaire

Connaissant l'expression de la distribution radiale de la densité de courant, la discrétisation se limite désormais à des secteurs réguliers [**Doirat-06**] :

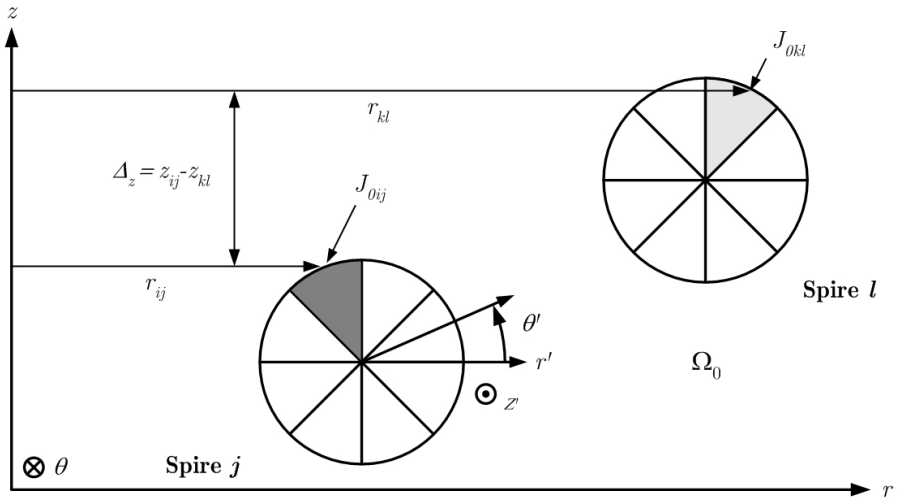


Figure III.7 – *Limitation de la discrétisation dans des conducteurs circulaires*

Les inconnues sont alors les densités de courant à la périphérie des secteurs. L'expression du potentiel vecteur élémentaire (III.8) à la périphérie d'un secteur récepteur devient alors :

$$A_{kl,ij} = \frac{\mu_0 J_{0ij}}{\pi} \iint_{S_{ij}} \frac{\sqrt{r_{ij}}\mathbf{M_0}(r'\chi)}{k\sqrt{r_{kl}}\mathbf{M_0}(r_c\chi)}\left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\Im_1(k) - \Im_2(k)\right] e^{j\varphi_0(r'\chi)}\, dS_{ij} \qquad \text{(III.21)}$$

Où la phase à la périphérie du conducteur est retenue comme origine ($\varphi_0(r_c\,\chi)$=0)

Le système d'équations (III.7) s'exprime alors pour un enroulement composé de conducteur circulaire de la manière suivante :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{0kl} + j\omega\sum_{i=1}^{n_{sec}}\sum_{j=1}^{N} A_{kl,ij}\right] \qquad \text{(III.22)}$$

Afin de vérifier la précision satisfaisante de cette méthode de limitation, nous l'avons testé sur un cas simple composé de quelques spires discrétisées très finement.

La figure suivante montre la distribution des densités de courant dans des conducteurs ronds en cuivre, de rayon r_c=5mm et à une fréquence de 2kHz ($r_c/\delta \approx 3{,}4$).

Le cas (a) se base sur des découpages fins en n_s=20 secteurs réguliers et n_c=12 couches d'épaisseurs variables. Le cas (b) est un découpage en secteurs seuls avec une prise en compte analytique de la distribution radiale. Les densités de courant obtenues sont alors normées par rapport à la densité uniforme J_{DC} obtenue en courant continu.

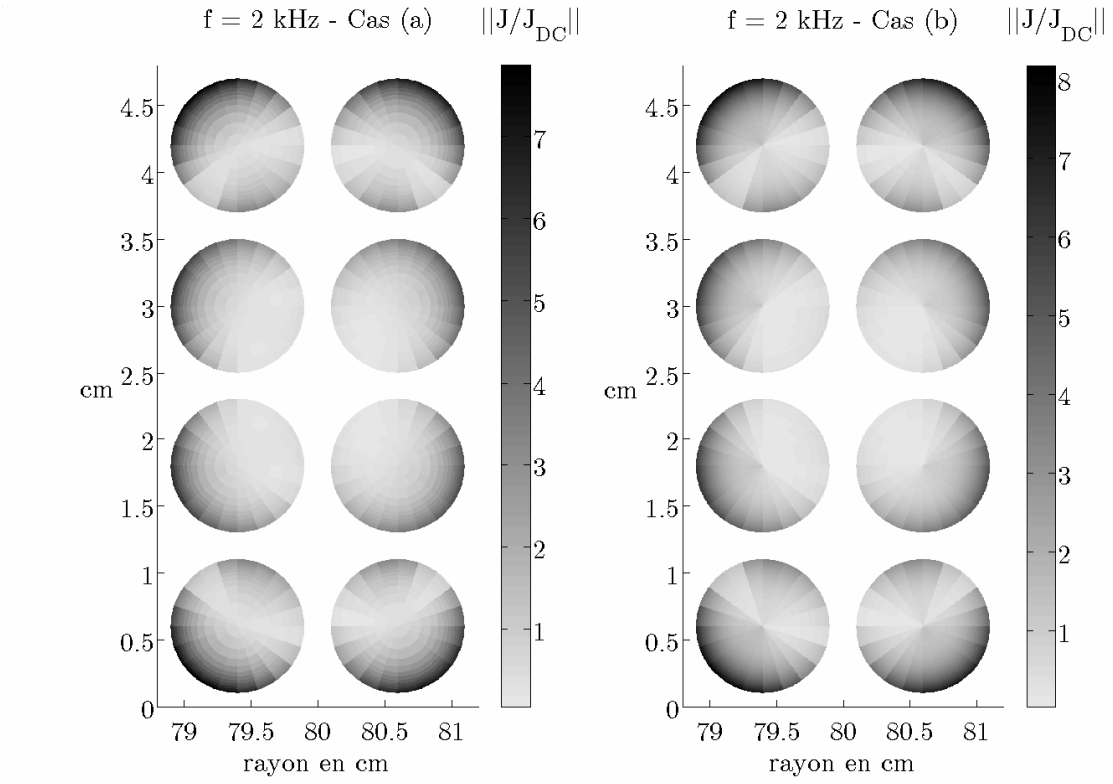


Figure III.8 – *Distribution de densité de courant dans des conducteurs circulaires (M2C) : Cas (a) n_s=20 et n_c=12, Cas (b) n_s=20 avec loi analytique sur la distribution radiale*

L'intégration numérique de l'expression (III.21) est effectuée par la méthode de Gauss-Legendre (annexe C) avec n_{gr} et $n_{g\theta}$ points suivant respectivement la direction radiale r' et azimutale θ' (figure III.7). Le choix de ces nombres est basé sur un bon

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

compromis entre la précision et le temps de calcul. La simulation a été effectuée pour un total de 2×8 points d'intégration pour le cas (a) et 8×8 points pour le cas (b).

L'étude des grandeurs globales que sont la résistance et l'inductance montre alors l'équivalence entre les deux distributions obtenues. La résistance est ici calculée par une intégration des densités de pertes Joule (II.52), afin de se prémunir d'une erreur de sensibilité liée à la phase.

Type de discrétisation	**Cas (a)** : n_s=20, n_c=12	**Cas (b)** : n_s=20	ε_{rr}
Résistances [mΩ]	43.45	42.92	-1,2 %
Inductances [µH]	251.02	251.10	0,3 ‰
Temps de calcul [s]	854	67 (÷ 13)	

Table III.1 – *Comparaison des résistances, inductances (2kHz) et temps de calcul (M2C).*

Cette discrétisation restreinte s'avère donc être un choix judicieux permettant de limiter les inconnues et le temps de calcul. Elle est à préconiser pour un effet pelliculaire significatif sur tous conducteurs ronds et d'autant plus efficacement que ceux-ci sont généralement associés au bobinage haute tension possédant un grand nombre spire.

III.4.3.2. Application aux Conducteurs de Section Rectangulaire

La distribution de densité de courant dans un conducteur rectangulaire peut être assimilée à celle dans une plaque d'épaisseur mince e_c et de hauteur "infinie" l_c.

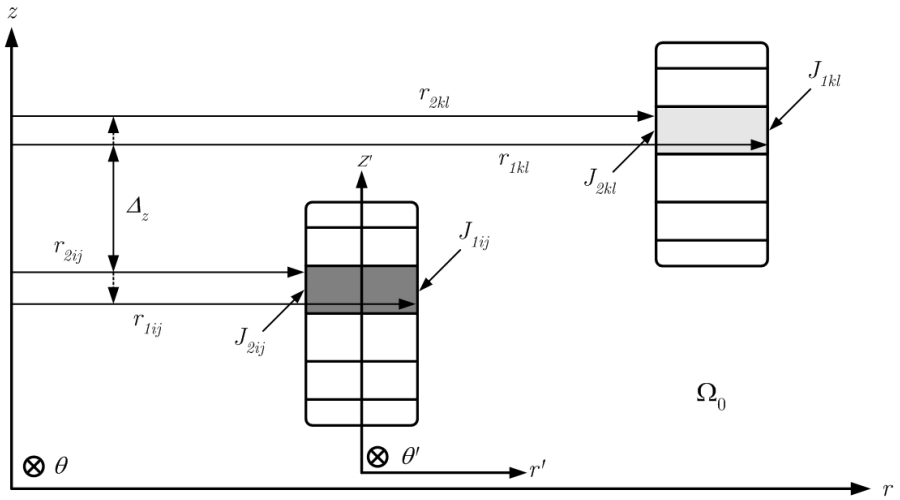


Figure III.9 – *Limitation de la discrétisation dans des conducteurs rectangulaires*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La discrétisation se limite alors à n_z éléments par spire et l'expression du potentiel vecteur élémentaire (III.8) se décompose en deux termes :

$$A_{kl,ij} = \frac{\mu_0 J_{1ij}}{\pi \sinh(ae_c)} \iint_{S_{ij}} \sinh(\frac{ae_c}{2} + ar') \frac{1}{k} \sqrt{\frac{r_{ij}}{r_{kl}}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \Im_1(k) - \Im_2(k) \right] dS_{ij} + \frac{\mu_0 J_{2ij}}{\pi \sinh(ae_c)} \iint_{S_{ij}} \sinh(\frac{ae_c}{2} - ar') \frac{1}{k} \sqrt{\frac{r_{ij}}{r_{kl}}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \Im_1(k) - \Im_2(k) \right] dS_{ij} \quad \text{(III.23)}$$

Le potentiel vecteur s'exprime alors en fonction des deux inconnues que sont les densités J_{1ij} et J_{2ij} surfaciques, de part et d'autre de l'épaisseur d'un élément.

La résolution du système d'équations nécessite alors le dédoublement de l'équation caractéristique (III.7) :

$$\begin{cases} V_{1kl} = 2\pi r_{1kl} \left[\rho J_{1kl} + j\omega \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{N} A_{1kl,ij} \right] \\ V_{2kl} = 2\pi r_{2kl} \left[\rho J_{2kl} + j\omega \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{N} A_{2kl,ij} \right] \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

Néanmoins, cette optimisation n'est pas toujours envisageable et dépend de la configuration de l'enroulement.

En effet, l'expression (III.21) s'appuie sur l'hypothèse importante selon laquelle la hauteur de plaque l_c doit être infiniment grande par rapport aux autres dimensions. Si cette hypothèse n'est pas respectée, des "effets de bords" engendrent alors une erreur de distribution pouvant être plus ou moins importante.

Pour une comparaison menée sur des conducteurs de dimensions e_c=1cm, l_c=2cm et à une fréquence de f=2kHz, on distingue le cas (a) concernant une discrétisation fine en n_r=20 couches radiales et n_z=20 empilement régulier, puis le cas (b) à découpage uniquement axial.

Le nombre total des points d'intégration est quant à lui de 4×8 pour le cas (a) et 8×8 points pour le cas (b). Tout comme précédemment les densités obtenues sont normées par rapport à la densité uniforme issue du régime continu.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

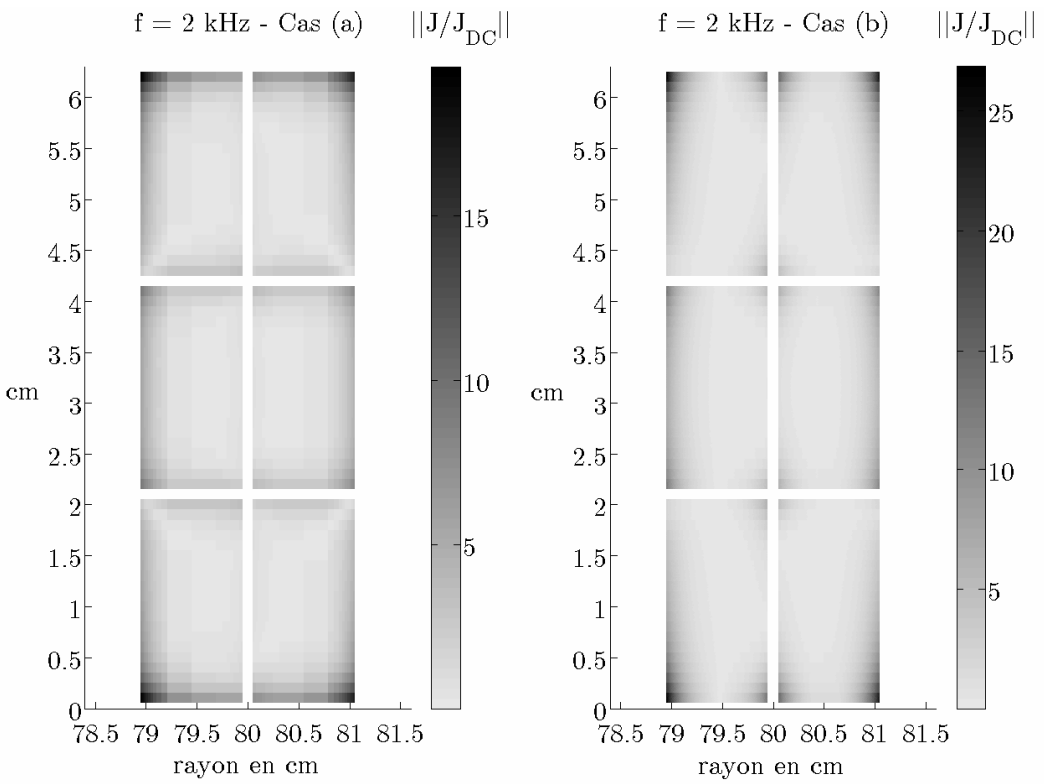


Figure III.10 – *Distribution de densité de courant dans des conducteurs rectangulaires : Cas (a) n_r=20 et n_z=20, Cas (b) n_z=20 avec loi analytique sur la distribution radiale*

Tout comme précédemment, l'étude des paramètres globaux et du temps de calcul démontre le gain obtenu.

Type de discrétisation	**Cas a** : n_r=20, n_z=20	**Cas b** : n_z=20	ε_{rr}
Résistances [mΩ]	18.68	18.10	3,1 %
Inductances [µH]	131.69	133.21	-1,2 %
Temps de calcul [s]	1566	62 (÷25)	

Table III.2 – *Comparaison des résistances, inductances (2kHz) et temps de calcul (M2C).*

L'erreur est certes faible mais dissimule en réalité un écart significatif entre les deux distributions obtenues (figure III.10).

Le domaine de validité de l'approximation envisagée ne permet donc pas une réduction systématique du nombre d'éléments et le rapport l_c/e_c doit pour cela être suffisamment important.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour une spire unique d'un rayon moyen de 1m, composée d'un conducteur d'épaisseur e_c=1cm et à une fréquence de 2kHz, la table III.3 illustre cette contrainte. Le conducteur est finement discrétisé en n_r=40 couches radiales et n_z=40 empilements réguliers pour le cas (a), puis n_z=40 pour le cas (b). Les nombres de points d'intégration restent les mêmes que pour l'étude comparative précédente.

Cas a, b, ε_{rr}	l_c/e_c= 2			l_c/e_c= 10			l_c/e_c= 100		
Résistances [μΩ]	167.14	185.59	11 %	49.3	52.6	6.8 %	7.389	7.382	0.9 ‰
Inductances [μH]	0.327	0.340	3.9 %	0.177	0.179	1.4 %	0.032	0.032	0.9 ‰

Table III.3 – *Comparaison en fonction du rapport l_c/e_c (2kHz).*

La simulation montre que cette approximation n'est envisageable qu'à partir d'un rapport l_c/e_c suffisant, ici typiquement supérieur à 10. Par conséquent, cette méthode s'applique bien à des feuillards et les conducteurs de type méplat ou carré nécessiteront une discrétisation complète.

Finalement, selon le type de conducteur, ses dimensions et la fréquence, le système matriciel aura donc pour inconnues, soit les densités de courant élémentaires intrinsèques supposées constantes, soit les densités de courant surfaciques dans le cas de conducteurs circulaires ou de type feuillard.

III.4.3.3. Conservation de Courant dans les Spires

Dans le cas d'une discrétisation uniquement en n_s secteur, la conservation de courant (III.11) devient pour un conducteur circulaire j :

$$\sum_{i=1}^{n_s} \frac{2\pi J_{0ij} r_c \mathbf{J_1}(r_c \chi j^{\frac{3}{2}})}{n_s \chi j^{\frac{3}{2}} \mathbf{J}_0(r_c \chi j^{\frac{3}{2}})} = I \qquad \text{(III.25)}$$

Où $\mathbf{J_0}$, $\mathbf{J_1}$ sont les fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre 0 et d'ordre 1.

Pour un conducteur rectangulaire j, mince et discrétisé en n_z épaisseurs régulières, cette loi de conversation s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n_z} \frac{l_c \left(J_{1ij} + J_{2ij}\right)\left(\cosh(ae_c) - 1\right)}{n_z a \sinh(ae_c)} = I \qquad \text{(III.26)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Quelle s'applique à des conducteurs ronds ou de type feuillard, cette méthode de réduction de la discrétisation engendre deux désagréments. Tout d'abord, même si le gain en temps de calcul reste marqué pour un spectre de fréquences multiples, l'assemblage matriciel doit être réitéré pour chaque rang harmonique. De plus, si l'influence du nombre de points d'intégration n'est pas critique pour une discrétisation selon deux dimensions [**Babic-04**], elle le devient pour un découpage réduit et nécessite alors l'utilisation d'un plus grand nombre de points.

Ce problème de "vases communicants" peut cependant être utilisé à bon escient pour réduire le découpage de la surface du circuit ferromagnétique.

III.4.3.4. Influence de la Finesse de Discrétisation sur le Noyau

A partir d'une mesure d'inductance effectuée sur un solénoïde cylindrique avec noyau (annexe E), nous avons simulé l'influence du nombre de découpages surfaciques n_f et de la méthode d'intégration sur la précision recherchée. Pour cela deux méthodes ont été éprouvées : celle des trapèzes [**Ernst-87**] et celle de Gauss-Legendre (annexe C) à n_g points.

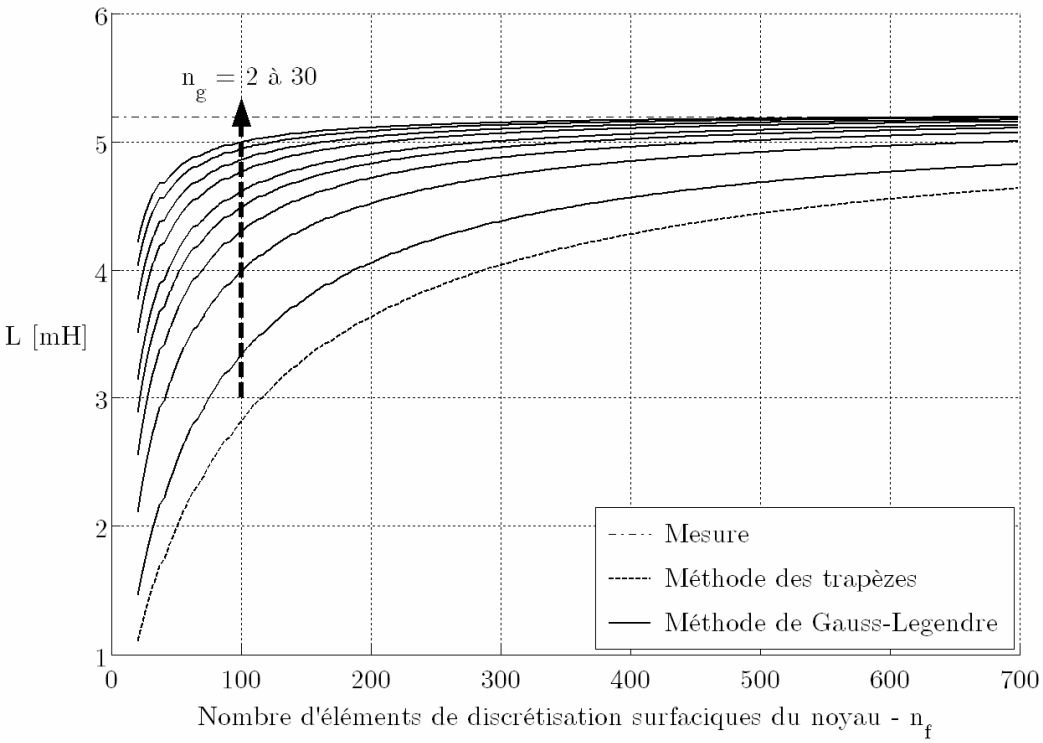


Figure III.11 – *Inductance d'un solénoïde de référence avec noyau : Influence de la discrétisation et de la méthode d'intégration (M2C)*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

L'intégration de Gauss-Legendre conduit à une réduction plus ou moins importante du nombre de découpages surfaciques nécessaire, selon le nombre de points d'intégration n_g (pair) choisi.

Cependant, l'efficacité de cette optimisation est à tempérer. Si l'on cherche à calculer la distribution du champ magnétique à la surface du circuit, n_f ne peut pas être trop restreint. Il doit être également suffisant pour permettre de définir le contour du noyau équivalent (cf § III.4.1.1) et plus particulièrement l'épaisseur variable de la culasse.

III.5. Couplage aux Equations Thermiques

III.5.1. Hypothèses de Modélisation

Comme dans le cas de l'équation électromagnétique, il est très difficile de résoudre l'équation thermique sur la géométrie réelle du système. En effet, un transformateur est composé d'un nombre important de matériaux hétérogènes et la prise en compte de l'ensemble des contraintes imposées par les différents milieux est quasiment impossible. Nous avons donc eu recours à un ensemble d'hypothèses simplificatrices, telles que des techniques d'homogénéisations qui rendent le maillage moins contraignant.

III.5.1.1. Homogénéisation des Couches d'Enroulements

L'homogénéisation des couches d'enroulements se décompose en deux étapes.

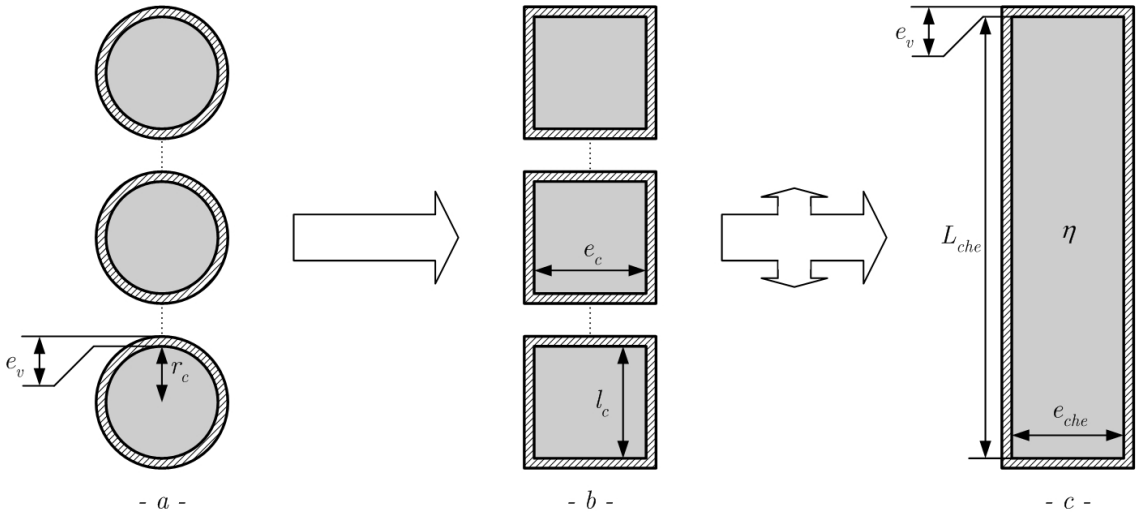


Figure III.12 – *Homogénéisation des couches d'enroulements :*
a) Conducteurs initiaux, b) Conducteurs équivalents, c) Concaténation et étirement

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Tout d'abord, chaque conducteur de section circulaire, caractérisé par son rayon utile r_c et l'épaisseur de son vernis/émail e_v, est transformé en un conducteur de section rectangulaire $l_c \times e_c$ entouré de la même épaisseur de vernis.

Puis, les multiples spires équivalentes sont alors regroupées axialement de manière à former une seule couche conductrice de hauteur L_{che}, de largeur e_{che} *et* isolée par une couche de vernis globale. Cette épaisseur e_v est importante car dans celle – ci, le gradient de température est important.

La première transformation, peut s'appuyer sur une équivalence de section :

$$l_c e_c = \pi r_c^2 \tag{III.27}$$

Nous lui avons cependant préféré une équivalence géométrique ($l_c = e_c = 2r_c$), qui permet de conserver l'épaisseur de la couche d'enroulement initial e_{che}, particulièrement critique pour un bobinage de faible rayon, ayant un gradient thermique radial important.

Ceci permet également de conserver une hauteur L_{che} identique à celle de l'enroulement réel et d'autant plus que celle-ci intervient dans le calcul des coefficients semi-empiriques de convection.

Dans le cas de conducteurs de type méplat, l'homogénéisation ne comporte qu'une étape de concaténation ($b \rightarrow c$) et les dimensions se substituent alors aux grandeurs l_c et e_c, tandis que pour des feuillards, cette concaténation est directement radiale, sans ajout de couches supérieure ou inférieure de vernis.

Afin de conserver des densités de pertes globales identiques, il est alors nécessaire d'introduire un facteur d'espacement η [**Vandelac-88**], [**Houtappel-99**]. Pour N_c couches et composées chacune de N conducteurs de section circulaire ou rectangulaire, celui –ci est défini comme suit :

$$\eta = \frac{N_c N \pi r_c^2}{L_{che} e_{che}}, \text{ ou } \frac{N_c N l_c e_c}{L_{che} e_{che}} \tag{III.28}$$

Cette méthode d'homogénéisation est alors d'autant plus fidèle que le nombre de spires et le facteur η sont importants. Ceci est particulièrement critique pour des conducteurs de sections circulaires [**Robert-02**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.5.1.2. Equation de Thermique en Axisymétrique

De la même façon, que pour le problème électromagnétique, le problème thermique a été résolu en axisymétrique [**Jafari-89**], [**Netter-95**]. Pour le transformateur d'essai (annexe F) employé, les pertes fer ne représentent qu'une faible contribution à l'échauffement global des enroulements et seront donc ici négligées [**Bouchard-99**]. L'équation caractéristique en régime permanent (II.47) et coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{\lambda_r}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \eta \rho J J^* \tag{III.29}$$

La résolution de l'équation nécessite donc la connaissance des deux conductivités thermiques λ_r et λ_z et doit être complétée des conditions aux limites.

III.5.1.3. Modélisation du noyau

Pour notre transformateur d'essai, la couche intérieure d'enroulement est isolée du noyau. En effet, celle-ci est séparée du circuit magnétique par un support en PVC isolant, puis par une mince couche d'air inhérente au profil cruciforme et piégée entre ce support et le noyau. Le transfert de chaleur par conduction est très faible et le noyau est donc quasiment indépendant du point de vue thermique de la première couche de conducteur.

En supposant, que l'échange par conduction est à ce niveau purement radial et que l'échauffement dans le noyau ΔT_f est bien inférieur à celui présent dans l'enroulement ΔT, il est possible de retranscrire la présence du noyau par un coefficient d'échange équivalent à la surface interne S de la couche de conducteur :

$$h_{fequi} = \frac{\lambda_e}{S}\left(1 - \frac{\Delta T_f}{\Delta T}\right) \approx \frac{\lambda_e}{S} \tag{III.30}$$

Pour un support isolant, une couche d'air et un noyau respectivement caractérisés par une épaisseur e_i, une épaisseur équivalente e_a, un rayon équivalent r_f, ainsi que par leurs conductivités associées λ_i, λ_a, λ_f , la conductivité équivalente λ_e s'obtient par :

$$\lambda_e = \frac{\left(e_i + e_a + r_f\right)\lambda_f \lambda_a \lambda_i}{e_i \lambda_a \lambda_f + e_a \lambda_f \lambda_i + r_f \lambda_i \lambda_a} \tag{III.31}$$

Le noyau est donc omis pour ce modèle simplifié. Néanmoins, le reste de celui-ci perturbe l'écoulement et nécessite donc une correction des coefficients de convection.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.5.2. Choix des Paramètres

Les performances du modèle thermique dépendent principalement, de la bonne caractérisation des échanges par conduction et convection. Pour une ou plusieurs couches d'enroulements homogénéisées, cette caractérisation se limite cependant à la détermination d'un nombre restreint de conductivités thermiques et de coefficients d'échanges convectifs.

III.5.2.1. Conductivité Thermique

En thermique, deux matériaux ont des conductivités équivalentes si pour le même flux les traversant ils provoquent le même écart de température pour des dimensions identiques. Ce principe a été utilisé comme critère de base pour notre homogénéisation et se traduit par une moyenne intégrale selon la direction d'échange [**Chauveau-01**].

Les conductivités thermiques à identifier sont aux nombres de quatre. Ce sont celles radiales et axiales de la couche de conducteur homogénéisée λ_{cher}, λ_{chez}, ainsi que du vernis ou de l'isolant extérieur λ_{ver}, λ_{vez} (figure III.12). Elles concernent différents conducteurs caractérisés par des conductivités thermiques propres λ_c dans le matériau conducteur, λ_v, λ_i, dans le vernis ou les feuilles isolantes et λ_a dans l'air environnant.

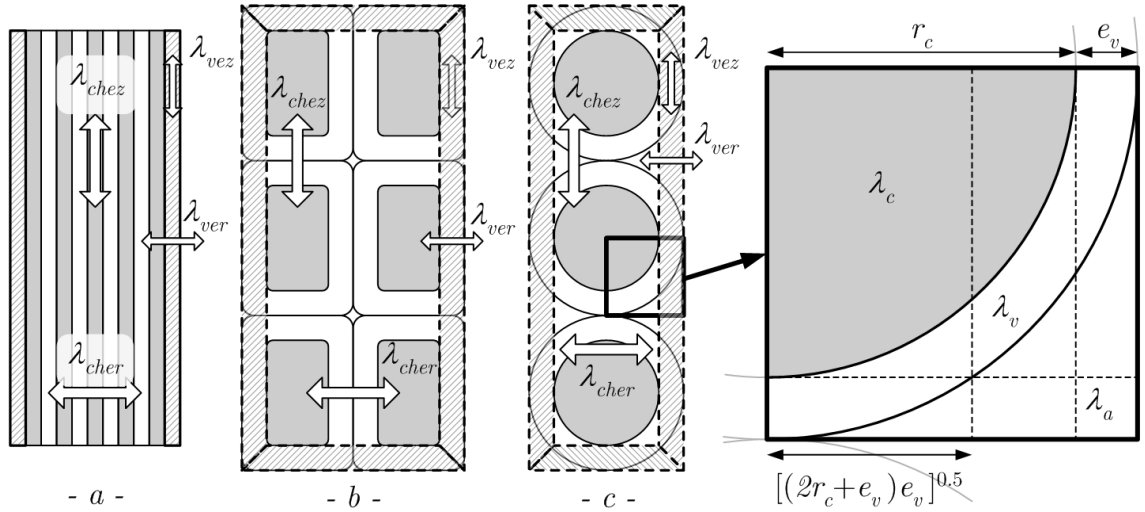


Figure III.13 – *Calcul des conductivités thermiques équivalentes* (*axiale et radiale*) : (*a*) c*onducteurs feuillards,* (*b*) *méplats,* (*c*) *conducteur circulaire monocouche*

Pour N_c feuillards (a) minces d'épaisseurs e_c, isolées entre eux par du papier isolant d'épaisseur e_i, les conductivités λ_{ver}, λ_{vez} s'identifient à celle de l'isolant λ_i. Les conductivités équivalentes de la couche homogénéisée s'obtiennent quant à elles par les expressions :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\lambda_{cher} = \frac{\lambda_c \lambda_i \left(N_c e_c + \left(N_c - 1 \right) e_i \right)}{\lambda_i N_c e_c + \lambda_c \left(N_c - 1 \right) e_i} \tag{III.32}$$

$$\lambda_{chez} = \frac{\lambda_c N_c e_c + \lambda_i \left(N_c - 1 \right) e_i}{N_c e_c + \left(N_c - 1 \right) e_i} \approx \lambda_c \tag{III.33}$$

Pour les méplats (b), les conductivités λ_{ver}, λ_{vez} sont également celles du vernis isolant λ_v. L'air piégé entre les coins est négligé. Pour N_c couches de N conducteurs chacune, l'expression de la conductivité radiale équivalente est la suivante.

$$\lambda_{cher} = \frac{1}{N l_c + 2(N-1) e_v} \left(2\lambda_v (N-1) e_v + \frac{\lambda_c \lambda_v N l_c \left(N_c e_c + 2\left(N_c - 1 \right) e_v \right)}{2\lambda_c \left(N_c - 1 \right) e_v + \lambda_v N_c e_c} \right) \tag{III.34}$$

La conductivité thermique axiale λ_{chez} s'obtient de manière similaire en remplaçant dans (III.34), N par N_c, N_c par N, l_c par e_c et e_c par l_c.

Pour une couche unique de conducteurs circulaires (c), de rayon r_c, les différentes conductivités s'obtiennent par une intégration sur un domaine restreint. A condition de vérifier $r_c \geq 2{,}41\, e_v$ et un nombre de spires important il suffit d'intégrer :

$$\lambda_{cher} = \frac{r_c}{r_c + e_v} \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\sqrt{(2r_c + e_v)e_v}} \frac{\lambda_c \lambda_v}{U\left(\lambda_v - \lambda_c \right) + \lambda_c r_c} dr + \\ \displaystyle\int_{\sqrt{(2r_c + e_v)e_v}}^{r_c} \frac{\lambda_c \lambda_v \lambda_a}{\lambda_a U\left(\lambda_v - \lambda_c \right) + \lambda_c V\left(\lambda_a - \lambda_v \right) + \lambda_c \lambda_v r_c} dr + \\ \displaystyle\int_{r_c}^{r_c + e_v} \frac{\lambda_v \lambda_a}{V\left(\lambda_a - \lambda_v \right) + \lambda_v r_c} dr \end{array} \right] \tag{III.35}$$

$$\lambda_{chez} = \frac{r_c + e_v}{r_c} \int_0^{r_c} \frac{\lambda_c \lambda_v \lambda_a}{\lambda_a U\left(\lambda_v - \lambda_c \right) + \lambda_c V\left(\lambda_a - \lambda_v \right) + \lambda_c \lambda_v (r_c + e_v)} dr \tag{III.36}$$

$$\lambda_{ver} = \lambda_a \left(1 - \frac{\sqrt{\left(2r_c + e_v \right) e_v}}{r_c + e_v} \right) + \frac{e_v}{r_c + e_v} \int_0^{\sqrt{(2r_c + e_v)e_v}} \frac{\lambda_v \lambda_a}{\left(\lambda_a - \lambda_v \right)(V - r_c) + \lambda_v e_v} dr \tag{III.37}$$

$$\lambda_{vez} = \frac{r_c + e_v}{e_v} \int_{r_c}^{r_c + e_v} \frac{\lambda_v \lambda_a}{V\left(\lambda_a - \lambda_v \right) + \lambda_v (r_c + e_v)} dr \tag{III.38}$$

avec $U = \sqrt{r_c^2 - r^2}$, et $V = \sqrt{(r_c + e_v)^2 - r^2}$,

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour ce cas, les conductivités équivalentes dans le vernis doivent être permutées pour le haut et le bas de la couche.

Pour des couches multiples, les conducteurs sont agencés naturellement en quinconce pour une tenue mécanique optimale et les cellules d'air isolantes sont alors réduites par rapport au cas précédent. Si les conductivités équivalentes dans le vernis périphérique restent inchangées, il n'en est pas de même des conductivités dans les conducteurs. Une méthode intégrale peut ici conduire à de multiples cas d'études selon le rayon du conducteur et l'épaisseur du vernis. Une alternative consiste à résoudre numériquement (MEF) les équations de conduction sur un échantillon représentatif du matériau à homogénéiser (c).

On impose alors un gradient de température T_1 et T_2, sur deux parois en vis-à-vis et on calcule le flux moyen dans l'échantillon associé à l'axe de la conductivité recherchée [**Fouladgar-05**].

