HAL open science

Marches aléatoires en milieux aléatoires: Etude de quelques modèles multidimensionnels

François Simenhaus

▶ **To cite this version:**

François Simenhaus. Marches aléatoires en milieux aléatoires: Etude de quelques modèles multidimensionnels. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT : . tel-00338804

HAL Id: tel-00338804

https://theses.hal.science/tel-00338804

Submitted on 14 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

THÈSE

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

par **François SIMENHAUS**

MARCHES ALÉATOIRES EN MILIEUX ALÉATOIRES

ÉTUDE DE QUELQUES MODÈLES MULTIDIMENSIONNELS

Thèse dirigée par
Francis COMETS

Rapporteurs :	**Mme.**	**Nina**	**GANTERT**	Universität Münster
	M.	**Pierre**	**MATHIEU**	Université de Provence

Soutenue publiquement le **13 novembre 2008**, devant le jury composé de

M. Jean	**BERTOIN,**	Université Paris 6
M. Francis	**COMETS,**	Université Paris 7
M. Nathanaël	**ENRIQUEZ,**	Université Paris 10
Mme. Nina	**GANTERT,**	Universität Münster
M. Yueyun	**HU,**	Université Paris 13
M. Pierre	**MATHIEU,**	Université de Provence

Remerciements

Certaines personnes ont joué un rôle particulier dans l'élaboration de cette thèse et je voudrais, avant le début du manuscrit, les remercier en quelques lignes.

Francis Comets m'a fait confiance, d'abord en encadrant mon mémoire de master, puis en acceptant de diriger ma thèse. Durant toutes ces années, il a joué un rôle essentiel dans ma formation de probabiliste et de chercheur. Je mesure pleinement la chance d'avoir pu apprendre avec lui, pour ses qualités de mathématicien bien sûr, mais aussi pour son enthousiasme, son humour et son soutien dans les moments importants de cette aventure.

Pierre Mathieu et Nina Gantert ont accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je suis très fier et très heureux que ce soient eux qui aient évalué mon travail.

Nathanaël Enriquez m'a beaucoup aidé pendant ces années de thèse, que ce soit par l'intérêt qu'il a porté à mon travail, par ses conseils, ou encore par ses nombreux encouragements. Je suis très heureux de sa participation au jury.

Je suis très honoré que Jean Bertoin et Yueyun Hu aient accepté d'être membres du jury lors de ma soutenance.

J'ai eu l'opportunité de partager de nombreuses discussions avec des chercheurs durant ma thèse et je les remercie du temps qu'ils m'ont accordé. Je pense en particulier aux heures de travail avec Marina Vachkovskaïa qui ont largement inspiré le dernier chapitre de ce manuscrit.

Je voudrais aussi remercier les enseignants du master « Modélisation Aléatoire » de l'université Paris 7 et, notamment, Laure Elie qui a toujours accordé une grande attention au devenir de ses anciens élèves.

Je dois aussi saluer le travail de l'équipe administrative, Isabelle Mariage, Valérie Juvé et Josette Saman pour le PMA, Virginie Kuntzmann et l'irremplaçable Michelle Wasse pour l'UFR de mathématiques.

Je salue amicalement les thésards de Chevaleret et, en particulier, les habitants du légendaire bureau 5C9.

Il y a enfin ceux qui n'ont pas vraiment de lien avec les probabilités mais à qui cette thèse doit tout de même beaucoup. J'embrasse donc fortement mes parents, ma grand-mère, Olivier, Laure, Caroline, Yannis et Eliott.

Table des matières

Remerciements 3

Chapitre 0. Introduction 7
1. Présentation 7
2. Modèle i.i.d. en temps discret 11
3. Un modèle i.i.d. en temps continu 15
4. Percolation et modèle de trappes 17
5. Notations et organisation du manuscrit 19

Chapitre 1. Modèle i.i.d. et renouvellement 21
1. Le modèle i.i.d. 21
2. Récurrence, transience et loi du $0-1$ 24
3. Structure de renouvellement 25
4. Loi des grands nombres 29
5. Comportement balistique 31
6. Autres résultats 34

Chapitre 2. Direction asymptotique 35
1. Présentation de l'article *Asymptotic Direction for RWRE* 35
2. Introduction and results 40
3. Proofs 43

Chapitre 3. Un modèle en temps continu 53
1. Modèle et questions 53
2. Résultats pour $d = 1$ 57
3. Le cas multidimensionnel 64

Chapitre 4. Percolation et MAMA 69
1. Percolation 69
2. Marcher sur le cluster infini 71
3. Une marche attirée par les clusters 73

Chapitre 5. Une marche ralentie par les clusters d'une percolation 79
1. Présentation de l'article *Random Walk Delayed on Percolation Clusters* 79
2. Model and results 84
3. Preliminaries and the proof of Theorem 5.1 88
4. Subballistic regime, and the proofs of Theorem 5.2 and 5.3 91

Bibliographie 99

CHAPITRE 0

Introduction

Sommaire

1. Présentation **7**
1.1. Trois exemples 8
1.2. Loi quenched et loi annealed 9
1.3. Motivations 9
1.4. Le rôle de la dimension 10
2. Modèle i.i.d. en temps discret **11**
2.1. Principaux résultats en dimension 1 12
2.2. Le cas multidimensionnel 13
2.3. Direction asymptotique 15
3. Un modèle i.i.d. en temps continu **15**
3.1. Modèle 15
3.2. Résultats 16
4. Percolation et modèle de trappes **17**
4.1. Modèle 17
4.2. Résultats 18
5. Notations et organisation du manuscrit **19**

1. Présentation

L'exemple de déplacement aléatoire le plus élémentaire est sans doute la marche simple sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqslant 1$). Il s'agit d'étudier le comportement d'un marcheur partant de l'origine et sautant à chaque unité de temps, quelque soit sa position et de façon uniforme, sur l'un de ses $2d$ voisins dans le réseau. Depuis le début du vingtième siècle, une littérature mathématique considérable a été consacrée à ce modèle. La loi de ce processus est aujourd'hui très bien décrite et de nombreuses propriétés fines ont été démontrées. Si cet objet est très satisfaisant pour décrire un déplacement dans un milieu homogène et déterministe, il est en revanche insuffisant pour modéliser un mouvement dans un milieu hétérogène ou inconnu. Plus précisément, la marche simple est une chaîne de Markov ayant pour transition en tout site x de $\mathbb{Z}^d$ le vecteur $\omega_x = (1/2d, \cdots, 1/2d)$ et présentant donc une grande homogénéité spatiale. Pour modéliser un milieu hétérogène et aléatoire, nous allons considérer un champ de transitions $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ aléatoire dont nous noterons $\mathbb{P}$ la loi. Le

déplacement markovien associé est appelé Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire et l'acronyme MAMA est traditionnellement utilisé pour désigner ces processus. Une marche aléatoire en milieu aléatoire est donc gouvernée par deux aléas. Le premier sert à déterminer la réalisation du champ $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ appelé milieu ou environnement tandis que le second détermine la trajectoire du marcheur dans l'environnement. Dans les modèles que nous allons étudier, la loi du milieu vérifie des hypothèses de stationnarité ou d'ergodicité permettant de prendre en compte des environnements, certes hétérogènes, mais présentant également une forme de régularité spatiale. Pour permettre au lecteur de se familiariser avec la description qui vient d'être faite, commençons cette introduction en donnant, sans les étudier, quelques exemples de MAMA.

1.1. Trois exemples.

Marche unidimensionnelle dans un milieu i.i.d. Commençons par l'exemple le plus simple, la marche sur $\mathbb{Z}$ dans un environnement indépendant et identiquement distribué (i.i.d.). Ce modèle est le premier modèle de MAMA à avoir été étudié. Sa paternité est attribuée, selon les auteurs, au biophysicien Chernov [**19**] en 1967 pour modéliser la réplication de l'ADN, ou lors de simulations informatiques, à Temkin [**71**] en 1972. Dans ce modèle, le champ des transitions est choisi i.i.d. ce qui signifie que les $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ forment une famille i.i.d. de variables aléatoires à valeur dans $(0,1)$. Pour une réalisation de l'environnement ω fixée, on considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$P_\omega(X_{n+1} = X_n + 1 | X_0, \cdots, X_n) = \omega_{X_n}, \quad n \geqslant 0,$$

et

$$P_\omega(X_{n+1} = X_n - 1 | X_0, \cdots, X_n) = 1 - \omega_{X_n}, \quad n \geqslant 0.$$

Le lecteur pourra se reporter à la Figure 1 p. 12 qui illustre le modèle analogue en dimension 2. Le comportement de la marche dans ce modèle est aujourd'hui très bien compris ; nous rappellerons les principaux résultats dans la Section 2 de cette introduction. Ce modèle se généralise aisément aux dimensions supérieures et on trouvera une étude détaillée de ce cas au Chapitre 1.

La fourmi dans un labyrinthe. Le modèle de « la fourmi dans le labyrinthe » doit son nom, très imagé, au physicien Pierre-Gilles de Gennes [**24**] (voir aussi [**25**]). Dans ce modèle, le champs des transitions $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ n'est pas i.i.d. : il est construit à partir d'une percolation sur-critique d'arêtes dans $\mathbb{Z}^d$. On trouvera une description rigoureuse de ce modèle ainsi qu'un rappel des principaux résultats au Chapitre 4 ; on se contentera ici d'une très courte présentation. Décrivons en une phrase la percolation sur-critique. On tire indépendamment pour chaque arête de $\mathbb{Z}^d$ une variable de Bernoulli de paramètre p et on garde l'arête si la réalisation de la variable associée est 1 tandis qu'on l'efface si la réalisation est 0. On obtient ainsi un graphe aléatoire. On peut montrer que pour $d \geqslant 2$, il existe une valeur critique $p_c(d) \in (0,1)$ telle que pour tout $p > p_c$, ce graphe aléatoire ait, presque sûrement, une unique composante connexe infinie, qui joue le rôle du labyrinthe. Une « fourmi » est maintenant introduite dans le labyrinthe et on la laisse réaliser une marche simple, aux plus proches voisins, sur ce graphe.

Le modèle de trappes de Bouchaud. Ce dernier exemple, avant de revenir à la discussion générale, est dû au physicien Jean-Philippe Bouchaud [**14**]. Il diffère des premières MAMA présentées car on considère ici une chaîne de Markov en temps continu. Ce modèle phénoménologique a été introduit pour comprendre la dynamique hors équilibre de certains systèmes physiques désordonnés comme le modèle de spins de Sherrington-Kirkpatrick. On trouvera une description et une étude sommaire de ce modèle au Chapitre 5. Signalons, avant une courte présentation du modèle, que le déplacement de la marche ne correspond pas à un déplacement physique mais à l'évolution du système parmi différents niveaux d'énergie. Cette évolution est modélisée par une chaîne de Markov en temps continu sur le graphe complet. La dynamique discrète de cette marche est la marche simple usuelle sur le graphe complet (et non pas une marche en milieu aléatoire) mais les taux de saut sont tirés de façon i.i.d. en chaque site. Les temps moyens de saut (inverses des taux de saut) représentent la profondeur des niveaux d'énergie (ou trappes) associés à chaque site. La loi de l'environnement est choisie de telle sorte que l'espérance des temps moyens de saut soit infinie. Le fait que la profondeur des trappes ne soit pas intégrable permet à Bouchaud d'expliquer avec succès les phénomènes de *vieillissement* observés dans plusieurs disciplines expérimentales.

Le lecteur aura sans doute remarqué que tous les exemples que nous venons de décrire proviennent de la physique ou de la biologie et, qu'à ce stade de l'introduction, nous n'avons toujours pas cité de mathématiciens. Cette présentation permet d'insister sur l'importance des MAMA dans de nombreux travaux de modélisation dont nous n'avons donné ici qu'un aperçu. Les modélisations stochastiques nécessitant deux aléas sont en effet nombreuses, on trouvera en particulier des exemples en biophysique, en océanographie ou dans d'autres domaines issus de la physique.

1.2. Loi quenched et loi annealed. L'étude des MAMA fait apparaître deux lois importantes. On peut tout d'abord s'intéresser à la loi de la marche dans un environnement typique ω fixé, cette loi, noté P_ω est appelée *loi quenched*. Cette terminologie provient de la métallurgie où quenched signifie *trempé*. Ce terme est également utilisé en physique statistique pour désigner la loi d'un système à désordre fixé, par exemple la position de particules magnétisées dans un alliage neutre. La loi quenched est markovienne et hétérogène spatialement. On s'intéressera aussi à la loi tenant compte de l'aléa sur le milieu. Cette loi appelée *loi annealed*, notée P est définie par le produit semi-direct

$$P = \mathbb{P} \times P_\omega,$$

où l'on rappelle que $\mathbb{P}$ désigne la loi de l'environnement. La loi annealed n'est pas markovienne mais présente une forte homogénéité spatiale due à la réalisation d'une moyenne sur les environnements. Le terme provient également de la métallurgie où il signifie *recuit*. Les physiciens l'utilisent aussi pour désigner une moyenne sur le désordre.

1.3. Motivations. Nous avons vu sur les premiers exemples que les MAMA sont très utiles pour diverses modélisations physiques, mais ces processus sont également

très intéressant d'un point de vue purement mathématique. Les deux couches d'aléa de la loi annealed ne peuvent se traiter comme un seul « super » aléa qui ramenerait ces modèles vers la théorie bien connue des marches aléatoires classiques. Les toutes premières études sur les MAMA font apparaître des comportements nouveaux pour des marches aléatoires que l'on ne peut pas observer dans des milieux déterministes et homogènes. Considérons un exemple célèbre : le régime récurrent dans le modèle unidimensionnel i.i.d. Sinaï montre dans [**63**] que la distance typique de la marche à 0 au temps n est en $(\ln n)^2$ (voir la Section 2 de cette introduction pour un énoncé rigoureux) tandis que pour la marche simple, il est bien connu que cette distance est en $\sqrt{n}$. Pour ce même modèle, et pour certaine loi de l'environnement, la marche peut également adopter simultanément un comportement transient et une vitesse nulle, ce qui est impossible pour une marche dans un milieu homogène. Les mathématiciens se sont évidemment très rapidement intéressés à ces comportements pathologiques et ont tenté de comprendre ces phénomènes de ralentissement.
Plus généralement, lorsqu'on étudie le comportement d'une MAMA, on cherche souvent à comparer le comportement de la marche avec celui d'une marche usuelle. En d'autre termes, on se demande si la marche « ressent » l'environnement ou si au contraire, elle l'« ignore » et se comporte comme une marche classique. On vient de voir que dans le cas unidimensionnel, le fait de rendre l'environnement aléatoire modifie totalement le comportement de la marche. Au contraire, pour le modèle de la « fourmi dans le labyrinthe », sur le plan qualitatif, la marche ignore l'environnement, et se comporte asymptotiquement comme une marche simple, y compris sous la loi quenched (nous renvoyons le lecteur au Chapitre 4 pour une courte revue de la littérature consacrée à ce modèle).
Enfin, certains modèles, définis par un paramètre, peuvent admettre deux régimes. Pour certaines valeurs du paramètre, la MAMA admet un comportement proche de celui d'une marche usuelle en milieu déterministe homogène tandis que pour d'autres valeurs du paramètre, la marche subit des ralentissements anormaux dûs au milieu. Un exemple célèbre de ce type de modèle est la marche biaisée sur le cluster infini étudiée dans [**68**] et [**10**]. On trouvera une description de ce modèle et des principaux résultats au Chapitre 4 (Section 2.2.2). Ce modèle est semblable à celui de « la fourmi dans le labyrinthe », mais on ajoute un biais, c'est-à-dire une direction privilégiée par la marche. Pour des biais faibles, la marche présente une vitesse strictement positive (on parle de comportement balistique), tandis que pour des biais forts, des ralentissements apparaissent et la marche a une vitesse nulle bien qu'elle soit transiente. On s'attachera, pour ce type de modèle, à trouver la, ou les, valeurs du paramètre séparant les différents régimes et à caractériser chacun des régimes.