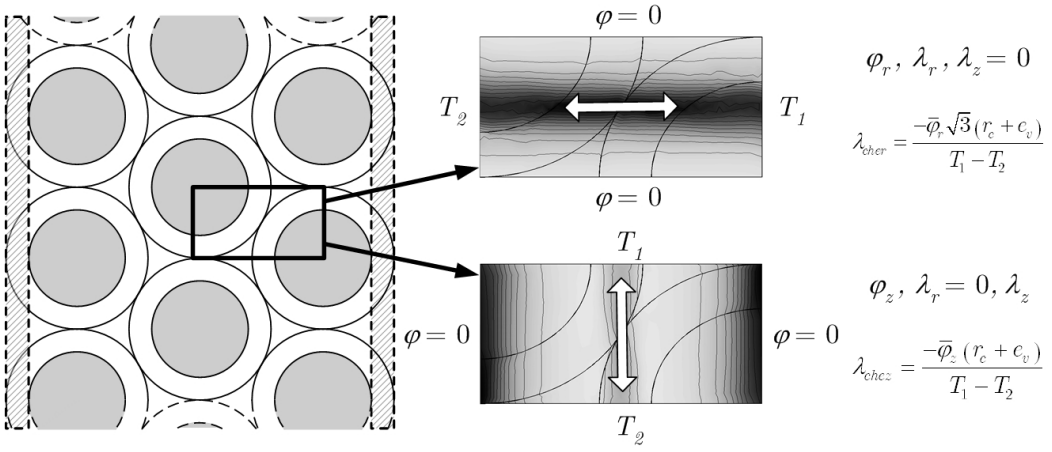


Figure III.14 – *Calcul des conductivités thermiques équivalentes (axiale et radiale) : Conducteurs de section circulaire, multicouches et organisés en quinconce*

Afin d'évaluer les facultés d'échange des types de bobinage, nous avons réalisé une étude comparative basée : sur des conducteurs feuillards, sur des méplats, ou sur des conducteurs circulaires équivalents. On a distingué les cas simples et multicouches et pour un matériau en cuivre ou en aluminium. Cette dernière équivalence est obtenue en adaptant les dimensions des conducteurs et donc leurs surfaces respectives afin de vérifier :

$$\frac{S_{al}}{S_{cu}} = \frac{\rho_{cu}}{\rho_{al}} \approx 1.56$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les conductivités thermiques de matériaux sont supposées constantes et ont pour valeurs : $\lambda_i = 0.13$, $\lambda_v = 0.85$, $\lambda_a = 0.024$, $\lambda_c = 375$ (Cu), ou 210 (Al) $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. Le calcul des quatre conductivités équivalentes caractéristiques est présenté dans la table suivante :

Cu / Al	**Feuillards** $e_c = 180$ / 224 µm, $e_i = 130$ µm, $L_{che} = 14.6$ / 18.3 cm, $N_c = 20$		**Méplats** $l_c = 7.26$ / 9.08 mm, $e_c = 3.61$ / 4.51 mm, $e_v = 25$ µm, $N_c = 1$, $N = 20$		**Circulaires** $r_c = 2.89$ / 3.61 mm, $e_v = 25$ µm, $N_c = 1$		**Circulaires** $r_c = 2.89$ / 3.61 mm, $e_v = 25$ µm, $N_c \neq 1$	
λ_{cher}	0.319	0.365	372.6	208.9	28.31	18.12	3.831	4.233
λ_{chez}	222.5	135.4	97.12	92.08	3.014	2.999	3.922	4.092
λ_{ver}	0.13	0.13	0.85	0.85	0.047	0.045	0.047	0.045
λ_{vez}	0.13	0.13	0.85	0.85	0.026	0.026	0.026	0.026

Table III.4 – *Conductivités thermiques équivalentes* [$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$]

Cette comparaison reste indicative, car elle ne s'appuie pas sur des dimensions de conducteurs normalisés mis à part celles des méplats en cuivre utilisés ici comme références.

Néanmoins, elle démontre que des conducteurs de type circulaires présente une capacité moindre à transférer les déperditions intrinsèques. Les feuillards possèdent une bonne conductivité axiale mais faible pour la direction transversale. Les méplats sont donc les conducteurs idéaux permettant une bonne distribution de chaleur axiale et surtout vers les parois verticales pour une extraction des calories par convection.

III.5.2.2. Vérification sur un Cas Simple

La méthode d'homogénéisation a été testée sur une géométrie inspirée du transformateur de 10kVA (annexe F). L'inducteur se compose d'une couche de 25 spires en cuivre émaillé, caractérisée par un rayon de conducteur de 1.575mm, une épaisseur de vernis de 70 µm et une densité de courant uniforme de 5,13 A/mm².

Trois feuilles isolantes (Nomex) d'une épaisseur unitaire de 130 µm complètent l'inducteur de part et d'autre. La température ambiante T_a est de 40°C et les coefficients d'échanges h_Γ ont pour valeurs constantes, 10 sur les surfaces horizontales et 20 sur les surfaces verticales.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

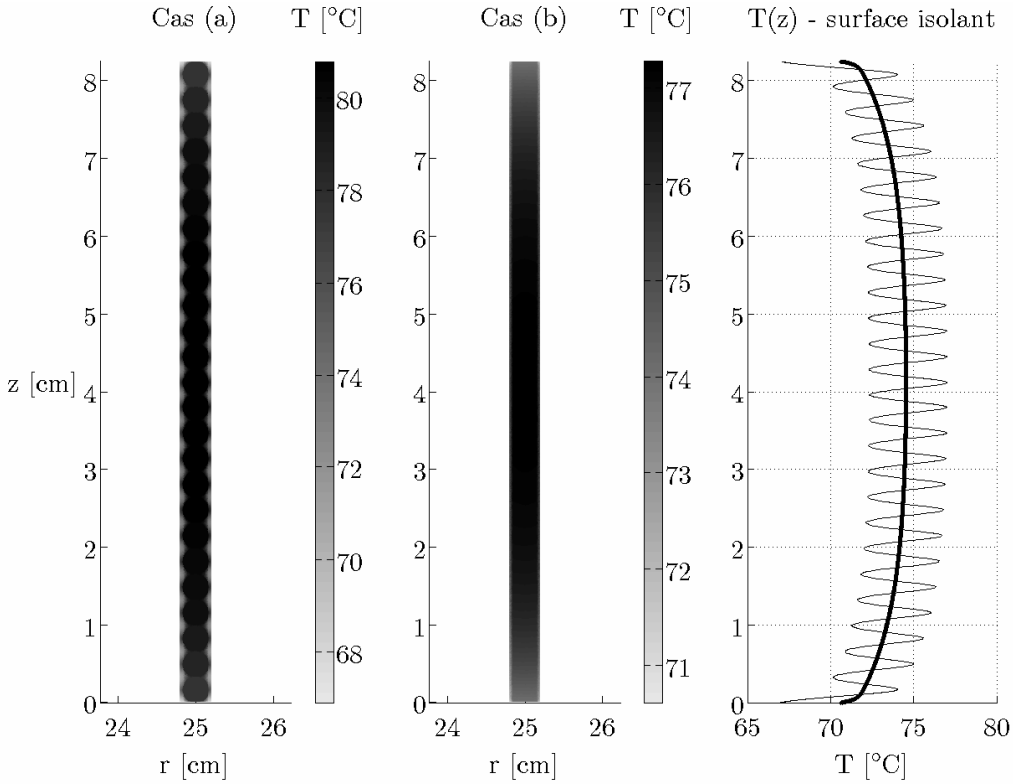


Figure III.15 – *Distribution de température d'une couche de conducteurs ronds* :
Cas (a) couche réelle (—), *Cas (b) couche homogénéisée* (•)

Le facteur d'espacement η (III.28) a ici pour valeur 75%. La superposition des distributions de température à la surface atteste l'efficacité de la méthode. L'ajout des couches isolantes latérales permet ici de lisser les ondulations et d'ainsi se rapprocher des réalités physiques d'un transformateur.

III.5.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs

Les surfaces d'échange thermique d'un transformateur sont soit horizontales soit verticales. Dans certains cas, on peut également parlé d'un canal de convection par exemple entre deux bobines. Pour un transformateur sec sans ventilation forcée, l'échange avec l'extérieur se fait uniquement par convection naturelle et on peut trouver dans la littérature une multitude de coefficients d'échange convectifs semi empiriques. Ceux-ci se basent soit sur une hypothèse de mur isotherme [**Coillot-99**], [**Houtappel-99**], soit sur celle d'un flux de puissance constant à l'interface [**Fernandes-Costa-92**]. Ils s'appliquent à des espaces restreints, des cylindres verticaux ou des plaques verticales et sont définis de manière locale [**Pierce-94a**] ou moyennée [**Declercq-99**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Ces coefficients s'expriment en fonction des nombres de Prandtl P_r (≈0.7), de Grashof G_r et de Raleigh R_a calculés à partir de multiples paramètres (table III.5) :

$$G_r = \frac{g\beta_a(T_\Gamma - T_\infty)Z^3}{\nu_a^2}, \quad P_r = \frac{\nu_a}{\alpha_a}, \quad \text{et} \quad R_a = G_r P_r \tag{III.39}$$

QUANTITE		DESIGNATION
T_∞	[K]	Température du milieu ambiant loin de la surface d'échange
T_Γ	[K]	Température à la surface
g {9.81}	[m·s^{-2}]	Accélération gravitationnelle
β_a	[K^{-1}]	Coefficient d'expansion volumétrique et thermique (air)
ν_a	[m^2·s^{-1}]	Viscosité cinématique du fluide (air)
α_a	[m^2·s^{-1}]	Diffusivité (air)

Table III.5 – *Paramètres intervenant dans la convection*

Dans l'équation précédente, le nombre de Grashof est un nombre local, calculé en un point Z référencé par rapport à l'origine d'une plaque isotherme. Après de multiples essais, il s'avère que les coefficients de convection les mieux adaptés à notre transformateur sont ceux de plaques verticales et pour un flux de puissance uniforme. Dans ce cas le nombre de Grashof est une version modifiée G_{r^*} de (III.39) faisant intervenir le flux moyen :

$$G_{r^*} = \frac{g\beta_a\overline{\varphi}_\Gamma Z^4}{\lambda_a\nu_a^2} \tag{III.40}$$

Pour la couche d'enroulement extérieure le coefficient de convection est alors définit par l'expression suivante basée sur le nombre de Nusselt local :

$$h_{cv} = \frac{0.616\lambda_a\left(\frac{P_r^2}{0.8+P_r}\right)^{0.2} G_{r^*}^{0.2}}{Z} \tag{III.41}$$

Pour les couches d'enroulements intérieures, la modélisation est sensiblement plus délicate. En effet, l'épaisseur des canaux de ventilation est trop faible pour utiliser des coefficients d'échange par convection tel que (III.41). Mais la largeur de ces canaux n'est pas suffisamment importante pour utiliser uniquement un échange par conduction (maillage), qui conduit alors à une température beaucoup trop importante.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La solution consiste à utiliser des coefficients d'échange qui prennent en compte le couplage entre deux parois en vis à vis [**Pierce-94a**]. Pour cela on distingue un coefficient local pour le bas du canal ($\Phi \geq 60$) et un autre pour le reste du canal ($\Phi < 60$) :

$$\begin{cases} h_{cv} = \dfrac{C_1 \lambda_a \left(1 + R_\varphi\right)^{1/6} \Phi^{1/3}}{\Delta_c} \text{ pour } \Phi \geq 60 \\ h_{cv} = \dfrac{C_2 \lambda_a}{\Delta_c \left(1 + R_\varphi\right)\left[\dfrac{1}{\Phi}\left(\dfrac{24}{1+R_\varphi}\right)^{0.5} - \dfrac{9}{70}\right] + \dfrac{\Delta_c}{2}} \text{ pour } \Phi < 60 \end{cases} \quad \text{(III.42)}$$

Où les constantes C_1 et C_2 dépendent de la largeur Δ_c du canal de ventilation. Pour notre transformateur C_2 reste unitaire tandis que C_1 prend pour valeurs respectives 0.6783 et 0.6392 pour un Δ_c de 9.525 et 6.35 mm. R_φ représente le rapport entre les flux de puissance de chaque plaque. Pour la plaque situé à gauche (indice g) il vaut $\varphi_{\Gamma d}/\varphi_{\Gamma g}$ et pour la plaque de droite (indice d) $\varphi_{\Gamma g}/\varphi_{\Gamma d}$. Quant au coefficient local Φ, celui-ci s'exprime pour chaque plaque de hauteur caractéristique L en fonction : du nombre de Grashof (III.40) ou Z est remplacé par Δ_c et du nombre de Prandtl (III.39), tel que :

$$\Phi = \frac{\dfrac{\Delta_c}{Z} G_{r*} P_r}{\left(\dfrac{\Delta_c}{L} G_{r*} P_r\right)^{0.5}} \quad \text{(III.43)}$$

Pour les surfaces horizontales, des coefficients moyens sont utilisés. Dans l'expression du nombre de Grashof (III.39), Z est remplacée par la longueur caractéristique L de ces surfaces supposées isothermes grâce à un gradient de température radial faible :

$$\overline{h}_{cv} = \frac{\lambda_a c \left(G_r P_r\right)^n}{L} \quad \text{(III.44)}$$

Où $n = 0.25$ pour un régime de convection laminaire. Pour une paroi horizontale supérieure et à condition de vérifier $10^5 < \text{Ra} < 2\times10^7$, c=0.54, tandis que si celle-ci est orientée vers le bas c=0.27, pour $3\times10^5 < \text{Ra} < 3\times10^{10}$.

Enfin, pour des transformateurs de dimensions importantes (L grand), le nombre de Rayleigh est élevé et peut alors dépasser les bornes de l'intervalle de validité de ces coefficients. Si tel est le cas, l'emploi de coefficient de convection associé à un régime turbulent est alors nécessaire [**Özisik-85**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les différentes propriétés physiques de l'air (table III.5) dépendent de la température et se déterminent, par usage, à une température moyenne $T_f = 0.5(T_\Gamma + T_\infty)$. Pour une gamme allant de 200°K à 500°K, celles-ci peuvent être approchées à partir des tables :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_a(T_f) \approx -3.4143\times10^{-8}T_f^2 + 9.7984\times10^{-5}T_f - 8.7143\times10^{-5} \\ \tilde{\nu}_a(T_f) \approx 4.1214\times10^{-11}T_f^2 + 7.5792\times10^{-8}T_f - 1.142\times10^{-5} \\ \tilde{\alpha}_a(T_f) \approx 7.075\times10^{-11}T_f^2 + 1.0713\times10^{-7}T_f - 1.7205\times10^{-5} \\ \beta_a = \dfrac{\partial\rho_a(T)}{\partial T} \approx \dfrac{1}{T_f} \end{cases} \quad \text{(III.45)}$$

Ces valeurs approchées permettent une évaluation plus directe des coefficients de convection à partir des seules données de températures ambiante et surfacique, sans avoir recours aux tables [**Özisik-85**] et avec une précision satisfaisante :

T_∞=40°C	$\boldsymbol{T}$ **= 14°C**, ($T_f \approx$ 300K)	$\boldsymbol{T}$ **= 114°C**, ($T_f \approx$ 350K)	$\boldsymbol{T}$ **= 214°C**, ($T_f \approx$ 400K)
λ_a	26.24 × 10^{-3}	30.03 × 10^{-3}	33.65 × 10^{-3}
$\tilde{\lambda}_a$	26.24 × 10^{-3}	30.02 × 10^{-3}	33.64 × 10^{-3}
ε_{rr}	≈ 0	-0.3 ‰	-0.3 ‰
ν_a	15.68 × 10^{-6}	20.76 × 10^{-6}	25.90 × 10^{-6}
$\tilde{\nu}_a$	15.03 × 10^{-6}	20.16 × 10^{-6}	25.49 × 10^{-6}
ε_{rr}	-4.1%	-2.9%	-1.6%
α_a	22.16 × 10^{-6}	29.83 × 10^{-6}	37.60 × 10^{-6}
$\tilde{\alpha}_a$	21.30 × 10^{-6}	28.96 × 10^{-6}	36.97 × 10^{-6}
ε_{rr}	-3.9%	-2.9%	-1.7%

Table III.6 – *Paramètres de convection issus des tables et approximés*

III.5.2.4. Prise en Compte du Rayonnement

L'introduction du rayonnement (II.50) nécessite la connaissance des émissivités ε_Γ [**Fernandes-Costa-92**]. Pour des conducteurs en cuivre émaillé ou vernis celles ci varient entre 0.8 et 0.85 {0.81} [**VanDenBossche-02**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le facteur de vue C_Γ (II.49) permet de corriger la valeur du flux de puissance émis par rayonnement pour des parois en vis à vis. A condition de vérifier que la tôle est suffisamment éloignée, il est donc unitaire pour les surfaces extérieures. Pour tout autre cas il nécessite en toute rigueur un calcul analytique [**Coillot-99**]. Néanmoins, des valeurs empiriques sont disponibles pour les canaux de ventilation [**Pierce-94a**]. En extrapolant ces valeurs pour des épaisseurs de canaux Δ_C [m] courantes on obtient l'approximation de C_Γ :

$$\tilde{C}_\Gamma = 12.35\Delta_C + 95.1\times10^{-3} \qquad \text{(III.46)}$$

III.5.3. Résolution par la Méthode des Eléments Finis (MEF)

III.5.3.1. Méthodologie de Maillage

Les hauteurs des différentes couches d'enroulement sont généralement sensiblement identiques. Dès lors, la discrétisation peut se limiter à la définition d'une couche de référence obtenue en trois étapes.

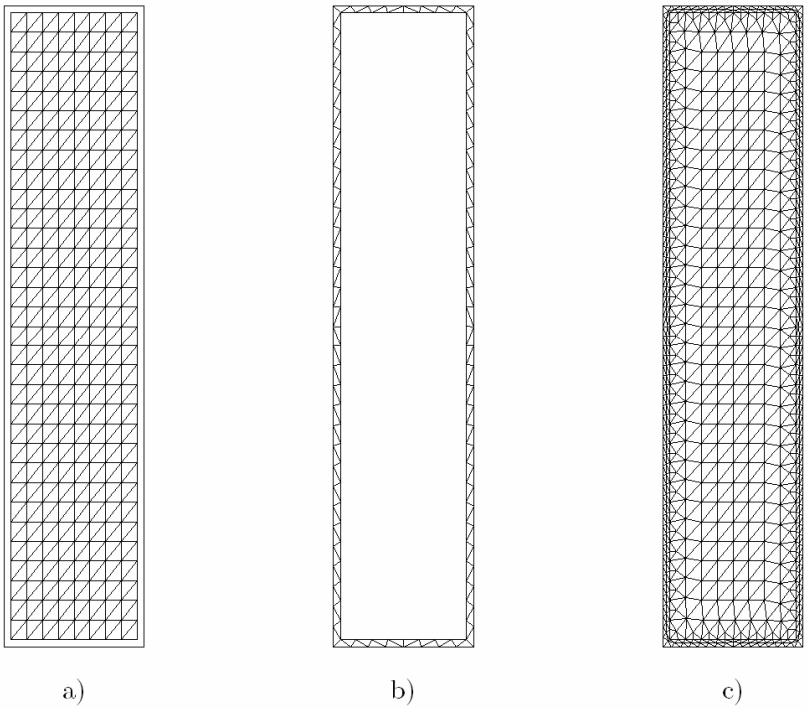


Figure III.16 – *Génération du maillage de référence : a) Maillage régulier de la couche homogénéisée conductrice, b) Maillage dissocié du vernis, c) Concaténation et affinage*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Tout d'abord la géométrie simple de la zone conductrice homogénéisée est associée à un mailleur régulier permettant de contrôler plus efficacement le nombre d'éléments triangulaires, en relation avec la finesse de discrétisation utilisée dans le modèle électromagnétique (*a*).

Puis, à partir des éléments définissant la frontière de ce premier maillage, l'épaisseur de vernis englobant est discrétisé distinctement (*b*).

Enfin, les deux maillages sont concaténés, pour obtenir celui de la couche de référence recherchée (*c*), puis affinés dans les zones isolantes où une densité plus importante s'avère nécessaire. Cette couche est alors dupliquée pour définir le bobinage complet et subit une déformation radiale éventuelle, permettant d'adapter son épaisseur à celle des enroulements primaires et secondaires (figure III.17 - *d*).

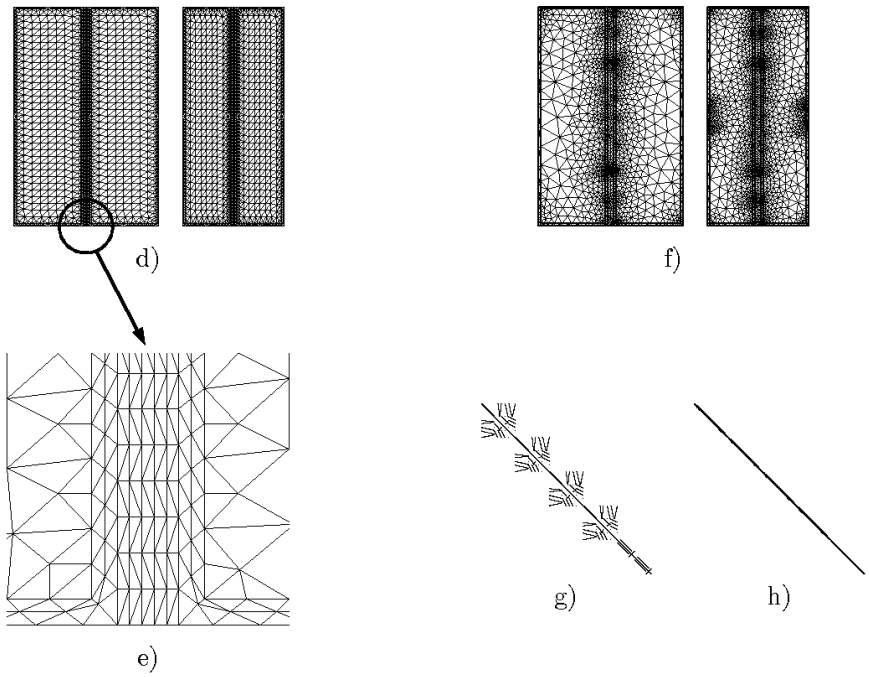


Figure III.17 – *Maillage du bobinage complet : d) duplication, étirement et maillage complémentaire e) des inter couches isolantes, f) maillage "automatique" (3880 nœuds), remplissage matriciel associé avant (g) et après permutation (h)*

De la même manière que pour le vernis extérieur de la couche de référence, une partie des éléments d'arêtes permet finalement le maillage régulier et complémentaire des inter-couches isolantes (*e*).

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

En comparaison avec la discrétisation obtenue par un mailleur automatique (f), cette technique s'avère plus rapide (nombre de nœuds identique). Le maillage final est alors mieux adapté à la géométrie ainsi qu'aux gradients de température prévisibles et permet une affectation des densités de pertes issues du modèle électromagnétique plus aisée.

Néanmoins, toutes ces manipulations dégradent le conditionnement matriciel (g), de type "bande" associé à la méthode de résolution par MEF. Pour une convergence rapide, par un algorithme de résolution itératif de type gradient conjugué, une permutation des lignes et colonnes est alors nécessaire (h).

III.5.3.2. Assemblage Matriciel pour Résolution par MEF

La résolution du problème thermique en régime permanent et par MEF (III.29) conduit à la formalisation du système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}+\mathbf{Q}][\mathbf{T}] = [\mathbf{F}+\mathbf{M}] \tag{III.47}$$

Les matrices **K** et **F** sont respectivement associés à l'intégration du transfert de chaleur par conduction et des densités volumiques de pertes dans le domaine d'étude **Ω** (III.29). Pour des éléments nodaux du premier ordre (i, j =1 à 3) celles-ci s'expriment :

$$\begin{cases} \mathbf{K} \Rightarrow \int_{\Omega} r \nabla \alpha_i \lambda \nabla \alpha_j T_j d\Omega \\ \mathbf{F} \Rightarrow \int_{\Omega} r \nabla \alpha_i \eta \rho J J^* d\Omega \end{cases} \tag{III.48}$$

Les matrices **Q** et **M** traduisent l'échange de chaleur par convection à l'interface Γ (II.50) et s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{Q} \Rightarrow \int_{\Gamma} r \nabla \alpha_i h_{\Gamma} T_{\Gamma} \mathbf{n} d\Gamma \\ \mathbf{M} \Rightarrow \int_{\Gamma} r \nabla \alpha_i h_{\Gamma} T_{\infty} \mathbf{n} d\Gamma \end{cases} \tag{III.49}$$

La résolution du problème thermique nécessite un couplage itératif permettant l'actualisation des pertes et des coefficients d'échange h_Γ à l'interface. De plus, il est possible de résoudre directement le problème thermique en terme d'échauffement pour lequel l'assemblage de la matrice **M** n'est plus nécessaire.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.6. Validations Expérimentales

Ces expérimentations ont été effectuées au moyen d'un banc d'essai implanté au sein du laboratoire d'électrotechnique de l'Ecole Polytechnique de Montréal (figure III.18).

III.6.1. Présentation du Banc d'Essai

Ce banc permet la réalisation des essais linéaires usuels, ainsi que l'émulation de charges non linéaires avec une réinjection de la puissance consommée sur le réseau Hydro-Québec. Pour cela le banc se compose :

-De deux autotransformateurs triphasés asservis en courant ou tension. Ceux-ci permettent d'effectuer les essais linéaires à vide, en court-circuit et en opposition.

-Les essais en court-circuit et en opposition utilisent alors en complément le transformateur Marcus 3×36kVA. Il permet d'adapter les niveaux de tension et de courant et de diminuer la sensibilité de réglage tout en augmentant la gamme de puissance.

-D'une source sinusoïdale, à fréquence variable Elgar Link 30kVA, 10Hz à 5kHZ, pour les essais à fréquences variables et particulièrement de court-circuit.

-D'un transformateur d'isolement Marcus 3×30kVA pour les essais non linéaires sur redresseurs monophasés.

-Des trois charges actives triphasées Shaffner d'une puissance unitaire de 25kW, permettant la réinjection de la puissance consommée sur le réseau (η théorique 85%).

-D'un jeu d'inductances de lissage (6×1mH) et de condensateurs de filtrage (30×24mF), permettant tout d'abord aux ponts redresseurs d'absorber les profils de courants non linéaires typiques (annexe A), mais également de stabiliser le bus continu.

Le transformateur en essai a été instrumenté sur sa couche d'enroulement extérieure avec des thermocouples de type K, pour la mesure de la distribution de température axiale (annexe F). La mesure de la température moyenne des enroulements s'effectue quant à elle par l'injection de courant continu. Deux centrales d'acquisition Fluke permettent alors d'acquérir les données et de les transférer via le logiciel Hydra-Logger.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

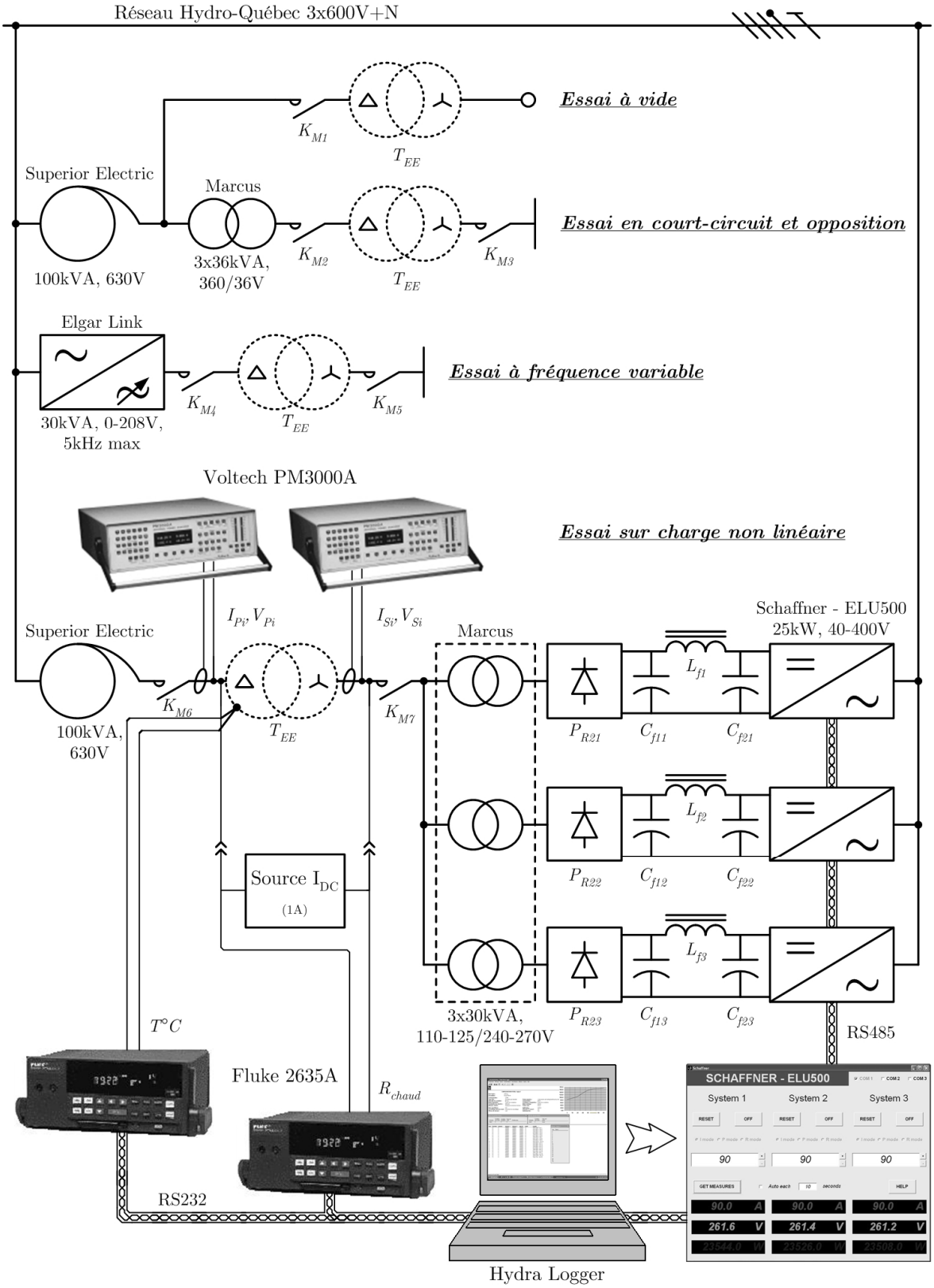


Figure III.18 – *Banc d'essai* (*Ecole Polytechnique de Montréal*)

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Deux analyseurs de puissances Voltech permettent la mesure des différentes grandeurs électriques (primaire et secondaire) et leurs décompositions spectrales.

Le dimensionnement et la modélisation du banc ont été réalisés par Mr Lionel Pislariu, étudiant en maîtrise recherche et son encadrant, le professeur Guy Olivier. Notre travail s'est limité à l'assemblage des équipements et au pilotage des onduleurs (Matlab).

III.6.2. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable

Le transformateur de test est un modèle sec en cuivre et d'une puissance de 75kVA (annexe F). Les conducteurs sont des méplats pour l'enroulement secondaire et des carrés pour le bobinage primaire et ne permettent pas de réduire la discrétisation. Les carrés sont fractionnés en 4×2 éléments tandis que les méplats sont découpés en 5×2 spires. La surface du noyau est définie par 300 segments pour 14 points d'intégration.

La figure III.19 montre une comparaison entre les valeurs expérimentales et simulées de la variation fréquentielle de l'impédance de court-circuit. Les mesures ont été réalisées à froid et les simulations mettent en évidence l'influence du circuit magnétique.

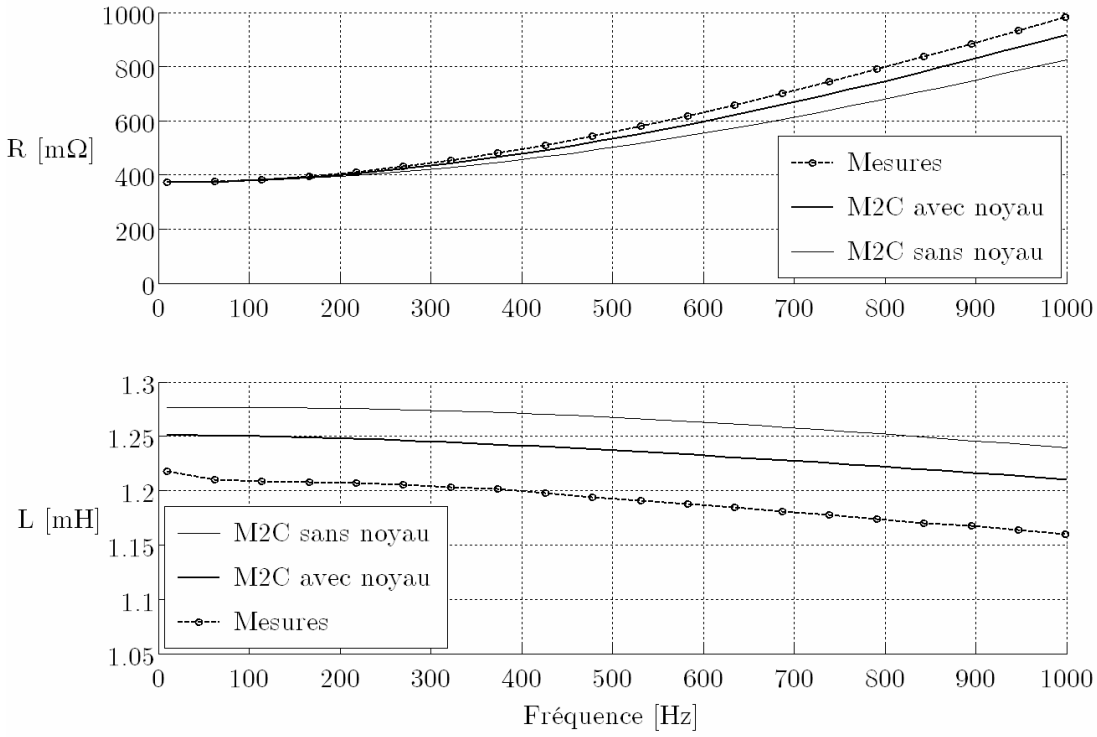


Figure III.19 – *Variation fréquentielle de l'impédance de court-circuit* (*vue côté primaire*)

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

En l'absence de noyau, l'inductance de fuite totale est très majoritairement associée à l'enroulement extérieur (quelques mH contre quelques μH pour l'enroulement intérieur). Les flux de fuite se referment dans l'air et la prise en compte du noyau a alors tendance à faire diminuer l'inductance de l'enroulement extérieur tout en augmentant celle de l'enroulement intérieur. Le rapport de transformation important explique ici le fait que l'inductance totale diminue pour ce transformateur en présence du circuit ferromagnétique.

Les calculs réalisés avec noyau (1kHz) sont entachés de -6.6 % d'erreur relative sur la résistance et de 4.3 % sur l'inductance. Sans la présence du circuit magnétique, ces erreurs augmentent à des valeurs respectives de -16% et 6.83%.

Comme prévu la résistance augmente avec la fréquence et sa variation est conforme à l'expression (I.5), pour laquelle l'influence de la température est ici omise :

$$R = R_0 + K_R f^{A_R} \tag{III.50}$$

La table III.7 donne les valeurs de K_R et A_R pour les différentes couches d'enroulement, primaires et secondaires :

Delta 75 kVA Cu		**1ère Couche (intérieure)**	**2ème Couche**	**3ème Couche**	**4ème Couche (extérieure)**	**Bobinage complet**
Avec noyau	K_R	1.272×10^{-7}	5.163×10^{-8}	3.401×10^{-7}	3.758×10^{-8}	2.526×10^{-6}
	A_R	1.376	1.78	1.904	1.914	1.780
Sans noyau	K_R	1.286×10^{-8}	3.837×10^{-8}	2.837×10^{-7}	2.461×10^{-8}	1.468×10^{-6}
	A_R	1.589	1.801	1.913	1.937	1.831

Table III.7 – *Coefficients d'approximation de la composante résistive fréquentielle*

Le nombre de couche d'enroulement est donc un paramètre majeur, caractérisant l'impact des effets induits [**Dowell-66**], [**Carsten-88**]. L'exposant A_R varie en fonction des couches et reste inclus dans l'intervalle des valeurs théoriques [0.5 2].

Dans l'expression (III.50), l'influence de la température a été négligée. Néanmoins, pour une température de fonctionnement donnée, il suffit de corriger la résistance statique R_0 et le coefficient K_R selon l'expression (I.5).

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Afin de vérifier la bonne corrélation entre les variations fréquentielles et thermiques de la résistance, supposons un enroulement dont la température est uniforme. Celle-ci est soit de 18.2°C (cas des mesures précédentes) ou fixée à la limite moyenne définie par la classe d'isolation soit 190°C.

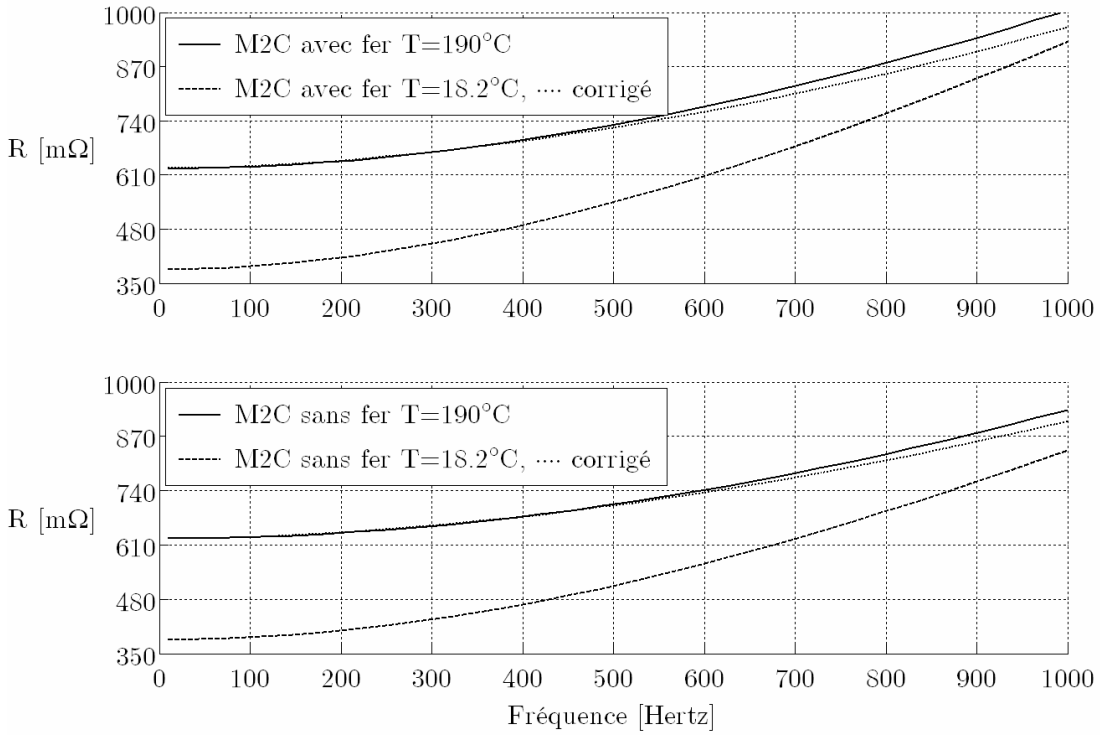


Figure III.20 – *Variation fréquentielle et thermique de la résistance* (*vue côté primaire*)

Les simulations de la figure précédente montrent que la prise en compte de la température dans l'équation (I.5) traduit relativement efficacement son influence. En effet les erreurs relatives (à 1kHz) entre la simulation à 190°C et la valeur corrigée issue de la simulation à 18.2°C sont respectivement de 4.1% avec et 2.8% sans noyau.

L'examen des grandeurs globales vérifie donc l'efficacité de la méthode, mais les erreurs subsistent et s'expliquent en plus de celle liés aux approximations de modélisation, de plusieurs manières. Tout d'abord les pertes vagabondes ont été négligées dans le calcul électromagnétique. De plus, la discrétisation n'a pu être affinée à souhait et les conducteurs dédiés au raccordement ont été omis. Mais la source d'erreur principale provient de la géométrie du bobinage qui n'est pas parfaitement cylindrique. Le calcul des résistances en régime continu diffère peu, mais celui des inductances est plus affecté et modifie également la prise en compte des courants induits.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

III.6.2.1. Influence du Nombre de Cale

La figure III.21 montre la forme de l'enroulement du transformateur de 75 kVA et sa géométrie circulaire équivalente utilisée en simulation.

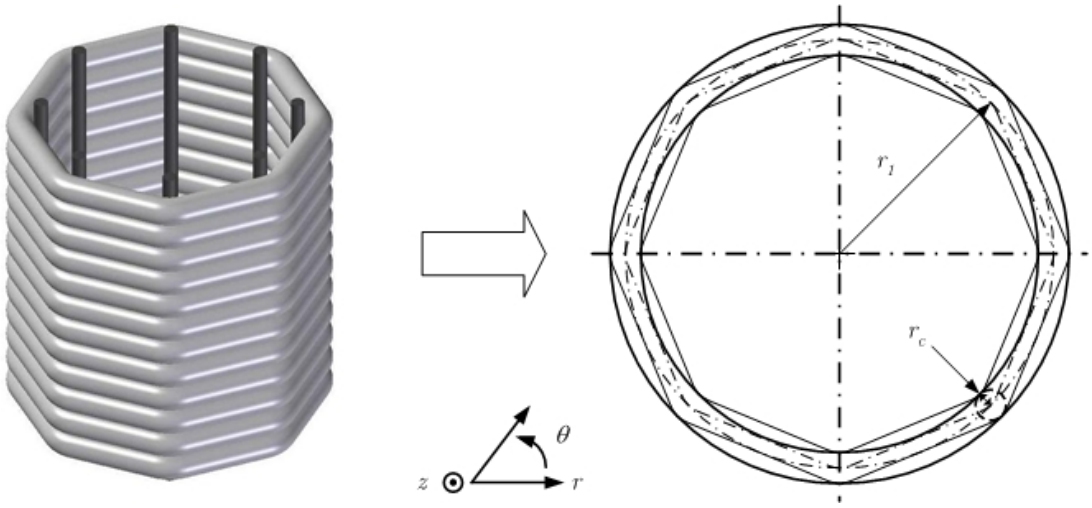


Figure III.21 – *Géométrie réelle d'une couche enroulement* : *Influence du nombre de cale*

Si N_{cale} est le nombre de cale, le rapport entre les résistances des géométries réelles et de simulation est donné par la relation en sinus cardinal suivante :

$$\frac{\mathrm{R}_{réelle}}{R_{axi}} = \frac{N_{cale}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{N_{cale}}\right) \tag{III.51}$$

Pour N_{cale}=8, l'erreur relative sur la composante résistive est de 2.62%, donc négligeable. Pour le calcul des inductances, nous avons fait une simulation pour une spire dans l'air et maintenue par 5, 8, ou 12 cales. Nous avons alors comparé l'inductance propre de cette spire avec celle d'une spire circulaire de rayon identique.

La figure III.22 montre la variation des inductances et la valeur absolue de l'erreur relative associée en fonction du rayon normé de la spire.

La lecture des données géométriques du transformateur d'essai (annexe F), nous donne un rayon minimal normé de 34 pour la couche intérieure de l'enroulement secondaire. Sachant que le bobinage possède 8 cales, l'écart entre la valeur de l'inductance obtenue par le calcul axisymétrique et celle réelle de la spire induit une erreur de 5.78 %.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les inductances mutuelles sont bien évidemment elles aussi différentes mais n'ont pas été étudiées ici étant donné le trop grand nombre de combinaisons possibles.

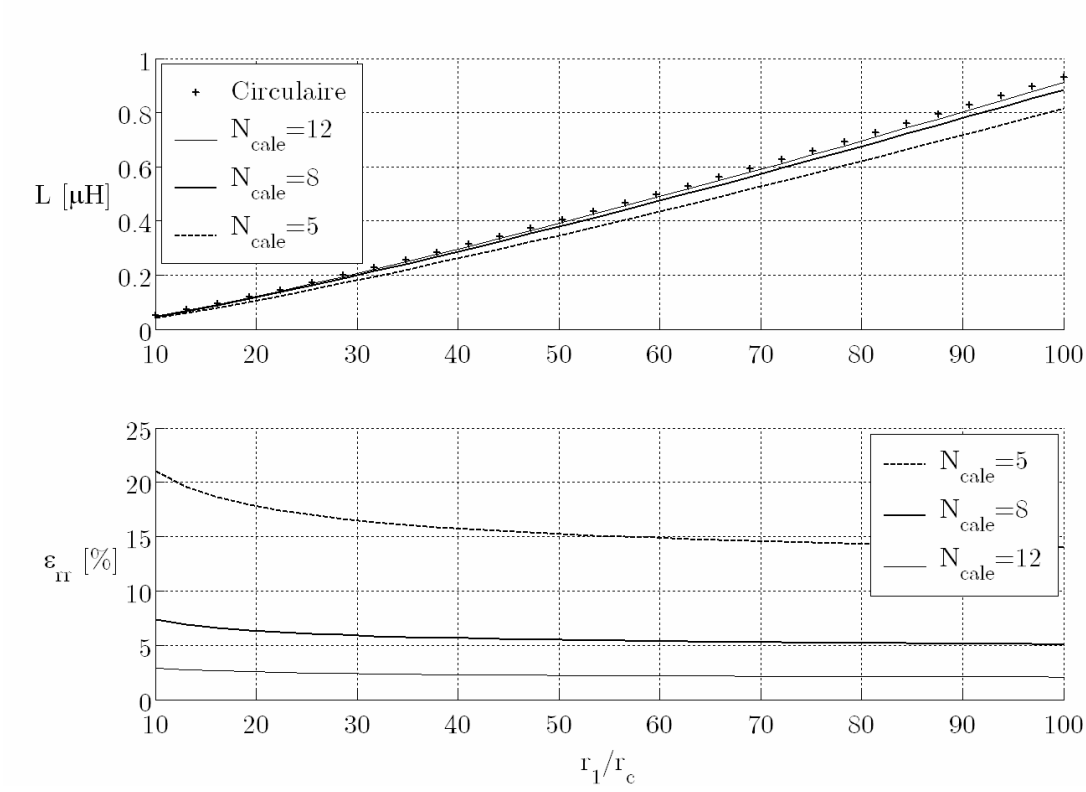


Figure III.22 – *Influence du nombre de cale N_{cale} sur la valeur l'inductance propre*

III.6.3. Essais d'Echauffements

Les essais thermiques se sont déroulés en deux étapes. Des essais linéaires préalables ont permis d'étalonner le modèle thermique et d'estimer l'échauffement nominal du transformateur sur charge linéaire. A partir de cette valeur de référence, les essais sur charge non linéaires ont été ajustés de manière à retrouver une température identique. Dans ce cas, le courant absorbé par la charge permet la détermination directe et expérimentale du coefficient de déclassement à appliquer au transformateur. Ce déclassement est alors vérifié en injectant ce courant dans le modèle thermique.

III.6.3.1. Essais Linéaires

Les mesures effectuées lors des essais linéaires en court-circuit et opposition montrent la faible influence des pertes fer sur l'échauffement total de l'enroulement. Les valeurs simulées sont ici basées sur l'essai de court-circuit (I_2=209A) et concordent avec l'expérimentation.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

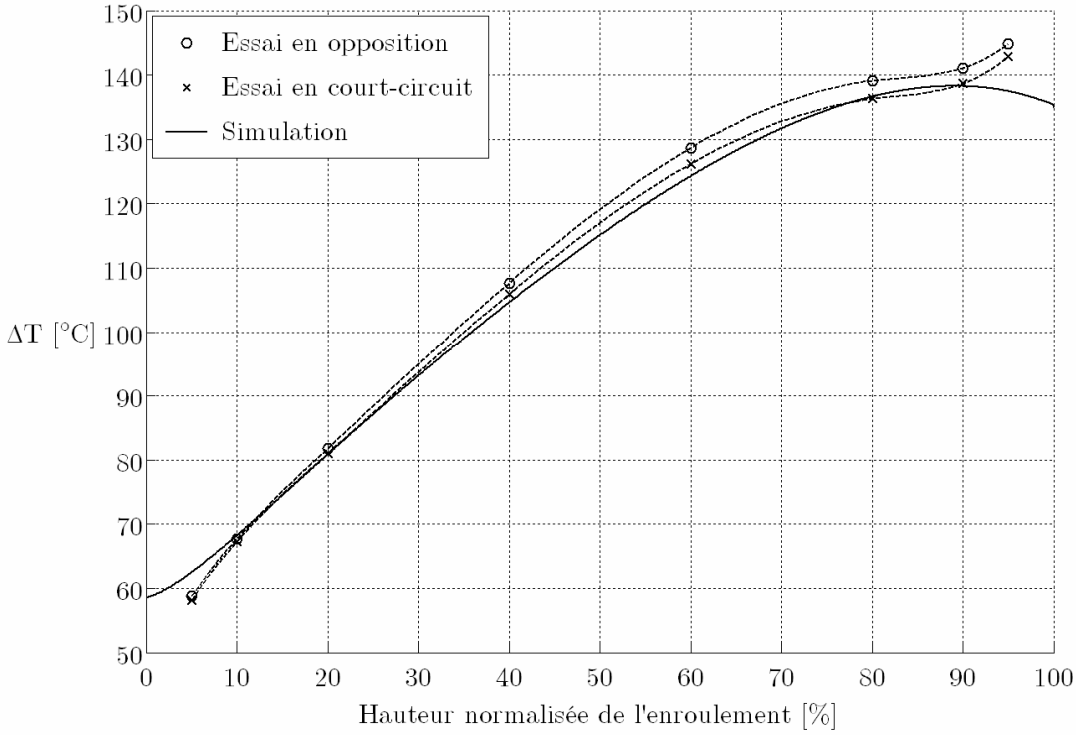


Figure III.23 – *Echauffement à la surface de la couche extérieure*

Cette comparaison en régime linéaire, nous a permis d'étalonner le modèle thermique pour la modélisation ultérieure sur charges non linéaires. En ce sens, la simulation nous a permis de déterminer le facteur de correction à appliquer sur les coefficients de convection pour traduire les perturbations engendrées par le noyau et la tôle du boîtier.

A partir de la connaissance des surfaces des ouïes de refroidissement, un calcul analytique limité aux faces avant et arrière donne un coefficient de minoration faible de 25.1%. Toutefois, les ouïes assurent un refroidissement efficace et la simulation conduit à la considération d'un facteur plus réaliste de 81%.

III.6.3.2. Essais Non Linéaires à Echauffement Equivalent

Le transformateur d'essai fut ensuite chargé par deux charges non linéaires. La première était un pont redresseur monophasé capacitif et la seconde un pont redresseur triphasé capacitif.

Pour chacune d'elles le courant absorbé au niveau du bus continu (figure III.18) a été ajusté de manière à converger, à l'équilibre thermique vers un échauffement équivalent à celui obtenu lors de l'essai en opposition.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

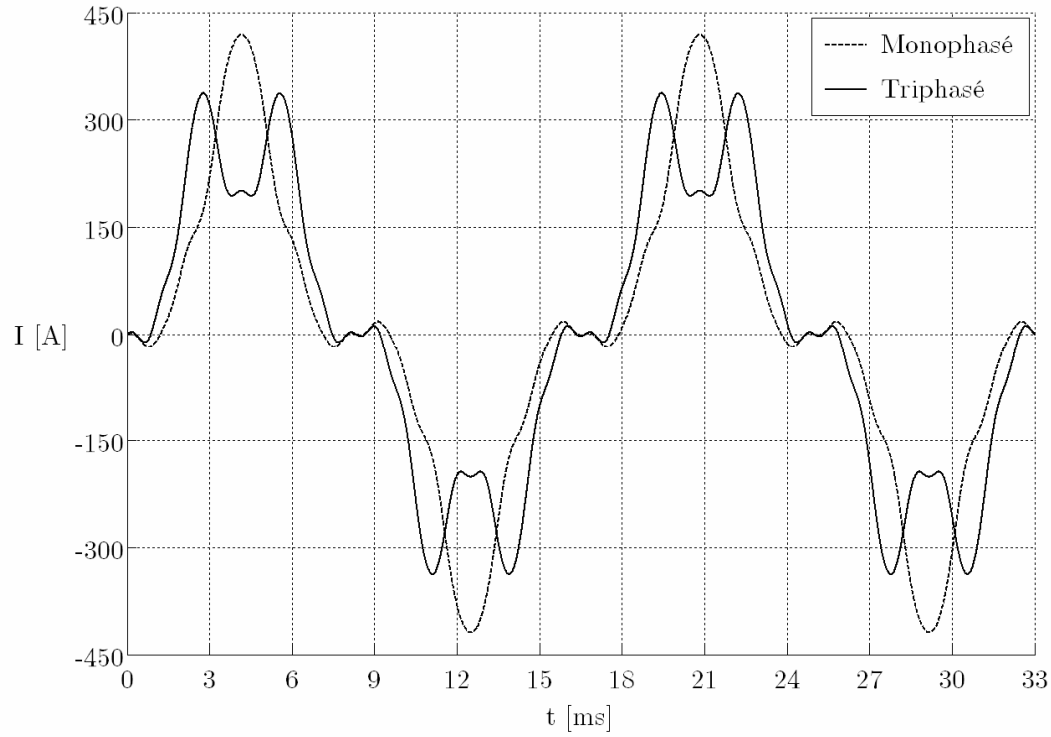


Figure III.24 – *Courants de charges sur redresseurs mono/triphasés capacitifs*

Redresseur	I_{eff}	I_1	I_3	I_5	I_7	I_9	I_{11}	I_{13}	I_{15}	I_{17}	*THD*	*FHL*
Monophasé [A]	202.8	181.1	88.4	15.3	13.9	5.8	4.7	3.1	2.3	1.8	50.3%	3.1
Triphasé [A]	196.7	185.6	12.1	59.9	18	3.6	11.1	5.1	1.6	4.2	35.1%	4.3

Table III.8 – *Décompositions spectrales des courants de charges non linéaires*

Les définitions du *THD* et du facteur de perte harmonique *FHL* sont en annexe A.

L'erreur de calcul commise sur la résistance à froid (figure III.19) a pour ces charges une influence moindre. Ainsi, en se basant sur les valeurs de résistance mesurées, on obtient pour la charge monophasée 576 W de pertes Joule par colonne et 574 W pour la charge triphasée. A partir de la simulation le calcul de ces pertes par colonne donne respectivement 546W et 544W pour des erreurs relatives associées de 3.5‰ et 3.7‰.

Ces déperditions sont légèrement inférieures à celle mesurées lors des essais linéaires et ne prennent pas en considération l'augmentation des pertes vagabondes. De plus, elles masquent en réalité des densités volumiques de pertes (III.29) plus importantes et plus "localisées" et donc responsables du suréchauffement.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le modèle électromagnétique comporte 2104 inconnues et le maillage thermique s'appuie lui sur 61900 nœuds. Pour les deux charges précédentes le nombre de résolution est sensiblement le même, soit 3×9 pour le modèle électromagnétiques et 4 pour le modèle thermique, de manière régressive jusqu'à stabilisation de la température. Après un temps de calcul d'environ 25 minutes (processeur 1.7GHz, 785Mo RAM), les comparaisons entre les simulations magnétothermiques et les mesures agrémentent le déclassement à adopter.

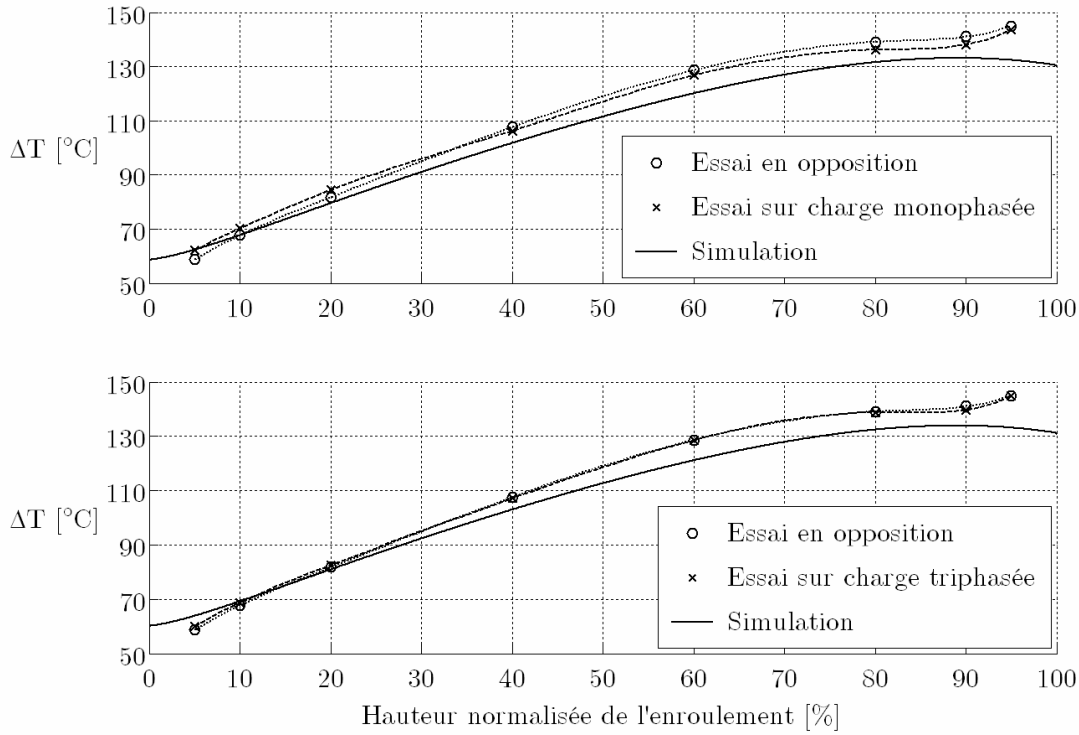


Figure III.25 – *Echauffement sur charges non linéaires*

A partir du courant efficace mesuré lors des ces essais, le coefficient de déclassement à appliquer sur la puissance nominale du transformateur pour obtenir celle effective est donc de 97.3% sur charge monophasé et 94.4% sur charge triphasée [**Fuchs-06**].

A partir de la décomposition spectrale, l'utilisation du coefficient issue de la norme européenne (I.11), conduit à des déclassements plus sévères de valeurs respectives 92.4% et 91.8%. Néanmoins, cette norme fournit des expressions complémentaires et nuancées en fonction du type de conducteur employé et faisant intervenir les pertes Joule réelles par courants induits à la fréquence fondamentale.

Pour notre transformateur les pertes en charge et à chaud sont de 3036W et inclues les pertes vagabondes. Un calcul mené à partir des résistances à chaud nous donne 2724W

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

de pertes en régime continu et pour un courant efficace identique. Le calcul du coefficient lié à la norme IEEE (I.12) et référencé par rapport à un courant nominal de 209A donne des valeurs de K_{AC}=2.92 pour la charge monophasée et K_{AC}=3.82 pour la charge triphasé. Finalement l'application du coefficient de déclassement à partir de (I.9) et (I.10) conduit respectivement à des valeurs de déclassement de 83.5% et 77.5% pour chacune des charges non linéaires.

Ces deux coefficients sont donc à priori les plus sévères. Néanmoins la séparation des pertes Joule en régime continu et à la fréquence fondamentale est difficile et imprécise, particulièrement pour un transformateur de petite puissance. Pour notre transformateur l'écart entre ces deux pertes n'est que de environ 1% et entraîne une erreur importante dans le calcul précédent.

III.7. Conclusion

La méthode des circuits couplés, associée à l'équation thermique en axisymétrique a été utilisée pour la modélisation magnétothermique d'un transformateur à colonne de profil cruciforme.

Le noyau du transformateur réel a été remplacé par un noyau axisymétrique et énergétiquement équivalent, puis modélisé par des densités superficielles et fictives de courant. Le choix d'une méthode d'intégration numérique adaptée a permis de réduire le nombre d'inconnue associé à ce modèle.

Des formules analytiques de distribution de courant dans les bobines ont été introduites pour réduire le nombre de discrétisation dans le cas de conducteur rond ou de type feuillard.

Puis, des techniques d'homogénéisation ont été appliquées dans le cadre du problème thermique pour remplacer les enroulements par des blocs de propriétés thermiques équivalentes. Un modèle simplifié a alors permis une évaluation rapide de la distribution de température dans les enroulements.

Enfin, les essais réalisés sur un transformateur de 75kVA en cuivre ont permis de vérifier à la fois l'efficacité de la méthode et l'application des coefficients de déclassement issus des normes. Néanmoins, cette méthode reste adaptée aux inducteurs circulaires et aux colonnes cruciformes et une méthode plus généralisée est donc souhaitable.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

CHAPITRE IV

MODELISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

MODELISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1. INTRODUCTION ..... - 129 -
IV.2. FORMULATION ELECTROMAGNETIQUE ..... - 129 -
IV.2.1. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Total ..... - 130 -
IV.2.1.1. Prise en Compte de Région Multiplement Connexe ..... - 130 -
IV.2.2. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Réduit ..... - 131 -
IV.2.3. Couplage entre les Formulations en Potentiels Total-Réduit ..... - 132 -
IV.2.4. Choix de la Méthode ..... - 133 -
IV.3. COUPLAGE AUX EQUATIONS DE CIRCUITS ..... - 135 -
IV.3.1. Equation de Couplage ..... - 135 -
IV.3.1.1. Couplage en Potentiel Réduit ..... - 137 -
IV.3.1.2. Couplage en Potentiels Combinés Total-Réduit ..... - 138 -
IV.3.2. Choix des t_{0k} ..... - 138 -
IV.3.2.1. Cas de Conducteurs Massifs de Section Rectangulaire ..... - 138 -
IV.3.2.2. Cas de Conducteurs Quelconques ..... - 139 -
IV.3.2.3. Approximation des t_{0k} ..... - 141 -
IV.3.3. Assemblage Matriciel en Alimentation en Tension (Réduit) ..... - 142 -
IV.3.3.1. Méthode Non Linéaire de Newton-Raphson ..... - 143 -
IV.3.4. Assemblage Matriciel sur Sources de Courant (Total-Réduit) ..... - 145 -
IV.3.4.1. Concaténation des Conducteurs ..... - 146 -
IV.4. MODELISATION THERMIQUE ..... - 147 -
IV.4.1. Hypothèses de Modélisation ..... - 147 -
IV.4.2. Choix des Paramètres ..... - 148 -
IV.4.2.1. Conductivités Thermiques dans le noyau ..... - 149 -
IV.4.2.2. Tenseur de Conductivités Thermiques ..... - 149 -
IV.4.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs et Radiatifs ..... - 151 -
IV.5. VALIDATION EXPERIMENTALE ..... - 153 -
IV.5.1. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable ..... - 153 -
IV.5.1.1. Influence des Coins du Bobinage ..... - 154 -
IV.5.2. Essais d'Echauffement ..... - 155 -
IV.5.2.1. Essais Linéaires à Courant Nominal ..... - 156 -
IV.5.2.2. Essais Non Linéaires à Courant Efficace Equivalent ..... - 157 -
IV.6. CONCLUSION ..... - 160 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.1. Introduction

Le modèle développé dans le chapitre précédent concerne des transformateurs dont les colonnes et les bobines ont une forme quasi-circulaire. Dans le cas général, un transformateur peut avoir une géométrie quelconque et les simplifications bidimensionnelles faites précédemment peuvent aboutir à des résultats erronés.

Nous développerons dans ce chapitre un modèle électromagnétique 3D basé sur un couplage entre la M2C et la formulation MEF en potentiel scalaire magnétique [**Lefèvre-04b**]. Pour cela le calcul électromagnétique comportera deux étapes :

Une première non linéaire sera basée sur un potentiel scalaire magnétique réduit pour la détermination des pertes fer dans le noyau ferromagnétique. Une seconde s'appuyant sur le potentiel scalaire magnétique total permettra d'évaluer les pertes Joule en régime harmonique dans les enroulements.

Un couplage analytique et numérique avec les équations de circuit permettra alors d'imposer la tension primaire (sinusoïdale) lors de la première étape et les courants harmoniques absorbés par une charge non linéaire lors de la seconde étape [**Clavel-98**].

Puis nous introduirons le modèle thermique 3D qui sera couplé au modèle électromagnétique pour obtenir la distribution de température dans les enroulements et le circuit magnétique.

Enfin, nous terminerons le chapitre par une validation sur un transformateur de 10kVA. Celui-ci est surdimensionné et instrumenté pour la mesure du suréchauffement engendré sur des charges non linéaires et pour un courant efficace identique.

IV.2. Formulation Electromagnetique

Au chapitre II, nous avons brièvement présenté les différentes formulations électromagnétiques. Notre choix s'est porté sur la formulation en potentiel scalaire magnétique en raison, entre autres, de son faible coût algorithmique.

Nous développerons ici la mise en œuvre de cette formulation dans le cas des transformateurs et nous nous intéresserons au choix du potentiel le mieux adapté.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.2.1. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Total

Dans une région sans aucune source de courant, l'équation d'Ampère (I.1) devient :

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{IV.1}$$

Cela signifie que **H** dérive d'un potentiel scalaire appelé dans ce cas le potentiel scalaire magnétique total ϕ_t :

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_t \tag{IV.2}$$

Dans ce cas, l'équation différentielle à résoudre est donnée par la loi de conservation du flux :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot \left(\mu \nabla \phi_t \right) = 0 \tag{IV.3}$$

IV.2.1.1. Prise en Compte de Région Multiplement Connexe

Dans un transformateur, le circuit magnétique n'est pas simplement connexe. Ainsi, considérons, le domaine ferromagnétique $\Omega_f = \Omega_{f1} \cup \Omega_{f2}$, multiplement connexe, où siège le champ magnétique, généré par les *NI* ampères-tours (magnétostatique) :

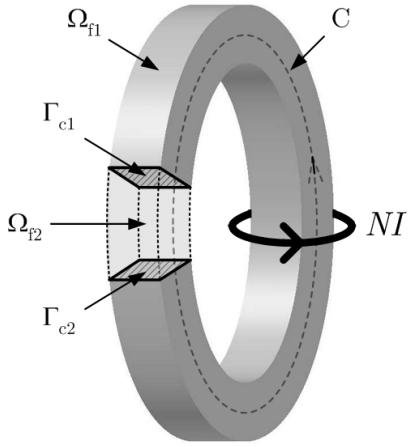


Figure IV.1 – *Traitement des régions multiplement connexes* (*potentiel total* ϕ_t)

Le champ **H** dans Ω_f s'exprime à partir du potentiel scalaire magnétique total ϕ_t *et* l'application du théorème d'Ampère conduit ici à l'annulation de la circulation du champ magnétique sur le contour moyen *C* des lignes de champ :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\oint_C \mathbf{H} dl = -\oint_C \nabla \phi_t dl = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Pour "forcer" ce théorème, il est donc nécessaire d'introduire un saut de potentiel $\Delta\phi$ sur le contour d'intégration. Pour cela, une coupe fictive, d'interfaces Γ_{c1} et Γ_{c2}, est insérée dans le circuit magnétique. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont les potentiels respectifs sur les frontières de cette coupure, le saut est alors défini tel que :

$$\oint_C \mathbf{H} dl = -\oint_C \nabla\left(\phi_t + \Delta\phi\right) dl = NI, \text{ soit } \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = NI \qquad \text{(IV.5)}$$

De manière générale et pour un circuit magnétique multiplement connexe, supportant plusieurs bobinages dissociés, le nombre de coupes nécessaire à effectuer s'appuie sur la caractéristique de Euler-Poincaré [**Phung-05**], qui donne par réciprocité le nombre de trou dans le circuit magnétique. Plus simplement, il doit y avoir autant de coupe dans le noyau que d'enroulements, enlaçant un chemin fermé distinct dans celui-ci.

Dans le cas d'un circuit magnétique de transformateur, le ou les sauts (IV.5) sont, sauf cas de fonctionnement particulier, égaux aux ampères-tours de magnétisation et sont non nuls uniquement sur l'une des frontières Γ_{c1}, Γ_{c2}. Ils peuvent être ajoutés directement dans le terme source, voire modélisés par le biais d'éléments coque spéciaux avec un saut de potentiel [**LeFloch-03**]. Dans ce cas, leur intégration numérique peut se faire dans l'air/vide environnant, ou de manière préférentielle dans le fer afin de conserver les propriétés matricielles de symétrie.

IV.2.2. Formulation en Potentiel Scalaire Magnétique Réduit

Pour tenir compte des courants sources, on utilise le potentiel scalaire magnétique réduit ϕ_r :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} - \mathbf{H_r} = \mathbf{H_0} - \nabla\phi_r \qquad \text{(IV.6)}$$

Où $\mathbf{H_0}$, est le champ source calculé par la méthode de Biot et Savart (annexe B) et $\mathbf{H_r}$ le champ réduit dû aux régions ferromagnétiques et/ou conductrices perturbant le champ $\mathbf{H_0}$. Dans un transformateur, le champ réduit provient essentiellement de la présence du circuit magnétique et dans une moindre mesure des tôles et de la cuve.

L'équation à résoudre dans ce cas est la suivante :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\mu \left(\mathbf{H_0} - \nabla \phi_r \right) \right) = 0 \tag{IV.7}$$

Ou sous la forme variationelle lié à l'utilisation des éléments finis (i, j=1 à 3) :

$$\int_{\Omega} \nabla \alpha_i \mu \nabla \phi_{rj} d\Omega + \int_{\Gamma_B} \alpha_i \mu \mathbf{Hn} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \alpha_i \mu \mathbf{H_0} d\Omega \tag{IV.8}$$

Dans l'équation précédente, le calcul contraignant du champ source peut néanmoins se ramener à une intégrale surfacique limitée à l'interface entre deux matériaux présentant des perméabilités μ_{r1} et μ_{r2} différentes et constantes [**Guérin-94**], [**Brunotte-91**] :

$$\int_{\Omega} \nabla \alpha_i \mu \mathbf{H_0} d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_0 \left(\mu_{r1} - \mu_{r2} \right) \mathbf{H_0} \cdot \mathbf{n} d\Omega \tag{IV.9}$$

Lorsque la perméabilité d'un milieu est importante, la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit ϕ_r engendre une mauvaise précision dans les calculs. En effet, le champ **H**, alors assez faible dans le noyau, résulte de la différence entre les champs $\mathbf{H_0}$ et $\mathbf{H_r}$ très grands (IV.6). Dans ce cas, un couplage entre les formulations en potentiels scalaires total (fer) et réduit (air) s'avère être un choix judicieux permettant de tenir compte à la fois des courants sources et des régions ferromagnétiques.

IV.2.3. Couplage entre les Formulations en Potentiels Total-Réduit

Le couplage entre les deux formulations peut se faire soit par un saut de potentiel consistant à satisfaire la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique sur la frontière [**Abakar-01**], soit par une méthode de perturbation. Le couplage par perturbation se déroule en deux étapes et n'alourdit que très peu la résolution dans le cas d'un algorithme non linéaire [**Mayergoyz-87**].

La première étape consiste à calculer un potentiel réduit ϕ_a, global, pour le cas où la perméabilité du circuit magnétique tend vers l'infini. Le champ magnétique dans le noyau s'annule donc et seul le champ dans l'air est conservé. Il devient le terme source de la deuxième étape visant à calculer le potentiel total ϕ_b de perturbation dans tout le domaine. Le champ magnétique dans le fer Ω_f (IV.2) et dans l'air Ω_0 (IV.6) s'exprime par :

$$\begin{cases} \mathbf{H} = -\nabla \phi_b \text{ dans } \Omega_f \\ \\ \mathbf{H} = \mathbf{H_0} - \nabla \left(\phi_a + \phi_b \right) \text{ dans } \Omega_0 \end{cases} \tag{IV.10}$$

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour vérifier, les performances de cette seconde méthode, nous l'avons simulé sur la base géométrique de notre inductance de référence (voir annexe E). La figure suivante montre la bonne continuité de la composante normale de l'induction **B**, ainsi que de celle tangentielle du champ magnétique **H** (tracés confondus) à l'interface entre le noyau et l'air.