1.4. Le rôle de la dimension. S'il fallait réaliser une classification des modèles de MAMA, la notion de dimension serait certainement l'une des plus pertinentes. En effet, davantage encore que les propriétés de la loi du milieu (stationnarité ou ergodicité par exemple) ou la nature de la chaîne (temps continu ou temps discret), c'est la dimension de l'espace dans lequel la chaîne prend ses valeurs qui différencie le plus les différents modèles.

La dimension 1 présente en effet certaines spécificités qui permettent une étude très approfondie.

- Toute chaîne de Markov irréductible sur la droite est réversible (cette propriété est également vraie pour les arbres).
- La géométrie de la droite est simple et les trajectoires sur $\mathbb{Z}$ sont très spécifiques. En particulier, une trajectoire allant d'un site x à un site $y > x$ passe par tous les points du segment $[x, y]$.

Ces propriétés permettent de décrire avec grandes précisions les MAMA unidimensionnelles comme nous le verrons pour le modèle i.i.d dans la Section 2.
Pour les dimensions $d \geqslant 2$, la technologie développée pour le modèle unidimensionnel ne fonctionne plus. Le réseau multidimensionnel présente des boucles, ce qui entraîne une non réversibilité de la loi quenched pour de nombreux modèles (notamment le modèle i.i.d.). Les trajectoires restent simples mais, il existe désormais plusieurs façons d'atteindre une distance donnée, ce qui complique singulièrement l'étude de la marche. Il a donc fallu développer de nouveaux outils exploitant davantage l'homogénéité de la loi annealed. L'outil qui aura permis le plus de progrès est sans conteste la **structure de renouvellement** introduite par Sznitman et Zerner dans [**70**], dont on trouvera une étude au Chapitre 1. Un autre outil important est « **l'environnement vu depuis la particule** » qui permet de contourner le caractère non-markovien de la loi annealed. On trouvera des exemples d'application de cet outil aux Chapitre 4 et 5. Signalons enfin l'étude de la plus petite **valeur propre** (trou spectral) du générateur de la marche réfléchie ou absorbée par une boîte pour résoudre certains problèmes ; les exemples sont nombreux dans les articles de Sznitman référencés dans la bibliographie, citons également [**60**]. **Dans cette thèse, nous allons surtout nous intéresser au cas multidimensionnel.**
Nous donnons maintenant une description plus précise des modèles que nous allons étudier ainsi que des principaux résultats.

2. Modèle i.i.d. en temps discret

Il s'agit de la généralisation à toutes dimensions du modèle unidimensionnel qui constituait notre premier exemple. On se donne une loi μ sur le simplexe S_{2d-1} de $\mathbb{R}_+^{2d}$ et on considère la mesure produit

$$\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d},$$

sur l'espace des environnements $\Omega = (S_{2d-1})^{\mathbb{Z}^d}$. On supposera que μ n'est pas réduit à une masse de Dirac afin d'éviter le cas des marches classiques. Étant donné un environnement $\omega \in \Omega$, on définit pour $x \in \mathbb{Z}^d$, la loi quenched $P_{x,\omega}$ par

$$P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1, \qquad P_{x,\omega} - p.s.,$$

et les transitions

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = X_n + e | X_0, \cdots, X_n) = \omega_{X_n}(e), \quad e \in \mathbb{Z}^d, \ |e| = 1.$$

La Figure 1 présente un exemple d'environnement. On ajoute également l'hypothèse d'ellipticité suivante qui assure, $\mathbb{P}$-p.s., le caractère irréductible de la loi quenched.

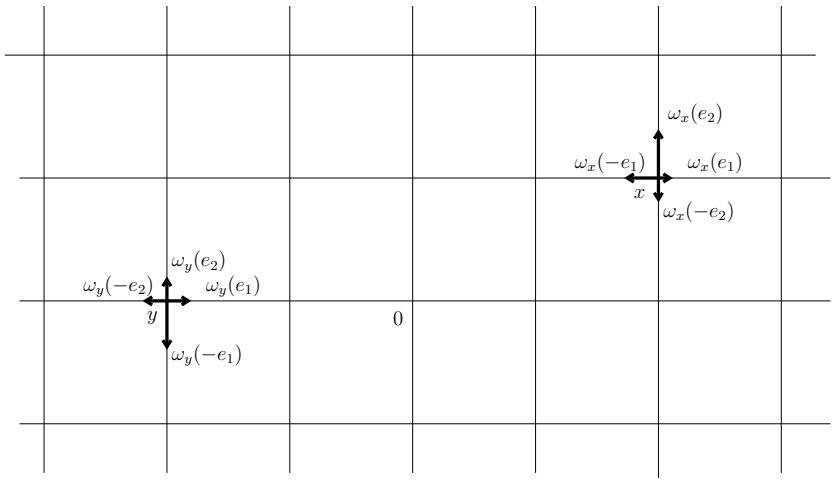

FIG. 1. Exemple d'environnement

HYPOTHÈSE (Stricte ellipticité). $\mu(\omega_0(e) > 0) = 1, \quad e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$

Nous mentionnons également tout de suite une hypothèse d'ellipticité plus forte que nous utiliserons pour certains résultats.

HYPOTHÈSE (Uniforme ellipticité). *Il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$\mu(\omega_0(e) \geqslant \epsilon) = 1, \quad e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$$

Ce modèle est le plus célèbre modèle de MAMA et également l'un des plus étudié. Il illustre bien le rôle de la dimension que nous avons signalé en 1.4. En dimension 1, le modèle est parfaitement maîtrisé alors qu'en dimension supérieure, des questions élémentaires restent sans réponse. Commençons par rappeler sans démonstration les principaux résultats en dimension 1.

2.1. Principaux résultats en dimension 1. Les premiers résultats sur ce modèle sont dûs à l'élève de Spitzer, Solomon en 1975 [**64**]. Il trouve le critère séparant transience et récurrence et formule la loi des grands nombres. Avant d'énoncer ces théorèmes, introduisons pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la (très utile) variable

$$\rho_x = \frac{1 - \omega_x}{\omega_x}. \tag{0.1}$$

Nous supposerons que $\mathbb{E}(\ln \rho_0)$ est bien défini (éventuellement infini). Le théorème suivant traite de la question transience/récurrence.

THÉORÈME (Solomon-1975).

(1) *Si* $\mathbb{E}(\ln \rho_0) > 0$ *(resp.* < 0*) alors la marche est transiente et*

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = -\infty \quad (\textit{resp. } +\infty) \qquad P_0 - p.s.$$

(2) *Si* $\mathbb{E}(\ln \rho_0) = 0$ *la marche est récurrente et*

$$\limsup_{n\to+\infty} X_n = -\liminf_{n\to+\infty} X_n = +\infty \qquad P_0 - p.s.$$

Le théorème suivant est consacré à la loi des grands nombres.

Théorème (Solomon-1975). *On a* P_0*-p.s.,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = v,$$

$$\text{avec } v = \begin{cases} \frac{1-\mathbb{E}(\rho_0)}{1+\mathbb{E}(\rho_0)} & si\ \mathbb{E}(\rho_0) < 1 \\ \frac{\mathbb{E}(1/\rho_0)-1}{1+\mathbb{E}(1/\rho_0)} & si\ \mathbb{E}(1/\rho_0) < 1 \\ 0 & si\ \frac{1}{\mathbb{E}(\rho_0)} \leqslant 1 \leqslant \mathbb{E}(1/\rho_0) \end{cases}$$

On déduit de ces deux théorèmes, comme nous l'avons déjà fait remarquer, qu'il est possible qu'une MAMA soit transiente mais avec une vitesse nulle. Ce régime a été étudié par Kesten, Kozlov et Spitzer [**40**] qui établissent en 1975 la convergence en loi de la marche correctement renormalisée, sous la loi annealed, vers une loi non dégénérée. L'étude du régime récurrent est dûe à Sinaï [**63**] en 1982.

Théorème (Sinaï-1982). *Sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité, il existe une variable aléatoire non dégénérée et non gaussienne* b_∞ *tel que* $\frac{S_n}{(\ln n)^2}$ *converge en loi vers* b_∞ *sous* P_0*.*

La lenteur du déplacement macroscopique est tout à fait remarquable (S_n est de l'ordre de $(\ln n)^2$ au lieu de $\sqrt{n}$ pour la marche simple). La litérature compte de nombreux autres résultats sur les MAMA unidimensionnelles, citons notamment les travaux sur les grandes déviations [**34**] ou [**20**]. Cette thèse étant consacrée au cas multidimensionnel, nous ne mentionnerons pas tous les résultats disponibles pour le cas $d = 1$ et renvoyons le lecteur qui souhaiterait en savoir plus au cours de Saint-Flour de Zeitouni, [**76**].

2.2. Le cas multidimensionnel. Nous allons maintenant nous intéresser au cas des dimensions $d \geqslant 2$. Le premier chapitre de cette thèse est essentiellement bibliographique et a pour ambition de présenter les avancées réalisées dans le domaine jusqu'à l'introduction par Sznitman et Zerner en 1999 de la structure de renouvellement dans [**70**], ainsi que ses principales utilisations. Nous n'allons évidemment pas répéter ici tous ces résultats mais nous en donnons un bref résumé afin de conserver une cohérence dans cette introduction.
Nous avons déjà évoqué les difficultés du cas multidimensionnel, elles sont ici cruellement illustrées par le fait que l'on ne possède toujours pas l'équivalent des deux théorèmes de Solomon. Les premiers travaux sur ce modèle sont dus à Kalikow [**39**] lors de sa thèse sous la direction de Kesten en 1981. Kalikow ne s'intéresse plus à la question de la transience mais à la transience directionnelle. Pour $\ell \in \mathbb{R}^d$, on définit l'évènement,

$$A_\ell = \{\lim_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = +\infty\}.$$

Kalikow [**39**] prouve, en 1981, la loi du $0-1$ pour l'évènement $A_\ell \cup A_{-\ell}$. Il pose également la question « L'évènement A_ℓ vérifie-t-il $P_0(A_\ell) = 0$ ou 1 ? » qui fêtera bientôt ses 30 ans sans avoir trouvé sa réponse...excepté pour la dimension 2, [**80**]. Le domaine connaît ensuite peu d'avancées pendant de longues années car il manque encore les outils nécessaires à son étude. Le modèle suscite néanmoins toujours l'intérêt. Bricmont et Kupiainen [**17**] s'intéressent notamment à la marche simple faiblement perturbée en dimension $d > 2$. Ils montrent qu'une telle marche est diffusive mais la preuve de [**17**] semble être incomplète. Signalons les travaux récents de Sznitman et Zeitouni [**69**] ou Bolthausen et Zeitouni [**13**] qui donnent une preuve complète du même résultat pour le modèle analogue sur $\mathbb{R}^d$ $(d > 2)$. Cet exemple est instructif car il montre qu'il faut s'attendre à d'importantes différences entre le cas unidimensionnel et le cas $d \geqslant 2$, tant au niveau des techniques à utiliser, que du comportement de la marche. L'étude des MAMA rebondit en 1999 avec l'introduction par Sznitman et Zerner [**70**] de la structure de renouvellement. Cet outil, associé à deux résultats de Zerner, [**78**] et le Lemme 3.2.5 p. 265 de [**76**], permet d'obtenir un théorème proche d'une loi des grands nombres,

Théorème (Sznitman-Zerner-1999). *On a $P_0 - p.s.$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = v,$$

avec v une variable aléatoire dont le support comporte au plus deux éléments.

Ce théorème se transforme en « vraie » loi des grands nombres dans le cas de la dimension $d = 2$ grâce à la loi du $0-1$ de Merkl et Zerner, [**80**]. Dans une série d'articles, [**65**],[**66**] et [**67**], Sznitman étudie la classe des marches balistiques (c'est-à-dire satisfaisant une loi des grands nombres avec vitesse non nulle). Il introduit des conditions suffisantes toujours plus fines $((T), (T'))$ sans toutefois parvenir à une caractérisation de cette classe. Nous allons maintenant évoquer quelques résultats plus récents.

Théorème central limite. Ces dernières années, une activité importante s'est établie autour de la question du théorème central limite quenched. La question du théorème central limite peut sembler surprenante car on vient de voir que la loi des grands nombres était encore une question ouverte, on se place en fait toujours dans le cas d'une marche ayant un comportement balistique et on essaie d'affiner cette propriété en obtenant un théorème central limite. Sur cette question, on renvoie le lecteur à [**56**], [**54**], [**55**] ou encore [**11**].

Grandes déviations. Le premier résultat pour les grandes déviations de la vitesse sous la mesure quenched est dû à Zerner [**77**] qui étudie le cas d'une environnement nestling. Le cas annealed a ensuite été traité par Varadhan [**73**]. Citons également la thèse de Rosenbluth [**59**] où l'auteur donne une expression de la fonction de taux, et le travail récent de Yilmaz dans un cadre très général [**75**].

Pour terminer ce paragraphe consacré au milieu i.i.d., signalons l'existence d'un modèle similaire en milieu continu. On renvoie le lecteur intéressé par ce cadre à [**33**].

2.3. Direction asymptotique. Dans le Chapitre 2, nous nous intéressons à la notion de direction asymptotique. La sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ sera notée S^{d-1}. On dit d'une MAMA qu'elle admet $\nu \in S^{d-1}$ pour direction asymptotique si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \nu, \qquad P_0 - p.s.$$

Cette notion est sans intérêt dans le cas d'une marche à comportement balistique mais peut apporter une information intéressante dans le cas d'une marche à vitesse nulle. Notre principal résultat est une caractérisation de la classe des MAMA admettant une direction asymptotique.

Théorème. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
i) Il existe un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall \ell \in \mathcal{O}, \qquad P_0\left(A_\ell\right) = 1.$$

ii) Il existe $\nu \in S^{d-1}$ tel que

$$P_0 - a.s., \quad \frac{X_n}{|X_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu.$$

iii) Il existe $\nu \in S^{d-1}$ tel que pour tout $\ell \in \mathbb{R}^d$,

$$\ell \cdot \nu > 0 \implies P_0\left(A_\ell\right) = 1.$$

L'outil principal pour obtenir ce résultat est la construction d'une structure de renouvellement avec cônes, similaire à celle construite dans [**22**]. Cet outil permet également de prouver qu'une MAMA ne peut admettre plus de deux directions asymptotiques, voir le Corollaire 2.1 du Chapitre 2. On trouvera également au Chapitre 2 une présentation de ces résultats permettant de mieux comprendre l'hypothèse (i) du théorème ci-dessus.

3. Un modèle i.i.d. en temps continu

3.1. Modèle. Nous allons maintenant présenter le modèle étudié dans le Chapitre 3 et les principaux résultats de ce chapitre. De nouveau nous allons considérer un environnement i.i.d. mais cette fois, nous nous intéressons à une marche en temps continu. Une chaîne de Markov en temps continu peut être vue comme une chaîne de Markov en temps discret, que nous appellerons squelette, dont le temps est modifié par un processus appelé « clock process ». L'espace des environnements est donc constitué des vecteurs de transitions $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ comme précédemment mais aussi de temps moyen de saut (inverse des taux de saut) $(\lambda_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ permettant de construire le changement de temps. Un environnement sera donc un élément $\omega = (\boldsymbol{\omega}, \lambda)$ de

$$\Omega := \left(S_{2d-1} \times \mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{Z}^d}.$$

On munit Ω de la tribu produit et on considère une loi $\mathbb{P}$, mesure produit homogène, sur Ω dont on note $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, les deux marginales. On suppose que $\mathbb{P}_1$ vérifie l'hypothèse d'ellipticité stricte. Nous avons essayé de répondre à deux questions sur ce modèle.

Question 1. Étant donné deux marginales $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, la vitesse de la marche (lorsqu'elle existe) est une fonction du couplage de ces deux lois. On cherche alors à calculer les vitesses extrémales, v_{min} et v_{max}, ainsi que les couplages permettant d'atteindre ces extrema.