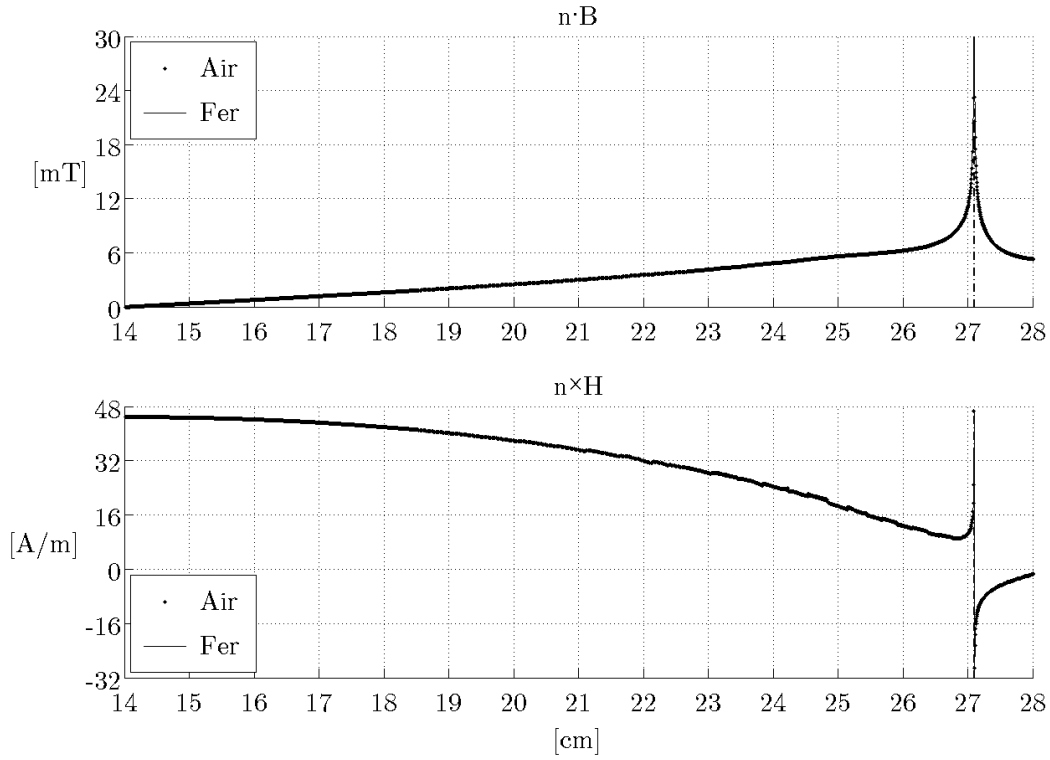


Figure IV.2 – *Solénoïde monocouche I=1A : Continuité de la composante normale de l'induction et de celle tangentielle du champ magnétique à l'interface*

IV.2.4. Choix de la Méthode

La formulation en potentiel total ϕ_t n'est pas applicable dans les régions où se trouvent les sources. Celle-ci doit donc être obligatoirement couplée à la formulation en potentiel réduit ϕ_r. D'autre part dans le cas des circuits magnétiques des transformateurs, le problème du saut de potentiel $\Delta\phi$ (IV.5), lié au noyau multiplement connexe alourdit d'avantage cette formulation. Pour simplifier le problème, nous envisageons deux étapes : l'une en présence du courant magnétisant I_m, l'autre en son absence. La figure suivante présente les deux cas envisagés pour le calcul du champ magnétique dans le noyau d'un transformateur de 10kVA (annexe F). Les résultats de simulation de ces deux cas ont été confortés par ceux issues d'une formulation à base de potentiel vecteur magnétique **A** et de laquelle sont issues les tracés des lignes de champ.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

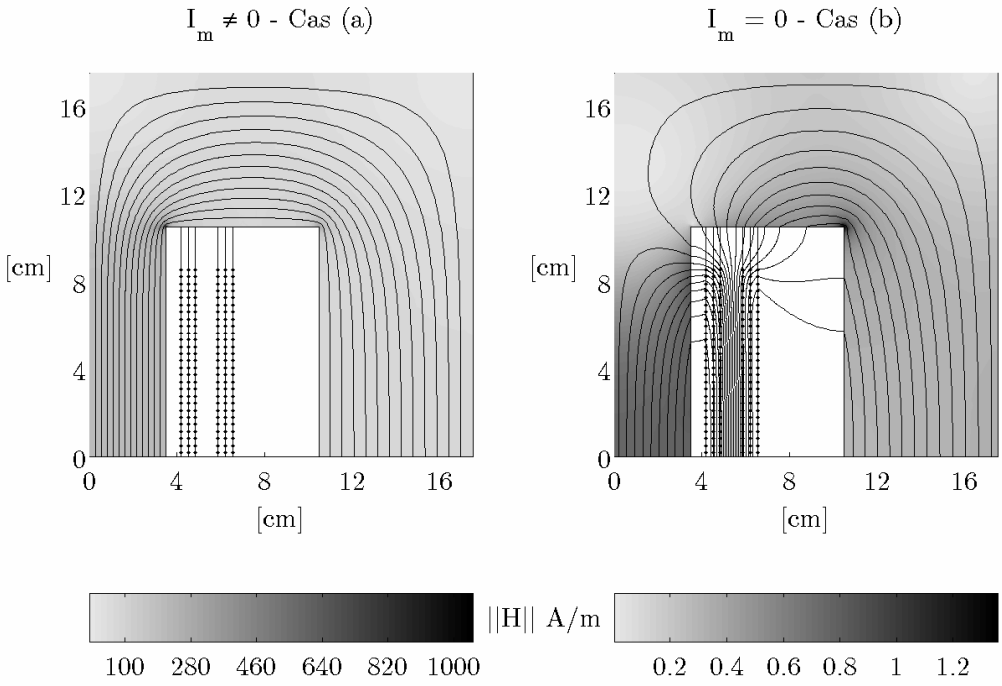


Figure IV.3 – *Champ magnétique dans le circuit ¼ (10kVA) et lignes de champ* : *Cas (a) : Courant de magnétisation I_m non nul, Cas (b) : Courant de magnétisation I_m nul*

Le cas (a) de la figure précédente est obtenu à partir d'une formulation en potentiel réduit. Ainsi, le courant de magnétisation I_m impose, via l'application du théorème d'Ampère dans le noyau, un champ de valeur significative et permet pour notre cas d'étude l'utilisation de ce potentiel ϕ_r. Il n'y a pas pour ce transformateur d'instabilité numérique tout au plus une légère imprécision nécessitant un maillage plus affiné.

Pour le cas (b) le champ magnétique dans le fer est obtenu à partir d'une formulation en potentiel total. En effet le courant de magnétisation est ici négligé et les valeurs faibles du champ magnétique issu des flux de fuite justifient alors l'utilisation de ce potentiel ϕ_t. Cependant, l'ajout du saut de potentiel $\Delta\phi$ n'est dans ce cas plus utile puisque les ampères-tours primaires et secondaires dus au courant de charge se compensent.

Pour le transformateur d'étude, les faibles valeurs des harmoniques du courant de magnétisation peuvent être négligées dans le calcul des échauffements. En effet, leurs amplitudes très limitées se traduisent par un rapport moindre sur les pertes supplémentaires dans les enroulements. Néanmoins, un transformateur conçu pour supporter des charges non linéaires dispose normalement d'enroulements surdimensionnés. La proportion de l'échauffement dans les enroulements dû aux pertes fer n'est dans ce cas

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

plus négligeable. C'est pourquoi nous distinguerons deux étapes de calcul, dont chacune sera associée à une formulation différente :

Une première étape à la fréquence fondamentale permettra à partir d'une tension primaire imposée et sinusoïdale de calculer les pertes dans le circuit magnétique. Celle-ci nécessite donc un couplage aux équations de circuit ainsi qu'un traitement adapté de la non linéarité du noyau. Pour les raisons évoqués précédemment, les effets de courants induits dans l'enroulement primaire sont alors négligés et les conducteurs ne sont pas discrétisés. La formulation retenue est alors plus simplement celle en potentiel réduit.

La deuxième étape vise à calculer les pertes supplémentaires dans les enroulements et uniquement dues aux courants non sinusoïdaux engendrés par la charge. Le courant de magnétisation est négligé et la résolution linéaire nécessite alors l'utilisation du potentiel total dans le circuit magnétique. Les conducteurs sont discrétisés et le couplage aux équations de circuit doit donc permettre l'imposition du courant de charge.

IV.3. Couplage aux Equations de Circuits

Deux équations de couplage sont nécessaires. Une première basée uniquement sur le potentiel scalaire réduit et une seconde sur l'utilisation des potentiels combinés totaux et réduits. Un calcul électrocinétique conduit à la relation recherchée et fait intervenir un potentiel vecteur électrique $\mathbf{t_0}$ (cf § II.2.2.3) qui dépend du domaine de couplage.

IV.3.1. Equation de Couplage

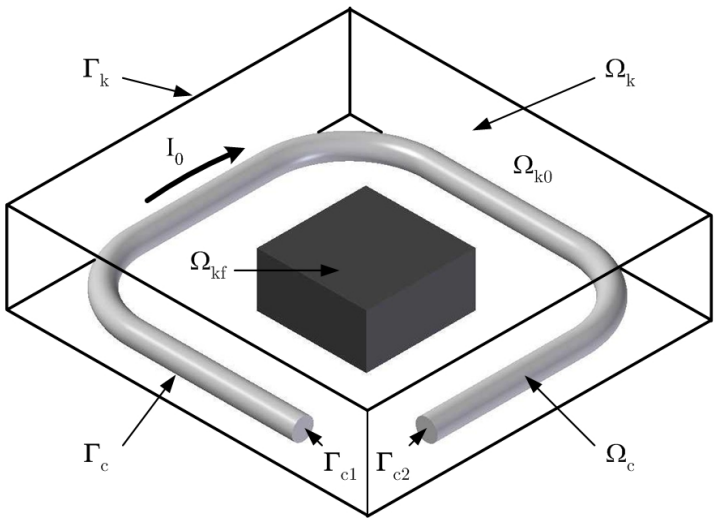


Figure IV.4 – *Calcul électrocinétique* : *Boîte de couplage avec les équations de circuits*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Considérons tout d'abord un conducteur seul, de volume Ω_c et de frontière circonférentielle Γ_c. En électrocinétique, l'application d'une différence de potentiel $U_0 = V_{10} - V_{20}$, respectivement sur les surfaces équipotentielles Γ_{c1}, Γ_{c2}, assure la circulation d'un courant continu I_0, unitaire [**Abakar-01**]. Celui-ci est aussi caractérisé par une densité de courant uniforme $\mathbf{J_0}$ (II.5), vérifiant alors :

$$\mathbf{J_0} = -\sigma \nabla V_0 \tag{IV.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J_0} = 0 \tag{IV.12}$$

Associons maintenant, ce vecteur au potentiel scalaire électrique V, présent en tout point du conducteur et provenant de la circulation d'une densité de courant $\mathbf{J}$, électrodynamique, due à l'imposition d'une tension $U = V_1 - V_2$. Sachant qu'aucune densité de courant ne traverse la paroi du fil, autrement que par les surfaces Γ_{c1}, Γ_{c2}, l'utilisation de (IV.12), des identités de différentiation et des propriétés intégrales de la divergence, permet de démontrer :

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{J_0} \nabla V d\Omega = \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\mathbf{J_0} V) d\Omega = \int_{\Gamma_{c1}} \mathbf{J_0 n} V d\Omega + \int_{\Gamma_{c2}} \mathbf{J_0 n} V d\Omega = -I_0 (V_1 - V_2) = -U \tag{IV.13}$$

Où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à chaque interface Γ_{c1} et Γ_{c2}. A partir de l'expression du champ $\mathbf{E}$ exprimée en fonction du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et inclus dans l'expression (II.21), on obtient alors une première forme difficilement exploitable de la relation de couplage recherchée.

$$U = \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{J_0} \mathbf{J} d\Omega + \int_{\Omega_c} \mathbf{J_0} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\Omega \tag{IV.14}$$

Dans la première intégrale, $\mathbf{J_0}$ se substitue à la relation (IV.11), basé sur le potentiel électrocinétique V_0. De manière analogue à l'obtention de l'expression (IV.13), on fait alors apparaître la résistance (statique) R.

$$\int_{\Omega_c} \rho \mathbf{J_0} \mathbf{J} d\Omega = \int_{\Omega_c} -\nabla \cdot (V_0 \mathbf{J}) d\Omega = -\int_{\Gamma_{c1}} V_0 \mathbf{J n} d\Omega - \int_{\Gamma_{c2}} V_0 \mathbf{J n} d\Omega = U_0 I = RI \tag{IV.15}$$

La condition de conservation (IV.12), permet quant à elle l'introduction d'un potentiel vecteur électrique $\mathbf{t_0}$ associé au courant unitaire I_0 dans le conducteur.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

L'identité de différentiation s'appliquant au rotationnel de deux vecteurs permet la transformation de la deuxième intégrale (IV.14) :

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{J_0} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_c} (\nabla \times \mathbf{t_0}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_c} \mathbf{t_0} \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{t_0} \right) \mathbf{n} d\Omega \qquad \text{(IV.16)}$$

De manière à éliminer l'intégrale surfacique (IV.16), le domaine d'intégration est étendu à une "boite" Ω_k englobant la totalité du conducteur Ω_c (aucun courant sortant) et à la surface Γ_k de laquelle le potentiel $\mathbf{t_0}$ doit entre autre vérifié $\mathbf{t_0} \times \mathbf{n} = 0$.

Finalement, avec (IV.14) à (IV.16) et en utilisant le formalisme complexe (cf. chapitre 2), on obtient la relation de couplage élémentaire, pour chaque conducteur k, faisant apparaître l'induction magnétique $\mathbf{B}$ (II.35) et donc le flux magnétique ψ.

$$U_k = R_k I_k + j\omega \int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mathbf{B} d\Omega = R_k I_k + j\omega\psi \qquad \text{(IV.17)}$$

En présence d'un circuit magnétique, le domaine de couplage Ω_k, se décompose alors en deux sous domaines respectivement assignés au noyau ferromagnétique et au reste du vide (ou de l'air) environnant $\Omega_k = \Omega_{kf} \cup \Omega_{k0}$. Dans l'équation précédente, l'induction magnétique $\mathbf{B}$ permet alors d'exprimer le couplage en fonction de la formulation retenue.

IV.3.1.1. Couplage en Potentiel Réduit

Le remplacement dans l'équation de couplage (IV.17), de l'induction magnétique par celle issue de la formulation en potentiel réduit (IV.6) conduit après quelques manipulations à l'expression suivante [**Lefèvre-04c**]:

$$\begin{aligned} U_k &= R_k I_k + j\omega \int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i - \nabla \phi_r \right) d\Omega \\ &= R_k I_k + j\omega \left[\underbrace{\int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega}_{\Rightarrow L_k, M_{ki}} + \int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 (\mu_r - 1) \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega - \int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \phi_r d\Omega \right] \end{aligned} \qquad \text{(IV.18)}$$

La première intégrale représente la contribution des inductances propre L_k et mutuelle M_{ki} des N inducteurs dans le vide, dont les valeurs seront exprimées analytiquement (annexe B). L'expression (IV.18) devient alors :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$U_k = R_k I_k + j\omega L_k I_k + j\omega \sum_{i=1}^{N} M_{ki} I_i + j\omega \left[\int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 (\mu_r - 1) \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega - \int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \phi_r d\Omega \right] \quad \text{(IV.19)}$$

IV.3.1.2. Couplage en Potentiels Combinés Total-Réduit

De manière similaire, l'équation de circuit (IV.17), en potentiel total ϕ_t et réduit ϕ_r s'écrit :

$$\begin{aligned} U_k &= R_k I_k + j\omega \left[\int_{\Omega_{k0}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i - \nabla \phi_r \right) d\Omega - \int_{\Omega_{k0}} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \phi_t d\Omega \right] \\ &= R_k I_k + j\omega \left[\underbrace{\int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega}_{\Rightarrow L_k, M_{k,i}} - \int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega - \int_{\Omega_{k0}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \nabla \phi_r d\Omega - \int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \phi_t d\Omega \right] \end{aligned} \quad \text{(IV.20)}$$

On retrouve ici la même contribution due aux inductances L_k, M_{ki} et on en déduit :

$$U_k = R_k I_k + j\omega L_k I_k + j\omega \sum_{i=1}^{N} M_{ki} I_i - j\omega \left[\int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h_{0}}_i I_i d\Omega + \int_{\Omega_{k0}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \nabla \phi_r d\Omega + \int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \phi_t d\Omega \right] \quad \text{(IV.21)}$$

Si l'éventail de choix de domaine Ω_k est pour le moment large, une minimisation de celui-ci entraîne, quelque soit la formulation retenue (IV.19) ou (IV.21), une réduction des taux de remplissage des matrices de couplage et intervient dans le choix des vecteurs $\mathbf{t_{0k}}$.

IV.3.2. Choix des $\mathbf{t_{0k}}$

Si Ω_k est le domaine de modélisation complet, alors ces $\mathbf{t_{ok}}$ peuvent se substituer aux champs sources calculées par Biot et Savart. Dans ce cas, le couplage conduit à un pré calcul long, ainsi qu'à une matrice pleine et donc difficilement envisageable. La limitation du domaine au seul conducteur est donc préférable. Pour ce domaine restreint, les $\mathbf{t_{ok}}$ se déduisent de formulations numériques voire analytiques pour des géométries simples.

IV.3.2.1. Cas de Conducteurs Massifs de Section Rectangulaire

Considérons le domaine Ω_k strictement limité à une demi spire de profondeur suffisamment importante vis-à-vis de ses autres dimensions (cas bidimensionnel) et pour laquelle la section est décomposée en trois régions juxtaposées.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

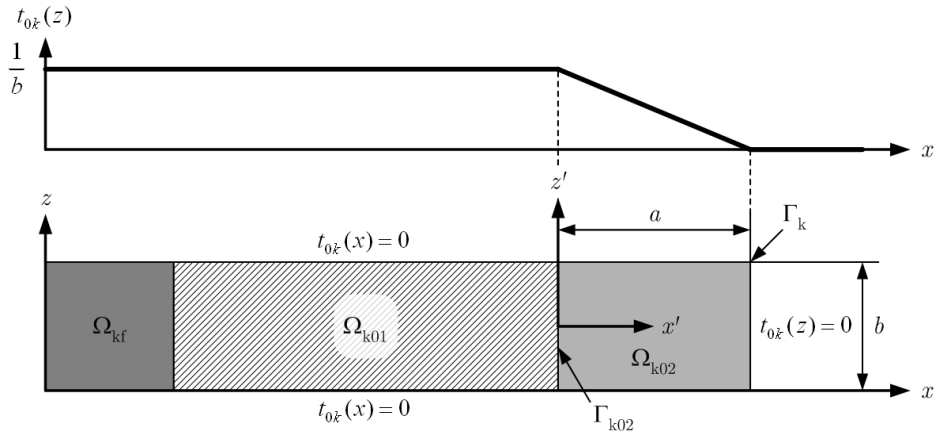


Figure IV.5 – *Détermination des* $\mathbf{t_{0k}}$ (*bidimensionnel*) : *Conducteur de section rectangulaire*

Une première Ω_{kf}, dont le caractère éventuellement ferromagnétique n'à aucune influence dans le calcul électrocinétique. Une seconde Ω_{k01} incluant l'air/vide interne et une dernière Ω_{k02} dans laquelle la densité de courant $\mathbf{J_{0k}}$ uniforme est issue d'un courant unitaire I_{0k} la traversant.

On suppose que $\mathbf{t_{0k}}$ ne possède qu'une composante t_{0k} non nulle suivant l'axe z qui s'annule pour $x'=a$ [**Nakata-88**], [**Biro-93b**]. A partir de la connaissance de la densité de courant $\mathbf{J_{0k}}$, scalaire, sur la surface du conducteur, l'application du théorème de Stokes aboutit à l'expression de cette composante dans le domaine Ω_{k02} :

$$\iint_{\Omega_{k02}} \nabla \times \mathbf{t_{0k}} d\Omega = \iint_{\Omega_{k02}} \mathbf{J_{0k}} d\Omega = \oint_{\Gamma_{k02}} \mathbf{t_{0k}} dl \Rightarrow \text{soit } t_{0k} = J_{0k}(a - x') = \frac{(a - x')}{ab} \qquad \text{(IV.22)}$$

Celle-ci varie donc linéairement dans Ω_{k02}, puis reste constante dans Ω_{k01} et Ω_{kf} de manière invariante, quelque soit la dimension de la spire. Les valeurs prisent par t_{0k} ne dépendent donc que de celles de la boîte Ω_{k02} et donc des dimensions du conducteur. A notre connaissance, pour des conducteurs quelconques, aucune expression analytique ne permet actuellement l'obtention des composantes des $\mathbf{t_{0k}}$. Leur détermination provient alors d'un calcul numérique (MEF) basé sur un potentiel magnétique scalaire ou vectoriel.

IV.3.2.2. Cas de Conducteurs Quelconques

Pour notre problématique nécessitant la prise en compte d'une distribution non uniforme des densités de courant, les conducteurs de section circulaires sont discrétisés. Chaque discrétisation véhicule une densité de courant constante qui sera remplacé par la

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

suite par le courant associé de manière à ne pas alourdir les expressions. Etant donné le faible rayon du fil, constituant le bobinage du transformateur de faible puissance à modéliser (annexe F), une discrétisation limitée à n_s secteurs s'avère suivante à la prise en compte de l'effet de proximité très majoritaire.

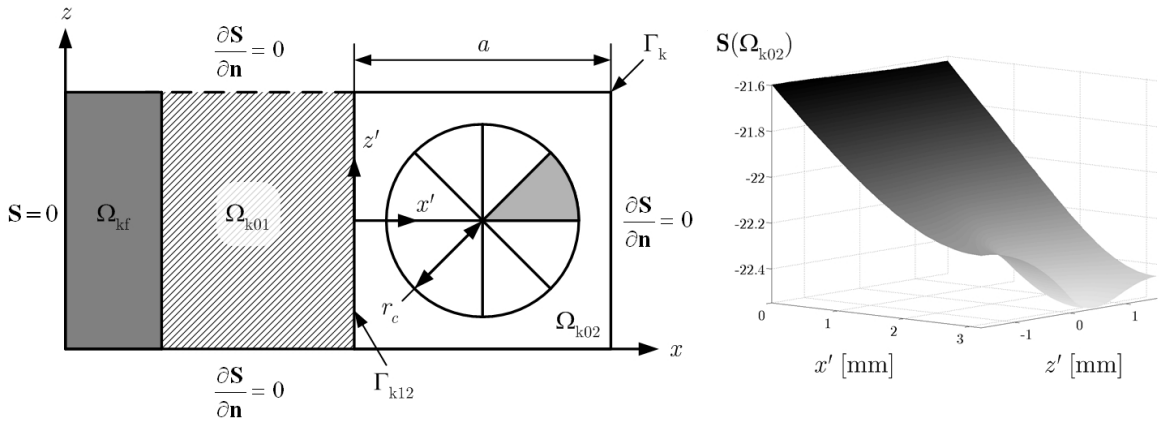


Figure IV.6 – *Domaine de définition des* $\mathbf{t_{0k}}$ *à partir du potentiel vecteur* **S**

Le domaine de couplage carré Ω_{k02} englobe donc la section du conducteur discrétisé. On peut alors calculer numériquement les $\mathbf{t_{0k}}$ distincts associés à chaque n_s inducteur élémentaire Ω_c dans cette boîte commune. Par analogie avec la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit, les vecteurs recherchés s'expriment comme suit [**Phung-05**] :

$$\mathbf{t_{0k}} = \mathbf{h_{0k}} - \nabla \phi_k \tag{IV.23}$$

Le calcul du champ source $\mathbf{h_{0k}}$ (courant unitaire) s'appuie sur un maillage des conducteurs et peut être rendu contraignant par la singularité liée à l'équation de Biot et Savart. De plus, cette formulation nécessite le pré-calcul des potentiels aux limites du domaine de couplage permettant de compenser la composante tangentielle du champ source afin de satisfaire $\mathbf{t_{0k}} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_k.

L'alternative repose sur l'introduction, à partir de la deuxième contrainte sur les $\mathbf{t_{0k}}$, d'un potentiel vecteur **S**, scalaire dans le cas bidimensionnel et duquel se dérivent les composantes du vecteur $\mathbf{t_{0k}}$ tel que :

$$\nabla \times \mathbf{t_{0k}} = \mathbf{J_{0k}} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{S}) = \mathbf{J_{0k}} \tag{IV.24}$$

Cette formulation peut être avantageusement résolue par des éléments d'arêtes.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La figure IV.6 donne l'allure de l'unique composante de **S** dans le domaine Ω_{k02}, pour un conducteur de section Ω_c et de longueur infinie. Les conditions aux limites de la boîte se traduisent ici plus directement par des conditions de type Dirichlet ou Neumann.

Ces méthodes nécessitent dans le cas général une résolution 3D pour chacune des discrétisations. Le calcul étant trop lourd et nécessitant un maillage fin de la boîte de couplage, nous n'avons pas retenu cette solution.

IV.3.2.3. Approximation des $\mathbf{t_{0k}}$

Le terme contenant les $\mathbf{t_{0k}}$ dans les équations (IV.19) et (IV.21) traduisent la contribution du circuit magnétique au flux embrassé par les enroulements. Pour des conducteurs ronds (figure IV.6), un calcul numérique montre que la composante suivant l'axe x de $\mathbf{t_{0k}}$ est uniquement non nulle dans le domaine Ω_{k02}. Ce domaine est associé à la dimension des conducteurs et ne représente qu'une très faible proportion du domaine de couplage total. Sa sensibilité sur l'équation de couplage et de plus très inférieure à celle prépondérante du domaine ferromagnétique Ω_{kf}.

Par conséquence et pour simplifier le calcul, nous avons donc regroupé un ensemble de circuit élémentaire dans une seule boîte Ω_{k02} d'une forme rectangulaire (figure IV.6). Les $\mathbf{t_{0k}}$ dans la boîte sont alors calculés par la méthode exposée en § IV.3.2.1.

Pour vérifier l'erreur induite par cette simplification nous avons appliqué cette méthode sur un solénoïde axisymétrique pour lequel nous disposons d'une solution comparative et semi-analytique (M2C) (figure IV.7). L'équation de couplage aux équations de circuit utilisée est alors celle en potentiels combinés (IV.21).

Ce solénoïde est composé de N spires circulaires embrassant un noyau ferromagnétique de rayon R_f et de longueur L_f et caractérisé par une perméabilité relative μ_r élevée. Les spires sont formées de conducteurs de rayon r_c, découpé en n_s secteurs réguliers. Pour N=6, n_s=8, r_c=1.575mm, R_f=1.5cm, L_f=5cm et μ_r=1000, les variations fréquentielles (par pas constant de 100 Hz), de l'impédance dans le plan complexe de Nyquist convergent vers des valeurs semblables pour les deux méthodes.

La finesse du maillage n'est ici pas un critère majeur pour l'obtention précise du résultat ce qui réduit le coût algorithmique de la méthode et va dans le sens de l'utilisation de la méthode mixte, analytique et numérique.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

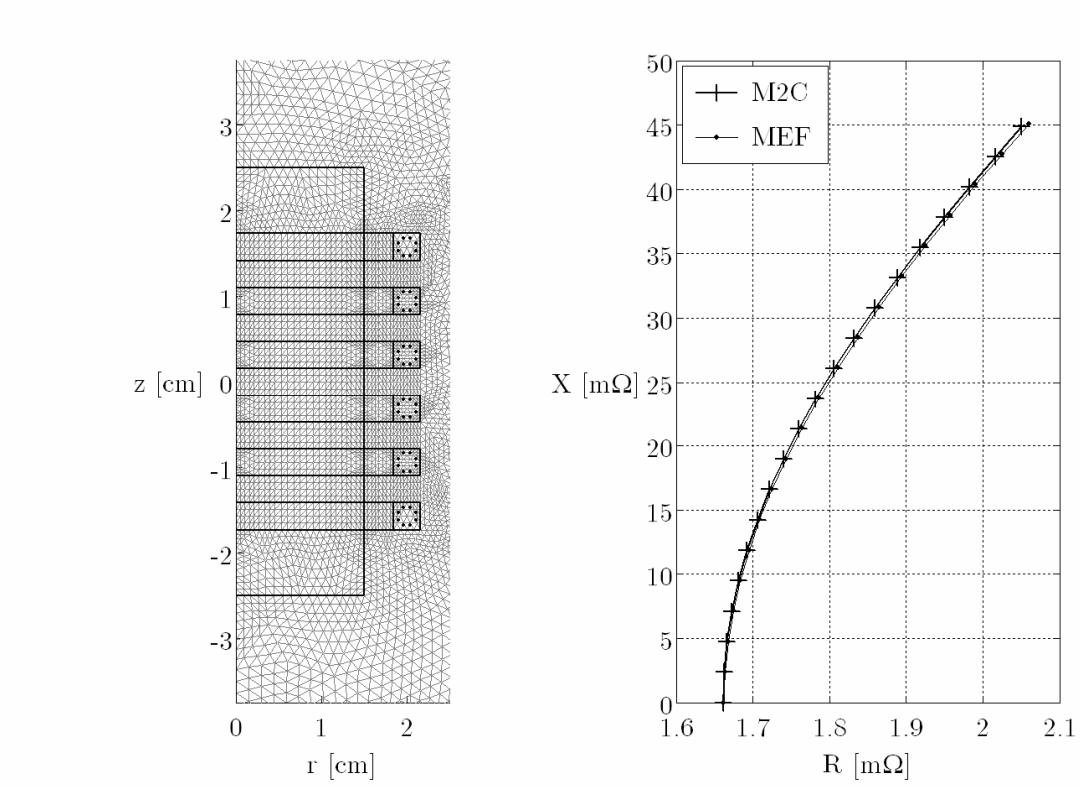


Figure IV.7 – *Variation fréquentielle de l'impédance d'un inducteur avec noyau* : *cas axisymétrique, f=0 à 2kHz par pas constant de 100Hz*

IV.3.3. Assemblage Matriciel en Alimentation en Tension (Réduit)

Nous présenterons ici l'assemblage matriciel obtenu pour la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit avec un couplage aux équations de circuit et appliqué uniquement au bobinage primaire. L'unique inconnue de type circuit est ici le courant de magnétisation I_m identique pour chaque spire.

L'adjonction d'un algorithme de résolution non linéaire, s'appuyant sur la méthode de Newton-Raphson permet alors de prendre en compte la non linéarité du circuit magnétique.

L'enroulement primaire est composé de N_1 spires, s'insérant dans un maillage à n_p nœuds. La matrice complète provient de l'expression du champ magnétique (IV.6) et de l'équation de couplage associée (IV.19). Celle-ci est de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{F_1} \\ \hline \sum \mathbf{Z_1} & \sum\sum \mathbf{R_1} + j\omega\left(\mathbf{L_1} - \mathbf{LF_1}\right) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \phi_r \\ \hline \underline{I_m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \underline{U_1} \end{array}\right] \qquad \text{(IV.25)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La matrice **K** et le vecteur $\mathbf{F_1}$ issus de l'utilisation de la MEF et de dimensions [lignes, colonnes] sont pour des éléments du premier ordre (i, $j = 1$ à 3) définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{K} \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla \alpha_i \mu \nabla \alpha_j \phi_j d\Omega, \ \left[n_p, n_p\right] \\ \mathbf{F_1} \Rightarrow -\int_{\Omega} \nabla \alpha_i \mu \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{h_0}_j I_m d\Omega, \ \left[n_p, 1\right] \end{cases} \quad \text{(IV.26)}$$

Le vecteur $\mathbf{F_1}$ est plein, dans le cadre d'une résolution non linéaire mais peut toutefois être limité à une intégration volumique dans le domaine ferromagnétique. Si les conducteurs étaient discrétisés, l'assemblage conduirait à une matrice pleine de dimensions conséquentes.

La sous matrice résistive $\mathbf{R_1}$ est diagonale, tandis que les sous matrices inductives $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{LF_1}$ sont pleines et symétriques. Ces trois matrices sont pré calculés analytiquement. La matrice $\mathbf{Z_1}$ traduit elle la contribution du noyau. Les matrices $\mathbf{LF_1}$ et $\mathbf{Z_1}$ sont définie par **:**

$$\begin{cases} \mathbf{Z_1} \Rightarrow -\int_{\Omega_k} \mathbf{t_{0k}} \mu \nabla \alpha_j \phi_j d\Omega, \ \left[N_1, n_p\right] \\ \mathbf{LF_1} \Rightarrow \int_{\Omega_{kf}} \mathbf{t_{0k}} \mu_0 \left(\mu_r - 1\right) \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{h_0}_j I_m d\Omega, \ \left[N_1, 1\right] \end{cases} \quad \text{(IV.27)}$$

Le système matriciel (IV.25) est condensé et de dimensions raisonnables. La modélisation retenue ici permet une résolution non linéaire et itérative plus rapide.

IV.3.3.1. Méthode Non Linéaire de Newton-Raphson

Le circuit magnétique est caractérisé par deux perméabilités. Une première, dans le sens du laminage (x,z), pour laquelle les entrefers des jonctions du circuit EI sont négligés et une seconde radiale (y).

L'empilage des multiples tôles de perméabilité relative μ_r donne lieu à un coefficient de foisonnement F fourni par le manufacturier. Celui-ci permet d'exprimer les deux perméabilités caractéristiques du noyau anisotrope [**Muramatsu-06**] :

$$\begin{cases} \mu(x,z) = \mu_r \mu_0 F + \mu_0 (1 - F) \approx \mu_r \mu_0 \\ \mu(y) = \dfrac{\mu_r {\mu_0}^2}{\mu_r \mu_0 (1 - F) + \mu_0 F} \end{cases} \quad \text{(IV.28)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour un couplage aisé avec la formulation en potentiel scalaire magnétique, la perméabilité relative est exprimée en fonction du champ magnétique (annexe D) $\mu_r(H^2)$ grâce à l'approximation empirique suivante [**Chauveau-01**] :

$$\mu_r(H^2) = \mu_{ri} - (\mu_{ri} - \mu_{rf})\frac{H^{2\alpha}}{H^{2\alpha} + \tau} \tag{IV.29}$$

Hormis la monotonie de la fonction l'approximation, ainsi que le nombre restreint de paramètres à évaluer, l'avantage d'une telle approximation, est de pouvoir calculer aisément les différentielles nécessaires à la construction de la matrice Jacobienne pour la résolution non linéaire par la méthode de Newton-Raphson :

$$\frac{\partial \mu_r(H^2)}{\partial H^2} = -(\mu_{ri} - \mu_{rf})\frac{\alpha\tau H^{2(\alpha-1)}}{(H^{2\alpha} + \tau)^2} \tag{IV.30}$$

Les résultats d'essais en usine, effectués sur un cadre d'Epstein et fourni par le manufacturier, pour les tôles ferromagnétiques référencé 1W7 et d'une épaisseur de 0.5mm, permettent d'identifier les quelques coefficients (IV.29).

Le tableau suivant illustre les valeurs obtenues, pour ce matériau et un matériau d'énergie équivalente (cf. chapitre I) et furent obtenues par un algorithme du simplex de Nelder-Mead utilisant un critère de minimisation quadratique.

Tôle 1W7/0.5mm	μ_{ri}	μ_{rf}	α	τ	$\lvert\overline{\varepsilon}_{rr}\rvert$ [%]
Fabricant	7670	670	0.731	3143	13.16
Energie équivalente	13613	555	0.562	250.73	1.04

Table IV.1 – *Paramètres d'approximation de la perméabilité relative, tôle 1W7, 0.5mm*

La convergence de l'algorithme est ici bonne et ne nécessite pas l'utilisation d'un coefficient de relaxation.

Finalement, l'application de la méthode sur le transformateur d'essai converge par un chaînage matriciel itératif d'une inductance de magnétisation de 3.04H en linéaire vers une valeur de 2.27H en saturation et sous une tension maximale imposée de $230\times\sqrt{2}$ V. La mesure fournit quant à elle une valeur de 2.4H soit une erreur relative de 5.4% satisfaisante.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.3.4. Assemblage Matriciel sur Sources de Courant (Total-Réduit)

L'assemblage matriciel obtenu pour la formulation en potentiel scalaire magnétique combiné total/réduit (IV.2), (IV.6) avec un couplage aux équations de circuit (IV.21) est étendu au bobinage complet. Les enroulements primaires et secondaires sont respectivement composés de N_1 et N_2 spires, dont chacune est découpée en n_1, n_2 secteurs réguliers. Le maillage contient n_p nœuds et le système complet est donc de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{K}_{\Omega_a}+\beta_\infty \mathbf{K}_{\Omega_f} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{1\Gamma\mu_\infty} & \mathbf{F}_{2\Gamma\mu_\infty} \\ \hline \mathbf{K}_{\Omega_a} & \mathbf{K} & \mathbf{F}_{1\Gamma} & \mathbf{F}_{2\Gamma} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E_1} & 0 \\ \Delta\mathbf{Z}_{1\Omega_{k0}} & \Delta\mathbf{Z_1} & \Delta\mathbf{R_1}+j\omega\Delta\left(\mathbf{L_{11}}-\mathbf{LF_{11}}\right) & j\omega\Delta\left(\mathbf{L_{12}}-\mathbf{LF_{12}}\right) \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{E_2} \\ \Delta\mathbf{Z}_{2\Omega_{k0}} & \Delta\mathbf{Z_2} & j\omega\Delta\left(\mathbf{L_{21}}-\mathbf{LF_{21}}\right) & \Delta\mathbf{R_2}+j\omega\Delta\left(\mathbf{L_{22}}-\mathbf{LF_{22}}\right) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \phi_a \\ \overline{\phi_b} \\ \overline{\mathbf{I}_{1k}} \\ \\ \overline{\mathbf{I}_{2k}} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{I_1}} \\ \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{I_2}} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \text{(IV.31)}$$

Où les potentiels ϕ_a, ϕ_b, proviennent de la méthode de couplage entre les formulations (cf § IV.2.3), tel que $\phi_r=\phi_a+\phi_b$ dans l'air et $\phi_t=\phi_b$ dans le fer. La matrice **K** est définie telle que précédemment (IV.26) et est majorée dans le circuit magnétique par un coefficient β_∞ ($\mu\rightarrow\infty$) associé à la méthode de couplage par perturbation.

Les différentes sous matrices **F** sont obtenues par une intégration surfacique (cas linéaire) (IV.9) à la surface du noyau et sont donc creuses.

Les sous matrices résistives **R** et inductives **L** et **LF**, sont calculées analytiquement et sont pleines. Les sous-matrices **Z** sont quant à elle creuses et nécessitent l'utilisation des contraintes de préservation en courant/tension (cf chapitre III) qui permettent la compensation des tensions élémentaires inconnues (préfixe Δ). On aboutit alors à des matrices $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$ creuses associés à des vecteurs sources $\mathbf{I_1}$ **et** $\mathbf{I_2}$ contenant le courant généré par la charge non linéaire.

La matrice complète reste conséquente malgré l'absence de méthode de résolution non linéaire et le système doit donc être résolu par un chaînage itératif. Si la géométrie du transformateur le permet et si la discrétisation des conducteurs est symétrique par rapport à un plan situé a la mi hauteur du bobinage, le nombre de courants inconnus peut être réduit de moitié. Plus généralement et étant donné notre problématique nous avons choisi un regroupement des conducteurs afin de limiter la taille du système matriciel.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.3.4.1. Concaténation des Conducteurs

Le regroupement des spires élémentaires, repose sur une hypothèse uniquement vérifiable pour un nombre de spire élevé selon laquelle la distribution de courant I_{ij} dénote une répétitivité pour des conducteurs proches d'une même couche d'enroulement.