Question 2. Étant donné une loi $\mathbb{P}_1$ déterminant une dynamique en temps discret balistique, est-il possible de construire une loi $\mathbb{P}_2$ sur les temps de saut tel que :

- $\mathbb{P}_2$ soit d'espérance finie.
- Il existe un couplage $\mathbb{P}$ de $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ tel que la marche en temps continu dans l'environnement de loi $\mathbb{P}$ ait une vitesse nulle ?

On dira alors que la marche sous $\mathbb{P}_1$ peut être **arrêtée**.

3.2. Résultats. De nouveau, il faut distinguer le cas unidimensionnel où les réponses sont précises du cas multidimensionnel, plus compliqué.

La dimension 1. On adapte les méthodes du cas discret présentées dans la Section 2 pour obtenir critère de récurrence et loi des grands nombres (voir Théorème 3.1). L'étude de la vitesse nous permet ensuite de répondre aux deux questions posées. Pour formuler le premier résultat, nous avons besoin de quelques notations : F_1 désignera la fonction de répartition de $\frac{1}{\omega}$ sous $\mathbb{P}_1$ tandis que F_2 désignera celle de $\mathbb{P}_2$. On conserve la notation ρ introduit en (0.1). La réponse à la première question est donnée par le théorème suivant,

Théorème ($d = 1$). *Soit $\mathbb{P}_1$ tel que la marche en temps discret soit transiente vers la droite et $\mathbb{P}_2$ d'espérance finie.*

- *Si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\rho_0) \geqslant 1$ alors $v_{min} = v_{max} = 0$*
- *Si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\rho_0) < 1$ alors*

$$v_{min} = \frac{1 - E_{\mathbb{P}_1}(\rho_0)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u) F_2^{-1}(u) du}$$
$$v_{max} = \frac{1 - E_{\mathbb{P}_1}(\rho_0)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u) F_2^{-1}(1-u) du}.$$

De plus le majorant est atteint par le couplage monotone et le minorant par le couplage décroissant.

Rappelons que pour deux variables ayant pour fonctions de répartition F et G, le couplage monotone est défini par $(F^{-1}(U), G^{-1}(U))$ où U désigne une variable uniforme, tandis que le couplage décroissant est donné par $(F^{-1}(U), G^{-1}(1-U))$. La réponse à la seconde question est donnée par le théorème suivant,

Théorème ($d = 1$). *Une marche balistique en temps discret avec environnement $\mathbb{P}_1$ peut être arrêtée si et seulement si $\mathbb{P}_1$ ne vérifie pas l'hypothèse d'uniforme ellipticité.*

Ces résultats ne sont guère surprenants, la stratégie la plus efficace pour ralentir une marche est de coupler les grands temps de saut aux sites qui sont les plus visités. Pour une marche unidimensionnelle transiente vers la droite, on associera donc les grands temps aux petits « ω ».

Le cas multidimensionnel. Nous allons nous placer dans le cadre le plus simple, c'est-à-dire celui d'une marche en temps discret ayant un comportement balistique. On cherche à comprendre comment le passage en temps continu modifie la vitesse. Nous allons nous appuyer sur la structure de renouvellement de Sznitman et Zerner que nous allons cette fois considérer en temps continu et qui nous donnent une expression de la vitesse. Les positions de renouvellement discrètes et continues coïncident et on cherche donc à calculer l'espérance du temps de renouvellement pour la MAMA en temps continu. Le calcul amène le résultat suivant (τ_1 et τ_2 sont les deux premiers temps de renouvellement, voir le Chapitre 1 pour une définition) :

$$E_0(\tau_2 - \tau_1) = \mathbb{E}\left(\Phi(\boldsymbol{\omega}) \times \lambda_0\right).$$

On renvoie le lecteur au Chapitre 3 pour la définition de Φ, qui nécessite l'utilisation de la structure de renouvellement. Cette fonction est difficile à comprendre et sa complexité donne une écriture des résultats peu explicite, elle permet cependant d'obtenir des bornes théoriques optimales pour les vitesses maximale et minimale (Théorème 3.5).

4. Percolation et modèle de trappes

Le Chapitre 5 de cette thèse est consacré à l'étude d'un modèle de MAMA en temps continu avec un environnement construit à partir d'une percolation de sites sous-critique dans $\mathbb{Z}^d$. On trouvera les rappels nécessaires sur la percolation au Chapitre 4. On trouvera également dans ce chapitre la description d'autres modèles de MAMA dont l'environnement est construit à partir de la réalisation d'une percolation, notamment le modèle de la « fourmi dans le labyrinthe ».

4.1. Modèle. On considère une percolation ω de sites dans $\mathbb{Z}^d$, i.i.d. et sous-critique, on note $\mathbb{P}$ sa loi. On rappelle que $\mathbb{P}-$p.s., tous les clusters de ω sont finis et pour tout site $x \in \mathbb{Z}^d$, on notera C_x le cardinal du cluster de x. On rappelle également que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(C_0 \geqslant n) = -\xi,$$

où $\xi > 0$ est souvent appelé distance de corrélation. Pour une réalisation de l'environnement ω fixé nous allons définir une marche $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ soumise à un biais, de direction $\ell \in S^{d-1}$ et de puissance $\lambda \geqslant 0$, ainsi qu'à une attraction par les clusters de ω dont la force est contrôlée par un paramètre $\beta \geqslant 0$. Plus précisément, on définit la chaîne de Markov en temps continu $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ de loi P_ω dont :

- le squelette est la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ de loi $\widetilde{P}$, partant de 0, et définie pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$, par :

$$\widetilde{P}(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \frac{e^{\lambda \ell \cdot e}}{\sum_{|e'|=1} e^{\lambda \ell \cdot e'}}.$$

- le temps moyen de saut au site $x \in \mathbb{Z}^d$ est égal à $e^{\beta C_x}$.

On notera que, sous $\mathbb{P}$, les temps de saut ne sont pas i.i.d. ce qui complique l'étude de la MAMA. On remarquera en revanche que la dynamique discrète n'est pas soumise à deux niveaux d'aléa et qu'il s'agit donc d'une marche classique.

4.2. Résultats. Nous donnons maintenant les principaux résultats sur ce modèle. Une étude de l'environnement vu depuis la particule permet d'obtenir une loi des grands nombres pour toutes les valeurs des paramètres.

THÉORÈME (Loi des grands nombres). *Pour tout $\lambda \geqslant 0$ et tout $\beta \geqslant 0$,*

$$\frac{Y_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} v(\lambda,\beta), \quad P-p.s.,$$

avec

$$v(\lambda,\beta) = \left(\mathbb{E}e^{\beta C_0}\right)^{-1} d(\lambda)\ .$$

où $d(\lambda)$ désigne le drift du squelette.

On remarque que pour $\beta > \xi$, $v(\lambda,\beta) = 0$ et un régime sous-diffusif apparaît décrit par le théorème suivant,

THÉORÈME (Régime sous-diffusif). *Soit $\beta \geqslant \xi$.*

(1) *Pour tout $d \geqslant 1$ et $\lambda > 0$,*

$$\frac{\ln|Y_t|}{\ln t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\xi}{\beta} \qquad P-p.s.$$

(2) *Si $\lambda = 0$, et $d \geqslant 2$,*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|Y_t|}{\ln t} = \frac{\xi}{2\beta} \qquad P-p.s.$$

(3) *Si $d = 1$ et $\lambda = 0$,*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|Y_t|}{\ln t} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\beta}{2\xi} + \frac{1}{2}\Big)^{-1} \qquad P-p.s.$$

Enfin pour $\beta < \xi$ et $\lambda = 0$, la marche est dans un régime diffusif caractérisé par un principe d'invariance quenched.

THÉORÈME (Régime diffusif). *On suppose $\lambda = 0$, et $\mathbb{E}(e^{\beta C_0}) < \infty$. Alors le processus $Z^\epsilon = (Z_t^\epsilon)_{t\geqslant 0}$, $Z_t^\epsilon = \epsilon^{1/2} Y_{\epsilon^{-1}t}$, vérifie le principe d'invariance quenched : pour presque tout ω, la famille de processus Z^ϵ converge en loi, quand ϵ tend vers 0, dans la topologie de Skorohod, vers un mouvement brownien d-dimensionnel avec matrice de covariance $\Sigma = \big(d \times \mathbb{E}(e^{\beta C_0})\big)^{-1} I_d$*

On voit donc à la lumière de ces résultats que la MAMA ne « ressent » pas l'environnement pour une attraction β faible (voir le théorème sur le régime diffusif) tandis que pour β grand, la marche subit un ralentissement dû au milieu. La valeur critique séparant les deux régimes est la distance de corrélation ξ.

5. Notations et organisation du manuscrit

Nous terminons cette introduction avec quelques remarques sur les notations que nous utiliserons ainsi que sur l'organisation du manuscrit. Ce manuscrit comporte des chapitres en langues française et anglaise, mais combine aussi des articles publiés durant ce doctorat avec des parties bibliographiques ou encore la présentation de travaux originaux. Pour aider le lecteur à s'orienter dans le manuscrit, voici un bref récapitulatif du contenu de chaque chapitre.

- Le Chapitre 1 reprend des éléments bibliographiques autour du modèle i.i.d. et de la structure de renouvellement. Il est rédigé en français entièrement.
- Le Chapitre 2 est constitué de l'article *Asymptotic Direction for Random Walk in Random Environment*, [**62**], précédé d'une présentation des résultats et techniques utilisés. L'article est rédigé en anglais mais la présentation est en français.
- Le Chapitre 3 traite d'un modèle original de MAMA en temps continu dans un environnement i.i.d. Il est rédigé entièrement en français.
- Le Chapitre 4 est essentiellement bibliographique à l'exception du Théorème 4.8. On y trouvera une présentation de quelques modèles de MAMA dont l'environnement est construit à partir d'une percolation. Ce chapitre est entièrement rédigé en français.
- Le Chapitre 5 est constitué de l'article *Random Walk Delayed on Percolation Clusters*, [**21**], rédigé en anglais. On trouvera également une présentation, en français de cet article.

Nous avons essayé de conserver une grande indépendance entre les différents chapitres afin de permettre au lecteur de lire seulement la partie du manuscrit qui l'intéresse (en particulier les deux articles peuvent être lus indépendamment du reste du manuscrit). Cet effort s'est fait au prix de nombreuses répétitions, notamment de modèles et d'hypothèses ; nous espérons qu'elles ne lasseront pas trop le lecteur. Bien que cela ne soit pas apparent dans le plan, on peut identifier deux parties dans ce travail : les Chapitres 1 à 3 constituent une première partie consacrée aux environnements i.i.d, tandis que les Chapitres 4 et 5 traitent d'environnements non i.i.d. construits à partir d'une percolation.

Notations. Le domaine des MAMA présente quelques particularités de notations. Traditionnellement les symboles avec double barres (comme $\mathbb{E}$ ou $\mathbb{P}$) sont réservés à l'environnement tandis que les objets se rapportant à la loi quenched se notent avec ω en indice (E_ω ou P_ω). Signalons aussi que si A est un évènement mesurable on notera souvent $E(X1_A) = E(X, A)$.
La notation $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $|\cdot|_\infty$ la norme infinie.

CHAPITRE 1

Modèle i.i.d. et renouvellement

Cette partie est essentiellement bibliographique. Nous présentons quelques résultats importants de ces trente dernières années consacrés aux environnements i.i.d. dans le cas multidimensionnel. Cette présentation n'est bien entendu pas exhaustive et on trouvera surtout une description de la structure de renouvellement introduite dans [**70**] et de son utilisation pour obtenir la loi des grands nombres. L'objectif est d'introduire plus précisément le domaine des MAMA en milieux i.i.d. mais sutout de faciliter la lecture du Chapitre 2.

Sommaire

1. Le modèle i.i.d. 21
1.1. Modèle 21
1.2. Remarques sur la loi annealed 22
1.3. Dimension 23
2. Récurrence, transience et loi du $0-1$ 24
3. Structure de renouvellement 25
4. Loi des grands nombres 29
4.1. Loi des grands nombres balistique 29
4.2. Le cas général 30
5. Comportement balistique 31
5.1. Critère et chaîne de Kalikow 31
5.2. La condition (T') 33
6. Autres résultats 34
6.1. Autres modèles 34
6.2. Couplage 34

Ce chapitre est entièrement rédigé en français. On y trouvera la description de résultats disponibles dans la littérature (mais pas de travaux originaux).

1. Le modèle i.i.d.

1.1. Modèle. Une loi markovienne en temps discret et à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ est caractérisée par son point de départ (qui est déterministe dans le modèle que l'on

considère) et par la donnée en chaque site x de $\mathbb{Z}^d$ d'un vecteur de transition ω_x. Nous allons nous intéresser uniquement à des marches aux plus proches voisins, un vecteur de transition sera donc simplement un élément du simplexe de $\mathbb{R}_+^{2d}$:

$$S_{2d-1} := \{(p_i)_{i\in\{1,\cdots,2d\}} \in \mathbb{R}_+^{2d},\ \sum_{i=1}^{2d} p_i = 1\}.$$

L'espace des environnements sera $\Omega := S_{2d-1}^{\mathbb{Z}^d}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, et $x \in \mathbb{Z}^d$ nous pouvons construire la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de loi $P_{x,\omega}$ définie par,

$$P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1, \qquad P_{x,\omega} - p.s.,$$

et les transitions

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = X_n + e | X_0, \cdots, X_n) = \omega_{X_n}(e), \quad e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$$

On souhaite maintenant tirer un environnement de façon aléatoire. On commence donc par munir S_{2d-1} de sa tribu canonique et Ω de la tribu produit associée. La façon la plus simple pour obtenir un environnement aléatoire est de choisir une loi μ sur S_{2d-1} et de considérer la mesure produit sur Ω :

$$\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

Sous $\mathbb{P}$, les variables $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ forment donc une famille de variables i.i.d. de loi μ. Dans ce travail, nous allons nous restreindre à des chaînes irréductibles, ce qui nous amène à supposer que la loi μ satisfait l'hypothèse d'ellipticité $(H1.1)$

Hypothèse 1.1 $(H1.1)$. $\mu(\omega_0(e) > 0) = 1, \quad e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$

On peut maintenant définir pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ la loi **annealed**, P_x par le produit semi-direct :

$$P_x := \mathbb{P} \times P_{x,\omega}.$$

Notons également que pour ω fixé, $P_{x,\omega}$ sera appelé loi **quenched**.

1.2. Remarques sur la loi annealed. La principale difficulté de l'étude de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sous la loi annealed P_x est son caractère non-markovien. En effet, le passé d'une trajectoire apporte une information sur la partie de l'environnement qui a été visitée. Lorsque la marche « repasse » sur un site déjà visité, la loi de l'environnement est modifiée par les informations obtenues lors des premières visites. De façon plus précise, on considère un site $x \in \mathbb{Z}^d$ et on s'intéresse à l'évolution de la loi de ω_x en conditionnant P_0 au passé de la trajectoire. Avant le premier passage de la marche en x, la loi de ω_x est

$$\mu.$$

On conditionne maintenant P_0 à ce que la marche soit passée au moins une fois en x et ait empruntée l'arête $e \in \mathbb{Z}^d$ ($|e| = 1$) lors de ce passage. La loi de ω_x sous cette mesure est

$$\mu_1, \qquad \text{avec } d\mu_1(\omega) = \frac{\omega(e)}{\int \omega(e) d\mu(\omega)} d\mu(\omega).$$

Plus généralement, on conditionne P_0 à ce que la marche soit passée au moins n fois en x et à ce que la séquence des arêtes empruntées soit $e_1, \cdots, e_n$. La loi de ω_x sous cette mesure est

$$\mu_n, \qquad \text{avec } d\mu_n(\omega) = \frac{\omega(e_1)\cdots\omega(e_n)}{\int \omega(e_1)\cdots\omega(e_n)d\mu(\omega)}d\mu(\omega).$$

Disons de façon informelle qu'au $(n+1)$-ème passage en x la marche « verra » un environnement de loi μ_n. On peut reconnaître dans cette formulation une écriture proche de la théorie bayesienne des statistiques. La loi μ joue le rôle de la loi *a priori* et les lois $\mu_1, \cdots, \mu_n$ sont les lois *a posteriori*. Enriquez et Sabot [**30**] ont proposé d'appréhender la loi annealed comme une marche renforcée ce qui donne une lecture plus probabiliste de l'idée qui vient d'être présentée. Rappelons que les marches renforcées sont des processus non markoviens dont les transitions évoluent avec le temps, favorisant les arêtes qui ont été les plus visitées. Cette classe de marche a été introduite en 1987 par Coppersmith et Diaconis (voir [**27**]). Citons également [**1**] où les auteurs s'intéressent à la possibilité de reconstruire la loi de l'environnement à partir de l'observation d'une trajectoire.
Nous avons très brièvement présenté les difficultés liées à l'étude de la loi annealed, remarquons maintenant un avantage important de cette loi. Le fait d'intégrer par rapport à l'environnement rend la loi annealed spatialement homogène alors que la loi quenched présente au contraire des transitions très hétérogènes dans le cas d'un environnement non dégénéré.

1.3. Dimension. Nous avons vu au début de l'introduction que le cas de la dimension 1 était spécifique de par la réversibilité de la marche quenched et la simplicité géométrique de la droite. Nous avons également signalé que ces propriétés ne sont plus vraies dans le cas multidimensionnel pour de nombreux modèles. C'est malheureusement le cas pour le modèle i.i.d. : **la loi quenched n'est pas réversible** dès que la loi de l'environnement n'est pas dégénérée. Par ailleurs, rappelons qu'indépendamment du modèle, la géométrie du réseau $\mathbb{Z}^d$ est simple mais elle autorise des trajectoires bien plus compliquées qu'en dimension 1. Il est notamment possible de joindre deux sites x et y en contournant tout ou partie du segment (x, y). Le rôle de la dimension évoqué dans l'introduction est donc déterminant pour le modèle i.i.d. : le comportement de la marche en dimension 1 est maintenant très bien compris alors que des questions élémentaires ne sont pas résolues pour le cas multidimensionnel. Une fois de plus, nous renvoyons le lecteur à [**76**] pour un panorama très complet du cas unidimensionnel qui ne sera pas du tout abordé dans cette partie.
Ayant perdu les deux spécificités de la dimension 1, il a donc fallu trouver d'autres idées pour étudier les MAMA multidimensionnelles. La « stratégie » est très différente de celle utilisée en dimension 1, ici les techniques vont souvent s'appuyer directement sur la loi annealed. Remarquons, pour commencer, que grâce au caractère i.i.d. de l'environnement, le passé de la marche apporte des informations uniquement sur la partie de l'environnement correspondant aux sites visités. L'une des idées essentielles pour s'affranchir du caractère non-markovien du processus annealed est donc

de regarder la marche sur des temps, ou des intervalles de temps, où elle ne visite que des sites inconnus. C'est une idée centrale dans la construction de la structure de renouvellement de Sznitman et Zerner, [**70**], mais également dans de nombreux autres travaux.

2. Récurrence, transience et loi du $0-1$

Le premier travail décisif sur les MAMA en dimensions supérieures a été réalisé par Steven Kalikow durant son travail de doctorat sous la direction de Harry Kesten, ses résultats ont été publiés dans [**39**]. L'un des résultats les plus importants de cet article est la loi du $0-1$ mais son travail comporte bien d'autres aspects notamment l'introduction de la chaîne de Kalikow dont nous reparlerons dans la Section 5. Avant de présenter les résultats de Kalikow, il faut s'attarder sur l'hypothèse d'ellipticité retenue. Nous allons souvent faire référence aux articles [**39**] et [**70**] qui utilisent l'hypothèse d'uniforme ellipticité plus forte que $(H1.1)$:

Hypothèse 1.2 $(H1.2)$. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\mu(\omega_0(e) \geqslant \epsilon) = 1, \quad e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$$

Cependant Merkl et Zerner ont montré dans [**80**] que cette hypothèse n'était pas nécessaire pour obtenir la loi du $0-1$. *Dans cette section, nous nous placerons donc sous l'Hypothèse* 1.1 *d'ellipticité stricte.*
La notation suivante sera utile pour énoncer la loi du $0-1$ de Kalikow, nous l'utiliserons également tout au long de cette thèse. Pour toute direction ℓ dans $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, on définit l'évènement A_ℓ par

$$A_\ell := \{\lim_{n\to\infty} X_n \cdot \ell = +\infty\}.$$

L'évènement A_ℓ est appelé **transience directionnelle**. On peut maintenant énoncer la loi du $0-1$:

Théorème 1.1 (Kalikow-1981). *Sous l'hypothèse* $(H1.1)$,

$$P_0(A_\ell \cup A_{-\ell}) = 0 \text{ ou } 1.$$

En lisant ce résultat, on se demande immédiatement s'il ne peut pas être affiné. La question « *L'évènement A_ℓ satisfait-il une loi du $0-1$?* » est déjà posée dans [**39**] et a fait l'objet de nombreux efforts mais elle reste encore aujourd'hui ouverte pour les dimensions $d \geqslant 3$ malgré sa simplicité. Le cas de la dimension 1 est trivial et celui de la dimension 2 a été traité par Merkl et Zerner dans [**80**]. Le Théorème 1 de cet article montre en effet que pour $d = 2$, l'évènement A_ℓ satisfait bien la loi du $0-1$. Zerner a récemment donné une démonstration plus lisible de ce théorème dans [**79**].
Revenons maintenant au Théorème 1.1. La preuve de Kalikow s'appuie directement sur la loi annealed et il introduit pour la première fois une idée très proche du renouvellement,

> *The idea is that since* $\limsup_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = \infty$, $X_n \cdot \ell$ *becomes higher than it has ever been before infinitely often, and each time it does so*

it has a probability p of never dropping below its new height, where $p = P_0(X_n \cdot \ell > 0,\ n \in \mathbb{N})$.

Cette phrase est extraite de [**39**] et les notations ont été adaptées à notre présentation. Nous ne donnons pas la preuve ici de ce théorème mais signalons qu'on la trouvera également dans [**70**]. Lorsque $P_0(A_\ell \cup A_{-\ell}) = 0$, on parle de **régime oscillant** car la marche vérifie alors,

$$\limsup_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = -\liminf_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = +\infty, \qquad P_0 - p.s.$$

Pour terminer ce paragraphe, abordons la question de la transience et de la récurrence. Cette partie sera malheureusement courte puisqu'il faut constater que l'on ne dispose d'aucun critère pour déterminer le régime de la marche. Remarquons cependant que sous la loi annealed, le problème est bien posé bien que la marche ne soit pas markovienne :

Proposition 1.1 (Kalikow-1981).
L'évènement $\{(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente sous $P_{0,\omega}\}$ est de probabilité 0 *ou* 1.

On peut bien évidemment énoncer la même proposition pour la transience. La démonstration consiste simplement à remarquer que l'évènement considéré est un élément de la tribu de queue de l'environnement et il ne reste qu'à utiliser la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

3. Structure de renouvellement

Nous allons décrire dans ce paragraphe la structure de renouvellement introduite par Sznitman et Zerner en 1999 dans [**70**]. L'idée est de construire sur A_ℓ une suite de temps aléatoire où la marche atteint un hyperplan « record » dans la direction ℓ et ne revient jamais derrière ce record. Un tel temps est appelé temps de renouvellement. On va supposer que l'évènement A_ℓ est de probabilité strictement positive,

Hypothèse 1.3 ($H1.3$). $P_0(A_\ell) > 0$.

L'Hypothèse 1.3, nous permet de définir la mesure Q_0 en conditionnant P_0 à l'évènement A_ℓ :

$$Q_0 := P_0(\cdot|A_\ell).$$

Nous allons également avoir besoin du temps d'arrêt T_u correspondant au premier temps où la marche dépasse un niveau $u \in \mathbb{R}$ (c'est à dire l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^d,\ x\cdot\ell = u\}$),

$$T_u = \inf\{n \geqslant 0,\ X_n \cdot \ell > u\}.$$

ainsi que du temps

$$D = \inf\{n \geqslant 0,\ X_n \cdot \ell < X_0 \cdot \ell\}$$

correspondant au temps de retour de la marche derrière son niveau initial. Définissons maintenant de façon récursive la suite de temps d'arrêts $(S_k)_{k\geqslant 0}$ et $(R_k)_{k\geqslant 0}$ correspondant respectivement au temps de record et de retour dans la direction ℓ ainsi que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ des valeurs records,

$$S_0 = 0, \qquad M_0 = X_0 \cdot \ell,$$
$$S_1 = T_{M_0}, \quad R_1 = S_1 + D \circ \theta_{S_1}, \quad M_1 = \sup\{X_n \cdot \ell, 0 \leqslant n \leqslant R_1\}$$

et pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= T_{M_k}, \\ R_{k+1} &= S_k + D \circ \theta_{S_k}, \\ M_{k+1} &= \sup\{X_n \cdot \ell, 0 \leqslant n \leqslant R_{k+1}\}. \end{aligned}$$

On trouvera sur la Figure 1.1, ci-dessous, un exemple de trajectoire et des temps d'arrêts qui lui sont associés. (Cette figure, comme toutes les autres du manuscrit, ne provient pas de simulations mais sont de simples dessins. Leur aspect, trop lisse, peut surprendre mais il permet d'illustrer d'une manière plus lisible les différents concepts exposés.) Le premier temps de renouvellement τ_1 correspond au premier

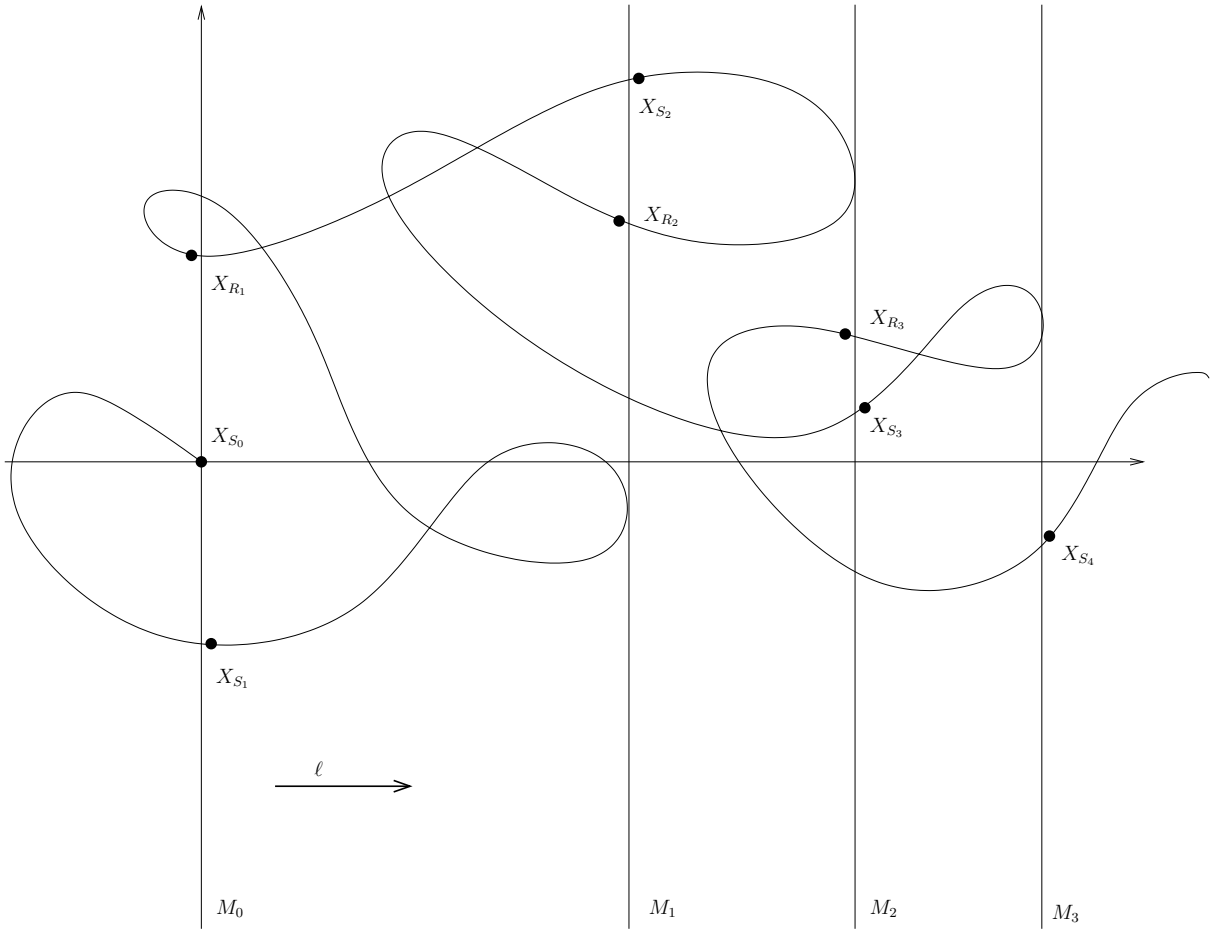

FIG. 1.1. Exemple de trajectoire et de ses temps records

temps où la marche atteint un record strict et ne revient jamais (strictement) derrière le niveau atteint,

$$\tau_1 = S_K,$$

où K désigne le numéro du record où le renouvellement se produit,

$$K = \inf\{k \geqslant 1,\ S_k < +\infty,\ R_k = +\infty\}.$$

Le point crucial du renouvellement est que cet indice K est fini $Q_0-p.s.$ (on rappelle que Q_0 est la mesure P_0 conditionnée par l'évènement A_ℓ),

Proposition 1.2. *Sous l'hypothèse* $(H1.3)$*, on a* $P_0 - p.s.$*,*

$$A_\ell = \{K < +\infty\}.$$

Nous allons donner quelques éléments de cette preuve car elle est tout à fait typique des raisonnements que l'on trouve sous la loi annealed.