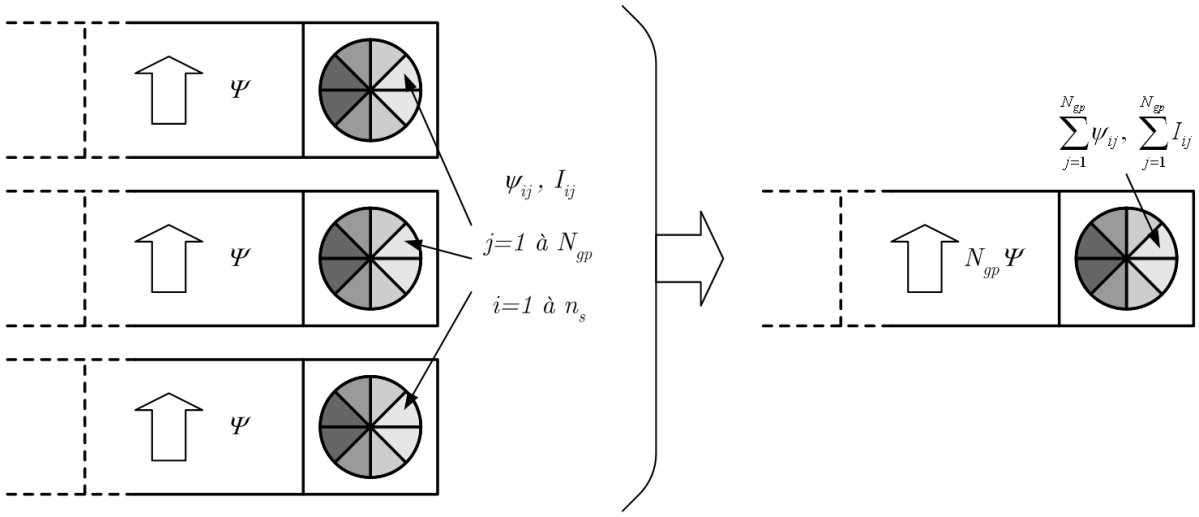


Figure IV.8 – *Regroupement des conducteurs selon les hypothèses de conservation du flux et de répétitivité de la distribution des densités de courant*

A partir, de la matrice **LM** contenant les inductances propres et mutuelles du bobinage complet, l'application de la loi de conservation du flux (II.3) dans le domaine de couplage permet d'introduire la matrice de passage $\mathbf{K_{gp}}$. Pour N spires, discrétisées en n_s secteurs et regroupées par lot de N_{gp} spires, l'utilisation de cette dernière permet d'aboutir à la nouvelle matrice inductance $\mathbf{LM_{gp}}$ associée à cette concaténation :

$$\mathbf{LM_{gp}} = \mathbf{K_{gp}}\,\mathbf{LM}\,\mathbf{K_{gp}^{T}},\ \text{avec}\ \mathbf{K_{gp}} = \left[\begin{array}{c|c} \left[\mathbf{Id}_{1,1}\cdots\mathbf{Id}_{1,N_{gp}}\right] & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \left[\mathbf{Id}_{\frac{N}{N_{gp}},1}\cdots\mathbf{Id}_{\frac{N}{N_{gp}},N_{gp}}\right] \end{array}\right] \qquad \text{(IV.32)}$$

Où $\mathbf{K_{gp}}$ est construite par blocs diagonaux de sous matrice identités **Id** juxtaposées et de dimensions $n_s \times n_s$.

Les matrices résistives **R**, se déduisent aisément, alors que celle de couplage **Z**, tout comme les courants véhiculés par chaque groupe de conducteur se voit multiplié par le facteur N_{gp} pour la conservation du flux ainsi que celle du champ source.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Finalement, cette concaténation permet de limiter le taux de remplissage matriciel et particulièrement celui, critique, de la matrice pleine contenant les résistances et inductances calculées analytiquement.

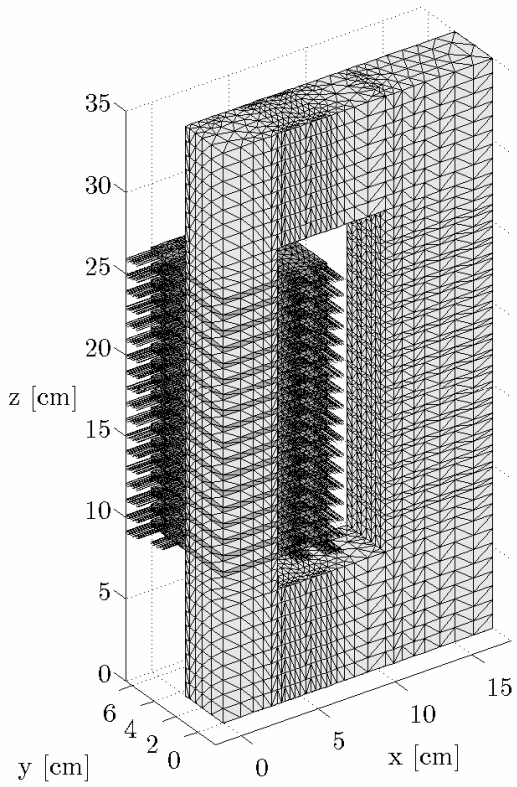


Figure IV.9 – *Maillage ¼ par extrusion du modèle électromagnétique MEF* (N_{gp}=*3*)

Le regroupement des conducteurs par paquet de spires s'avère être une perspective intéressante pour la réduction des coûts algorithmiques et le modèle électromagnétique est ainsi plus rapide à résoudre dans le cas du couplage magnétothermique.

IV.4. Modélisation Thermique

Le modèle thermique utilisé est un modèle plus complet que le modèle développé au chapitre III mais aussi plus coûteux. Des hypothèses de modélisation sont donc tout de même nécessaires à l'implémentation et à la résolution des équations thermiques en 3D.

IV.4.1. Hypothèses de Modélisation

L'équation caractéristique à résoudre en régime permanent (II.47) pour le cas cartésien 3D s'écrit :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \eta \rho J J^* + P_f \qquad \text{(IV.33)}$$

Les pertes vagabondes sont toujours négligées et les pertes fer P_f sont identifiées à partir de la distribution de l'induction magnétique dans le noyau (cf § IV.3.3). Pour un exposant de Steinmetz égal à 2, celles-ci sont approximées par la loi empirique (I.1) à partir des pertes mesurées lors de l'essai à vide.

Le transformateur d'essai est un modèle sec de 10kVA et non imprégné (annexe F). Les conducteurs sont homogénéisés (cf § III.5.1.1) par couches et les différentes feuilles isolantes entre chaque couche sont maillées. Un facteur d'espacement η est donc introduit comme précédemment (III.28) dans l'équation (IV.33) de manière à conserver des pertes Joule identiques dans le bobinage. Celui-ci est désormais calculé par un rapport entre les volumes des conducteurs réels et homogénéisés.

Les couches d'air mince sont maillées et caractérisées par un échange de chaleur par conduction. Il s'agit du mince canal séparant les bobinages primaires et secondaires, de l'espace entre les têtes de bobine et les culasses magnétiques, ou encore de celui existant entre les bobinages de chaque colonne.

Pour notre transformateur la hauteur des feuilles isolantes est supérieure à celle des bobinages. Un calcul des "effets d'ailettes" potentiels conduit à un coefficient de majoration négligeable étant donné la faible conductivité thermique des feuilles [**Chauveau-01**]. L'espace entre chaque feuille est donc maillé afin d'obtenir une surface plane équivalente caractérisée par un coefficient d'échange global.

L'équation (IV.33) est complétée des conditions aux limites par convection et rayonnement (II.50) et résolue numériquement par MEF (cf § II.6.1).

IV.4.2. Choix des Paramètres

La modélisation tridimensionnelle de l'échange par conduction nécessite la connaissance de trois conductivités, voire d'un tenseur pour certains détails géométriques.

Les coefficients de convection sont pour toutes les parois des coefficients moyens (enroulements et noyau), à l'exception des coefficients sur les surfaces verticales des bobinages qui sont eux définis localement.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.4.2.1. Conductivités Thermiques dans le noyau

Le noyau anisotrope est constitué d'un empilage de tôle conductrice isolé entre elles et doit être caractérisé par deux conductivités. Une première axiale $\lambda(x,z)$ dans le sens du laminage et une seconde radiale $\lambda(y)$ dans le sens de l'empilement.

Les deux conductivités de ce matériau composite peuvent s'exprimer à partir de celle issue d'un enroulement en feuillard homogénéisé (III.32), (III.33), ou d'une manière plus directe et analogue à celle employée pour la perméabilité magnétique (IV.28), à partir du coefficient de foisonnement F. Pour des tôles de conductivités λ_f, séparé par une pellicule isolante (oxyde) ayant une conductivité λ_i, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda(x,z) = \lambda_f F + \lambda_i (1-F) \approx \lambda_f \\ \lambda(y) = \dfrac{\lambda_f \lambda_i}{\lambda_f (1-F) + \lambda_i F} \end{cases} \tag{IV.34}$$

IV.4.2.2. Tenseur de Conductivités Thermiques

La modélisation tridimensionnelle de l'échange par conduction nécessite la connaissance de chacune des conductivités thermiques associée aux axes du repère cartésien de référence. Cependant, en présence de courbures géométriques, le flux de chaleur se répartit suivant les multiples axes de projection. Ce cas concerne en particulier les coins du bobinage, pour lesquels l'hélicité faible sera ici négligée.

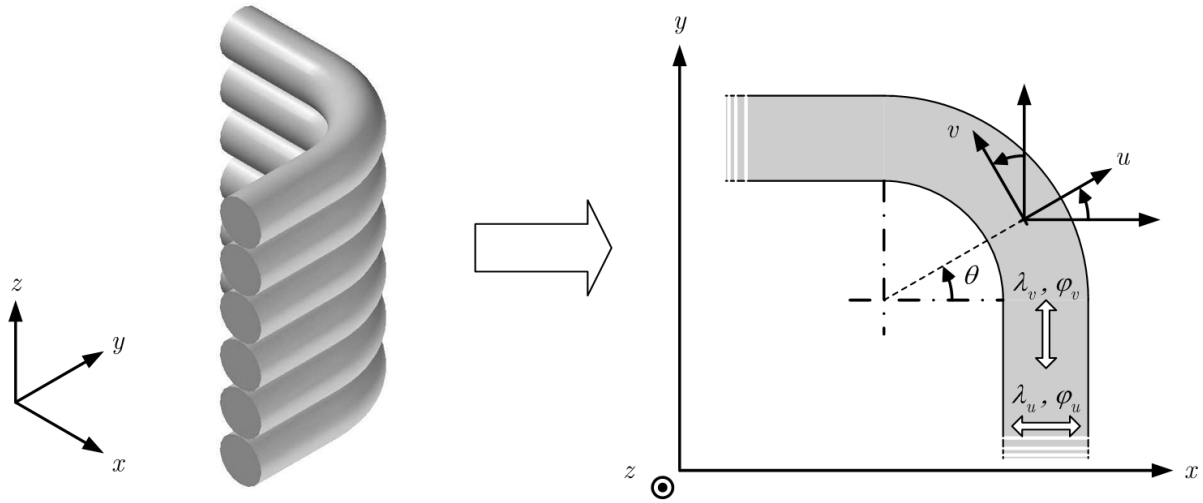


Figure IV.10 – *Détermination du tenseur de conductivité thermique*

La conductivité longitudinale suivant l'axe z reste invariante et par conséquent la loi de Fourier (II.45) s'exprime par équivalence au travers du tenseur de conductivités thermiques $\boldsymbol{\lambda}$ suivant :

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & 0 \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \tag{IV.35}$$

On cherche alors à exprimer en tout point de l'arrondi les quatre paramètres tensoriels partiels de (IV.35) caractérisant l'échange selon le plan d'appui (x,y).

Pour cela considérons un matériau possédant deux conductivités λ_u, λ_v connues et associées à un repère local (u,v) (figure IV.10). Le passage de ce repère au repère de référence (x,y), s'effectue au moyen de la matrice de rotation $\mathbf{R}$ née des diverses projections et vice et versa par sa matrice inverse notée $\mathbf{R}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^{-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{IV.36}$$

Il est ainsi possible d'exprimer les flux de chaleur φ_x, φ_y du repère de référence, à partir de ceux associés au repère local (u,v) et donc de leurs gradients de températures respectifs :

$$\begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\lambda_u & 0 \\ 0 & -\lambda_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial u} \\ \dfrac{\partial T}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{IV.37}$$

Sachant que ces gradients s'expriment également comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial T}{\partial y} \end{cases} \tag{IV.38}$$

L'intervention de la matrice $\mathbf{R}^{-1}$, permet l'obtention de l'expression liant les flux de référence aux gradients de températures rapportés dans le repère (x,y) :

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\begin{bmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{bmatrix}=\mathbf{R}\begin{bmatrix}-\lambda_u & 0\\ 0 & -\lambda_v\end{bmatrix}\mathbf{R}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{IV.39}$$

Finalement, en développant (IV.39), sur la base des simplifications trigonométriques, l'expression des éléments recherchés du tenseur partiel de conductivités est :

$$\begin{bmatrix}\lambda_{xx} & \lambda_{xy}\\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_u\cos^2\theta+\lambda_v\sin^2\theta & \dfrac{1}{2}(\lambda_u-\lambda_v)\sin 2\theta\\ \dfrac{1}{2}(\lambda_u-\lambda_v)\sin 2\theta & \lambda_u\sin^2\theta+\lambda_v\cos^2\theta\end{bmatrix} \tag{IV.40}$$

Ces conductivités ne traduisent aucune réalité physique, mais uniquement une équivalence énergétique dans l'échange thermique par conduction et plus particulièrement pour le cas $\lambda_v > \lambda_u$. On vérifie bien de plus la permutation entre λ_u et λ_v pour $\theta = k\pi/2$ avec $k \in \mathbf{N}$, permettant d'assurer la continuité du flux dans chacune des extrémités de la spire. Si le matériau est homogène ($\lambda_u=\lambda_v$), seuls les termes diagonaux du tenseur subsistent et justifient alors son remplacement par un terme scalaire.

Pour notre étude, les conductivités λ_u et λ_z se substituent à celles prédéterminées au chapitre précédent, pour des couches d'enroulements homogénéisées, tandis que λ_v est choisi comme étant la conductivité thermique du matériau conducteur (cuivre). Les conductivités utilisées pour la modélisation thermique du transformateur de 10kVA sont définies pour chaque matériau par la table suivante [**Wildi-00**] :

Cuivre	Email	Tôles	Oxyde	Nomex	Support
375	0.85	79.4	0.8	0.13	0.18

Table IV.2 – *Conductivités thermiques par matériaux* [$W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}$]

IV.4.2.3. Coefficients d'Echanges Convectifs et Radiatifs

Les coefficients d'échange utilisés pour les surfaces horizontales sont ceux définis précédemment (cf § III.5.2.3). Pour les parois verticales du noyau, le coefficient moyen utilisé s'exprime de manière similaire par :

$$\bar{h}_{cv}=\frac{\lambda_a 0.59\left(G_r P_r\right)^{0.25}}{L} \tag{IV.41}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Le domaine de validité de ce coefficient est alors : $10^4 < R_a < 10^9$

Pour les parois verticales, un coefficient local basé sur une hypothèse de surface de bobinage isotherme a été préféré au coefficient (III.41).

$$h_{cv} = \frac{0.508\lambda_a \left(\frac{R_a P_r}{0.952 + P_r} \right)^{0.25}}{Z} \qquad \text{(IV.42)}$$

Les meilleures performances obtenues se justifient alors par un gradient de température moindre sur le transformateur de dimensions plus réduites modélisé ici (annexe F).

Un canal mince peut être remplacé par un coefficient d'échange convectif équivalent basé sur le nombre de Nusselt [**Özisik-85**]. La validité de cette notion de "couche mince" est cependant difficile à évaluer en fonction des dimensions de ce canal. Cette approche est donc difficilement envisageable pour la modélisation de l'échange entre deux coins.

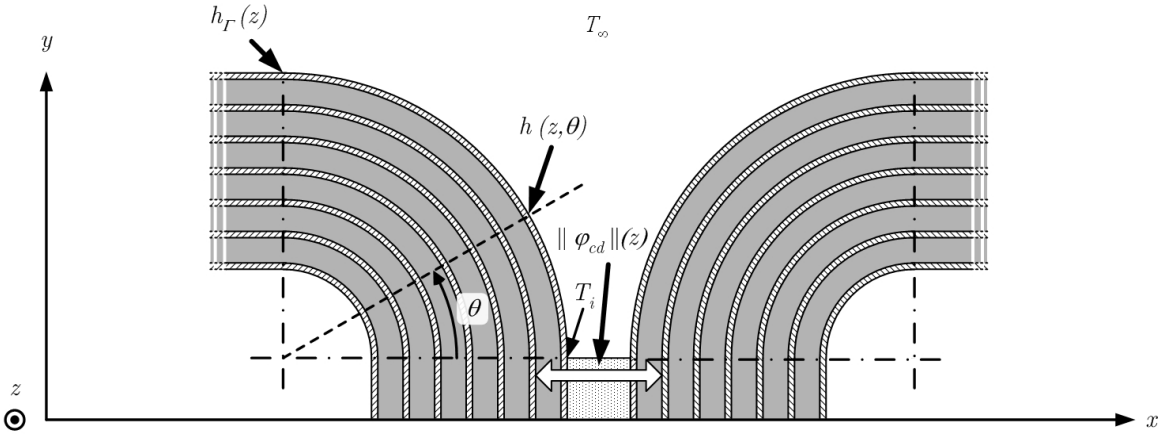


Figure IV.11 – *Adaptation des coefficients de convection dans les espaces restreints*

Nous avons préféré une méthode de projection permettant d'assurer la continuité de l'échange. Celle-ci permet d'atténuer le coefficient obtenu à la surface plane du bobinage jusqu'à une valeur assurant un transfert de chaleur équivalent au voisinage de la couche mince maillée. Le coefficient d'échange (convection et rayonnement) est alors défini de manière locale, pour chaque couche de maillage suivant l'axe z par l'équation suivante :

$$h(z,\theta) = h_\Gamma(z) - \left(h_\Gamma(z) - \frac{\|\varphi_{cd}\|(z)}{T_i - T_\infty} \right) \cos\theta \qquad \text{(IV.43)}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Il varie donc entre une valeur maximale (θ=π/2) et une valeur minimale (θ=0) calculée à partir du flux de conduction dans la couche mince et inclus l'échange par rayonnement. Pour ce dernier le facteur de vue C_r (II.49) est unitaire pour la surface externe (θ=π/2) et défini par (III.46) pour la couche mince (θ=0).

Quant aux émissivités utilisées (II.49), elles prennent des valeurs de 0.9 pour les feuilles isolantes et 0.95 pour la surface du circuit magnétique [**VanDenBossche-02**].

IV.5. Validation expérimentale

Les essais réalisés sur le transformateur de 10kVA (annexe F) sont des essais en court-circuit à fréquence variable et d'échauffement sur des charges réelles.

IV.5.1. Essai de Court-circuit à Fréquence Variable

Le transformateur d'essai est uniquement composé de conducteur de section circulaire. Les spires sont discrétisées en 6 secteurs et le maillage électromagnétique 3D contient soit 63368 nœuds soit 49840 nœuds en cas de concaténation des conducteurs.

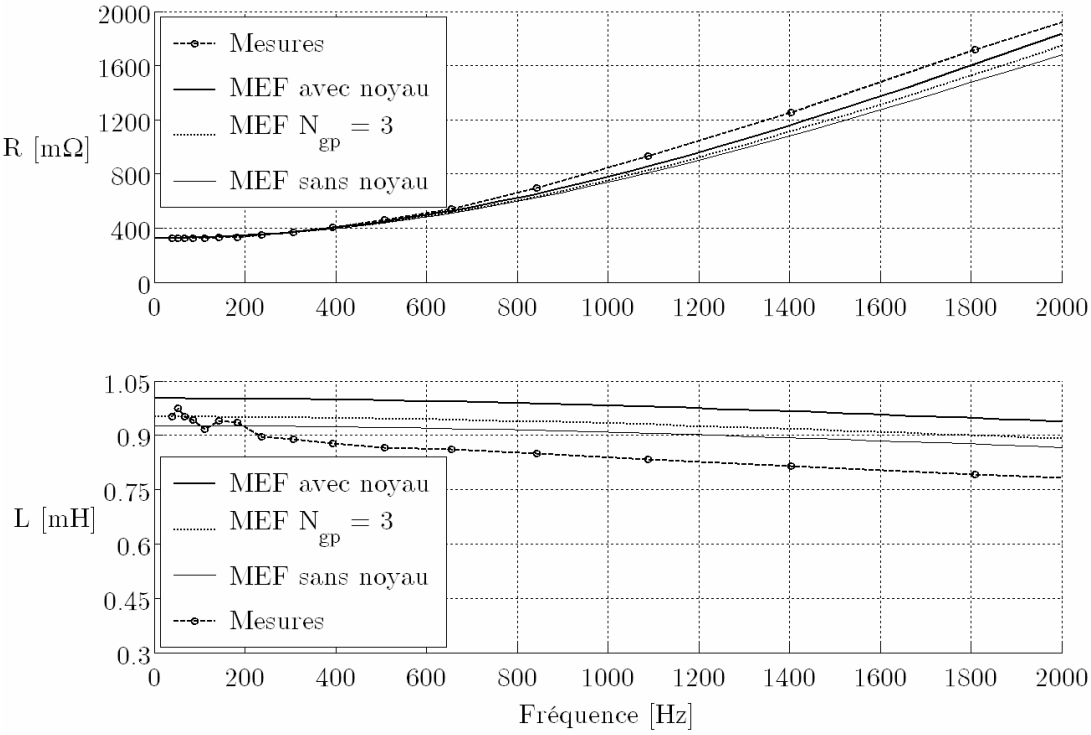


Figure IV.12 – *Variation fréquentielle de l'impédance de court-circuit* (*vue côté primaire*)

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

L'erreur relative commise sur le calcul de la résistance en présence du noyau ferromagnétique et à 2kHz est de 4.52 %. Si l'on regroupe les conducteurs en paquet de 3 celle-ci croit à une valeur de 9.1%. Ces erreurs importantes pour les hautes fréquences sont pondérées par l'amplitude des harmoniques et ont une influence minime sur les pertes totales dans les enroulements.

L'erreur relative à 2kHz entachant la détermination de l'inductance avec noyau est quant à elle de 19.8% et de 13.8% avec la concaténation des spires. Cette erreur, pour les hautes fréquences est également à pondérée par les amplitudes décroissantes des harmoniques. Les erreurs proviennent bien évidemment des simplifications de modélisation et particulièrement de la discrétisation des conducteurs limitée en secteurs uniquement, mais pas seulement. Elles sont ainsi en grande partie dues à la non prise en compte des arrondis des coins du bobinage. Ainsi, tout comme pour le cas expérimental du chapitre III, la section du bobinage n'est pas parfaitement rectangulaire.

IV.5.1.1. Influence des Coins du Bobinage

La figure suivante montre la géométrie d'une couche d'enroulement du transformateur de 10 kVA :

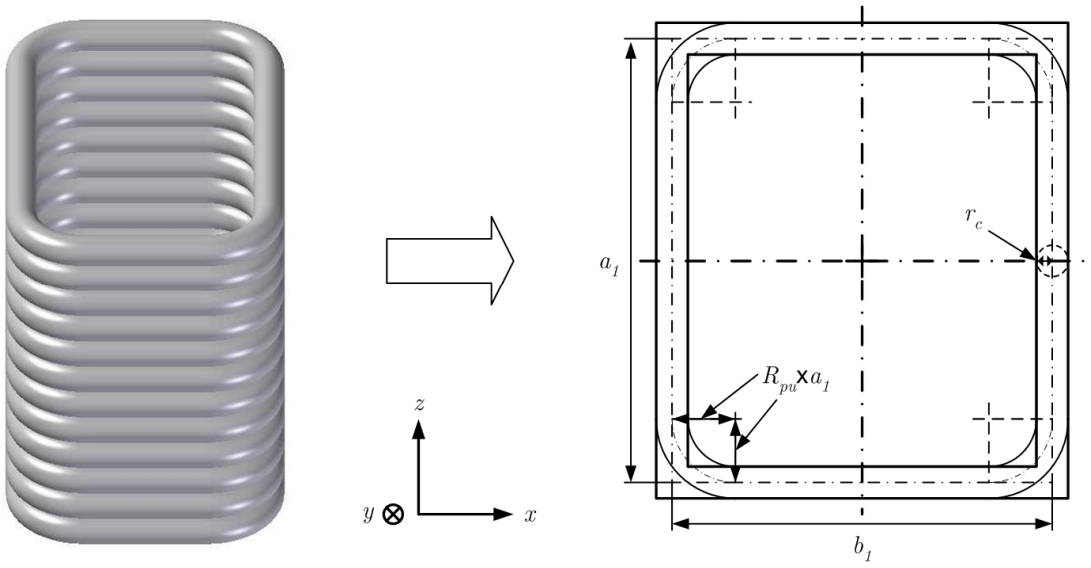


Figure IV.13 – *Géométrie réelle d'une couche d'enroulement* : *Influence des coins*

Les arrondis de coin croissent inexorablement au fur et à mesure que les couches de conducteur s'imbriquent les unes sur les autres. Pour la couche extérieure du bobinage le rayon du coin atteint 3cm soit environ 25% de la longueur du coté a_1=b_1=13.1cm.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

La simulation suivante compare les calculs de l'inductance propre pour des rayons de coins de R_{pu}= 25, 15 et 5%. La longueur du côté de la spire est ici normée par rapport au rayon du conducteur.

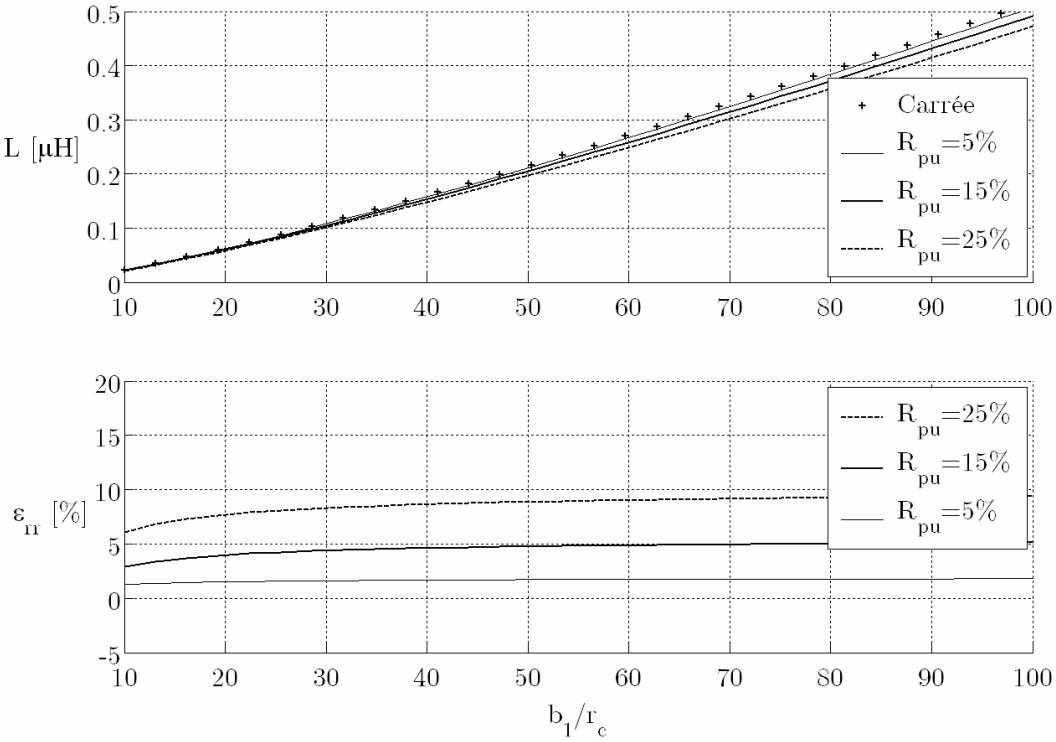


Figure IV.14 – *Influence du rayon des coins R_{pu} (normé) sur la valeur l'inductance propre*

Pour la couche extérieure, sachant que le rayon du conducteur est de 1.575mm, la dimension du côté normé est d'environ 83. Pour R_{pu}=25%, l'erreur relative maximale que l'on peut retrouver est alors d'environ 9.3%. L'introduction des arrondis diminue donc l'inductance propre du transformateur et l'approche des valeurs mesurées (figure IV.12).

IV.5.2. Essais d'Echauffement

Les essais d'échauffement sont sensiblement différents de ceux effectués au sein de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Des essais à vide et sur charge résistive ont servi de références, tandis que des essais sur charges non linéaires et à courant efficace identique ont permis d'évaluer le suréchauffement occasionné.

Pour cela les bobinages primaires et secondaires du transformateur ont été instrumentés en thermocouples dont l'implantation est détaillée dans l'annexe F.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.5.2.1. Essais Linéaires à Courant Nominal

Contrairement au cas de modélisation du chapitre III, les coefficients de convection n'ont nécessité l'emploi d'aucun facteur de correction. Ceci s'explique par le fait que les faces entières (avant et arrière) du boîtier sont des grilles, mais également par l'absence de fond dans celui-ci et la présence de profilés faisant office de pieds rehausseurs.

La simulation de la figure suivante est basée sur l'essai linéaire sur charge résistive et est limitée au quart du transformateur pour des raisons de symétries. Le maillage utilisé est comme pour le cas du modèle électromagnétique construit par extrusion et permet d'associer le nombre de paquets N_{gp} (IV.32) à celui du nombre de couches de tétraèdres dans les conducteurs pour un transfert aisé des pertes dont les valeurs sont moyennées.

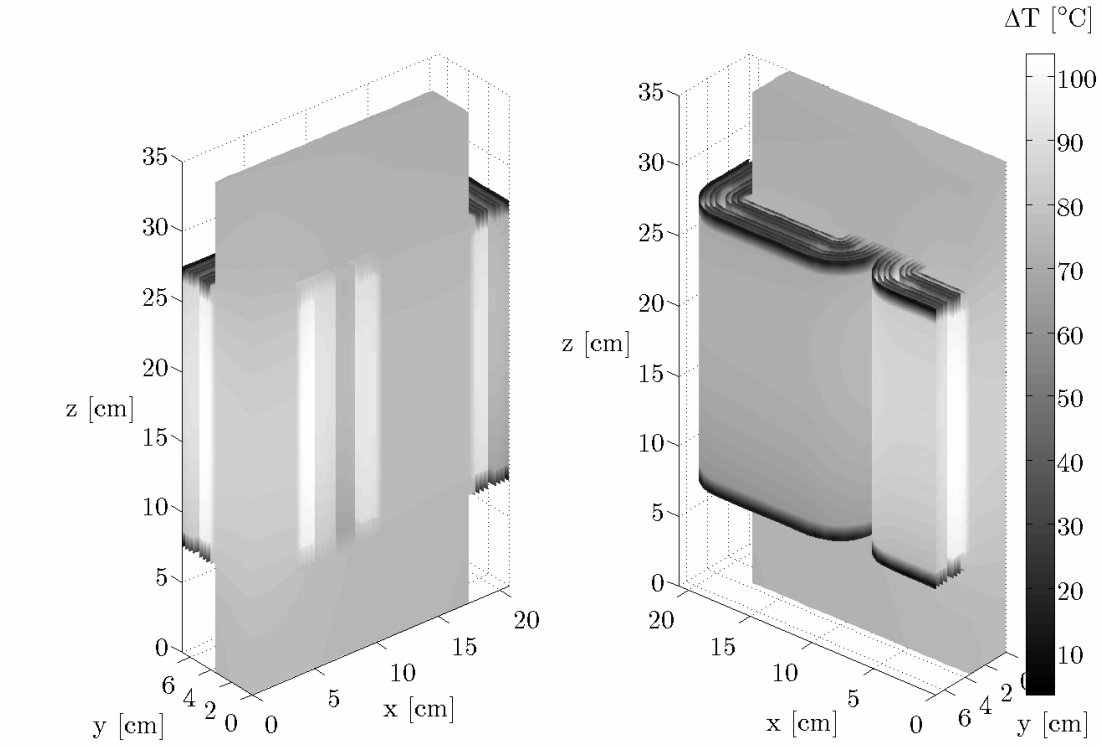


Figure IV.15 – *Echauffement sur charge linéaire*

La température du circuit magnétique reste relativement uniforme étant donné sa bonne conductivité thermique dans le sens du laminage. Le gradient de température progressif entre les bobinages de chaque colonne valide l'utilisation du coefficient (IV.43) particulièrement entre les deux coins. Finalement, l'échauffement reste ici très en deçà de la limite maximale définie par la classe d'isolation, pour ce transformateur adapté et l'autorise à subir des sollicitations plus sévères produites par des charges non linéaires.

A. LEFEVRE – Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.5.2.2. Essais Non Linéaires à Courant Efficace Equivalent

Les charges non linéaires utilisées sont des ponts redresseurs triphasés de type capacitif ou inductif.

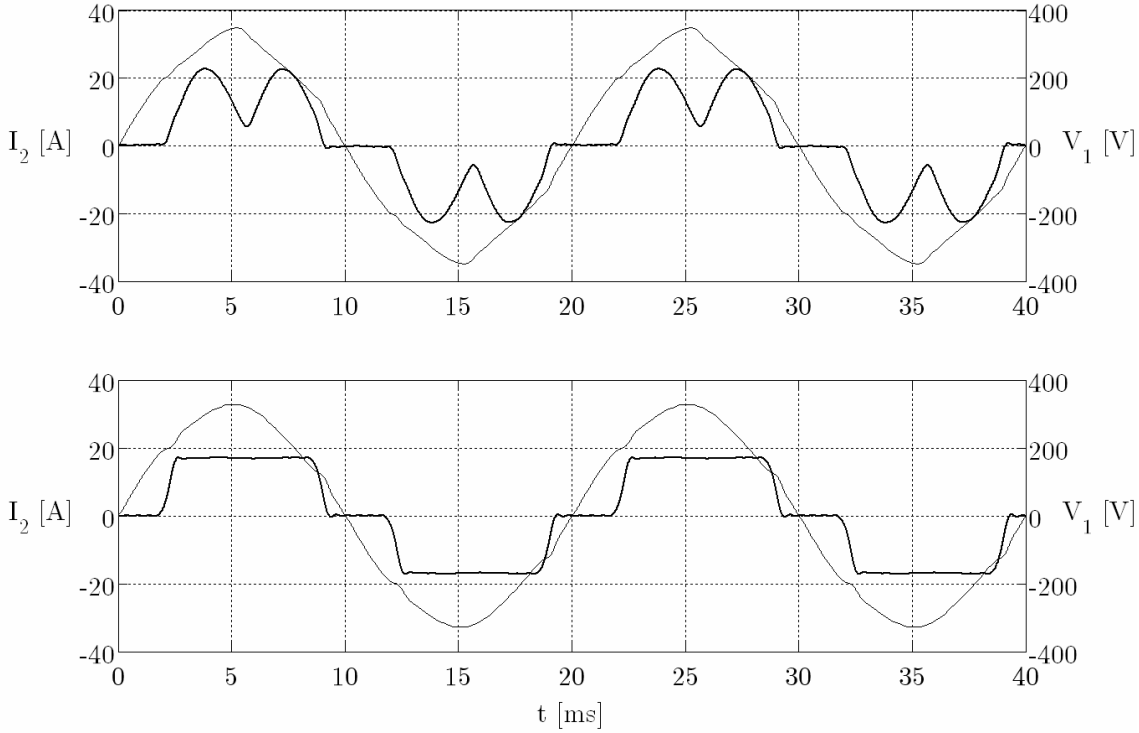


Figure IV.16 – *Courants secondaires et tensions primaires mesurés lors de l'alimentation de redresseurs triphasés sur charges capacitive ou inductive*

Charge	I_{eff}	I_1	I_3	I_5	I_7	I_9	I_{11}	I_{13}	I_{15}	I_{17}	I_{19}
Capacitive [A]	13.7	12.46	0.32	5.4	1.32	0.06	0.8	0.14	≈0	0.32	0.12
Inductive [A]	13.7	13.27	0.13	2.49	1.75	0.11	0.9	0.78	0.09	0.4	0.37

(suite)	I_{21}	I_{23}	I_{25}	I_{27}	I_{29}	I_{31}	I_{33}	I_{35}	I_{37}	I_{39}	THD	FHL
Capacitive [A]	0.03	0.19	0.09	≈0	0.10	0.08	≈0	0.07	0.05	0.01	45.3%	12.13
Inductive [A]	0.05	0.18	0.18	0.03	0.08	0.1	0.03	0.06	0.09	0.03	25.1%	9.1

Table IV.3 – *Décomposition spectrale et grandeurs électriques associés aux courants de charges sur redresseurs triphasés et charge capacitive ou inductive*

Les taux de distorsions de la tension primaires sont de 4.4% sur charge capacitive et 3.1% sur charge inductive et démontrent une recombinaison harmonique faible.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Concernant les pertes Joule en régime harmonique, un calcul basé sur la résistance mesurée à froid (figure IV.12) nous donne 63.4W par colonne pour la charge capacitive et 62.8W pour la charge inductive, contre 61.4W en régime linéaire et pour un courant efficace identique. Le même calcul basé cette fois sur la résistance simulée nous donne respectivement 62.9W et 62.5W pour des erreurs relatives minimes de 8‰ et 5‰.