Elements de la preuve de la Proposition 1.2. Nous montrerons seulement l'inclusion direct (soit $\subset$; l'autre sens est facile). Le premier point de la preuve est d'établir que

$$P_0(D = \infty) > 0,$$

autrement dit que la marche à une probabilité annealed non nulle de rester dans le demi-espace positif. La preuve de ce fait s'appuie essentiellement sur le caractère markovien de la loi quenched, nous ne la rappellerons pas. Calculons maintenant pour $k \geqslant 1$, la probabilité annealed de $\{R_k < +\infty\}$, en utilisant le caractère markovien de la loi quenched,

$$\begin{aligned} P_0(R_k < +\infty) &= \mathbb{E}\left(E_{0,\omega}(S_k < \infty) E_{X_{S_k},\omega}(D < \infty)\right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left(E_{0,\omega}(S_k < \infty, X_{S_k} = x) E_{x,\omega}(D < \infty)\right). \end{aligned}$$

Notons que la variable $E_{0,\omega}(S_k < \infty, X_{S_k} = x)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\omega_y, y \cdot \ell < x \cdot \ell)$ tandis que $E_{x,\omega}(D < \infty)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\omega_y, y \cdot \ell \geqslant x \cdot \ell)$. Il faut maintenant rappeler que l'environnement est i.i.d. et ces deux tribus sont donc indépendantes, d'où,

$$P_0(R_k < +\infty) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}(E_{0,\omega}(S_k < \infty, X_{S_k} = x)) \mathbb{E}(E_{x,\omega}(D < \infty)).$$

Il reste à noter, d'une part, que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $P_x(D < \infty) = P_0(D < \infty)$ (en effet l'environnement étant i.i.d., il est en particulier invariant par translation) et, d'autre part, $\{S_k < \infty\} \subset \{R_{k-1} < \infty\}$ pour tout $k \geqslant 1$, on obtient alors par récurrence,

$$P_0(R_k < +\infty) \leqslant P_0(D < +\infty)^k, \qquad k \geqslant 1.$$

On en déduit que

$$\inf\{k \geqslant 1,\ R_k = \infty\} < \infty, \quad P_0 - p.s.,$$

et en remarquant que

$$A_\ell \cap \{R_k < \infty\} \subset A_\ell \cap \{S_{k+1} < \infty\}, \quad k \geqslant 1,$$

on achève la preuve sans difficulté. $\square$

On a donc construit un temps τ_1 appelé premier temps de renouvellement qui sépare la trajectoire en deux parties disjointes évoluant chacune dans un demi-espace. Plus précisément, on a $P_0 - p.s.$,

$$\begin{aligned} X_n \cdot \ell < X_{\tau_1} \cdot \ell, \qquad & n < \tau_1, \text{ et} \\ X_n \cdot \ell \geqslant X_{\tau_1} \cdot \ell, \qquad & n \geqslant \tau_1. \end{aligned}$$

L'idée de la preuve de la Proposition 1.2 est déjà en partie dans le travail de Kalikow (voir la citation p. 24) et l'idée supplémentaire pour obtenir une structure de renouvellement est de répéter cette procédure. On définit donc par récurrence les temps de renouvellement successifs $(\tau_k)_{k \geqslant 2}$ par,

$$\tau_{k+1}(X_.) = \tau_k(X_.) + \tau_1(X_{\tau_k+.}) \quad k \geqslant 1.$$

Ces temps permettent de découper la trajectoire en sections successives évoluant dans des « bandes » distinctes et donc en particulier ne s'intersectant pas. La Figure 1.2 illustre ces temps de renouvellement sur un exemple de trajectoire. L'intérêt

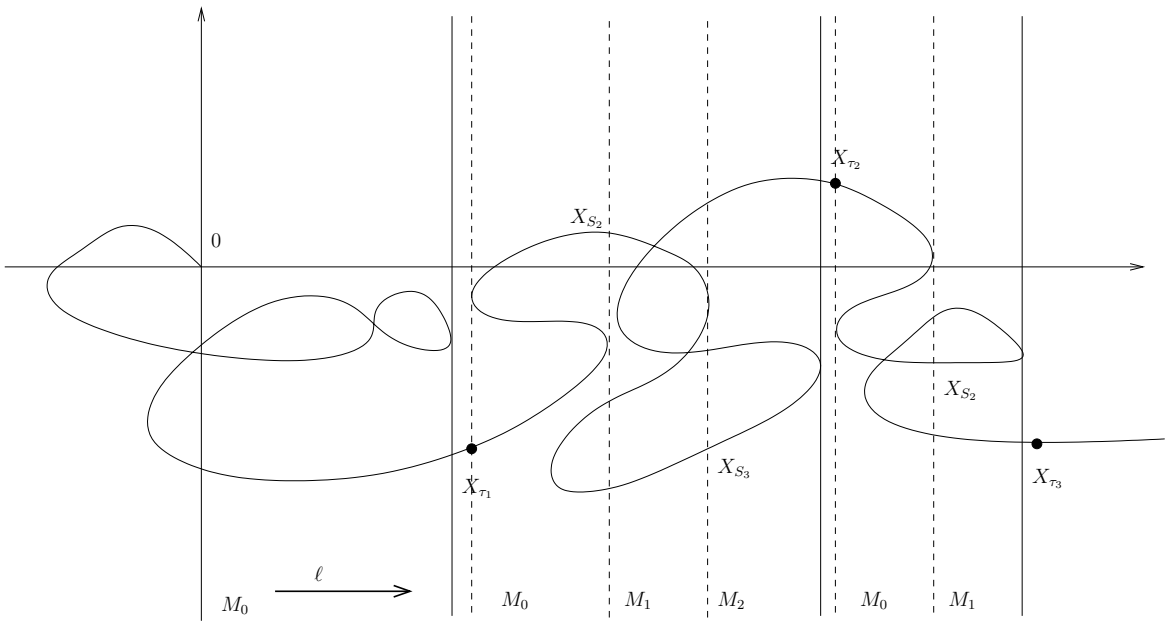

FIG. 1.2. Les temps de renouvellement $(\tau_k)_{k \geqslant 1}$

principal de cette structure réside dans le théorème suivant,

THÉORÈME 1.2 (Sznitman-Zerner-1999). *Sous Q_0, $(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \cdots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \cdots$ sont des variables indépendantes. De plus $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \cdots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \cdots$ sont de même loi sous Q_0 que (X_{τ_1}, τ_1) sous $P_0(\cdot | D = \infty)$.*

Le premier temps est à distinguer car 0 n'a aucune raison d'être le temps de renouvellement « τ_0 », il l'est uniquement sur l'évènement $\{D = \infty\}$. Notons également

que l'espace se trouve également découpé en bandes, ou tranches, successives et disjointes,

$$\begin{aligned} b_0 &= \{x \in \mathbb{Z}^d,\ x \cdot \ell < X_{\tau_1} \cdot \ell\}, \\ b_1 &= \{x \in \mathbb{Z}^d,\ X_{\tau_1} \cdot \ell \leqslant x \cdot \ell < X_{\tau_2} \cdot \ell\}, \cdots, \\ b_k &= \{x \in \mathbb{Z}^d,\ X_{\tau_k} \cdot \ell \leqslant x \cdot \ell < X_{\tau_{k+1}} \cdot \ell\}, \cdots \end{aligned}$$

et les tribus $(\sigma(\omega_x,\ x \in b_k))_{k \geqslant 0}$ sont indépendantes.

4. Loi des grands nombres

Nous allons maintenant utiliser la structure construite dans la section précédente pour se rapprocher d'une loi des grands nombres.

4.1. Loi des grands nombres balistique. Dans ce paragraphe, nous allons nous placer dans un cas simple et **supposer que**

$$\boldsymbol{E_0(\tau_1 | D = \infty) < +\infty}, \tag{1.1}$$

ce qui entraîne :

$$E_0(|X_{\tau_1}| | D = \infty) < +\infty.$$

En utilisant le Théorème 1.2 et la loi des grands nombres vectorielles pour des variables i.i.d. d'espérance finie, on obtient

$$\frac{X_{\tau_k}}{\tau_k} = \frac{X_{\tau_k}}{k} \frac{k}{\tau_k} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{E_0(X_{\tau_1} | D = \infty)}{E_0(\tau_1 | D = \infty)}, \qquad Q_0 - p.s.$$

On contrôle ensuite, sans grande difficulté, les temps compris entre les temps de renouvellement pour obtenir une loi des grands nombres,

Théorème 1.3 (Sznitman-Zerner-1999). *On suppose que $E_0(\tau_1 | D = \infty) < +\infty$, on a alors $Q_0 - p.s.$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{X_n}{n} = v := \frac{E_0(X_{\tau_1} | D = \infty)}{E_0(\tau_1 | D = \infty)}.$$

On a de plus

$$v \cdot \ell > 0. \tag{1.2}$$

Le théorème suivant est en fait plus fort qu'une simple loi des grands nombres puisque (1.2) nous assure que la vitesse est non nulle (et nous indique même sa direction). On parle alors de **comportement balistique** de la marche. La Section 5 est consacrée à l'étude de cette classe de marche, c'est-à-dire aux conditions permettant d'obtenir (1.1).

4.2. Le cas général. On ne suppose plus désormais que l'espérance du temps de renouvellement est finie. Deux travaux de Zerner, [**78**] et un lemme que l'on trouvera dans [**76**] (Lemme 3.2.5 p. 265), ont permis d'approcher une loi des grands nombres. Le dernier obstacle reste la loi du $0-1$ pour l'évènement A_ℓ, cette loi ayant été prouvée en dimension 2, la question de la loi des grands nombres est résolue pour cette dimension. Revenons maintenant au cas général d'une dimension $d \geqslant 3$. Commençons par décomposer $(X_n)_{n \geqslant 0}$ dans la base canonique $(e_i)_{i \in \{1,\cdots,d\}}$,

$$\frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{d} \frac{X_n \cdot e_i}{n} e_i,$$

et traitons chaque direction séparément.

– **Le régime oscillant.** Considérons donc $i_0 \in \{1, \cdots, d\}$ et supposons que

$$P_0(A_{e_{i_0}} \cup A_{-e_{i_0}}) = 0. \tag{1.3}$$

Rappelons que l'on parle dans ce cas de régime oscillant. Ce régime a été étudié par Martin Zerner dans [**78**],

Théorème 1.4 (Zerner-2002). *Supposons (1.3), on a alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n \cdot e_{i_0}}{n} = 0, \qquad P_0 - p.s.$$

– **Le régime de renouvellement.** Supposons maintenant que

$$P_0(A_{e_{i_0}} \cup A_{-e_{i_0}}) > 0,$$

la loi du $0-1$ de Kalikow (Théorème 1.1) nous assure alors que $P_0(A_{e_{i_0}} \cup A_{-e_{i_0}}) = 1$. Supposons de plus que

$$P_0(A_{e_{i_0}}) > 0.$$

Nous pouvons alors construire une structure de renouvellement comme dans la Section 3 pour la direction e_{i_0} et sur l'évènement $A_{e_{i_0}}$. Nous allons maintenant avoir besoin d'un lemme dû à Zerner qui n'a pas été publié par son auteur mais que l'on trouvera énoncé et démontré dans [**76**] (Lemme 3.2.5 p. 265),

Lemme 1.1 (Zerner). *Si $P_0(A_{e_{i_0}}) > 0$, alors,*

$$E_0(X_{\tau_1} \cdot e_{i_0} | D = \infty) = \frac{1}{P_0(D = \infty)}.$$

La preuve de ce lemme s'appuie sur le théorème de renouvellement et le Théorème 1.2. Ce résultat et la loi des grands nombres permettent d'affirmer l'existence d'une vitesse v_{i_0} (éventuellement nulle), dans la direction e_{i_0} et sur l'évènement $A_{e_{i_0}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n \cdot e_{i_0}}{n} = v_{i_0}, \qquad P_0(\cdot | A_{e_{i_0}}) - p.s.$$

La vitesse relative à la direction $v_{-e_{i_0}}$ sera notée v_{-i_0}.

En réunissant les deux outils apportés par Zerner, on obtient une loi des grands nombres, même si cette appellation est un peu abusive car la vitesse n'est pas déterministe.

THÉORÈME 1.5. *Sous l'hypothèse* $(H1.1)$*, on a* $P_0 - p.s.$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{d} (v_i e_i 1_{A_{e_i}} - v_{-i} e_i 1_{A_{-e_i}}).$$

En lisant cette formule, il apparaît clairement que le support de la vitesse est fini et comporte au plus 2^d éléments. On peut en fait montrer que le support comporte au plus deux éléments, colinéaires et opposés (on inclut ainsi le cas où l'un des éléments est nul) et nous donnerons une preuve de ce résultat dans le Chapitre 2 (voir la Remarque 2.1). Signalons enfin le résultat de N. Berger dans [**8**] qui affine en grande dimension le résultat précédent.

THÉORÈME 1.6 (Berger-2008). *Pour* $d \geqslant 5$*, le support de la vitesse a au plus un élément non nul.*

5. Comportement balistique

Dans cette partie, nous allons rappeler brièvement les différentes conditions introduites pour assurer un comportement balistique de la marche. Rappelons la définition :

DÉFINITION 1.1. *Une marche est balistique s'il existe* v *déterministe dans* $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ *tel que,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = v, \qquad P_0 - p.s.$$

La classe des marches balistiques a fait l'objet de nombreuses études mais elle n'a jamais été complètement caractérisée. Les conditions présentées dans cette partie représentent un travail considérable et un manuscrit entier pourrait être consacré à cette classe de marche. On se contentera ici d'une présentation permettant de compléter l'étude de la loi des grands nombres. Nous allons tout d'abord décrire la condition de Kalikow qui nécessite l'introduction d'une chaîne de Markov auxiliaire, intéressante en tant que telle, appelée chaîne de Kalikow.
Dans cette partie, nous allons utiliser l'hypothèse plus forte d'uniforme ellipticité $(H1.2)$. En effet, les articles que nous allons citer utilisent cette hypothèse, et il semble bien qu'elle soit nécessaire dans certaines démonstrations.

5.1. Critère et chaîne de Kalikow. Fixons donc un domaine $U \subset \mathbb{Z}^d$ connexe et contenant 0. Le but de Kalikow est de trouver une chaîne de Markov $\hat{P}_U$ dont la distribution de sortie de U est identique à celle de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sous P_0. On note T_U le temps de sortie de U,

$$T_U = \inf\{n \geqslant 0,\ X_n \notin U\},$$

X_{T_U} appartient donc à la frontière de U que l'on notera ∂U. Pour choisir les transitions de $\hat{P}_U$, l'idée de Kalikow est de pondérer les transitions par la fonction de

Green G_U définie pour tout environnement $\omega \in \Omega$ par,

$$G_U^\omega(x) = E_{0,\omega}(\sum_0^{T_U} 1_{\{X_n=x\}}).$$

Définissons donc pour tout $x \in U \cup \partial U$,

$$\hat{P}_U(x, x+e) = \frac{\mathbb{E}[E_{0,\omega}(G_U^\omega(x)\omega_x(e))]}{\mathbb{E}[E_{0,\omega}(G_U^\omega(x))]}, \quad x \in U,\ e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1; \tag{1.4}$$
$$\hat{P}_U(x, x) = 1, \qquad x \in \partial U.$$

La valeur de la transition de la chaîne de Kalikow en un site $x \in U$ peut être vue comme une moyenne des transitions observées par la marche sous la loi annealed avant la sortie de U (on notera que la marche est absorbante sur ∂U). Nous noterons $\hat{P}_U$ la chaîne de Markov à valeurs dans $U \cup \partial U$, partant de 0 et ayant ses transitions données par (1.4). Le grand intérêt de la chaîne de Kalikow réside dans la proposition suivante :

Théorème 1.7 (Kalikow-1981). *Si $\hat{P}_U(T_U < \infty) = 1$ alors $P_0(T_U < \infty) = 1$, de plus X_{T_U} a même loi sous $\hat{P}_U$ et P_0.*

On veut maintenant formuler une condition sur la chaîne de Kalikow pour assurer un comportement balistique dans la direction $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de la MAMA. L'idée de Kalikow est de « pousser » la chaîne $\hat{P}_U$ dans la direction ℓ en imposant un drift dans cette direction en chaque site. On rappelle que pour tout site $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit le drift de la chaîne $\hat{P}_U$ par,

$$d_U(x) = \sum_{\{|e|=1\}} e\hat{P}_U(x, x+e).$$

On énonce maintenant la condition de Kalikow relative à la direction $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\epsilon > 0$,

Condition 1.1. *Pour tout $U \subsetneq \mathbb{Z}^d$ connexe, contenant 0 et tout $x \in U$,*

$$d_U(x) \cdot \ell \geqslant \epsilon.$$

Sznitman et Zerner ont montré dans [**70**] que cette condition assure un comportement balistique,

Théorème 1.8 (Sznitman-Zerner-1999). *Si la chaîne de Kalikow satisfait la Condition 1.1 (dite de Kalikow) pour $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\epsilon > 0$, alors $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est balistique sous P_0.*

La condition de Kalikow présente également un autre avantage ; il existe un critère explicite pour l'obtenir, bien que ce ne soit qu'une condition suffisante. On dira que $\mathbb{P}$ satisfait le critère de Kalikow pour la direction $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\epsilon > 0$ si,

$$\inf_{f \in F} \mathbb{E}[\frac{\sum_{|e|=1} \omega_0(e)\ell \cdot e}{\sum_{|e|=1} \omega_0(e)f(e)}]/\mathbb{E}[\frac{1}{\sum_{|e|=1} \omega_0(e)f(e)}], \tag{1.5}$$

où F est l'ensemble des fonctions $(f(e))_{e\in\mathbb{Z}^d,\ |e|=1}$ non identiquement nulles et à valeur dans $[0,1]$. Ce critère peut se vérifier sans calculer la chaîne de Kalikow, c'est pourquoi il est qualifié d'explicite. Signalons un exemple d'application de ces outils : Enriquez et Sabot montrent dans [**31**] que les marches aléatoires dans certains environnements de Dirichlet vérifient la condition de Kalikow et sont donc balistiques. Pour achever ce paragraphe, mentionnons que dans le cas unidimensionnel la condition 1.1 caractérise la classe des marches balistiques.

5.2. La condition (T')**.** A.S. Sznitman a consacré une série d'article ([**65**],[**66**] ou encore [**67**]) à l'étude de la classe des marches balistiques. Malheureusement, malgré les améliorations successives sur des conditions suffisantes, il n'existe toujours pas de caractérisation de cette classe. Nous ne présentons ici que le résultat le plus fin, [**66**]. Nous allons de nouveau avoir besoin des temps de renouvellements, dans [**66**] ces temps sont définis de manière légèrement différentes que dans la Section 3, nous continuerons cependant à utiliser la même notation pour les désigner afin de ne pas alourdir la rédaction. Commençons par énoncer la condition (T_γ) pour $\gamma\in(0,1]$ et $\ell\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,

Condition 1.2 (T_γ).

(1) *Il existe* $c>0$ *tel que* $E_0[e^{c\sup_{0\leqslant k\leqslant\tau_1}|X_k|^\gamma}]<+\infty$.

(2) $P_0(A_\ell)=1$.

On peut maintenant énoncer la condition (T'),

Condition 1.3 (T'). *Pour tout* $\gamma\in(0,1]$, *la condition* (T_γ) *est vérifiée.*

Une étude très complète de ces conditions est réalisée dans [**66**]. Nous n'allons ici insister que sur certains points. Commençons par l'élément qui nous intéresse le plus dans cette partie, le caractère balistique,

Théorème 1.9 (Sznitman-2002). *Si la condition* (T') *est vérifiée alors* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *a un comportement balistique sous* P_0.

A.S. Sznitman donne également dans [**66**] une définition alternative de (T_γ) utilisant la position de sortie de la marche de certaines « bandes ». On pourra comparer cette condition à l'Hypothèse *(H)* du Chapitre 2. Introduisons pour la direction $\ell\in S^{d-1}$ et le paramètre $b>0$, la bande de taille $(1+b)L>0$ définie par,

$$U_{\ell,b,L}=\{x\in\mathbb{Z}^d,-bL<x\cdot\ell<L\},$$

ainsi que le temps de sortie $T_{U_{\ell,b,L}}$ de cette bande,

$$T_{U_{\ell,b,L}}=\inf\{n\geqslant 0,X_n\cdot\ell\notin U_{\ell,b,L}\}.$$

On peut maintenant donner une définition équivalente de la condition (T_γ), $\gamma\in(0,1]$ et $\ell\in S^{d-1}$.

Condition 1.4 (Autre définition de (T_γ)). *Il existe un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* ℓ *tel que pour tout* $\ell'\in S^{d-1}\cap\mathcal{O}$,

$$\limsup_{n\to+\infty}L^{-\gamma}\ln\Big(P_0(X_{T_{U_{\ell',b,L}}}\cdot\ell'<0)\Big)<0,\quad \textit{pour tout } b>0.$$

Cette nouvelle définition de (T_γ) permet évidemment de donner également une nouvelle définition de (T') qui présente l'avantage de ne pas nécessiter la structure de renouvellement. Il existe par ailleurs un critère effectif permettant de vérifier la condition (T') que l'on trouvera énoncée dans le Théorème 2.4 de [**66**]. Enfin il faut noter que Sznitman a montré que la condition (T') est plus fine que le critère de Kalikow (voir (1.5)). En effet dans la partie 4 de [**66**], Sznitman exhibe une marche satisfaisant (T') mais pas le critère de Kalikow. Par ailleurs la Remarque 2.5 de [**65**] montre que la condition de Kalikow implique la condition (T') (et même plus, la condition (T) décrite dans [**65**]). Ces deux résultats permettent donc d'affirmer que (T') est une condition strictement plus fine que le critère de Kalikow.
Notons enfin que la condition (T') implique bien plus que cette loi des grands nombres balistique. On trouvera notamment dans [**66**], un principe d'invariance annealed (Théorème 3.3) ainsi qu'une étude des grandes déviations (Théorème 3.4).

6. Autres résultats

Nous terminons ce chapitre consacré au renouvellement en présentant, de façon non exhaustive, quelques résultats qui utilisent cet outil.

6.1. Autres modèles. Comets et Zeitouni ont traité dans [**22**] le cas d'un milieu mélangeant. Pour résoudre cette difficulté, ils ont du modifier la structure de renouvellement que nous venons de décrire. Alors que dans la structure « classique », la marche évoluait d'une bande à une autre, dans la nouvelle structure la marche passe essentiellement d'un cône à un autre (voir la Figure 2.1 p. 39). Les auteurs exploitent ensuite cet outil pour obtenir une loi des grands nombres. Nous allons voir au Chapitre 2 qu'une structure très proche nous permettra également d'étudier les MAMA évoluant dans un environnement i.i.d.
Les structures de renouvellement sont également utiles sur d'autres types de graphes ou de marches. Citons par exemple les marches en milieux aléatoires sur des arbres, [**37**], ou encore les « cookie random walks », [**7**].

6.2. Couplage. La théorie des MAMA a longtemps laissé de coté le couplage bien que ce soit un outil puissant pour l'étude des marches aléatoires. Le modèle s'y prête en effet très mal car il est difficile de coupler deux marches évoluant dans des environnements différents. N. Berger exploite pleinement dans [**8**] la structure de renouvellement pour construire des environnements assurant la transience directionelle. Il couple ensuite ces environnements avec des environnements typiques et étudie les différentes lois quenched. Cette méthode lui permet d'obtenir le Théorème 1.6 p. 31.

CHAPITRE 2

Direction asymptotique

Dans ce chapitre nous étudions la classe des MAMA admettant une direction asymptotique, c'est-à-dire tel que $X_n/|X_n|$ admette une limite déterministe sous la loi annealed. Le résultat principal est une caractérisation de cette classe utilisant la transience directionnelle. L'outil principal est la construction d'une structure de renouvellement avec cônes permettant de contrôler les fluctuations transverses de la marche.

Sommaire

1. Présentation de l'article *Asymptotic Direction for RWRE* 35

1.1. Motivation et résultats 35

1.2. Structure de renouvellement avec cônes 37

2. Introduction and results 40

3. Proofs 43

Le corps de ce chapitre est l'article *Asymptotic Direction for Random Walk in Random Environment* publié aux *Annales de l'institut Henri Poincaré(B)* ([**62**]). Cet article rédigé en anglais est précédé d'une très courte présentation écrite en français.

1. Présentation de l'article *Asymptotic Direction for RWRE*

1.1. Motivation et résultats. Le but de cette partie est de présenter l'article Asymptotic Direction for Random Walk in Random Environment [**62**]. Le résultat principal de cet article est une caractérisation des marches admettant une direction asymptotique. Commençons par motiver cette étude et introduire les notations nécessaires.

Transience directionnelle et caractère balistique. Dans cette partie nous reprenons le modèle présenté dans le Chapitre 1 et nous supposerons que l'hypothèse d'ellipticité ($H1.1$) est vérifiée. Nous allons nous intéresser à l'hypothèse très simple de transience directionnelle,

Hypothèse 2.1 (Transience directionnelle). *Il existe une direction* $\ell \in S^{d-1}$ *telle que,*

$$P_0(A_\ell) = 1. \tag{2.1}$$

Supposons que la marche $(X_n)_{n \geqslant 0}$ satisfait l'Hypothèse 2.1. Nous avons vu dans le Chapitre 1 que l'on peut construire une structure de renouvellement dans la direction ℓ et que pour obtenir une loi des grand nombres balistique il suffit de s'assurer que l'espérance du temps de renouvellement est finie. Actuellement, nous ne sommes pas capable de montrer que l'Hypothèse 2.1 est suffisante pour obtenir ce contrôle. Notons cependant qu'il n'a jamais été exhibé de marches transientes à vitesse nulle dans le cas multidimensionnel et la communauté s'attend à ce que de telles marches n'existent pas pour le modèle i.i.d. L'hypothèse de transience est donc évidemment nécessaire pour obtenir une marche balistique (la marche est en effet transiente dans la direction de sa vitesse) mais on ne sait pas montrer qu'elle est suffisante. Nous n'allons pas ici répondre à cette question extrêmement difficile, nous allons seulement traiter du problème de la direction.

Direction asymptotique. Lorsque une marche a un comportement balistique, la vitesse $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ contient deux informations,

– une direction $\frac{v}{|v|} \in S^{d-1}$,

– une vitesse algébrique $|v| > 0$.

En revanche lorsque une marche vérifie une loi des grands nombres dont la vitesse est nulle, on ne possède aucune information sur une éventuelle direction de fuite de la marche sous la loi annealed. Nous introduisons donc la notion de direction asymptotique :

Définition 2.1 (Direction asymptotique). *On dit que la marche* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $\nu \in S^{d-1}$ *pour direction asymptotique sous la loi annealed* P_0 *si,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \nu, \qquad P_0 - p.s.$$

Il est très facile de voir que l'existence d'une direction asymptotique entraîne l'Hypothèse 2.1 (voir Théorème 2.1 de [**62**]). Cette condition est-elle suffisante ? Nous n'avons pas réussi à répondre à cette question, mais nous avons caractérisé la classe des marches ayant une direction asymptotique en utilisant une hypothèse plus forte. Nous allons maintenant supposer la transience dans toutes les directions d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$.

Hypothèse (H). *Il existe une direction* $\ell \in \mathbb{R}^d_*$ *et un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* ℓ *tel que pour tout* $\ell' \in \mathcal{V}$

$$P_0(A_{\ell'}) = 1.$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de [**62**] :

Théorème 2.1. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

i) La marche satisfait l'Hypothèse (H).

ii) Il existe $\nu \in S^{d-1}$ *tel que*

$$\frac{X_n}{|X_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu, \qquad P_0 - p.s.$$

iii) Il existe $\nu \in S^{d-1}$ tel que pour tout $\ell \in \mathbb{R}^d$,

$$\ell \cdot \nu > 0 \implies P_0\left(A_\ell\right) = 1.$$

Il est évident que si l'Hypothèse *(H)* est vérifiée alors l'Hypothèse 2.1 est également vérifiée, la réciproque est encore une question ouverte et il n'est donc pas sûr que ce résultat soit le plus fin, bien qu'il s'agisse d'une caractérisation. Terminons cette section en énonçant l'autre résultat de cet article. Pour $\nu \in S^{d-1}$, on note

$$B_\nu = \{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \nu\}.$$

En utilisant les outils construits pour la preuve du Théorème 2.1, on montre également la proposition suivante,

PROPOSITION 2.1. *Si ν et ν' sont deux vecteurs distincts de S^{d-1} satisfaisant*

$$P_0(B_\nu)P_0(B_{\nu'}) > \ 0,$$

alors $\nu' = -\nu$.

La variable aléatoire $\lim_{n\to\infty} X_n/|X_n|$, si elle existe P_0-p.s., prend donc au plus deux valeurs, et dans ce cas, ces deux valeurs sont opposées.

REMARQUE 2.1. *En utilisant la proposition ci-dessus, on peut montrer que le support de la vitesse dans le Théorème 1.5 comporte au plus deux éléments colinéaires et opposés. En effet, à chaque vitesse non nulle on peut associer une direction asymptotique. On peut donc déduire de la Proposition 2.1 que le support de la vitesse comporte au plus trois éléments $\{v, -v, 0\}$. Considérons maintenant $e \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|e| = 1$ et $e \cdot v > 0$, la loi du $0-1$ de Kalikow nous assure que $P_0(A_e \cup A_{-e}) = 1$. On peut aussi construire la structure de renouvellement dans la direction e (resp. $-e$) et le lemme de Zerner nous assure que X_n a une vitesse non nulle sur A_e (resp. A_{-e}). Ce raisonnement permet d'exclure le cas de trois éléments distincts.*

1.2. Structure de renouvellement avec cônes.

La structure de renouvellement classique est insuffisante. Revenons dans un premier temps aux marches balistiques. Pour obtenir une loi des grands nombres balistique, nous avons vu qu'il fallait montrer :

$$E_0(\tau_1 | D = \infty) < \infty.$$

Pour obtenir une direction asymptotique, on peut penser suffisant de montrer que l'espérance de la position de renouvellement est finie,

$$E_0(|X_{\tau_1}| | D = \infty) < \infty,$$

et d'appliquer la loi des grands nombres. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en posant $\tau_0 = 0$ et $X_{\tau_0} = 0$),

$$\frac{X_{\tau_n}}{|X_{\tau_n}|} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{|\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}|}, \tag{2.2}$$

et en appliquant la loi de grands nombres vectorielles pour des variables i.i.d.,

$$\frac{X_{\tau_n}}{|X_{\tau_n}|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{E_0(X_{\tau_1} | D = \infty)}{|E_0(X_{\tau_1} | D = \infty)|}, \quad P_0 - p.s.$$

Cette stratégie naïve ne fonctionne pas car elle se heurte aux deux obstacles suivants. Rappelons pour commencer le lemme de Zerner,

LEMME 2.1 (Zerner). *Si* $P_0(A_{e_{i_0}}) > 0$, *alors,*

$$E_0(X_{\tau_1} \cdot e_{i_0} | D = \infty) = \frac{1}{P_0(D = \infty)}.$$

Dans un premier temps, nous allons admettre que ce résultat est également vrai pour une direction $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Ce lemme nous fournit donc un contrôle de l'espérance de la position de renouvellement dans la direction de transience mais il reste à contrôler les autres directions que l'on appellera directions transverses.
Notons maintenant que la stratégie proposée par la formule (2.2) n'est valide que sur la sous-suite des temps de renouvellement. Le second obstacle est donc le contrôle de la marche entre les temps de renouvellement. Entre le n-ème et $n+1$-ème temps de renouvellement, on sait que la marche est dans la bande

$$\{x \in \mathbb{Z}^d,\ X_{\tau_n} \cdot \ell \leqslant x \cdot \ell < X_{\tau_{n+1}} \cdot \ell\},$$

ce qui est suffisant pour contrôler la marche dans la direction ℓ mais pas dans les directions transverses. Pour résumer, la mise en place de notre stratégie se heurte à deux difficultés :

- contrôler les coordonnées transverses de la position de renouvellement
- contrôler les fluctuations transverses de la marche entre les temps de renouvellement.