Le couplage magnétothermique est bien évidemment plus lourd que pour le cas axisymétrique. Pour un maillage thermique de 61765 nœuds et une décomposition spectrale (table IV.3) limitée au 39ème rang harmonique, le temps de calcul est d'environ 1 heure et 30 mais se prolonge aisément si le maillage thermique est affiné.

Les suréchauffements engendrés pour ces deux charges restent pour les enroulements primaires et secondaires significatifs :

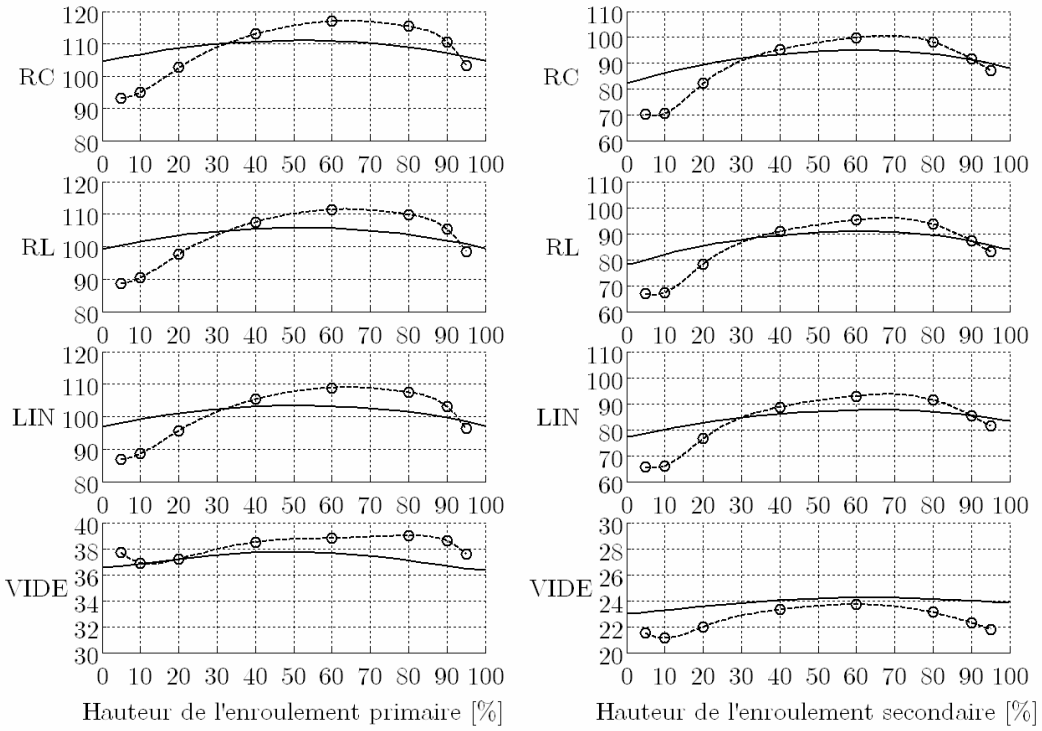


Figure IV.17 – *Distributions axiales de l'échauffement de température* [°C] : *Valeurs expérimentales* (-o-) *et de simulations* (—)

La distribution de température simulée présente un écart à première vue important. Malgré l'utilisation d'un coefficient de convection local (IV.42), le gradient de température axiale simulé est plus modéré que celui provenant des mesures et s'explique par le maillage de la mince couche d'air entre les deux bobinages qui a alors tendance à "lisser" l'échange.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Néanmoins, la comparaison des valeurs d'échauffements moyens sur les enroulements primaires ΔT_1 et secondaires ΔT_2 atteste une précision satisfaisante.

			Essai à vide	**Charge linéaire**	**Redresseur capacitif**	**Redresseur inductif**
ΔT_1	Mesure	[°C]	37.6	99.2	103.7	103.3
	Simulation	[°C]	36.1	96.3	100.4	100.2
	ε_{rr}	[%]	-3.9	-2.9	-3.2	-3
ΔT_2	Mesure	[°C]	23.6	83.5	87.3	86.5
	Simulation	[°C]	23.9	80.1	83.8	82.9
	ε_{rr}	[%]	1.3	-4.1	-4	-4.2

Table IV.4 – *Echauffement moyen des enroulements*

L'incrément moyen dû à l'alimentation d'une charge non linéaire n'est ici que de quelques degrés mais masque des écarts locaux plus importants (figure IV.17). L'obtention précise par simulation de la température critique du point chaud reste encore aujourd'hui très difficile. Elle nécessite une très bonne caractérisation des matériaux et une modélisation des phénomènes de convection et rayonnement efficace, particulièrement dans les espaces minces.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

IV.6. Conclusion

La résolution du problème électromagnétique par MEF 3D avec un couplage analytique et numérique aux équations de circuit nous a permis de calculer les pertes sur charge non linéaire dans un transformateur de géométrie "plus générale".

Un premier système basé sur la formulation non linéaire en potentiel réduit a abouti à la détermination des pertes dans le noyau à partir de la tension sinusoïdale imposée aux bornes du bobinage primaire.

Après une discrétisation des conducteurs un second modèle, étendu au bobinage complet et exprimé en potentiels combinés (total/réduit) a permis de modéliser les effets des courants induits dans les enroulements. L'effet de proximité efficacement retranscrit a alors conduit au calcul des pertes Joule dans les enroulements.

Enfin, le couplage avec les équations thermiques a permis de mettre en évidence les suréchauffements engendrés sur chacun des bobinages par des courants non sinusoïdaux et de les vérifier expérimentalement.

Le calcul des pertes électromagnétiques est suffisamment précis. Néanmoins, le calcul de la température du point chaud nécessite une modélisation beaucoup plus précise des coefficients d'échange et ce surtout dans les conduits minces entre les enroulements.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Conclusion Generale

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Conclusion Generale

Ce mémoire nous a permis d'exposer l'étude comportementale menée et les modélisations adoptées pour retranscrire le comportement électromagnétique et thermique d'un transformateur alimentant des charges non linéaires. Pour cela les travaux se sont articulés autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre nous a permis de présenter les principaux types de transformateurs et de mettre en évidence les désagréments associés à un fonctionnement en régime non sinusoïdal. Les différentes pertes additionnelles et plus particulièrement celles dans les enroulements expliquent alors les suréchauffements rencontrés et justifient le déclassement nécessaire des transformateurs. Une modélisation électromagnétique adéquate est alors nécessaire au calcul de la distribution des densités de courant dans les conducteurs puis par couplage de celle de la température dans le bobinage.

Le second chapitre détaille les grandes lignes de la méthode des circuits couplés pour les cas axisymétriques ou cartésiens. Le noyau ferromagnétique peut alors être modélisé par une méthode analytique basée sur l'introduction de densités fictives et superficielles de courant pour un cas linéaire, ou par un calcul numérique s'appuyant sur une formulation judicieuse et résolue par la méthode des éléments finis. Cette méthode de résolution est alors également envisagée pour le calcul des échanges de chaleur et l'obtention de la distribution de température.

Le chapitre trois expose tout d'abord les hypothèses simplificatrices communes à tous nos travaux. Puis il développe l'application et la mise en œuvre de la méthode des circuits couplés pour le cas axisymétrique et avec l'introduction des densités fictives pour la prise en compte du circuit magnétique. L'utilisation d'une méthode d'intégration adaptée, ou encore la considération de loi analytique de distribution permet, sous certaines conditions, de limiter la discrétisation des conducteurs. Après l'application de technique d'homogénéisation sur les couches de conducteurs, l'emploi d'un modèle thermique simplifié permet l'obtention rapide de la distribution de température. Enfin, les essais non linéaires réalisés au moyen d'un banc expérimental innovant permettent de vérifier les valeurs des coefficients de déclassement théoriques à appliquer.

Le dernier chapitre propose une méthode mixte analytique/numérique, mais aussi plus générale pour répondre à la problématique d'étude. Le choix d'une formulation basée sur un potentiel scalaire magnétique, avec un couplage aux équations de circuit permet, à

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

partir d'un calcul 3D résolus par la MEF de déterminer les pertes dans le circuit magnétique du transformateur, puis celles dans les enroulements. Les mêmes techniques d'homogénéisation que précédemment sont utilisées dans un modèle thermique 3D plus précis mais aussi plus coûteux en terme de stockage mémoriel et temps de résolution.

Une comparaison entre les résultats obtenus par simulation et ceux issus des expérimentations vérifie la concordance des résultats obtenus et montre l'élévation de température causée par des courants non sinusoïdaux.

Néanmoins, ces modélisations sont imparfaites et présentent donc des limitations.

Tout d'abord concernant celles du troisième chapitre, la non linéarité du circuit magnétique ne peut être prise en compte ou alors pour des coûts algorithmiques prohibitifs malgré les ressources actuelles. Si l'on souhaite déterminer les pertes dans le circuit magnétique, il faut ajouter une étape de résolution supplémentaire. Celle-ci doit alors permettre à partir des valeurs de champ obtenues à la surface du noyau, d'étendre la cartographie au circuit magnétique complet et réel (maillage).

La méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre utilisée n'est pas envisageable pour des fréquences élevées et des effets pelliculaires très prononcés. En effet celle-ci nécessite dans ce cas un nombre de points d'intégration important et il est alors préférable d'envisager soit une intégration à pas variables, soit une discrétisation surfacique des conducteurs [**Chentouf-95**].

Le type de conducteurs employés pour le transformateur d'essai de 75kVA n'a pas permis l'utilisation de la discrétisation restreinte. Pour des conducteurs carrés il est peut être possible d'utiliser des lois analytiques (hyperboliques) de distribution permettant de réduire le nombre d'inconnue à quatre par conducteur [**Ngnegueu-89**].

Pour le chapitre quatre, la critique principale intervient lors de la détermination analytique des inductances. Celles-ci ont en effet été calculées pour des conducteurs de sections circulaires équivalentes et les arrondis de coin ont été négligés.

Pour un rayon de spire important l'approximation est satisfaisante, mais la généralisation de la méthode passe en toute rigueur par l'obtention des inductances associées à des conducteurs de sections rectangulaires (méplats ou feuillards), ou de section quelconque, orientée et associée notamment à une discrétisation en secteur.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Si l'effet pelliculaire est non négligeable, le nombre d'inconnues de ce modèle tridimensionnel peut vite devenir trop important, malgré la possibilité de concaténer les conducteurs. Une méthode d'homogénéisation semble alors préférable [**Moreau-05**], [**Gyselinck-06**]. Néanmoins, il est peut être envisageable d'utiliser, comme au chapitre précédent des lois analytiques permettant de limiter la discrétisation des conducteurs.

Les potentiels vecteurs électriques intervenant dans le couplage aux équations de circuit ont été calculés de manières très simplifiées. Une détermination plus précise peut éventuellement être directement intégrée dans la formulation et l'assemblage matriciel. Celle-ci peut s'appuyer sur un potentiel scalaire magnétique (éléments nodaux), ou un potentiel vecteur magnétique (éléments d'arêtes) mais nécessitera alors un maillage substantiel des conducteurs.

Pour ces deux modèles, les simulations et les expérimentations ont montré l'influence modérée du noyau ferromagnétique. Il est par conséquent possible de modéliser de manière approximative et entièrement analytique l'impact des courants harmoniques sur les pertes dans les enroulements du transformateur.

Les problèmes rencontrés pour la modélisation thermique sont récurrents aux deux modèles développés. La méthode d'homogénéisation des couches de conducteurs offre de bon résultat et permet de limiter la finesse du maillage, mais doit satisfaire un nombre de spire suffisant et ce particulièrement pour des conducteurs de section circulaire.

En terme de sensibilité, les paramètres prépondérants du modèle thermique sont à la fois les conductivités thermiques les plus faibles relatives aux isolants et les coefficients de convection employés. L'identification de ces conductivités peut s'avérer difficile, particulièrement dans le cas où des résines d'imprégnation sont employées [**Garcia-02**].

Les coefficients de convection sont semi-empiriques et relèvent quant à eux de phénomènes complexes. L'idéal serait bien sur de coupler le modèle magnétothermique aux équations d'écoulement et conduirait à une résolution fastidieuse mais plus précise. A défaut, le meilleur moyen reste d'essayer les différents coefficients proposés dans la littérature scientifique jusqu'à concordance.

Cette approche a également été utilisée pour le maillage ou non des fines couches d'air isolantes et en l'absence de critère de différentiation efficace entre les échanges de chaleur par convection et conduction dans ces espaces restreints.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Enfin les pertes fer ont été soit négligées soit supposées constantes tandis que les pertes vagabondes ont été systématiquement omises.

Quelles soit connexes ou inscrites dans la continuité des travaux réalisés, des perspectives se greffent sur la problématique d'étude initiale et peuvent s'avérer intéressantes à explorer.

Nous avons considéré les spectres de courant absorbés par des charges non linéaires individuelles. Au sein de son réseau, le transformateur est en réalité soumis à la combinaison de courants issus de multiples charges, ayant chacune des cycles d'utilisation temporelle différents. Une approche stochastique complémentaire peut alors s'avérer intéressante pour la modélisation du transformateur dans son environnement industriel. Si la tension est restée lors de nos essais très peu distordue, l'étude d'une installation ayant une source de production isolée peut alors nécessiter la modélisation des pertes additionnelles dans le circuit magnétique. De plus, la prise en compte des régimes transitoires dans le modèle thermique peut également être souhaitable. Cette nouvelle problématique peut alors aboutir à l'étude du vieillissement prématuré des transformateurs.

Les transformateurs ne sont pas des équipements exclusivement réservés au transport et à la distribution de l'énergie électrique. On les retrouve également pour des applications de mise à la terre ou de filtrage actif. Dans ces configurations, les profils des courants véhiculés peuvent s'avérer encore plus critiques pour l'échauffement du transformateur (annexe A). Des transformateurs spécialement conçus pour ces cas sont alors préférés mais leur dimensionnement est rendu plus difficile.

Finalement, l'utilisation des modèles établis peut s'avérer un outil intéressant pour une aide lors de la conception. Avec le coût toujours croissant de matériaux employés, on pourra ainsi s'intéresser au choix d'une topologie d'enroulement, d'un type de conducteur etc.... permettant d'aboutir à un transformateur optimal dont le volume de cuivre/aluminium et de fer, tout comme les pertes sur charges non linéaires seront minimisées.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXES

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXES

ANNEXE A : CARACTERISTIQUES DES CHARGES NON LINEAIRES TYPIQUES.....- 169 -
ANNEXE B : CALCUL D'INDUCTANCES .....- 171 -
ANNEXE C : METHODE D'INTEGRATION DE GAUSS-LEGENDRE .....- 181 -
ANNEXE D : METHODE NON LINEAIRE DE NEWTON-RAPHSON.....- 183 -
ANNEXE E : SOLENOÏDE DE REFERENCE.....- 185 -
ANNEXE F : TRANSFORMATEURS D'ESSAIS .....- 187 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Annexe A : Caracteristiques des Charges Non Lineaires Typiques

(Relevés expérimentaux du courant absorbé – [**Bouchard-99**])

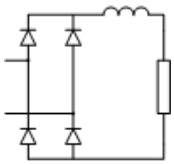
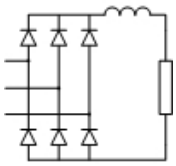
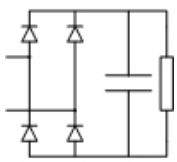
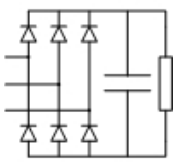
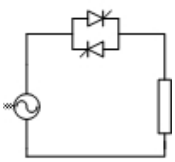
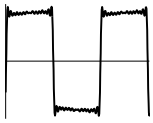
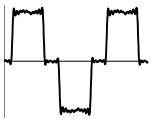
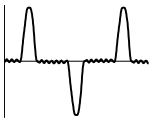
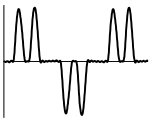
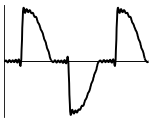
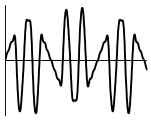
	Charge RL Monophasée	**Charge RL Triphasée**	**Charge RC Monophasée**	**Charge RC Triphasée**	**Gradateur 80% de la puissance maximale**
					
					
F_P	0.91	0.96	0.71	0.72	0.86
F_c	1.14	1.35	2.41	2.22	1.75
THD [%]	45.62	28.84	99.77	96.8	43.81
F_{HL}	10.51	8.54	9.73	19.56	8.67
K	0.83	0.88	0.71	0.61	0.86
I_{eff} [A]	109.91	104.08	141.26	139.18	109.17
Compensa -tion //					
F_c	2.43	2.33	2	1.93	2.54
F_{HL}	56.18	99.16	18.5	39.37	48.64
K_{NF}	0.59	0.51	0.79	0.59	0.63
I_{eff} [A]	45.62	28.84	99.77	96.8	43.81

Table A.1 – *Caractéristiques Electriques*

F_P : Facteur de puissance, F_c : Facteur de crête.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

	Charge RL Monophasée	Charge RL Triphasée	Charge RC Monophasée	Charge RC Triphasée	Gradateur 80% P_{max}
I_1 [%/°]	100 / -3	100 / -2	100 / -2	100 / 2	100 / -20
I_3	33 / 174		81 / -11	1 / 55	35 / -45
I_5	20 / -10	20 / 167	52 / -19	76 / -170	17 / 28
I_7	14 / 165	14 / -11	23 / -31	56 / -167	10 / 59
I_9	11 / -20		3 / -91	3 / 99	10 / 105
I_{11}	9 / 156	9 / 158	8 / 155	19 / 31	7 / 157
I_{13}	7 / -29	8 / -25	7 / 138	5 / 38	6 / -167
I_{15}	6 / 146		2 / 102	2 / -106	6 / -117
I_{17}	5 / -38	5 / 145	3 / -29	5 / 6	4 / -73
I_{19}	5 / 137	5 / -37	4 / 50	5 / 15	4 / -32
I_{21}	4 / -47		2 / -70	1 / -53	4 / 19
I_{23}	4 / 128	4 / 133	1 / 138	1 / -62	3 / 60
I_{25}	3 / -56	4 / -50	2 / 115	2 / 43	3 / 104
I_{27}	3 / 119		1 / 100	1 / -142	3 / 151
I_{29}	3 / -65	3 / 121		1 / 173	3 / -167

Table A.2 – *Décomposition Spectrale* (*Phaseur*)

Taux Harmonique de Distorsion :

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\hat{h}} I_h^{\,2}}}{I_1} \tag{A.1}$$

Facteur de déclassement [**NF-C52-112-4**] :

$$K = \left[1 + 0.1\left(\sum_{h=2}^{\hat{h}} h^{1.6}\left(\frac{I_h}{I_1}\right)^2\right)\right]^{-0.5} \tag{A.2}$$

Facteur de perte harmonique [**IEEE-C57.110-98**] :

$$F_{HL} = \sum_{h=1}^{\hat{h}}\left(\frac{I_h}{I_{eff}}\right)^2 h^2 \tag{A.3}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXE B : CALCUL D'INDUCTANCES

Les cas envisagés ici, concernent le calcul d'inductances propres et mutuelles de conducteurs linéiques quelconques, ou de spires rectangulaires coaxiales, dans le vide ou l'air. Pour le calcul des inductances propres, seul le cas de conducteur de section circulaire sera considéré.

Inductances propres et mutuelles de conducteurs linéiques (cas général) :

On cherche tout d'abord à calculer l'expression des inductances associées à des conducteurs distincts, de longueur respective l_1 et l_2 et disposés de manière quelconque dans un repère x,y,z :

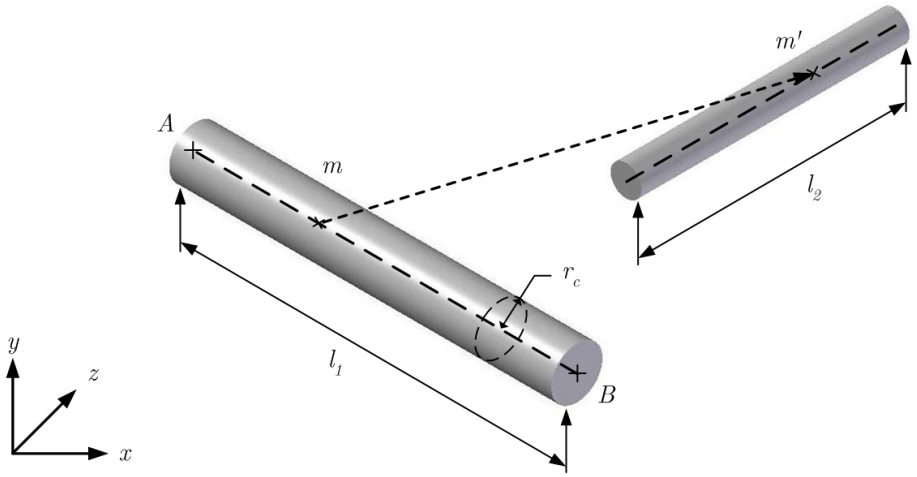


Figure B.1 – *Inductances partielles de conducteurs linéiques* (*cas général*)

Pour la définition de l'inductance mutuelle, considérons tout d'abord le cas, de deux conducteurs filiformes. Ils sont caractérisés par les coordonnées de leurs extrémités respectives et en supposant qu'un courant I parcourt le premier segment, on cherche à calculer le potentiel vecteur résultant en un point m' du second segment [**Trichet-95**].

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

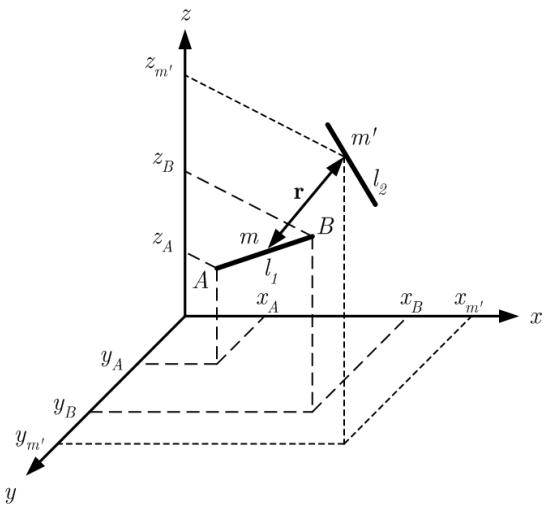


Figure B.2 – *Inductance mutuelle entre deux segments filiformes*

Pour le cas particulier d'un courant I unitaire, le potentiel vecteur au point m' s'exprime à partir de l'équation :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_1}\frac{\mathbf{dl}}{\|\mathbf{r}\|} \tag{B.1}$$

La distance ||**r**|| s'exprime à partir de tout point m de [**AB**] vérifiant **Am**=λ**AB**, avec λ un scalaire appartenant à l'intervalle [0 1], tel que :

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\left(\lambda + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{4\gamma\alpha - \beta^2}{4\alpha^2}\right)} \tag{B.2}$$

Les coefficients α, β, γ ne dépendent alors que des coordonnés des points A, B et m'

$$\begin{cases} \alpha = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = \|\mathbf{AB}\|^2 = l_1^2 \\ \beta = 2(x_B - x_A)(x_A - x_{m'}) + 2(y_B - y_A)(y_A - y_{m'}) + 2(z_B - z_A)(z_A - z_{m'}) \\ \gamma = (x_{m'} - x_A)^2 + (y_{m'} - y_A)^2 + (z_{m'} - z_A)^2 = \|\mathbf{Am'}\|^2 \end{cases} \tag{B.3}$$

Finalement, par un changement de variable, $u = \lambda + \frac{\beta}{2\alpha}$ et $\delta = \frac{4\gamma\alpha - \beta^2}{4\alpha^2}$, l'équation initiale (B.1) se ramène à celle d'une intégrale prédéfinie (B.4), pour laquelle la primitive est donnée par $Ln\left|u + \sqrt{u^2 + \delta}\right|$.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{AB}}{4\pi} \int_{\frac{\beta}{2\alpha}}^{1+\frac{\beta}{2\alpha}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta}} \tag{B.4}$$

En intégrant le potentiel vecteur résultant sur toute la longueur l_2 (Stokes), on aboutit alors à la valeur de l'inductance mutuelle entre ces deux segments.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi l_1} \int_{l_2} \mathbf{AB} Ln\left(\frac{2\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)}}{\beta + 2\sqrt{\alpha\gamma}}\right) \mathbf{dl} \tag{B.5}$$

Cette expression générale de l'inductance mutuelle entre deux conducteurs linéiques présente néanmoins deux particularités. Tout d'abord, celle-ci est nulle pour le cas ou les droites supportant chacun des segments sont de direction orthogonale. De plus, elle présente une singularité dans le calcul pour le cas où les deux segments sont alignés. Sachant que α, γ sont positifs, celle-ci se traduit par une contrainte sur la valeur de β permettant de satisfaire le domaine de définition de l'intégrale précédente.

Concernant l'inductance propre, celle-ci est la somme de deux termes. Un premier "interne", que nous dénommerons L_i, est associé au flux traversant la section du conducteur. Un second L_e, "externe", traduit le flux partiel embrassé par le fil.

$$L = L_e + L_i \tag{B.6}$$

En supposant que le rayon du conducteur est faible devant le "rayon moyen" de la spire, l'inductance L_i se ramène alors à celle, d'un cylindre, de longueur indéfinie l_1 [**Durand-68**], soit $\frac{\mu_0 l}{8\pi}$. Celle externe peut être approchée par l'expression suivante :

$$L_e = \frac{\mu_0 l_1}{2\pi} Ln\left(\frac{3l_1}{4r_c}\right) \tag{B.7}$$

On obtient finalement la formule semi-empirique suivante de l'inductance propre et partielle de ce conducteur :

$$L = \frac{\mu_0 l_1}{2\pi}\left(Ln\left(\frac{3l_1}{4r_c}\right) + \frac{1}{4}\right) \tag{B.8}$$

Un calcul numérique mené à partir (B.4) montre la précision de cette formulation.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

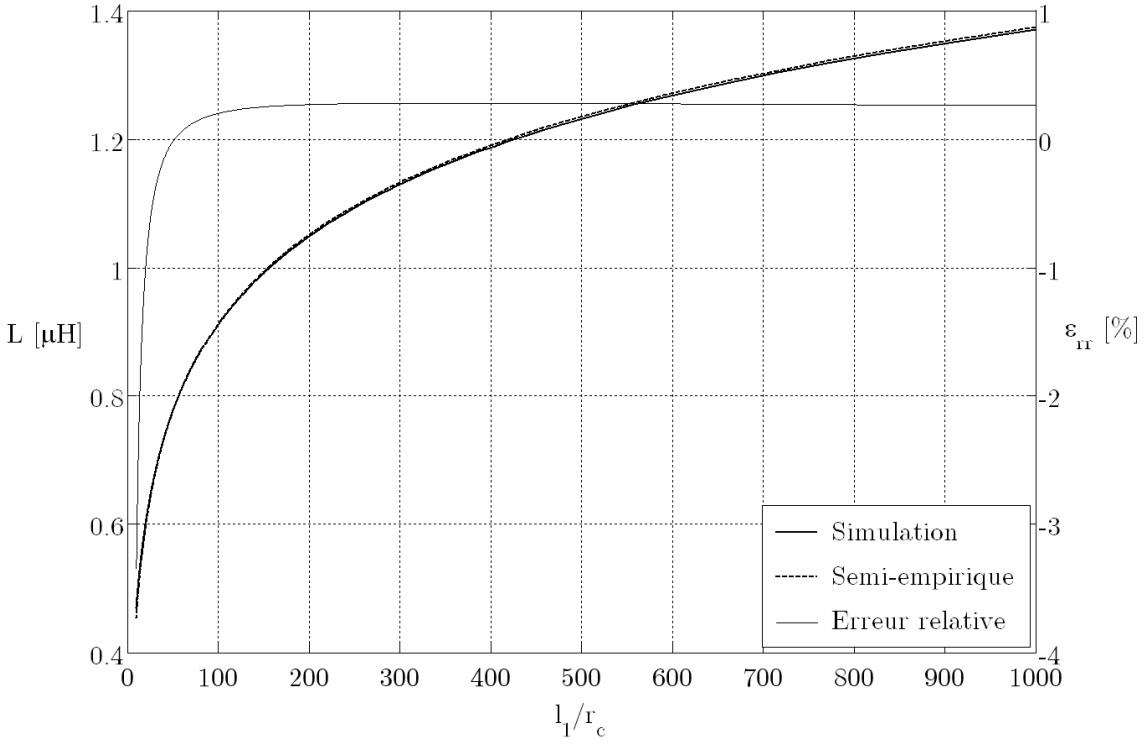


Figure B.3 – *Inductance propre partielle d'un conducteur linéique*

Inductance mutuelle entre deux segments colinéaires :

Pour le cas où les deux segments sont colinéaires et donc coplanaires, il est possible d'obtenir une formulation non intégrale de l'inductance mutuelle précédente [**Durand-68**]. Ainsi considérons cette fois le cas de la figure suivante.

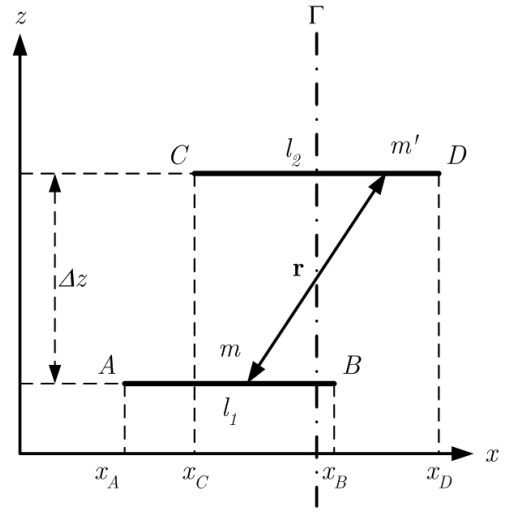


Figure B.4 – *Inductance mutuelle entre deux segments colinéaires*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

En adoptant la même démarche que précédemment, le calcul de l'inductance mutuelle entre ces conducteurs revient ici à résoudre directement l'équation de Neumann, elle même concaténation de l'équation (B.1) et du théorème de Stokes (II.35) :

$$M = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dx_2 dx_1}{\|\mathbf{r}\|} \tag{B.9}$$

où M est de signe positif pour des courants circulant dans le même sens et négatif dans le cas contraire. En intégrant une première fois cette expression sur la longueur l_2 du premier segment :

$$M = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} \left[Ln\left(x_2 - x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \Delta z^2} \right) \right]_{x_C}^{x_D} dx_1 \tag{B.10}$$

Sachant qu'une primitive possible de la précédente fonction à intégrer sur la longueur l_1 du second conducteur est :

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \Delta z^2} - (x_2 - x_1) Ln\left(x_2 - x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \Delta z^2} \right) \tag{B.11}$$

L'expression générale de la mutuelle entre deux segments parallèles devient :

$$M = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} +\sqrt{(x_D - x_B)^2 + \Delta z^2} - (x_D - x_B) Ln\left(x_D - x_B + \sqrt{(x_D - x_B)^2 + \Delta z^2} \right) \\ -\sqrt{(x_D - x_A)^2 + \Delta z^2} + (x_D - x_A) Ln\left(x_D - x_A + \sqrt{(x_D - x_A)^2 + \Delta z^2} \right) \\ -\sqrt{(x_C - x_B)^2 + \Delta z^2} + (x_C - x_B) Ln\left(x_C - x_B + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \Delta z^2} \right) \\ +\sqrt{(x_C - x_A)^2 + \Delta z^2} - (x_C - x_A) Ln\left(x_C - x_A + \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \Delta z^2} \right) \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

Si l'on considère maintenant le cas où chacun des conducteurs est centré par rapport à un même axe de symétrieΓ (figure B.4), l'expression de cette mutuelle devient :

$$M = \pm \frac{\mu_0}{8\pi} \left(4(U - V) + \Delta l Ln\left(\frac{2U - \Delta l}{2U + \Delta l} \right) - \Sigma l Ln\left(\frac{2V - \Sigma l}{2V + \Sigma l} \right) \right) \tag{B.13}$$

avec $\Delta l = l_2 - l_1$, $\Sigma l = l_2 + l_1$, $U = \sqrt{\frac{1}{4}\Delta l^2 + \Delta z^2}$ et $V = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma l^2 + \Delta z^2}$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Inductances propres et mutuelles de cadres rectangulaires coaxiaux :

Pour le calcul des inductances propres et mutuelles de cadres rectangulaires, coaxiaux et possédant des côtés parallèles deux à deux, considérons la figure suivante :

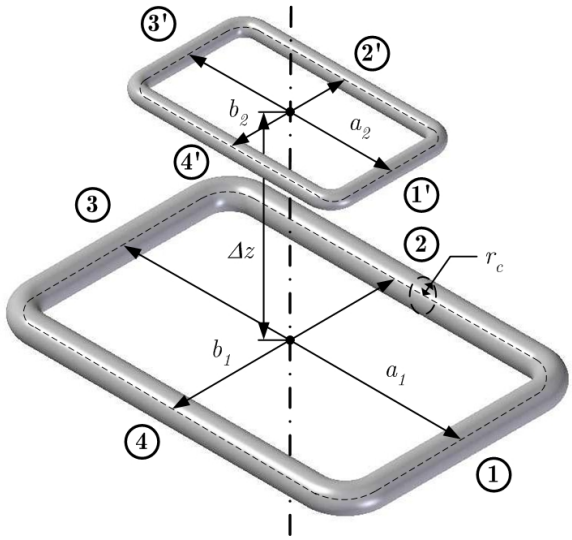


Figure B.5 – *Calcul d'inductances de cadres, coaxiaux et parallèles par cotés*

Pour la spire inférieure de la figure précédente, les mutuelles entre deux segments orthogonaux sont nulles. L'inductance propre extérieure se déduit donc du calcul des mutuelles M_{13}, M_{31}, ainsi que M_{24}, M_{42}, égales deux à deux.

$$L_e = 2M_{13} + 2M_{24} \tag{B.14}$$

Soit, en prenant garde aux signes de courants opposés on obtient finalement :

$$L_e = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(4U - 2\left(a_1 + b_1\right) + a_1 Ln\left(\frac{U - a_1}{U + a_1}\right) + b_1 Ln\left(\frac{U - b_1}{U + b_1}\right)\right) \tag{B.15}$$

avec U=$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

L'inductance interne L_i s'obtient à partir des inductances propres partielles des quatre segments composant la spire. Ceux-ci étant également égaux deux à deux, L_i s'exprime finalement de manière analogue.

$$L_i = 2L_1 + 2L_2 \tag{B.16}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Finalement, à partir de l'expression de L_e et de celle des inductances partielles obtenues à partir de la formule semi-empirique vue précédemment (B.8), on en déduit l'expression de l'inductance propre de ce cadre :

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(4U - \frac{3}{2}(a_1+b_1) + a_1 Ln\left(\frac{9a_1^2(U-a_1)}{16r_c^2(U+a_1)}\right) + b_1 Ln\left(\frac{9b_1^2(U-b_1)}{16r_c^2(U+b_1)}\right)\right) \tag{B.17}$$

avec U=$\sqrt{a_1^2+b_1^2}$

Pour les mêmes hypothèses d'orthogonalité, d'équivalence et d'orientation de courant que celles mentionnées précédemment, l'inductance mutuelle entre les deux cadres se limite à la détermination d'un nombre restreint de mutuelles élémentaires entre les segments :

$$M = 2\left(M_{11'} + M_{13'} + M_{22'} + M_{24'}\right) \tag{B.18}$$

On obtient alors finalement

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\begin{array}{r} 8\left(U_1 - U_2 - V_1 + V_2\right) + \Delta a Ln\left(\frac{(2U_1-\Delta a)(2U_2+\Delta a)}{(2U_1+\Delta a)(2U_2-\Delta a)}\right) \\ - \Sigma a Ln\left(\frac{(2V_1-\Sigma a)(2V_2+\Sigma a)}{(2V_1+\Sigma a)(2V_2-\Sigma a)}\right) \\ + \Delta b Ln\left(\frac{(2U_1-\Delta b)(2V_1+\Delta b)}{(2U_1+\Delta b)(2V_1-\Delta b)}\right) \\ - \Sigma b Ln\left(\frac{(2U_2-\Sigma b)(2V_2+\Sigma b)}{(2U_2+\Sigma b)(2V_2-\Sigma b)}\right) \end{array}\right) \tag{B.19}$$

avec $\Delta a = a_1 - a_2,\ \Delta b = b_1 - b_2,\ \Sigma a = a_1 + a_2,\ \Sigma b = b_1 + b_2$

et $U_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\Delta a^2 + \frac{1}{4}\Delta b^2 + \Delta z^2}$

$U_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\Delta a^2 + \frac{1}{4}\Sigma b^2 + \Delta z^2}$

$V_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma a^2 + \frac{1}{4}\Delta b^2 + \Delta z^2}$

$V_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\Sigma a^2 + \frac{1}{4}\Sigma b^2 + \Delta z^2}$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Calcul du champ Source (Cartésien) :

Les composantes vectorielles du champ magnétique $\mathbf{H_0}$, créé par un conducteur filiforme de longueur l, parcouru par un courant I et en un point quelconque M du vide ou de l'air n'appartenant pas au conducteur, s'obtient par la loi de Biot et Savart suivante, où $\mathbf{r}$ représente le vecteur orienté d'un point appartenant au conducteur vers le point M.

$$\mathbf{H_0} = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \tag{B.20}$$

Pour un segment rectiligne, orienté du point A vers le point B et associé à un repère cartésien tridimensionnel (x,y,z), $\mathbf{H_0}$ s'exprime à partir des différents vecteurs géométriques alors de la forme $\mathbf{UV}=[(x_v\text{-}x_u)\ (y_v\text{-}y_u)\ (z_v\text{-}z_u)]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{H_0} = \left[\frac{I\mathbf{AB}}{4\pi l^2\left(\|\mathbf{AM}\|^2 - \|\mathbf{AP}\|^2\right)}\cdot\left(\frac{\mathbf{AP}}{\|\mathbf{AM}\|} - \frac{\mathbf{BP}}{\|\mathbf{BM}\|}\right)\right](\mathbf{AB}\times\mathbf{PM}) \tag{B.21}$$

où P est le point de projection orthogonale de M sur l'axe (AB) et pour lequel le vecteur de coordonnés $\mathbf{P}=[x_P\ y_P\ z_P]^{\mathrm{T}}$ associé au repère de référence, s'obtient à partir de celui du point référent $\mathbf{A}=[x_A\ y_A\ z_A]^{\mathrm{T}}$, en utilisant la condition de nullité sur le produit scalaire entre l'axe (AB) et la droite de projection (PM) :

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{AB}\,\mathbf{AB}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{AM}}{l^2} \tag{B.22}$$

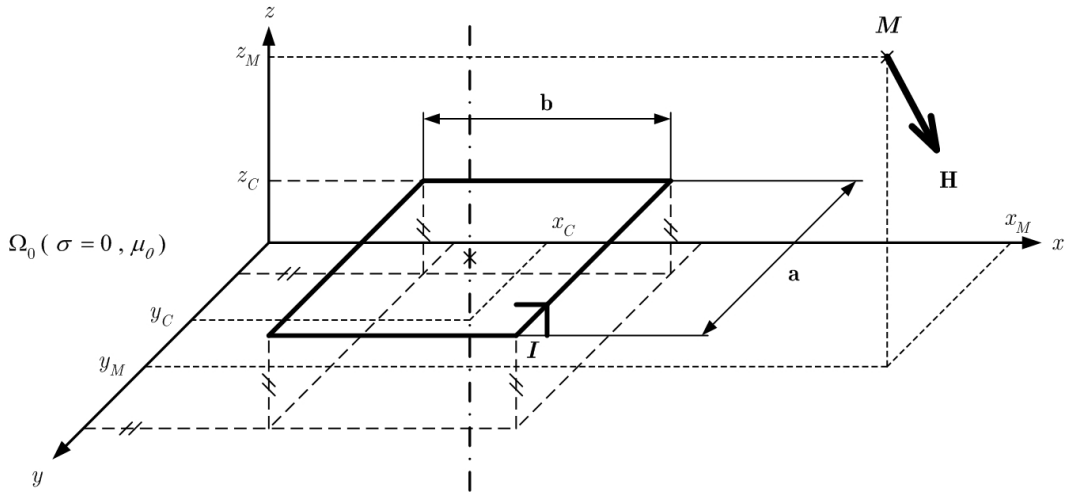


Figure B.6 – *Calcul du champ créé par un cadre rectangulaire*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Pour 4 segments, on obtient à partir de (B.21) et (B.22), celui crée par un cadre rectangulaire filiforme (figure B.6). Ce cadre ne doit cependant présenter aucune inclinaison et donc être parallèle à un plan de référence, ici (xy). Les cotés a et b sont respectivement parallèles aux axes y et x de ce plan. Le calcul initialement mené pour un cadre centré (x_C=0, y_C=0), est également envisageable pour un centre quelconque. On obtient finalement l'expression de chacune des composantes :

$$H_x = \frac{I\Delta_z}{4\pi}\left(\frac{V_4}{U_1\sqrt{U_1+V_4^2}} - \frac{V_4}{U_2\sqrt{U_2+V_4^2}} - \frac{V_3}{U_1\sqrt{U_1+V_3^2}} + \frac{V_3}{U_2\sqrt{U_2+V_3^2}}\right) \tag{B.23}$$

$$H_y = \frac{I\Delta_z}{4\pi}\left(\frac{V_2}{U_3\sqrt{U_3+V_2^2}} - \frac{V_2}{U_4\sqrt{U_4+V_2^2}} - \frac{V_1}{U_3\sqrt{U_3+V_1^2}} + \frac{V_1}{U_4\sqrt{U_4+V_1^2}}\right) \tag{B.24}$$

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\left(\begin{array}{l} V_1V_3\left(\frac{1}{U_1\sqrt{U_1+V_3^2}} + \frac{1}{U_3\sqrt{U_3+V_1^2}}\right) - V_1V_4\left(\frac{1}{U_1\sqrt{U_1+V_4^2}} + \frac{1}{U_4\sqrt{U_4+V_1^2}}\right) \\ +V_2V_4\left(\frac{1}{U_2\sqrt{U_2+V_4^2}} + \frac{1}{U_4\sqrt{U_4+V_2^2}}\right) - V_2V_3\left(\frac{1}{U_2\sqrt{U_2+V_3^2}} + \frac{1}{U_3\sqrt{U_3+V_2^2}}\right) \end{array}\right) \tag{B.25}$$

$$\text{avec } \begin{cases} V_1 = x_M - x_C - \dfrac{b}{2};\ V_2 = x_M - x_C + \dfrac{b}{2} \\ V_3 = y_M - y_C - \dfrac{a}{2};\ V_4 = y_M - y_C + \dfrac{a}{2} \\ \Delta_z = z_M - z_C \end{cases} \tag{B.26}$$

$$\text{et} \quad U_1 = V_1^2 + \Delta_z^2;\ U_2 = V_2^2 + \Delta_z^2;\ U_3 = V_3^2 + \Delta_z^2;\ U_4 = V_4^2 + \Delta_z^2$$

Pour des côtés non parallèles aux axes, une simple projection permet alors l'adaptation des composantes H_x et H_y.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXE C : METHODE D'INTEGRATION DE GAUSS-LEGENDRE

Cette méthode d'intégration, très précise, consiste à approcher une intégrale, par une combinaison linéaire des valeurs prises par la fonction analytique de définition en différents points [**Angot-72**].

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \left[w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_k f(x_k)\right]dx \tag{C.1}$$

Les facteurs de pondération w_k (poids de Gauss) dépendent du type d'approximation de la fonction *f(x)*. Pour les méthodes des trapèzes et de Simpson, la fonction à intégrer est respectivement approchée par des segments de droite ou des arcs de parabole. La méthode de Gauss se réfère, quant à elle, à un développement sur une base de polynômes orthogonaux (polynômes de Legendre) pour lesquels les racines ξ_k (k = 1, 2, …, n_g) sont irrégulièrement espacées. Ces polynômes sont définis sur l'intervalle [-1,1] et un changement de variable est nécessaire de manière à recentrer les bornes d'intégration, initialement entre [x_a, x_b]. Les points d'intégrations x_k sont alors calculés par :

$$x_k = \frac{\left(x_b - x_a\right)}{2}\xi_k + \frac{\left(x_b + x_a\right)}{2} \tag{C.2}$$

L'intégrale initiale devient finalement la somme pondérée suivante

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = \frac{\left(x_b - x_a\right)}{2}\sum_{k=1}^{n_g} w_k f(x_k) \tag{C.3}$$

Pour le cas de conducteurs circulaires définis dans un repère axisymétrique local (r,θ,z), les intégrales surfaciques élémentaires s'écrivent de la manière suivante :

$$\int_{r_a}^{r_b}\int_{\theta_a}^{\theta_b} f(r,z)rdrd\theta = \frac{\left(r_b - r_a\right)\left(\theta_b - \theta_a\right)}{4}\sum_{k=1}^{n_g} r_k w_k f(r_k,\theta_k) \tag{C.4}$$

Les n_g racines de références sont symétriques deux à deux par rapport à 0 et sont associées à leur poids respectifs donnés par la table jointe à la fin de cette annexe. Du nombre de points d'intégration dépend logiquement la précision recherchée.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

n_g	$\pm\xi_k$	w_k
2	0.577 350 269 189 63	1
3	0	0.888 888 888 888 89
	0.774 596 669 241 48	0.555 555 555 555 56
4	0.339 981 043 584 86	0.652 145 154 862 55
	0.861 136 311 594 05	0.347 854 845 137 45
5	0	0.568 888 888 888 89
	0.538 469 310 105 68	0.478 628 670 499 37
	0.906 179 845 938 66	0.236 926 885 056 19
6	0.238 619 186 083 20	0.467 913 934 572 69
	0.661 209 386 466 26	0.360 761 573 048 14
	0.932 469 514 203 15	0.171 324 492 379 17
7	0	0.417 959 183 673 47
	0.405 845 151 377 40	0.381 830 050 505 12
	0.741 531 185 599 40	0.279 705 391 489 28
	0.949 107 912 342 76	0.129 484 966 168 87

Table C.1 – *Racines et poids des premiers points d'intégration de Gauss*

Les racines ξ_k sont donc celles du polynôme de Legendre de degré n_g défini par les coefficients suivants (j=1 pour n_g impair, 2 pour n_g paire) :

$$P_{n_g}(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n_g}(2i-1)}{n_g!}\left[x^{n_g} + n_g \sum_{k=1}^{\frac{n_g+j-2}{2}} (-1)^k \frac{\prod_{i=1}^{2k-1}\left(n_g - i\right)}{k!\,2^k \prod_{i=1}^{k}\left(2\left(n_g - i\right)+1\right)} x^{n_g-2k}\right] \tag{C.5}$$

Enfin, sachant que l'on peut à l'aide de n_g points approcher une fonction par un polynôme de degré n_g-1, on obtient un système linéaire de type Vandermonde permettant le calcul des poids associés aux racines (n_g pair ou impair).

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & & \xi_{n_g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{n_g-1} & \xi_2^{n_g-1} & \cdots & \xi_{n_g}^{n_g-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1-(-1)^{n_g}}{n_g} \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXE D : METHODE NON LINEAIRE DE NEWTON-RAPHSON

La méthode de Newton-Raphson est, plus simplement, la forme vectorielle généralisée de la méthode itérative de Newton, dite "méthode de la tangente" [**Egem-02b**], [**Guérin-94**].

Principe de la méthode :

En premier lieu, considérons un système matriciel d'équation non linéaire **K**, de vecteur inconnu **U** et de terme source **F**. La résolution de ce système consiste alors à chercher la solution **U** qui annule (théoriquement) le résidu **R** introduit comme suit :

$$[\mathbf{R}(\mathbf{U})] = [\mathbf{K}(\mathbf{U})][\mathbf{U}] - [\mathbf{F}(\mathbf{U})] = 0 \tag{D.1}$$

Pour cela, on résout une suite de systèmes d'équations linéaires provenant d'un développement en série de Taylor, limité à l'ordre 1, de ce résidu et au voisinage de **U** :

$$[\mathbf{R}(\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U})] = [\mathbf{R}(\mathbf{U})] + \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right][\Delta\mathbf{U}] + \left(\ldots + \left[\frac{\partial^n \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^n}\right]\left[\frac{\Delta\mathbf{U}^n}{n!}\right]\right) \tag{D.2}$$

A chaque pas de calcul k, l'annulation du développement (D.2), revient à déterminer un incrément $\Delta\mathbf{U}_k$ de la solution finale :

$$[\Delta\mathbf{U}_{k+1}] = -\underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}_k}\right]^{-1}}_{\mathbf{J}_{ac}(\mathbf{U}_k)} [\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] \;\Rightarrow\; [\mathbf{U}_{k+1}] = [\mathbf{U}_k] + [\Delta\mathbf{U}_{k+1}] \tag{D.3}$$

La résolution est en pratique stoppée lorsque cet incrément devient suffisamment insignifiant et nécessite à chaque itération l'assemblage, du résidu et de la matrice Jacobienne $\mathbf{J}_{ac}$, dont les coefficients traduisent les variations paramétriques vectorielles. La méthode converge rapidement (quadratique) vers le résultat recherché, dans un intervalle $[\mathbf{U}_{min}, \mathbf{U}_{max}]$, ou **R** est continu, doublement différentiable et où les deux conditions suffisantes suivantes sont satisfaites :

$$\left\| \left[\frac{\partial \mathbf{J}_{ac}(\mathbf{U}_k)}{\mathbf{J}_{ac}(\mathbf{U}_k)\partial \mathbf{U}_k}\right] \right\| < \infty \;\Rightarrow\; \mathbf{J}_{ac}(\mathbf{U}_k) \neq 0, \text{ (}\mathbf{R}\text{ strictement monotone)} \tag{D.4}$$

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

$$\left[\frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{ac}}(\mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}_k}\right] \text{ ne change pas de signe dans } \left[\mathbf{U}_{\mathbf{min}}\ \mathbf{U}_{\mathbf{max}}\right] \tag{D.5}$$

La seconde condition n'est toutefois pas essentielle, voir partiellement vérifiée, si la solution est "proche", ce qui est souvent le cas avec l'utilisation d'un pas d'initialisation

Application à la formulation en potentiel scalaire magnétique (réduit ou total) :

Désormais, l'inconnue **U** est le potentiel ϕ nodal (i,j=1,2,3) et le résidu est équivalent à la fonctionnelle à minimisée issue de l'application de la MEF. On a donc à chaque pas k :

$$\begin{cases} \left[\mathbf{R}(\phi_k)\right] \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial F_k}{\partial \phi_{i,k}} = -\displaystyle\int_\Omega \nabla \alpha_i \mathbf{B}_k d\Omega \\ \left[\mathbf{J}_{\mathbf{ac}}(\phi_k)\right] \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial^2 F_k}{\partial \phi_{i,k}\partial \phi_{j,k}} = -\displaystyle\int_\Omega \nabla \alpha_i \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \phi_{j,k}} d\Omega = -\int_\Omega \nabla \alpha_i \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \mathbf{H}_k}\frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \phi_{j,k}} d\Omega = \int_\Omega \nabla \alpha_i \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \mathbf{H}_k}\nabla \alpha_j d\Omega \end{cases} \tag{D.6}$$

La dernière intégrale associée à la matrice Jacobienne, fait apparaître l'expression du tenseur de perméabilité (cartésien) :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \mathbf{H}_k}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial B_{x,k}}{\partial H_{x,k}} & \dfrac{\partial B_{x,k}}{\partial H_{y,k}} & \dfrac{\partial B_{x,k}}{\partial H_{z,k}} \\ \dfrac{\partial B_{y,k}}{\partial H_{x,k}} & \dfrac{\partial B_{y,k}}{\partial H_{y,k}} & \dfrac{\partial B_{y,k}}{\partial H_{z,k}} \\ \dfrac{\partial B_{z,k}}{\partial H_{x,k}} & \dfrac{\partial B_{z,k}}{\partial H_{y,k}} & \dfrac{\partial B_{z,k}}{\partial H_{z,k}} \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

Le module du champ magnétique est défini par $H_k^2 = H_{x,k}^2 + H_{y,k}^2 + H_{z,k}^2$. Les termes diagonaux et croisés (u,v=x,y,z) se déduisent alors comme suit :

$$\frac{\partial B_{u,k}}{\partial H_{u,k}} = \frac{\partial \mu_{u,k} H_{u,k}}{\partial H_{u,k}} = \frac{\partial \mu_{u,k}}{\partial H_k^2}\frac{\partial H_k^2}{\partial H_{u,k}} H_{u,k} + \mu_{u,k} = 2H_{u,k}^2 \frac{\partial \mu_{u,k}}{\partial H_k^2} + \mu_{u,k} \tag{D.8}$$

$$\frac{\partial B_{u,k}}{\partial H_{v,k}} = \frac{\partial \mu_{u,k} H_{u,k}}{\partial H_{v,k}} = \frac{\partial \mu_{u,k}}{\partial H_k^2}\frac{\partial H_k^2}{\partial H_{v,k}} H_{u,k} = 2H_{u,k}H_{v,k}\frac{\partial \mu_{u,k}}{\partial H_k^2} \tag{D.9}$$

Enfin, la matrice Jacobienne reste invariante selon que la formulation dans le noyau soit en potentiel total ou réduit. La différence intervient uniquement dans le calcul de l'induction $\mathbf{B}_k$ associée au résidu (D.6).

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ANNEXE E : SOLENOÏDE DE REFERENCE

Ce solénoïde est constitué d'un bobinage multicouche, entourant un circuit magnétique coulissant qui permet de faire varier l'inductance (figure E.1). Le circuit magnétique est composé de tôles ferromagnétiques organisées en profil cruciforme. L'ensemble est alors maintenu en position par un fourreau en plexiglas translucide. Le bobinage se compose quant à lui de quatre couches circulaires juxtaposées en quinconce. Enfin, les conducteurs sont en cuivre émaillé et de section circulaire.

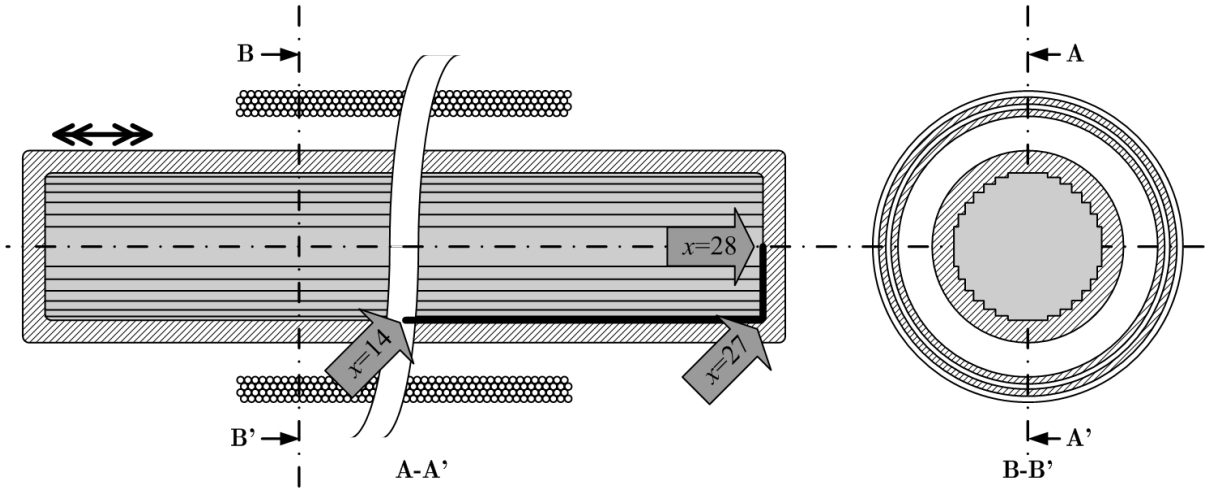


Figure E.1 – *Solénoïde de référence*

QUANTITE	VALEUR
∅ du fourreau [mm]	30
Longueur du fourreau [mm]	265
∅ équivalent du noyau [mm]	≈ 24
Longueur du noyau [mm]	260
Perméabilité relative du noyau	Non disponible (>1000)
Nombre de spire par couche	200
∅ moyen des couches [mm]	40.8 / 42.7 / 44.6 / 46.5
Longueur des couches [mm]	220 ± 2
∅ conducteurs avec/sans vernis [mm]	1.1 / 1

Table E.1 – *Caractéristiques du solénoïde de référence*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

L'armature en PVC servant de support aux enroulements n'est pas représentée sur la figure précédente, tout comme le raccordement électrique des différentes couches entre elles. Quatre prises permettent ainsi de disposer, selon les besoins, d'un enroulement complet ou partiel.

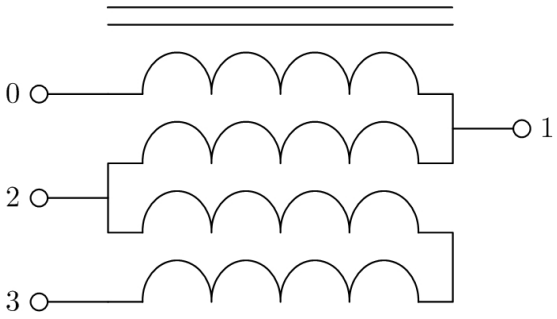


Figure E.2 – *Schéma électrique*

Une série d'essais effectués pour les différents raccordements électriques possibles, nous a permis d'évaluer les composantes résistives et inductives du solénoïde. Les résistances ont été obtenues, au moyen d'une alimentation en courant continu, associée à une méthode de mesure voltampère-métrique (température ambiante moyenne de 17°C), puis comparé aux valeurs théoriques afin de jauger les imprécisions expérimentales. Les inductances furent quant à elles obtenues par le relevé de la réponse indicielle (temps de monté de 10 à 90% $\rightarrow 2.2\tau$) et ce pour deux positions du noyau.

	Mesure	**Théorie**	**Erreur [%]**		**Mesure** (1/2 noyau)	**Mesure** (noyau entier)
R_{01} [Ω]	0.61	0.58	5.17	L_{01} [mH]	1.79	5.16
R_{02} [Ω]	1.25	1.20	4.17	L_{02} [mH]	7.91	22.58
R_{03} [Ω]	2.61	2.50	4.40	L_{03} [mH]	32.61	93.25
R_{12} [Ω]	0.64	0.61	4.92	L_{12} [mH]	1.86	5.07
R_{13} [Ω]	1.99	1.92	3.65	L_{13} [mH]	17.75	51.81
R_{23} [Ω]	1.36	1.31	3.82	L_{23} [mH]	7.98	22.68

Table E.2 – *Résistances et inductances mesurées*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Annexe F : Transformateurs d'Essais

Transformateur Delta 75kVA en Cuivre :

Il s'agit ici d'un transformateur triphasé, de type sec, sans feuilles isolantes, à trois colonnes commercialisé par la société Delta Transformer (www.deltatransformers.com). Les bobinages primaire et secondaire, en cuivre, possèdent une bonne symétrie de révolution (8 cales) et sont respectivement composés de conducteurs de section carrée et de type méplat. Dans le cas du secondaire, chaque spire correspond à l'association de deux méplats superposés. La première couche d'enroulements secondaires n'est pas en contact direct avec le noyau ferromagnétique, mais isolée de celui-ci par un cylindre de quelques millimètres d'épaisseur en PVC semi-rigide.

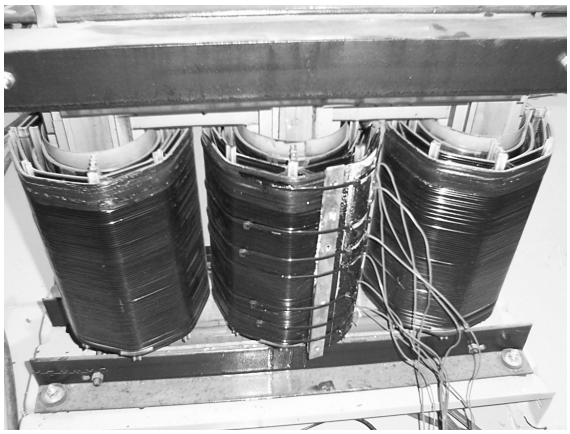


Figure F.1 – *Delta 75kVA en Cuivre instrumenté en thermocouples* (*couche extérieure*)

Les caractéristiques nominales issues de la lecture de la plaque signalétique sont :

DESIGNATION	VALEUR
Puissance apparente [kVA]	75
Tensions composées [V]	630, 615, 600, 585, 570 / 208 -120
Fréquence [Hz]	60
Couplage	Dyn1
Classe, Température maximale [°C]	150 / 220
Masse [kg]	233
Dimensions capot extérieur [cm]	76.5 × 38 × 66.5 + pied élévateur de 8

Table F.1 – *Caractéristiques électriques nominales*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Des grilles partielles situées dans les tiers supérieurs et inférieurs des tôles frontales du capot constituent les ouïes de refroidissement et assurent un échange suffisant au bon refroidissement du transformateur sur charges linéaires.

Les caractéristiques géométriques du noyau et des bobinages sont les suivantes :

DESIGNATION	**VALEUR**
Profil cruciforme des colonnes	*Largeur :* 4 (centre) / 3 (chaque côté) / 2 (chaque côté) *Epaisseur :* 2.37 (centre) / 0.59 / 0.32 *Epaisseur totale :* 4.19
Hauteur du noyau	19.75
Largeur du noyau	11.75
Hauteur de la fenêtre	11.75
Largeur de la fenêtre	4.25

Table F.2 – *Caractéristiques géométriques du noyau* (*en pouce, 1 pouce=25.4mm*)

Enroulement secondaire BT	34 spires réparties en 2 couches
Conducteurs (alternance nu et isolé)	$0.142 \times 0.286 + 0.144 \times 0.288$
Profil radial de l'enroulement	17 spires - cale 0.375 - 17 spires
Rayon intérieur initial à la surface	≈ 2.35
Inter couche	cale 0.375
Enroulement primaire HT	178 spires réparties en 2 couches
Conducteurs (isolé)	Carré de 9 : 0.1096×0.1096
Profil radial de l'enroulement	89 spires - cale 0.250 - 89 spires
Prise de la couche extérieure	à 161, 166, 170, 174, 178 spires

Table F.3 – *Caractéristiques géométriques des enroulements* (*en pouce, 1 pouce=25.4mm*)

Quant aux caractéristiques paramétriques, celles-ci proviennent des essais d'usine (tests diélectriques non présentés ici) réalisés par le manufacturier et ont été confirmées par des essais à vide (pertes à vide), en court-circuit (pertes en charge) et en opposition menée durant la phase de validation expérimentale (prise 630V), menée au sein du laboratoire d'électrotechnique de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Les mesures

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

d'échauffement moyen sont réalisées par une mesure de résistance d'enroulement "à chaud", [**IEEE C57.12.91-01**].

DESIGNATION	**VALEUR (usine, essai)**	
Résistance primaire à froid [mΩ]	$222.42\|_{21.5°C}$	$227.67\|_{20°C}$
Résistance secondaire à froid [mΩ]	$5.098\|_{21.5°C}$	$5.64\|_{20°C}$
Courant d'excitation [% I nominale]	3.38	3.45
Pertes à vide [W]	450	411
Impédance de court-circuit normalisée à froid (R, X) [%]	$2.58\|_{21.9°C}$, 2.91	$2.4\|_{20°C}$, 2.87
Impédance de court-circuit normalisée à chaud (R, X) [%]	$3.93\|_{170°C}$, 2.91	$4.05\|_{168°C}$, 2.87
Pertes en charge à froid (prise HT maximale) [W]	$1935\|_{21.9°C}$	$1809\|_{20°C}$
Pertes en charge à chaud (prise HT maximale) [W]	$2948\|_{170°C}$	$3036\|_{168°C}$
Echauffement primaire dû aux pertes dans le noyau [°C]	11	12
Echauffement secondaire dû aux pertes dans le noyau [°C]	26.3	25.5
Echauffement primaire dû aux pertes en charge [°C]	144.8	143.2
Echauffement secondaires dû aux pertes en charge [°C]	132.5	130.5
Echauffement total primaire [°C]	149.4	147.5
Echauffement total secondaire [°C]	146.4	142.3

Table F.4 – *Caractéristiques paramétriques à* $|T°C$

L'échauffement total est ici calculé par le manufacturier, à partir des échauffements obtenus lors des essais en court-circuit et à vide, puis en utilisant la relation (I.6) pour un exposant χ de 0.8. La valeur est alors comparée aux résultats recueillis lors de l'essai en opposition.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Transformateur N'Ergy 10kVA :

Ce transformateur est un prototype triphasé de distribution, de type sec, à trois colonnes, dimensionné par nos soins et conçu par la société N'Ergy. Celui-ci est surdimensionné pour permettre les essais de suréchauffements sur charge non linéaires et instrumenté en thermocouples de type K lors de sa conception. Les bobinages primaire (intérieur) et secondaire (extérieur) (tout comme le noyau) sont de section carrée et en cuivre. Des feuilles isolantes et non imprégnées de résine viennent isoler les différentes couches entre elles.

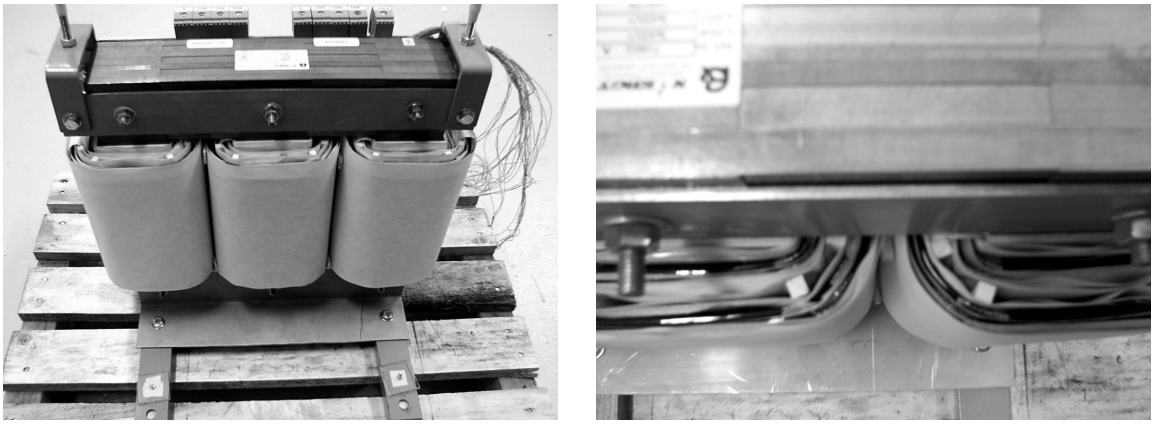


Figure F.2 – *Prototype N'Energy 10kVA en cuivre et instrumenté*

Les caractéristiques électriques nominales de ce prototype sont :

DESIGNATION	VALEUR
Puissance apparente [kVA]	10
Tensions composées [V]	400 / 400
Fréquence [Hz]	50
Couplage	YNyn
Classe, Température maximale [°C]	H, 180
Masse [kG]	90
Rendement [%]	96
Indice de protection	IP 215
Dimensions capot extérieur [cm]	46.7 × 35.7 × 44 (tôle acier E24, 1.5 mm)

Table F.5 – *Caractéristiques électriques nominales*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les tôles frontales sont des grilles complètes et assurent la circulation du flux de convection. Le boîtier ne possède pas de fond et des profilés font office de pieds élévateurs.

Les caractéristiques géométriques du noyau et des bobinages sont les suivantes :

DESIGNATION	VALEUR
Assemblage	140 Tôles EI type 1W7 0.5mm (B=1.4T), Coefficient de foisonnement : $F = 0.94$ Jonction colonne/culasse : enchevêtrée orthogonalement par paquet de 20 tôles
Dimensions extérieures [L × H × P] [cm]	35 × 35 × 7
Hauteur d'une culasse [cm]	7
Largeur d'une colonne [cm]	7
Hauteur de la fenêtre [cm]	21
Largeur de la fenêtre [cm]	7

Table F.6 – *Caractéristiques géométriques du noyau*

Les conducteurs sont pour les deux enroulements des fils de cuivre rond et de diamètres de 3.29/3.15 mm avec/sans émail et de classe 180°C. Les enroulements sont isolés entre eux soit par une seule feuille d'isolant pour les surfaces internes soit par trois feuilles pour les surfaces extérieures (de chaque enroulement incluant le mince canal de séparation primaire/secondaire) (figure F.2 et F.3).

Enroulement secondaire BT	161 spires réparties en 3 couches
Distance primitive des couches par rapport à la surface de la colonne [cm]	1.17 / 1.49 / 1.82 (épaisseur/hauteur totale : 0.99/18.3)
Inter couche	cale 6 mm
Enroulement primaire HT	157 spires réparties en 3 couches
Distance primitive des couches par rapport à la surface de la colonne [cm]	2.75 / 3.08 / 3.41 (épaisseur/hauteur totale : 0.99/18)
Isolants	Papier Nomex 247g
Epaisseur, hauteur d'une feuille [µm,cm]	130, 20
Classe	H / 220°C

Table F.7 – *Caractéristiques géométriques des enroulements*

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Les 18 thermocouples employés sont répartis entre les enroulements primaires et secondaires de la colonne centrale. Leur implantation est précisée par la figure suivante. Les deux thermocouples non représentés ici permettent la mesure de la température ambiante, ainsi que celle de la tôle.

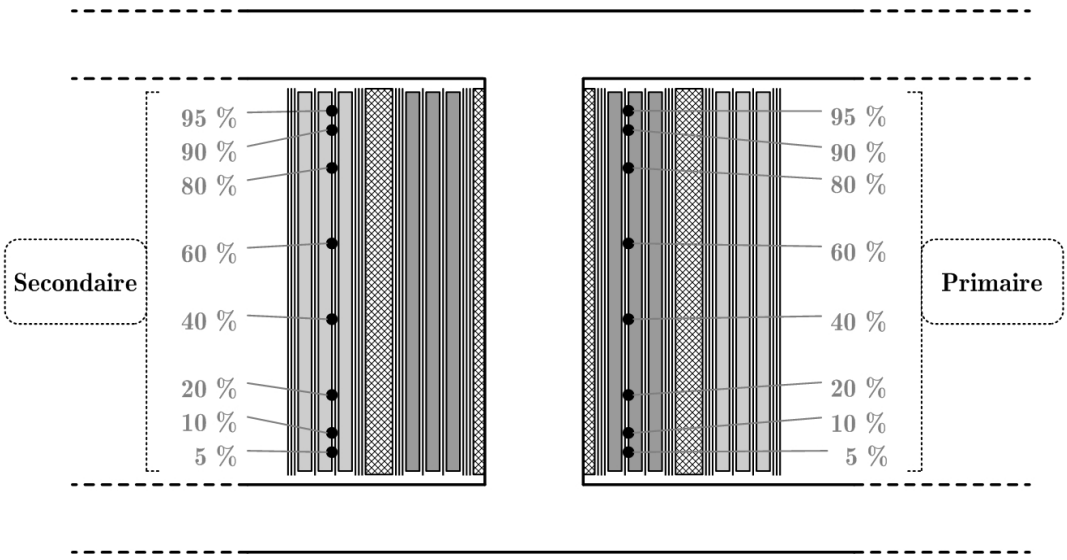


Figure F.3 – *Implantation des thermocouples* (*hauteur normalisée de l'enroulement*)

De même que précédemment pour le transformateur Delta 75kVA, les essais d'usine ont été comparés à nos propres mesures.

DESIGNATION	VALEUR (usine / essai)	
Résistance primaire à froid [mΩ]	Nd	$127.6\|_{17°C}$
Résistance secondaire à froid [mΩ]	Nd	$167.13\|_{17°C}$
Courant d'excitation [Ia,Ib,Ic % nominale]	5.1, 4.2, 5.4	5.3, 4.1, 5.5
Pertes à vide [W]	183	$154\|_{17°C}$
Impédance de court-circuit normalisée à froid (R, X) [%]	Nd	$1.7\|_{17°C}$, 1.81
Pertes en charge à chaud [W]	227	249
Echauffement primaire du aux pertes dans le noyau [°C]	Nd	37.6
Echauffement secondaire du aux pertes dans le noyau [°C]	Nd	23.6
Echauffement total primaire [°C]	Nd	99.2
Echauffement total secondaire [°C]	Nd	83.5

Table F.8 – *Caractéristiques paramétriques à* $|T°C$, (*Nd : non disponible*)

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

THESES DE DOCTORAT ..... - 195 -
RAPPORT DE DEA ..... - 196 -
ARTICLES DE REVUES ET DE PERIODIQUES ..... - 197 -
ARTICLES DE CONGRÈS ..... - 206 -
OUVRAGES ..... - 210 -
NORMES ..... - 211 -

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

THESES DE DOCTORAT

[**Abakar-01**] - A. Abakar, "Modélisation Tridimensionnelle de Systèmes Electromagnétiques Comportant des Régions Filaires et des Régions Minces : Application en CEM 50Hz à des dispositifs EDF", Spécialité : Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 27 Avril 2001.

[**Ahmad-92**] – A. Ahmad, "Contribution à la modélisation des transformateurs de puissance et de leur comportement en haute fréquence", Spécialité : Génie Electrique, Ecole Centrale de Lyon, 7 Février 1992.

[**Bousaleh-89**] – G. Bousaleh, "Etude et Simulation du Comportement du Transformateur en Haute Fréquence", Spécialité : Electrotechnique, Ecole Centrale de Lyon, 17 Mai 1989.

[**Brunotte-91**] – X. Brunotte, "Modélisation de l'Infini et Prise en Compte de Régions Magnétiques Minces – Application à la Modélisation des Aimantations de Navires", Spécialité : Electrotechnique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 18 Décembre 1991.

[**Chauveau-01**] - E. Chauveau, "Contribution au calcul électromagnétique et thermique des machines électriques – Application à l'étude de l'influence des harmoniques sur l'échauffement des moteurs asynchrones", Spécialité : Electronique & Génie Electrique, Université de Nantes, 23 Novembre 2001.