Structure de renouvellement avec cônes. L'idée essentielle pour résoudre ces deux difficultés est d'utiliser une autre structure de renouvellement en utilisant non plus des bandes mais des cônes. Cette structure est très proche de celle introduite par Comets et Zeitouni dans [**22**] (voir la Section 6 au Chapitre 1). Un temps de renouvellement sera maintenant un temps où la marche atteint un record dans la direction ℓ puis « bascule » dans un cône non dégénéré orienté par ℓ. La construction est décrite dans la Section 3 de ce chapitre, on se contentera dans cette présentation de la Figure 2.1. Il peut être intéressant de comparer cette figure à la Figure 1.2 illustrant la structure de renouvellement « classique ». Nous continuerons à appeler ces temps de renouvellement $(\tau_k)_{k \geqslant 1}$ dans cette présentation sans risquer de confusion avec les temps de renouvellement classiques. Dans [**22**], les cônes étaient adaptés au caractère mélangeant du milieu ; dans le cas d'un milieu i.i.d. l'intérêt d'utiliser des cônes plutôt que des bandes est géométrique. Avant de commenter les problème liés à la construction de cet outil, nous allons expliquer comment il permet de résoudre les deux difficultés mentionnées. La première étape est d'adapter le lemme de Zerner au cas des cônes pour obtenir :

$$E(X_{\tau_1} \cdot \ell | D = +\infty) < \infty.$$

On utilise ensuite la géométrie du cône : si C désigne un cône non dégénéré dont le sommet est en 0 et la direction est donnée par ℓ alors il existe une constante $\kappa < \infty$ telle que pour tout $x \in C$,

$$|x| \leqslant \kappa |x \cdot \ell|.$$

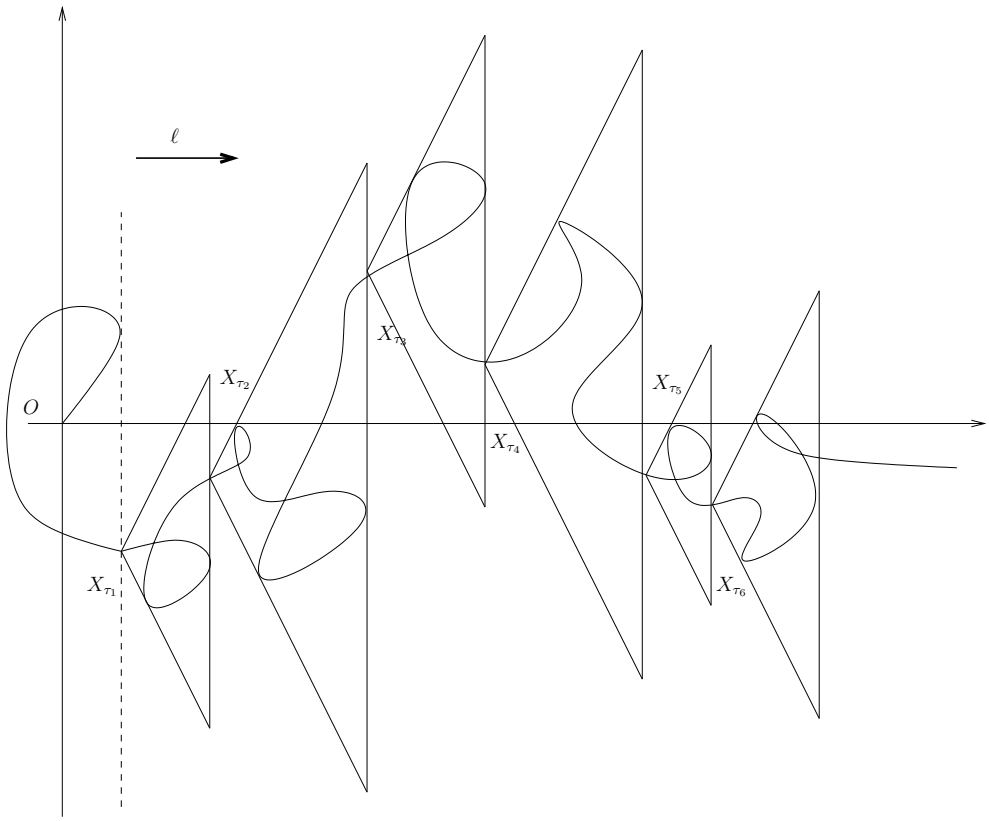

FIG. 2.1. Structure de renouvellement avec cônes

En associant cette remarque au lemme de Zerner « adapté », on peut résoudre la première difficulté. On contrôle alors les coordonnées transverses du temps de renouvellement et on obtient,

$$E(|X_{\tau_1}||D = +\infty) < \infty.$$

Par ailleurs le second problème est également résolu par la géométrie du cône. La marche, entre deux temps de renouvellement, est enfermée dans un cône et on peut donc contrôler ses fluctuations transverses entre deux temps de renouvellement.
Nous finissons cette présentation avec quelques commentaires sur la construction de la structure. La méthode est proche de la construction classique décrite dans le Chapitre 1. La principale difficulté est de montrer

$$P_0(D^C = \infty) > 0,$$

où D^C désigne le temps de sortie du cône C (voir la définition de D_α^ℓ dans la dernière section de ce chapitre ou directement [**62**]). Ce contrôle remplace celui sur le temps de sortie D du demi-espace dans la construction classique. C'est pour obtenir ce résultat que nous avons besoin de renforcer l'Hypothèse 2.1 et de travailler avec l'Hypothèse *(H)*. Enfin rappelons que nous ne connaissons pas de marches vérifiant l'Hypothèse 2.1 mais n'admettant pas de direction asymptotique et on peut donc espérer une amélioration du Théorème 2.1.

Asymptotic Direction for Random Walk in Random Environment ([**62**])

2. Introduction and results

In this paper, we give a characterization of random walks in random i.i.d environments having an asymptotic direction. We first describe the model that we will use. Fix a dimension $d \geqslant 1$ (but think more particularly of the case where $d \geqslant 2$ because this work becomes obvious when $d = 1$). Let S_{2d-1} denote the $(2d-1)$ dimensional simplex, $S_{2d-1} = \{x \in [0,1]^{2d},\ \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\}$. An environment ω in $\mathbb{Z}^d$ is an element of $\Omega := S_{2d-1}^{\mathbb{Z}^d}$. For any environment ω, $P_{x,\omega}$ denotes the Markov chain with state space $\mathbb{Z}^d$ and transition given by

$$P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1 \qquad and$$
$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = z + e | X_n = z) = \omega_z(e) \qquad (z \ \in \mathbb{Z}^d,\ e \ \in \mathbb{Z}^d \ s.t.\ |e| = 1,\ n \geqslant 0),$$

where $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm in $\mathbb{Z}^d$.
For any law μ on S_{2d-1}, we define a random environment ω in $\mathbb{Z}^d$, random variable on Ω with law $\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. For any x in $\mathbb{Z}^d$ and any fixed ω, the law $P_{x,\omega}$ is called quenched law. The annealed law P_x is defined on $\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ by the semi-product $P_x := \mathbb{P} \times P_{x,\omega}$. In this article, the law μ will verify the assumption of strict ellipticity

$$\forall e \in \mathbb{Z}^d \ s.t.\ |e| = 1,\ \mathbb{P} - a.s. \quad \mu(\omega_0(e) > 0) = 1,$$

which is weaker than the usual uniform ellipticity (see Remark 2.1). S^{d-1} denotes the unit circle for the Euclidean norm. For any ℓ in $\mathbb{R}^d$, we define the set A_ℓ of transient trajectories in direction ℓ

$$A_\ell = \{\lim_{n \to +\infty} X_n \cdot \ell = +\infty\},$$

and for any ν in S^{d-1}, B_ν is defined as the set of trajectories having ν for asymptotic direction

$$B_\nu = \{\lim_{n \to +\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = \nu\}.$$

This model is well studied in the one dimensional case where many sharp properties of the walk are known. However in higher dimensions the behavior of the walk is much less well-understood. Particularly, the notion of asymptotic direction has been poorly studied. In this paper, we give a description of the class of walks having a unique asymptotic direction under the annealed measure (Theorem 2.1). It means that the walk is transient and escapes to infinity in a direction which has a deterministic almost surely limit. We also prove that under the annealed measure, a RWRE admits at most two opposite asymptotic directions (Proposition 2.2 and Corollary 2.1). The proofs are based on renewal structure as in [**22**] or [**70**]. The main difficulty to obtain an asymptotic direction for a transient walk is to control the fluctuations of the walk in the hyperplane transverse to transience direction. One way to control those fluctuations is to introduce the following assumption.

Assumption. *ℓ in $\mathbb{R}^d_*$ verifies assumption (H) if there exists a neighborhood $\mathcal{V}$ of ℓ such that*

$$\forall \ell' \in \mathcal{V}, \quad P_0(A_{\ell'}) = 1. \qquad (H)$$

When (H) holds, we will note $\mathcal{V}$ the neighborhood given by the assumption.

The main purpose of this article is to prove the following theorem.

Theorem 2.1. *The following three statements are equivalent*

i) There exists a non empty open set $\mathcal{O}$ of $\mathbb{R}^d$ such that

$$\forall \ell \in \mathcal{O}, \qquad P_0\left(A_\ell\right) = 1.$$

ii) $\exists \nu \in S^{d-1}$ *s.t.*

$$P_0 - a.s., \quad \frac{X_n}{|X_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu.$$

iii) $\exists \nu \in \mathbb{R}^d_*$ *s.t.* $\forall\ \ell \in \mathbb{R}^d$

$$\ell \cdot \nu > 0 \implies P_0\left(A_\ell\right) = 1.$$

Using arguments similar to those applied in the proof of Theorem 2.1, we also show

Proposition 2.2. *If ν and ν' are two distinct vectors in S^{d-1} such that*

$$P_0(B_\nu)P_0(B_{\nu'}) > \ 0,$$

then $\nu' = -\nu$.

An obvious consequence of this proposition is the following corollary.

Corollary 2.1. *Under P_0, there are at most two asymptotic directions, in this case these two potential directions are opposite each other.*

The class of walks admitting an asymptotic direction has been poorly studied so far. Theorem 2.1 gives a characterization of this class but also leaves unsolved some important problems related to this notion. First, we would like to compare the ballistic class with the class of walks admitting an asymptotic direction. As shown in Remark (2.2), if a walk admits an asymptotic direction, it also satisfies a law of large numbers. However, the notion of asymptotic direction is of interest only in the non-ballistic case. Indeed, a non degenerate velocity contains more information (direction and speed) than the asymptotic direction (direction only) whereas in the non-ballistic case the asymptotic direction gives an interesting information of the behavior which is not contained in the law of large numbers. It is known that in dimension 1, the class of walks admitting an asymptotic direction (here it simply means transient) but a degenerate velocity is non empty. In higher dimension we have no example of such a walk and it might be possible that there is none.

The class of ballistic walks has been the subject of many recent articles. In the first one [**70**], the authors provide a strong sufficient drift condition to obtain a ballistic law of large numbers, Kalikow's condition. Later, Sznitman improves on sufficient conditions in different works, [**66**] is the more recent. He introduces in this paper the conditions (T_γ) $(\gamma \in (0,1])$ that we will not recall, and the condition

(T') defined as the realization of (T_γ) for any $\gamma \in (0,1)$. According to Corollary 5.3 in [**67**], this condition is strictly weaker than Kalikow's criterion for $d \geqslant 3$ and Sznitman gives an effective criterion to check it, that is the weakest condition known to assure a ballistic behavior. It is also shown in (1.13) of [**66**] that (T_γ) implies that the walk has an asymptotic direction (and so using Theorem 1 implies (H)), it is then natural to ask if (H) is strictly weaker than (T_γ) or simply equivalent. This question is particularly interesting because (T_γ) is equivalent to (T') for $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ when $d \geqslant 2$, and it is conjectured that they are equivalent for any $\gamma \in (0,1)$ (see [**66**], in particular Theorem 2.4). An answer to this question could be a step toward comparing the ballistic class and the class of walks admitting an asymptotic direction and then would help us to solve the first problem above.

A third problem is that we could not find a criterion to check assumption (H), as we have for (T_γ). Such a criterion would be a great help to answer the two previous questions because condition (H) is easy to understand but hard to verify.

Finally, notice that Corollary 2.1 has a version for velocities instead of asymptotic directions. More precisely, P_0-almost surely, the limit of $\frac{X_n}{n}$ belongs to a set $\{S_1, S_2\}$ such that if $S_1 \neq 0$ then $S_2 = \lambda S_1$ for some $\lambda \leqslant 0$ (Theorem 1.1 in [**8**]). However none of these two results can be deduced from the other one.

The proofs of the results will be given in the second part of this paper. We finish this section with some notation which will be useful in the proofs. Denote by θ_n the time shift (n natural number is the argument) and by t_x the spatial shift (x in $\mathbb{Z}^d$ is the argument). For any fixed ℓ in $\mathbb{R}^d_*$, we let T_u be the hitting time of the open half-space $\{x \in \mathbb{Z}^d,\ x \cdot \ell > u\}$

$$T_u = \inf\{n > 0,\ X_n \cdot \ell > u\},$$

and D^ℓ the return time of the walk behind the starting point

$$D^\ell = \inf\{n > 0,\ X_n \cdot \ell \leqslant X_0 \cdot \ell\}.$$

Notice that these two definitions are quite different from those used in [**70**].
We complete ℓ into an orthogonal basis $(e_2, \ldots, e_d)$, such that for every i in $[\![2, d]\!]$, $|e_i| = 1$. For all $i \in [\![2, d]\!]$ we define the following two vectors:

$$\ell'_i(\alpha) = \ell + \alpha e_i \quad \text{and} \quad \ell'_{-i}(\alpha) = \ell - \alpha e_i. \tag{2.3}$$

For all positive real α we can define the convex cone $C(\alpha)$ by

$$C(\alpha) = \bigcap_{i=2}^{d} \{x \in \mathbb{Z}^d,\ x \cdot \ell'_i(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{and} \quad x \cdot \ell'_{-i}(\alpha) \geqslant 0\}.$$

We also define the exit time D^ℓ_α of the cone $C(\alpha)$, shifted at the starting point of the walk,

$$D^\ell_\alpha = \inf\{n \geqslant 0,\ \exists i \in [\![2, d]\!],\ X_n \cdot \ell'_i(\alpha) < X_0 \cdot \ell'_i(\alpha) \text{ or } X_n \cdot \ell'_{-i}(\alpha) < X_0 \cdot \ell'_{-i}(\alpha)\}.$$

Notice that under P_0, D^ℓ_α can also be defined in the following way,

$$P_0 - a.s., \quad D^\ell_\alpha = \inf\{n \geqslant 0,\ X_n \notin C(\alpha)\}.$$

3. Proofs

Proof of Theorem 2.1. The first step of the proof is the following lemma, where it is proved that under (H) the walk has a positive probability never to exit a cone $C(\alpha)$ for α small enough.

Lemma 2.1. *Let ℓ be a vector in $\mathbb{R}^d$ satisfying (H) then, for any choice of an orthogonal basis $(\ell, e_2, \ldots, e_d)$ with $|e_i| = 1$ for any i in $[\![2, d]\!]$, there exist some $\alpha_0 > 0$ such that,*

$$\forall \alpha \leqslant \alpha_0 \quad P_0\left(D_\alpha^\ell = \infty\right) > 0. \tag{2.4}$$

Proof. Fix a basis satisfying the assumption of the lemma. We will first show that there exists a random variable $\alpha_1 > 0$ such that

$$P_0(D_{\alpha_1}^\ell = \infty | D^\ell = \infty) = 1. \tag{2.5}$$

Since $\mathcal{V}$ is an open set, there exist some $\alpha_2 > 0$ such that for every $i \in [\![2, d]\!]$:

$$\ell_i'(\alpha_2) \in \mathcal{V} \text{ and } \ell_{-i}'(\alpha_2) \in \mathcal{V}.$$

For these $(2d-2)$ directions, we use the renewal structure described in section 1 of [**70**]. The choice of the parameter a in this structure has no importance and can be done arbitrarily. Remember that, for any fixed direction ℓ, the first renewal time τ^ℓ of [**70**] is the first time the walk reaches a new record in direction ℓ, and later never backtracks.

Remark 2.1. *In* [**70**]*, as in further references, uniform ellipticity is assumed. When we quote these articles, we have verified that this stronger assumption is not necessary or can be relaxed as in* [**80**].