[**Chentouf-94**] - A. Chentouf, "Contribution à la modélisation électrique magnétique et thermique d'un applicateur de plasma inductif haute fréquence", Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts, Université de Nantes, 1 Décembre 1994.

[**Derbel-98**] - N. Derbel, "Elaboration et mise en œuvre d'un modèle HF du transformateur à trois colonnes en vue de la simulation des surtensions transitoires transmises aux ligne BT", Spécialité : Génie Electrique, Ecole Centrale de Lyon, 7 Mai 1998.

[**Guérin-94**] - C. Guérin, "Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs – Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique", Spécialité : Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 29 Septembre 1994.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Joan-04**] - M. Joan, "Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D", Spécialité : Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 9 Janvier 2004.

[**Miègeville-99**] - L. Miègeville, "Contribution à l'analyse prévisionnelle et stochastique des perturbations des réseaux électriques par des charges non linéaires", Spécialité : Electronique – Option Génie Electrique, Université de Nantes, 23 Septembre 1999.

[**Ngnegeu-89**] - T. Ngnegeu, "Contribution à la Modélisation Mathématique et Informatique des Pertes Supplémentaires dans les Transformateurs de Puissance de Type Cuirassé", Spécialité : Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 31 Octobre 1989.

[**Pétrissans-93**] - A. Petrissans, "La transformation du courant alternatif (1880-1939) – Histoire du transformateur et de son exploitation dans les réseaux de transport de l'énergie électrique", Spécialité : Histoire des Techniques, Université de Paris Sorbonne - Paris IV, 1993.

[**Tabaga-95**] - S. Tabaga, "Modélisation du comportement fréquentiel du transformateur – Détermination des paramètres du schéma équivalent par la méthode des éléments finis en géométrie 2D et 3D", Spécialité: Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 7 Juin 1995.

RAPPORT DE DEA

[**Trichet-95**] - D. Trichet, "Contribution à la modélisation 3D d'un système de chauffage par induction par la méthode mixte circuits couplés - Différences finies sous environnement Matlab", Spécialité: Electronique et Génie Electrique, Université de Nantes, 1995.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ARTICLES DE REVUES ET DE PERIODIQUES

[**Azzouz-93**] - Z. Azzouz, A. Foggia, L. Pierrat and G. Meunier, "3D Finite Element Computation of the High Frequency Parameters of Power Transformer Windings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n° 2, March 1993, p. 1407-1410.

[**Babic-04**] – S. Babic, S. Salon, C. Akyel, "The Mutual Inductance of Two Thin Coaxial Disk Coils in Air", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, n° 2, March 2004, p. 822-825.

[**Bejot-92**] - J. P. Bejot, "Comportement d'un transformateur MT/BT en présence d'harmoniques de courant", Revue de Génie Electrique, n° 7, Juillet 1992, p. 31-35.

[**Biro-89**] – O. Biro and K. Preis, "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, n° 4, July 1989, p. 3145-3159.

[**Biro-93a**] – O. Biro, K. Preis, G. Vrisk, K.R. Richter and I. Ticar, "Computation of 3-D Magnetostatic Fields Using a Reduced Scalar Potential", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n° 2, March 1993, p. 1329-1332.

[**Biro-93b**] – O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk and K.R. Richter, "Computation of 3-D Current Driven Skin Effect Problems Using a Current Vector Potential", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n° 2, March 1993, p. 1325-1328.

[**Bishop-96**] - M. T. Bishop, J. F. Baranowski, D.Heath and S. J. Benna, "Evaluating Harmonic-Induced Transformer Heating", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, n° 1, January 1996, p. 305-311.

[**Bossavit-83**] – A. Bossavit and J. C. Vérité, "The "TRIFOU" Code : Solving the 3-D Eddy-Currents Problem by Using H as State Variable", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 19, n° 6, November 1983, p. 2465-2470.

[**Bouissou-94**] – S. Bouissou, F. Piriou, "Comparison Between Two Formulation in Terms of Potential for the Coupling of Magnetic and Electric Circuit Equations", *IEE Proceeding in Science, Measurement and Technologie*, vol. 141, n° 6, November 1994, p. 486-490.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Bui-06**] – V. P. Bui, Y. Le Floch, G. Meunier and J-L. Coulomb, "A New Three-Dimensional (3-D) Scalar Finite Element Method to Compute T_0", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n° 4, April 2006, p. 1035-1038.

[**Brittain-02**] - J. C. Brittain, "Charles F. Scott: A pioneer in electrical power engineering", *IEEE Applications Magazine*, vol. 8, n° 6, December 2002, p. 6-8.

[**Chari-93**] – M. V. K. Chari, G. Bedrosian, J. D'Angelo and A. Konrad, "Finite Element Applications in Electrical Engineering", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n° 2, March 1993, p. 1306-1314.

[**Clavel-98**] – E. Clavel, Y. Maréchal and J. Roudet, "Modélisation des câblages en électronique de puissance : Apport et complémentarité des méthodes d'éléments finis et de circuits équivalents", *The European Physical Journal Applied Physics*, n° 1, 1998, p. 211-223.

[**Daponte-96**] - P. Daponte, D. Grimaldi, A. Piccolo and D. Villacci, "A Neural Diagnostic System for the Monitoring of Transformer Heating", Journal of Measurement, Elsevier Science, vol 18, n°1, May 1996, p. 35-46.

[**Delage-84**] - D. Delage, R. Ernst, "Prédiction de la répartition du courant dans un inducteur à symétrie de révolution destiné au chauffage par induction MF et HF", Revue Générale de l'Electricité, Avril 1984, p. 225-230.

[**DeLeon-92**] - F. de Leon and A. Semlyen, "Efficient Calculation of elementary Parameters of Transformers", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 7, n° 1, January 1992, p. 376-382.

[**Desesquelles-92**] - P. F. Desesquelles and G. Terracol, "Un modèle analytique monodimensionnel complet pour bobinages solénoïdaux en régime alternatif", Journal de Physique III, 1992, p. 415-436.

[**Dooley-98**] - P. K. Dooley, "A Comparison of Liquid-filled and Dry-Type Transformers for Industrial Applications", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 34, n° 1, January/February 1998, p. 222-226.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Driesen-00**] - J. Driesen, G. Deliège, R. Belmans and K. Hameyer, "Coupled Thermo-Magnetic Simulation of a Foil-Winding Transformer Connected to a Non-Linear Load", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, n° 4, July 2000, p. 1381-1385.

[**Driesen-02**] – J. Driesen, R. J. M. Belmans and K. Hameyer, "Methodologies for Coupled Transient Electromagnetic-Thermal Finite-Element Modeling of electrical energy Transducers", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 38, n° 5, September/October 2002, p. 1244-1250.

[**Elleuch-03**] - M. Elleuch and M. Poloujadoff, "Analytical Model of Iron Losses in Power Transformers", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, n° 2, March 2003, p. 973-980.

[**Emanuel-88**] - A. E. Emanuel, "The Effect of Nonsinusoidal Excitation on Eddy Current Losses in Saturated Iron", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, n° 2, April 1988, p. 662-671.

[**Ernst-87**] - R. Ernst, A. Gagnoud, I. Leclercq, "Etude du comportement d'un circuit magnétique dans un système de chauffage par induction", Revue Générale de l'Electricité, n° 9, Octobre 1987, p. 10-16.

[**Fernandes-costa-92**] - A. Fernandes-Costa and M. Vaz-Guedesim, "Prevision of the Thermal Behavior of Dry-Type Cast Resin Transformers", Electric Machines and Power Systems, 1992, p. 261-272.

[**Fouladgar-05**] – J. Fouladgar and E. Chauveau, "The Influence of the Harmonics on the Temperature of Electrical Machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n° 5, May 2005, p. 1644-1647.

[**Fuchs-00**] - E. F. Fuchs, D. Yildirim and W. Mack Grady, "Measurement of Eddy-Current Loss Coefficient P_{EC-R}, Derating of Single-Phase Transformers and Comparison with K-Factor Approach", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 15, n° 1, January 2000, p. 148-154.

[**Fuchs-06**] - E. F. Fuchs, D. Lin and J. Martynaitis, "Measurement of Three-Phase Transformer Derating and Reactive Power Demand under Nonlinear Loading Conditions", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 21, n° 2, April 2006, p. 665-672.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Garcia-02**] - A. Garcia, G. Espinosa-Paredes and I. Hernandez, "A Thermal Study of an Encapsulated Electrical Transformer", Journal of Computers and Electrical Engineering, Elsevier Science, n° 28, 2002, p. 417-445.

[**Gjaerde-97**] - A. C. Gjaerde, "A Phenomenological Aging Model for Combined Thermal and Electrical Stress", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 4, n°. 6, December 1997, p. 674-680.

[**Groh-05**] – F. Groh, D. Beck, W. Hafla, A. Buchau and W. M. Rucker, "Calculating Exciting Fields Using the Fast Multipole Method and an Integral Transformation to the Coil Surface", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n° 5, May 2005, p. 1384-1387.

[**Henneron-06**] – T. Henneron, S. Clénet and F. Piriou, "Calculation of Extra Copper Losses with Imposed Current Magnetodynamic Formulations", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n° 4, April 2006, p. 767-770.

[**Hwang-88**] - M. D. Hwang, W. M. Grady and H. W. Sanders, "Calculation of Winding Temperature in Distribution Transformers Subjected to Harmonic Currents", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, n° 3, July 1988, p. 1074-1079.

[**Jafari-89**] - F. Jafari and P. D. Higgins, "Thermal Modeling in Cylindrical Coordinates Using Effective Conductivity", *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 36, n° 2, March 1989, p. 191-196.

[**Jaytener-96**] - I. Jaytener, "Modélisation thermique de transformateurs enrobés", REE, n° 10, Novembre 1996, p. 35-38.

[**Kameari-97**] – A. Kameari and K. Koganezawa, "Convergence of ICCG Method in FEM Using Edge Elements without Gauge Condition", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n° 2, March 1997, p. 1223-1226.

[**Kelley-99**] - A. W. Kelley, S. W. Edwards, J. P. Rhode and M. E. Baran, "Transformer Derating for Harmonic Currents: A Wide-Band Measurement Approach for Energized Transformers", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 35, n°. 6, November/December 1999, p. 1450-1457.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Kerszenbaum-91**] - I. Kerszenbaum, A. Mazur, M. Mistry and J. Frank, "Specifying Dry-Type Distribution Transformers for Solid-State Applications", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 27, n° 1, January/February 1991, p. 173-178.

[**Kladas-94**] - A. G. Kladas, M. P. Papadopoulos and J. A. Tegopoulos, "Leakage Flux and Force Calculation on Power Transformer Windings under Short-Circuit : 2D and 3D Models based on the Theory of Images and the Finite Element Method Compared to Measurements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n° 5, September 1994, p. 3487-3490.

[**Koppikar-98**] - D. A. Koppikar, S.V. Kulkarni, G. Ghosh, S.M. Ainapure and J.S. Bhavsar, "Circulating-Current Loss in Transformer Windings", *IEE Proceeding on Science, Measure and Technology*, vol. 145, n° 4, July 1998, p. 136-140.

[**Kyriakakis-01**] - J. Kyriakakis, "ALSTOM Hellas Experience on Power and Distribution Transformers", Journal of Materials Processing Technology, Elsevier Science, n° 108, 2001, p. 257-262.

[**Lefèvre-04c**] - A. Lefèvre, L. Miègeville, J. Fouladgar and G. Olivier, "3D Computation of Transformer Overheating under Non-Linear Loads", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n° 5, May 2005, p. 1564-1567.

[**LeFloch-03**] – Y. Le Floch, G. Meunier, C. Guérin, P. Labie, X. Brunotte and D. Boudaud, "Coupled Problem Computation of 3-D Multiply Connected Magnetic Circuits and Electric Circuits", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, n° 3, May 2003, p. 1725-1728.

[**Liew-02**] - M. C. Liew and P. S. Rodger, "Incorporating Capacitance into Partial-Core Transformer Models to Determine First Natural Resonant Frequencies", *IEE Generation Transmission and Distribution*, vol. 149, n° 6, November 2002, p. 746-752.

[**Lu-03**] - H. Y. Lu, J. G. Zhu and S. Y. R Hui, "Experimental Determination of Stray Capacitances in High Frequency Transformers", *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 18, n° 5, September 2003, p. 1105-1112.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Massey-94**] - G. W. Massey, "Estimation Methods for Power System Harmonic Effects on Power Distribution Transformers", *IEEE Transactions on Industry Application*, vol. 30, n° 2, March/April 1994, p. 485-489.

[**Mayergoyz-87**] – I. D. Mayergoyz, M. V. K. Chari and J. d'Angelo, "A New Scalar Potential Formulation for Three-Dimensional Magnetostatic Problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 23, n° 6, November 1987, p. 3889-3894.

[**Meunier-98**] - G. Meunier, H.T. Luong and Y. Maréchal, "Computation of Coupled Problem of 3D Eddy Current and Electrical Circuit by Using T_0 – T - ϕ Formulation", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, n° 5, September 1998, p. 3074-3077.

[**Mimoune-95**] - S. M. Mimoune, J. Fouladgar and G. Develey, "Modeling of 3D Electromagnetic and Heat Transfer Phenomena for Materials with Poor Conductivity", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, n° 6, November 1995, p. 3578-3580.

[**Moreau-05**] – O. Moreau, R. Michel, T. Chevalier, G. Meunier, M. Joan and J. B. Delcroix, "3-D High Frequency Computation of Transformer *R,L* Parameters", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n° 5, May 2005, p. 1364-1367.

[**Muramatsu-06**] – K. Muramatsu, T. Shimizu, A. Kameari, I. Yanagisawa, S. Tokura, O. Saito and C. Kaido, "Analysis of Eddy Currents in Surface Layer of Laminated Core in Magnetic Bearing System Using Leaf Edge Elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n° 4, April 2006, p. 883-886.

[**Nakata-88**] – T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, "Improvements of the T-Ω Method for 3-D Eddy Current Analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, n° 1, January 1988, p. 94-97.

[**Namjoshi-98**] – K. V. Namjoshi, J. D. Lavers and P. P. Biringer, "Eddy-Current Power Loss in Toroidal Cores with Rectangular Cross Section", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, n° 3, May 1998, p. 636-641.

[**Netter-95**] – D. Netter, J. Leveque, A. Rezzoug, J.P. Caron, F.M. Sargos, "3D-Computation of a Thermal Process in a Superconducting Coil", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, n° 6, November 1995, p. 4127-4129.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Olivares-03**] – J. C. Olivares, Y. Liu, J. M. Cañedo, R. Escarela-Pérez, J. Driesen and P. Moreno, "Reducing Losses in Distribution Transformers", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, n° 3, July 2003, p. 821-826.

[**Olivier-98**] - G. Olivier and C. Paun, "Echauffement des transformateurs en régime non sinusoïdal", Revue Internationale de Génie Electrique, vol. 1, n° 2, 1998, p. 203-224.

[**Olivier-03**] - G. Olivier, R. Cojocaru and A. Lefèvre, "Analytical Model of a T-Connected Three-Phase Transformer", *IMACS*, vol. 63, November 2003.

[**Pandey-92**] - S. B. Pandey and C. Lin, "Estimation for a Life Model of Transformer Insulation Under Combined Electrical & Thermal Stress", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 41, n° 3, September 1992, p. 466-468.

[**Pavlik-93**] - D. Pavlik, D. C. Johnson and R. S. Girgis, "Calculation and Reduction of Stray and Eddy Losses in Core-Form Transformers Using a Highly Accurate Finite Element Modelling Technique", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 8, n° 1, January 1993, p. 239-245.

[**Perry-79**] – M. P. Perry, "Multiple Layer Series Connected Winding Design for Minimum Losses", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, n° 1, January/February 1979, p. 116-123.

[**Phung-05**] – A. T. Phung, O. Chadebec, P. Labie, Y. Le Floch and G. Meunier "Automatic Cuts for Magnetic Scalar Potential Formulations", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n° 5, May 2005, p. 1668-1671.

[**Pierce-93**] - L. W. Pierce, "Specifying and Loading Cast-Resin Transformers", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 29, n° 3, May/June 1993, p. 590-599.

[**Pierce-94a**] - L. W. Pierce, "Predicting Hottest Spot Temperatures in Ventilated Dry Type Transformers Windings", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 9, n° 2, April 1994, p. 1160-1172.

[**Pierce-94b**] - L. W. Pierce, "Thermal Considerations in Specifying Dry-Type Transformers", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 30, n° 4, July/August 1994, p. 1090-1098.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Pierce-96**] - L. W. Pierce, "Transformer Design and Application Considerations for Nonsinusoidal Load Currents", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 32, n° 3, May/June 1996, p. 633-645.

[**Piriou-93**] – F. Piriou and A. Razek, "Finite Element Analysis in Electromagnetic Systems Accounting for Electric Circuits", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n° 2, March 1993, p. 1669-1675.

[**Preis-06**] – K. Preis, O. Biro, G. Buchgraber and I. Ticar, "Thermal-Electromagnetic Coupling in the Finite-Element Simulation of Power Transformer", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n° 4, April 2006, p. 999-1002.

[**Ram-88**] - B. S. Ram, J. A. C. Forrest and G. W. Swift, "Effect of Harmonics on Converter Transformer Load Losses", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, n° 3, July 1988, p. 1059-1066.

[**Ren-96**] – Z. Ren, "Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Curl-Curl Equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n° 3, May 1996, p. 655-658.

[**Rezzoug-92**] – A. Rezzoug, J.P. Caron, F.M. Sargos, "Analytical Calculation of Flux Induction and Forces of Thick Coils with Finite Length", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n° 5, September 1992, p. 2250-2252.

[**Robert-02**] – F. Robert, "A Theoretical Discussion About the Layer Copper Factor Used in Winding Losses Calculation", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, n°5, September 2002, p. 3177-3179.

[**Stensland-97**] - T. Stensland, E. F. Fuchs, W. M. Grady and M. T. Doyle, "Modeling of Magnetizing and Core-Loss Currents in Single-Phase Transformers with Voltage Harmonics for Use in Power Flow", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12, n° 2, April 1997, p. 768-774.

[**Swift-01a**] – G. Swift, T. S. Molinski and W. Lehn, "A Fundamental Approach to Transformer Thermal Modeling – Part I : Theory and Equivalent Circuit", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 16, n° 2, April 2001, p. 171-175.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Swift-01b**] – G. Swift, T. S. Molinski, R. Bray and R. Menzies, "A Fundamental Approach to Transformer Thermal Modeling – Part II : Field Verification", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 16, n° 2, April 2001, p. 176-180.

[**Takahashi-00**] - N. Takahashi, T. Kitamura, M. Horii and J. Takehara, "Optimal Design of Tank Shield Model of Transformer", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 36, n° 4, July 2000, p. 1089-1093.

[**Tarasiewicz-93**] - E. J. Tarasiewicz, A. S. Morched, A. Narang and E. P. Dick "Frequency Dependent Eddy Current Models for Nonlinear Iron Cores", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 8, n° 2, May 1993, p. 588-597.

[**TeNyenhuis-00**] - E. G. teNyenhuis, G. F. Mechler and R. S. Girgis, "Flux Distribution and Core Loss Calculation for Single Phase and Five Limb Three Phase Transformer Core Designs", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 15, n° 1, January 2000, p. 204-209.

[**Trowbridge-06**] – C. W. Trowbridge, J. K. Sykulski, "Some Key Developments in Computational Electromagnetics and Their Attribution", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n° 4, April 2006, p. 503-508.

[**Tsili-04**] – M. A. Tsili, A. G. Kladas, P. S. Georgilakis, A. T. Souflaris, C. P. Pitsilis, J. A. Bakopoulos and D. G. Paparigas, "Hybrid Numerical Techniques for Power Transformer Modeling : A Comparative Analysis Validated by Measurements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, n° 2, March 2004, p. 842-845.

[**Turowski-97**] - J. Turowski and A. Pelikant, "Eddy Current Losses and Hot-Spot Evaluation in Cover Plates of Power Transformers", *IEE on Electric Power Application*, vol. 144, n° 6, November 1997, p. 435-440.

[**Vandelac-88**] - J. P. Vandelac and P. D. Ziogas, "A Novel Approach for Minimizing High-Frequency Transformer Copper Losses", *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 3, n° 3, July 1988, p. 266-276.

[**Yildirim-00**] - D. Yildirim and E. F. Fuchs, "Measured Transformer Derating and Comparison with Harmonic Loss Factor (F_{HL}) Approach", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 15, n° 1, January 2000, p. 186-191.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

ARTICLES DE CONGRÈS

[**Albach-00**] - M. Albach, "Two-dimensional Calculation of Winding Losses in Transformers", *IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference (PESC'000)*, June 18-23 2000, Galway, Ireland, p. 1639-1644.

[**Bensmaia-93**] – A. Bensmaia, J. Aubin and A. Skorek, "Simulation of the Behaviour of Fluids in Thermal Analysis of the Windings of Power Transformers", *IEEE Proceeding of Canadian Conferences on Electrical and Computer engineering (CCECE)*, vol. 1, September 14-17, 1993, p. 297-300.

[**Carsten-86**] - B. Carsten, "High Frequency Conductor Losses in Switchmode Magnetics", *High-Frequency Power Converter Conference Record (HFPC'86)*, May 1986, p. 155-176.

[**Coillot-99**] - C. Coillot, Y. Patin, F. Forest and P. Chantrenne, "Analytic Thermal Modelling of an Air-Cored Coil", *8th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'99)*, Lausanne, Septembre 7-9, 1999, p. 1-9.

[**Cygan-90**] - P. Cygan and J. R. Laghari, "A Review of Electrical and Thermal Multistress Aging Models", *IEEE International Symposium on Electrical Insulation*, Toronto, June 3-6, 1990, p. 15-20.

[**Declercq-99**] - J. Declercq and W. Van Der Veken, "Accurate Hot Spot Modeling in a Power Transformer Leading to Improved Design and Performance", *IEEE Conference on Transmission and Distribution*, vol. 2, April 11-16, 1999, p. 920-924.

[**Delaiba-98**] **-** A. C. Delaiba, J. C. de Oliveira, J. R. Cardoso and P. F. Ribeiro, "Practical Validation for the Frequency Domain Approach to Study the Thermal Behavior of Transformers under Nonsinusoidal Operation Condition", *IEEE/PES and NTUA 8th International Conference on Harmonics and Quality of Power (ICHQP'98)*, Athens, October 14-16, 1998, p. 946-951.

[**Dianchun-00**] **-** Z. Dianchun, Y. Jiaxiang and W. Zhenghua, "Thermal Field and Hottest Spot of the Ventilated Dry-Type Transformer", *6th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials*, vol. 1, June 21-26, 2000, p. 141-143.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Doirat-06**] - V. Doirat, G. Berthiau, J. Fouladgar and A. Lefèvre, "EC Modeling by Coupled Circuits Method Considering the Skin and Proximity Effects", *the 11th International Workshop on Electromagnetic Nondestructive Evaluation (ENDE'06)*, Japan, June, 2006.

[**Dowell-66**] - P. L. Dowell, "Effects of Eddy Currents in Transformer Windings", *IEE Proceedings*, vol. 113, n° 8, August 1966, p. 1387-1394.

[**Egolf-94**] - D. W. Egolf and A. J. Flechsig, "Harmonics – Transformer Derating", *IEEE Annual Meeting - Industrial and Commercial Power Systems Technical Conference*, May 1-5, 1994, p. 79-84.

[**Escarela-Perez-04**] - R. Escarela-Perez, J. C. Olivares-Galvan and M. A. Venegas-Vega, "Numerical Determination of Tank Losses in Distribution Transformers", *International Conference on Electrical Machines (ICEM'04)*, Cracow, September 5-8, 2004.

[**Frank-96**] - J. M. Frank, "Harmonics: How They Affect the Development and Design of "K" Factor Transformers", *IEEE Pulp and Paper Industry Technical Conference*, June 10-14, 1996, p. 204-208.

[**Gaba-98**] **- G**. Gaba and M. Abou-Dakka, "A Simplified and Accurate Calculation of Frequency Dependence Conductor Impedance", *IEEE/PES and NTUA 8th International Conference on Harmonics and Quality of Power (ICHQP'98)*, Athens, October 14-16, 1998, p. 939-945.

[**Guo-01**] **-** X. Guo, D. Wilcox and A. Dalton, "Frequency Dependent Modelling of Coils on Toroidal Ferrite Cores", *36th Universities Power Engineering Conference (UPEC'01)*, Swansea, September 12-14, 2001, p. 939-945.

[**Gyselink-06**] – J. Gyselink, R. V. Sabariego and P. Dular, "Time-Domain Homogenization of Windings in Two-Dimensional Finite Element Models", *the 12th biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC'06)*, Miami, Florida, USA, April 30th-May 3rd 2006

[**Houtappel-99**] – G. Houtappel, J. Driesen, R. Belmans and K. Hameyer, "Coupled magnetic-thermal behaviour of a single phase transformer", *Electrimacs'99*, vol. 1, Saint-Nazaire, 1999, p. 79-84.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Jardini-97**] - J. A. Jardini, C. M. V. Tahan, E. L. Ferrari and S. U. Ahn, "Selection of Distribution Transformer Based on Economic Criteria", *IEE 14th International Conference and Exhibition on Electricity Distribution (CIRED'97)*, vol. 6, June 2-5, 1997, p. 14.1-14.6.

[**Kennedy-90**] - S. P. Kennedy and C. I. Ivey, "Application, Design and Rating of Transformers Containing Harmonic Currents", *IEEE Pulp and Paper Industry Technical Conference*, June 18-22, 1990, p. 19-31.

[**Kulkarni-00**] - S. V. Kulkarni and S. A. Khaparde, "Stray Loss Evaluation in Power Transformer – A Review", *IEEE Power Engineering Society Winter Meeting*, vol.3, January 23-27, 2000, p. 269-274.

[**Lefèvre-04a**] - A. Lefèvre, L. Miègeville, J. Fouladgar, G. Olivier, M.I. Lamghari-Jamal, "Coupled Analytical and Finite Element Calculations to Study the Thermal Behaviour of Transformers under Nonlinear Loads", *International Conference on Electrical Machines (ICEM'04)*, Cracow, September 5-8, 2004.

[**Lefèvre-04b**] - A. Lefèvre, L. Miègeville, J. Fouladgar and G. Olivier, "3D Computation of Transformer Overheating under Non-Linear Loads", *IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC'04)*, Séoul, Juin 6-9, 2004.

[**Lessard-96**] - M. C. Lessard, L. V. Nifterik, M. Massé, J. F. Penneau and R. Grob, "Thermal Aging Study of Insulating Papers Used in Power Transformers", *IEEE Annual Report – Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, San Francisco, October 20-23, 1996, p. 854-859.

[**Makarov-00**] - S. N. Makarov, "Corrected Harmonic Loss Factor for Transformers Supplying Nonsinusoïdal Load Currents", *IEEE 9th International Conference on Harmonics and Quality Power (ICHQP'00)*, vol. 1, October 1-4, 2000, p. 87-90.

[**Niemela-89**] - V. A. Niemela, G. R. Skutt, A. M. Urling, Y. N. Chang, T. G. Wilson, H. A. Owen Jr and R. C. Wong, "Calculating the Short-Circuit Impedances of a Multiwinding Transformer from its Geometry", *IEEE 20th Annual Power Electronics Specialists Conference (PEC'89)*, June 1989, p. 607-617.

[**Paun-99**] - C. Paun and G. Olivier, "Skin and Proximity Losses in Power Distribution Transformers", *Electrimacs'99*, vol. 2, Saint-Nazaire, 1999, p. 247-250.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Pierrat-96**] - L. Pierrat, M. J. Resende and J. Santana, "Power Transformers Life Expectancy Under Distorting Power Electronic Loads", *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE'96)*, vol. 2, June 17-20, 1996, p. 578-583.

[**Resende-98**] - M. J. Resende, L. Pierrat and J. Santana, "Influence of the Harmonic Load Distortion on the Transformer Rating", *IMACS 2nd International Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA'98)*, Nabeul-Hammamet, Tunisia, April 1-4, 1998, p. 1165-1170.

[**Samesima-95**] - M. I. Samesima, J. Wilson-Resende and S. C. N. Araujo, "Analysis of Transformer Loss of Life Driving Nonlinear Industrial Loads by the Finite Elements Approach", *IEEE 13th Annual Meeting on Industrie Applications Conference (IAS'95)*, vol. 3, October 8-12, 1995, p. 2175-2179.

[**Schmidt-02**] - E. Schmidt, P. Hamberger and W. Seitlinger, "Calculation of Eddy Current Losses in Metal Parts of Power Transformers", *International 15th Conference on Electrical Machines*, Brugge, Belgium, August 25-28, 2002.

[**Sen-03**] - P. K. Sen, "Application Guidelines for Dry-Type Distribution Power Transformers", *IEEE Technical Conference in Industrial and Commercial Power Systems*, May 4-8 2003, Colorado, USA, p. 105-110.

[**Susnjic-04**] - L. Susnjic, Z. Haznadar and Z. Valkovic, "Electromagnetic Analysis Applied to the Prediction of Stray Losses in Power Transformer", *International Conference on Electrical Machines (ICEM'04)*, Cracow, September 5-8, 2004.

[**Taci-00**] - M. Taci, M. H. Sarul and G. Yildirmaz, "The Effects of the Harmonic Components Upon Transformer Active Losses in Case of (Non)Sinusoidal Sources and (Non)Linear Loads", *IEEE International Conference on Industrial Technology*, vol. 2, n° 4, January 19-22, 2000, p. 741-746.

[**Urling-89**] - A. M. Urling, V. A. Niemela and G. R. Skutt, T. G. Wilson, "Characterizing High-Frequency Effects in Transformer Windings – A Guide to Several Significant Articles", *IEEE 4th Applied Power Electronics Conference (APEC'89)*, Baltimore, March 1989, p. 373-385.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Venkatraman-84**] – P. S. Venkatraman, "Winding Eddy Current Losses in Switch Mode Power Transformers due to Rectangular Wave Currents", *Proceedings of Powercon 11, Power Concept Inc.*, Ventura, California, Section A-1, 1984, p. 1-11.

[**VanDenBossche-02**] – A. Van Den Bossche, V. Valchev and J. Melkebeek, "Thermal Modeling of E-Type Magnetic Components", *IEEE 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society (IECON'02),* vol. 2, November 5-8, 2002, p. 1312-1317.

[**Wilcox-88**] **-** D. J. Wilcox, W. G. Hurley and M. Conlon, "Calculation of Self and Mutual Impedances between Sections of Transformer Windings", *IEE Proceedings Conference on Science, Measurement and Technology*, vol. 135, n° 7, September, 1988, p. 470-476.

OUVRAGES

[**Angot-72**] - A. Angot, "Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications", Sixième édition, Edition Masson et Cie, 1972.

[**Bastos-93**] - J. P. A. Bastos and N. Sadowski, "Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods", Universidade Federal de Santa Catarina – Florianopolis, Brazil, Marcel Dekker Inc., 2003.

[**Bouchard-99**] - R. P. Bouchard et G. Olivier, "Electrotechnique – Deuxième Edition", Presses Internationales Polytechnique, 1999.

[**Durand-68**] - E. Durand, "Magnétostatique", Edition Masson et Cie, 1968.

[**Jin-93**] - J. Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics", Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc., 1993.

[**Egem-02a**] - G. Meunier et al, "Modèles et formulation en électromagnétisme – Electromagnétisme et éléments finis 1", Traité EGEM (électronique-génie électrique-microsystèmes), Edition Hermès-Lavoisier, 2002.

[**Egem-02b**] - G. Meunier et al, "Modèles et formulation en électromagnétisme – Electromagnétisme et éléments finis 2", Traité EGEM (électronique-génie électrique-microsystèmes), Edition Hermès-Lavoisier, 2002.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

[**Egem-02c**] - G. Meunier et al, "Modèles et formulation en électromagnétisme – Electromagnétisme et éléments finis 3", Traité EGEM (électronique-génie électrique-microsystèmes), Edition Hermès-Lavoisier, 2002.

[**Fournet-93**] - G. Fournet, "Electromagnétisme", Technique de l'ingénieur, vol. D 1 020, 2001, Traité Convertisseurs et Machines Electriques, 1993, p. 1-89.

[**Özisik-85**] - M. N. Özisik, "Heat transfer : A basic approach", McGraw-Hill International Editions, 1985.

[**Sabonnardiere-88**] - J. C. Sabonnardière et J. L. Coulomb, "Calcul des Champs Electromagnétiques", Technique de l'ingénieur, Traité Convertisseurs et Machines Electriques, vol. D 3 020, 1988, p. 1-19.

[**Thureau-01**] - P. Thureau, "Introduction aux Transferts Thermiques", Technique de l'ingénieur, Traité Mesure et Contrôle, vol. R 2 831, 2001, p. 1-31.

[**Wildi-00**] – T. Wildi et G. Sybille, "Electrotechnique, 3ème édition", Edition De Boeck Université, 2000.

NORMES

[**IEEE-C57.110-98**] – IEEE Standard C57.110-98, "IEEE Recommended Practice for Establishing Transformer Capability When Supplying Nonsinusoidal Load Currents", July 1998.

[**IEEE-C57.134-00**] – IEEE Standard C57.134-2000, "IEEE Guide for Determination of Hottest-Spot Temperature in Dry-Type Transformers", January 2000.

[**IEEE-C57.12.91-01**] – IEEE Standard C57.12.91-2001, "IEEE Standard Test Code for Dry-Type Distribution and Power Transformers", January 2001.

[**NF-C52-112-4**] – Norme Française C52-112-4, "Transformateurs triphasés de distribution immergés dans l'huile, 50Hz, de 50 à 2500 kVA, de tension la plus élevée pour le matériel ne dépassant pas 36 kV – Partie 4 : Détermination de la caractéristique de puissance d'un transformateur avec des courants de charge non sinusoïdaux", Mai 1995.

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

tel-00116335, version 1 - 25 Nov 2006

"Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs: Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires"

Résumé: La généralisation des charges non linéaires dans l'industrie cause de nombreuses perturbations dans les réseaux électriques. Ainsi, les courants harmoniques augmentent les pertes dans les transformateurs, par le biais des effets pelliculaire et de proximité. Dès lors, ceux-ci sont assujettis à un sur échauffement. Afin d'éviter une défaillance diélectrique ainsi qu'un vieillissement prématuré, la température du point chaud ne doit pas excéder celle spécifiée par la classe. Néanmoins, pour une charge donnée il est difficile de prévoir le comportement électromagnétique et thermique d'un transformateur. L'objectif de cette thèse est donc de caractériser ce fonctionnement pour se prémunir lors de la phase de conception des nuisances ultérieures.

Une première modélisation s'appuie sur une méthode analytique et axisymétrique permettant le calcul de la distribution des densités de courant dans les enroulements. Puis, après une homogénéisation des conducteurs, une méthode de résolution par éléments finis aboutit à l'obtention de la température en régime permanent. Enfin, la méthode est vérifiée sur un transformateur de type sec et de puissance modérée, associé à un banc expérimental innovant.

Un second modèle propose une nouvelle approche analytique et numérique. Tout d'abord, une méthode des éléments finis 3D (MEF) permet le calcul du champ magnétique. Ce calcul non linéaire est alors associé aux équations de circuit. Puis, une MEF thermique 3D fournie la distribution de température. Finalement, le modèle couplé est appliqué à un transformateur de distribution de petite puissance et instrumenté pour vérifier le suréchauffement engendré par des courants non sinusoïdaux.

Mots clés: transformateur, charges non linéaires, harmoniques, effet de proximité, effet pelliculaire, sur échauffement, point chaud, méthode d'homogénéisation, équations de circuit, calcul analytique, méthode des éléments finis 2D/3D (MEF).

"Contribution to the electric, electromagnetic and thermal modeling of transformers: Case study of thermal behaviour under non-linear loads"

Abstract: The widespread use of nonlinear loads in the industry is the source of several disturbances in the electrical network. Thus the current harmonics leads to increase the losses due to proximity and skin effects in the transformer windings. Therefore, the transformers become more sensitive to overheating. In order to avoid a dielectric failure as well as a premature ageing, the hot spot temperature must not exceed the prescribed insulating value. However, for a given nonlinear load it is difficult to predict the electromagnetic and thermal state of the transformer. The main objective of this research is to characterize the harmonic behaviour of the power transformer to prevent, at the design stage, these unexpected troubles.

A first work presented in this thesis deals with an analytical and axisymetric method to compute the winding current density distribution. Then, the conductor layers are homogenised and a steady state thermal finite element calculation is applied to obtain the temperature map. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified on a medium power dry type transformer loaded by an innovative experimental installation.

A second model is based on a new analytical and numerical method. First a 3D finite element method (FEM) is applied to compute the magnetic field in the free and the iron spaces. This non-linear calculation is combined with a mixed form of the electrical circuit equation. Then a 3D thermal FEM allows to show the temperature distribution in the transformer. Finally, this coupling model is applied to a small power distribution transformer with embedded sensors to verify the overheating effect of non sinusoidal currents.

Index terms: transformer, non-linear loads, harmonics, proximity effect, skin effect, overheating, hot spot, homogenization method, circuit equation, analytical calculation, 2D/3D finite element method (FEM).