Using (H) we obtain that for each $i \in [\![2, d]\!]$,

$$P_0\left(A_{\ell_i'(\alpha_2)}\right) = P_0\left(A_{\ell_{-i}'(\alpha_2)}\right) = 1.$$

From Proposition 1.2 in [**70**]:

$$\tau^{\ell_2'(\alpha_2)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell_d'(\alpha_2)} \vee \tau^{\ell_{-2}'(\alpha_2)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell_{-d}'(\alpha_2)} < \infty \qquad P_0 - a.s.$$

Using a proof very close to Proposition 1.2 in [**70**] (see also Theorem 3 in [**39**]) we obtain $P_0\left(D^\ell = \infty\right) > 0$ and so:

$$\tau^{\ell_2'(\alpha_2)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell_d'(\alpha_2)} \vee \tau^{\ell_{-2}'(\alpha_2)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell_{-d}'(\alpha_2)} < \infty \qquad P_0\left(\cdot | D^\ell = \infty\right) - a.s. \tag{2.6}$$

We now define the following variables:

$$\begin{aligned} N &= \inf\{n_0 \geqslant 1,\ \forall n \geqslant n_0,\ X_n \in C(\alpha_2)\}, \qquad (\inf \emptyset = +\infty) \\ C &= \inf_{1 \leqslant n \leqslant N} X_n \cdot \ell, \\ M &= \sup_{1 \leqslant n \leqslant N} \sum_{i=2}^{d} |X_n \cdot e_i|^2. \end{aligned}$$

From (2.6), it is clear that:

$$P_0\left(\cdot|D^\ell=\infty\right)-a.s., \qquad N \qquad <\infty,$$
$$C>0 \quad \text{and} \quad M<\infty.$$

We now define $\alpha_1=\frac{C}{\sqrt{M}}\wedge\alpha_2$ (notice that α_1 is random), using Cauchy-Schwarz inequality for $n\leqslant N$ and the definition of N and $C(\alpha)$ for $n\geqslant N$, we obtain:

$$P_0(\cdot|D^\ell=\infty)-a.s.,\ \forall i\in[\![2,d]\!],\ \forall n\geqslant 0,$$
$$X_n\cdot\ell_i'(\alpha_1)=X_n\cdot\ell+\alpha_1\left(X_n\cdot e_i\right)\ \geqslant 0,$$
$$\textit{and } X_n\cdot\ell_{-i}'(\alpha_1)=X_n\cdot\ell-\alpha_1\left(X_n\cdot e_i\right)\ \geqslant 0.$$

which ends the proof of (2.5).
It is clear that

$$\alpha<\alpha' \quad \text{implies} \quad C\left(\alpha'\right)\subset C\left(\alpha\right),$$

and so

$$\lim_{\alpha\to 0}P_0\left(\{D_\alpha^\ell=\infty\}\right)=P_0\left(\bigcup_{\alpha>0}\{D_\alpha^\ell=\infty\}\right).$$

From (2.5), we have

$$\bigcup_{\alpha>0}\{D_\alpha^\ell=\infty\}\overset{P_0-a.s.}{=}\{D^\ell=\infty\}.$$

Since $P_0\left(D^\ell=\infty\right)>0$, this concludes the proof of Lemma 2.1. □

We will now construct a renewal structure in the same spirit as in [**70**] or [**22**]. The idea is to define a time where the walk reaches a new record in the direction ℓ and never goes out of a cone (also oriented in direction ℓ) after. In [**70**], the walk moves from one slab to the next one, here, as in [**22**] or [**23**], the walk will move from one cone to the next one.
From Lemma 2.1, we know that we can choose α small enough so that

$$P_0\left(D_\alpha^\ell=\infty\right)>0.$$

We define now the two stopping time sequences $(S_k)_{k\geqslant 0}$and $(R_k)_{k\geqslant 0}$, and the sequence of successive maxima $(M_k)_{k\geqslant 0}$

$$S_0=\inf\{n\geqslant 0,\ X_n\cdot\ell>X_0\cdot\ell\},\quad R_0=D_\alpha^\ell\circ\theta_{S_0}+S_0,\quad M_0=\sup\{\ell\cdot X_n,\ 0\leqslant n\leqslant R_0\}.$$

And for all $k\geqslant 0$:

$$S_{k+1}=T_{M_k},\quad R_{k+1}=D_\alpha^\ell\circ\theta_{S_{k+1}}+S_{k+1},\quad M_{k+1}=\sup\{\ell\cdot X_n,\ 0\leqslant n\leqslant R_{k+1}\},$$
$$K=\inf\{k\geqslant 0,\ S_k<\infty,\ R_k=\infty\}.$$

On the set $K<\infty$, we also define:

$$\tau_1=S_K.$$

The random time τ_1 is called the first cone renewal time, and will not be confused with τ^ℓ introduced above. Under assumption (H),

$$S_0\leqslant R_0<S_1\leqslant R_1<\cdots<S_n\leqslant R_n<\cdots\leqslant\infty. \tag{2.7}$$

PROPOSITION 2.3. *Under assumption (H),*

$$P_0 - a.s. \qquad K < \infty.$$

PROOF. For all $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= \mathbb{E}[E_{0,\omega}[S_k < \infty, D_\alpha^\ell \circ \theta_{S_k} < \infty]] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[S_k < \infty, X_{S_k} = x, D_\alpha^\ell \circ \theta_{S_k} < \infty]]. \end{aligned}$$

Using Markov property we obtain,

$$P_0(R_k < \infty) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[E_{0,\omega}[S_k < \infty, X_{S_k} = x] E_{x,\omega}[D_\alpha^\ell < \infty]\right].$$

For every x in $\mathbb{Z}^d$, the variables $E_{0,\omega}[S_k < \infty, X_{S_k} = x]$ and $E_{x,\omega}[D_\alpha^\ell < \infty]$ are respectively $\sigma\{\omega_y(\cdot),\ \ell \cdot y < \ell \cdot x\}$ and $\sigma\{\omega_y(\cdot),\ y \in t_x \circ C(\alpha)\}$ measurable. As this two σ-fields are independent,

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} E_0[S_k < \infty, X_{S_k} = x] E_x[D_\alpha^\ell < \infty] \\ &= P_0(S_k < \infty) P_0(D_\alpha^\ell < \infty) \\ &= P_0(R_{k-1} < \infty) P_0(D_\alpha^\ell < \infty). \end{aligned}$$

By induction, we obtain,

$$P_0(R_k < \infty) = P_0(D_\alpha^\ell < \infty)^{k+1}.$$

In view of (2.7), this concludes the proof. □

We now define a sequence of renewal time $(\tau_k)_{k \geqslant 1}$ by the following recursive relation:

$$\tau_{k+1} = \tau_1(X.) + \tau_k(X_{\tau_1 +.} - X_{\tau_1}). \tag{2.8}$$

Using Proposition (2.3), we have:

$$\forall k \geqslant 0, \qquad \tau_k < \infty.$$

PROPOSITION 2.4. *Under assumption (H),* $((X_{\tau_1 \wedge \cdot}), \tau_1), \left(\left(X_{(\tau_1 + \cdot) \wedge \tau_2} - X_{\tau_1}\right), \tau_2 - \tau_1\right), \ldots, \left(\left(X_{(\tau_k + \cdot) \wedge \tau_{k+1}} - X_{\tau_k}\right), \tau_{k+1} - \tau_k\right)$ *are independent variables under* P_0 *and for* $k \geqslant 1$, $\left(\left(X_{(\tau_k + \cdot) \wedge \tau_{k+1}} - X_{\tau_k}\right), \tau_{k+1} - \tau_k\right)$ *are distributed like* $((X_{\tau_1 \wedge \cdot}), \tau_1)$ *under* $P_0\left(\cdot | D_\alpha^\ell = \infty\right)$.

The proof is similar to that of Corollary 1.5 in [**70**] and will not be repeated here.

For the classical renewal structure, Zerner proved that $E_0[X_{\tau_1} \cdot \ell]$ is finite and computed its value. We provide here the same result but for a renewal structure with cones.
Fix a direction ℓ with integer coordinates $(a_1, \ldots, a_d)$ such that their greatest common divisor, $\gcd(a_1, \ldots, a_d) = 1$. Assume that (H) is satisfied for ℓ. Complete ℓ

in an orthogonal basis $(\ell, e_2, \dots, e_d)$ such that for every i in $[\![2, d]\!]$, $|e_i| = 1$. By Lemma 2.1, we can choose α small enough so that $P_0(D_\alpha^\ell = \infty) > 0$ and construct the associated renewal structure that is described above. We will also choose α small enough such that for all $e \in \mathbb{Z}^d$ with $|e| = 1$ and $\ell \cdot e > 0$, e belongs to $C(\alpha)$.

Lemma 2.2. *Under assumption (H),*

$$E_0[X_{\tau_1} \cdot \ell | D_\alpha^\ell = \infty] < \infty.$$

Proof. This proof follows an unpublished argument of M. Zerner but can be found in Lemma 3.2.5 p. 265 of [**76**]. Since $\gcd(a_1, \dots, a_d) = 1$, we have $\{x \cdot \ell,\ x \in \mathbb{Z}^d\} = \mathbb{Z}$. We will note

$$a^* = \max\{|a_i|, i = 1, \cdots, d\}$$

and for all $i > 0$,

$$b_i = \{x \in \mathbb{Z}^d,\ i \leqslant x \cdot \ell < i + a^* - 1\}.$$

We now start the proof, for all $i > 0$,

$$\begin{aligned}
P_0(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k} \cdot \ell \in &[\![i, i + a^* - 1]\!]\}) \\
&\geqslant P_0\left(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k} \cdot \ell \in [\![i, i + a^* - 1]\!], X_{\tau_k} = X_{T_i - 1}\}\right) \\
&\geqslant \sum_{x \in b_i} \mathbb{E}\left[E_{0,\omega}\left[\{X_{T_{i-1}} = x, D_\alpha^\ell \circ \theta_{T_{i-1}} = \infty\}\right]\right] \\
&\geqslant \sum_{x \in b_i} \mathbb{E}\left[E_{0,\omega}\left[X_{T_{i-1}} = x\right] E_{x,\omega}\left[D_\alpha^\ell = \infty\right]\right] \qquad (2.9) \\
&\geqslant P_0\left(D_\alpha^\ell = \infty\right) P_0(X_{T_{i-1}} \in b_i) \qquad (2.10) \\
&\geqslant P_0\left(D_\alpha^\ell = \infty\right). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

We used the strong Markov property in (2.9). In (2.10), notice that $E_{0,\omega}\left(X_{T_{i-1}} = x\right)$ is $\sigma\{\omega_y(\cdot),\ \ell \cdot y < \ell \cdot x\}$ measurable and $E_{x,\omega}\left(D_\alpha^\ell = \infty\right)$ is $\sigma\{\omega_y(\cdot),\ y \in t_x \circ C(\alpha)\}$ measurable and that those two σ-fields are independent. In (2.11), we use that $P_0 - a.s.$, $X_{T_{i-1}}$ belongs to b_i. We will now compute the same value in another way. For all $i > 0$,

$$P_0\left(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k} \cdot \ell \in [\![i, i + a^* - 1]\!]\}\right) \leqslant \sum_{j=i}^{i+a^*-1} P_0\left(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k} \cdot \ell = j\right) \qquad (2.12)$$

We also have

$$\begin{aligned}
\lim_{i \to \infty} P_0(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k} \cdot \ell = i\}) &= \lim_{i \to \infty} P_0\left(\{\exists k \geqslant 2,\ X_{\tau_k} \cdot \ell = i\}\right) \\
&= \lim_{i \to \infty} \sum_{n \geqslant 1} P_0\left(\{\exists k \geqslant 2,\ (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot \ell = i - n, X_{\tau_1} \cdot \ell = n\}\right) \\
&= \lim_{i \to \infty} \sum_{n \geqslant 1} P_0\left(\{\exists k \geqslant 2,\ (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot \ell = i - n\}\right) P_0\left(X_{\tau_1} \cdot \ell = n\right).
\end{aligned}$$

The first equality is true because $P_0\left(X_{\tau_1} \cdot \ell > i\right) \to 0\,(i \to \infty)$. Notice now that for all $i \in \{1, \cdots, d\}$, $|a_i|$ is in the support of $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})$ under P_0, and this variable is

then aperiodic. We can now use the renewal theorem (Corollary 10.2 p. 76 in [**72**]) we obtain

$$\lim_{i\to\infty} P_0\left(\{\exists k \geqslant 2,\ (X_{\tau_k} - X_{\tau_1})\cdot \ell = i-n\}\right) = \frac{1}{E_0[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})\cdot \ell]}.$$

The dominated convergence theorem leads to

$$\lim_{i\to\infty} P_0\left(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k}\cdot \ell = i\}\right) = \frac{1}{E_0[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})\cdot \ell]}.$$

Using (2.12), we deduce,

$$P_0\left(\{\exists k \geqslant 1,\ X_{\tau_k}\cdot \ell \in [\![i, i+a^*-1]\!]\}\right) \leqslant \frac{a^*-1}{E_0[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})\cdot \ell]}.$$

Comparing this result with (2.10), we easily obtain Lemma 2.2. □

We have now all the tools to prove Theorem 2.1. We will first use the two lemmas to prove that *i*) implies *ii*).
We choose ℓ with rational coordinates in the open set $\mathcal{O}$. It is clear that ℓ satisfies assumption (H). Actually, we can also assume, without loss of generality, that ℓ has integer coordinates and that their greatest common divisor is 1. Indeed, there is λ rational such that $\lambda\ell$ has integer coordinates with greatest common divisor equal to 1, and of course, $\lambda\ell$ also satisfies (H).

We complete ℓ into an orthogonal basis $(e_2, \dots, e_d)$, such that for every i in $[\![2, d]\!]$, $|e_i| = 1$. Using Lemma 2.1, we choose α small enough so that $P_0\left(D_\alpha^\ell = \infty\right) > 0$. We can now use the renewal structure with cones and we have from Lemma 2.2 that:

$$E_0\left[X_{\tau_1}\cdot \ell | D_\alpha^\ell = \infty\right] < \infty.$$

From the definition of the cone renewal structure, there is some constant $c(\alpha) > 0$ such that, $P_0(\cdot | D_\alpha^\ell = \infty) - a.s.$, for any time n,

$$|X_n| \leqslant c(\alpha) X_n \cdot \ell, \tag{2.13}$$

and so using Lemma 2.2,

$$E_0\left[|X_{\tau_1}| | D_\alpha^\ell = \infty\right] < \infty. \tag{2.14}$$

We can now apply the law of large numbers, and obtain

$$\frac{X_{\tau_k}}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} E_0\left[X_{\tau_1} | D_\alpha^\ell = \infty\right] \quad P_0 - a.s. \tag{2.15}$$

As $|E_0\left[X_{\tau_1} | D_\alpha^\ell = \infty\right]| > 0$,

$$\frac{X_{\tau_k}}{|X_{\tau_k}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{E_0\left[X_{\tau_1} | D_\alpha^\ell = \infty\right]}{|E_0\left[X_{\tau_1} | D_\alpha^\ell = \infty\right]|} \overset{(def)}{=} \nu \quad P_0 - a.s. \tag{2.16}$$

To complete the proof, we have to control the behavior of the walk between the renewal times. For each natural n, we introduce the index $k(n)$ such that,

$$\tau_{k(n)} \leqslant n < \tau_{k(n)+1}.$$

Recall that if (Z_n) is an i.i.d. sequence of variables with finite expectation, Borel-Cantelli Lemma assures that $\frac{Z_n}{n}$ converges almost surely to 0. From (2.13), Lemma 2.2 and Proposition 2.4, the sequence $(\sup_n |X_{\tau_k+n\wedge\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}|)_{k\geqslant 1}$ is i.i.d with finite expectation and we can apply the previous remark to obtain:

$$\frac{\sup_n |X_{\tau_k+n\wedge\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}|}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad P_0 - a.s. \tag{2.17}$$

Using equation (2.16) and (2.17), we study the convergence in *ii*),

$$\frac{X_n}{|X_n|} = \frac{X_n - X_{\tau_{k(n)}}}{|X_n|} + \frac{X_{\tau_{k(n)}}}{k(n)}\frac{k(n)}{|X_n|}. \tag{2.18}$$

By Proposition 2.3 and (2.8),

$$k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad P_0 - a.s.$$

As $|X_n| \geqslant k(n)$, (2.17) leads to:

$$\frac{X_n - X_{\tau_{k(n)}}}{|X_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad P_0 - a.s. \tag{2.19}$$

To control the second term in (2.18), we simply write

$$\frac{|X_{\tau_{k(n)}}|}{k(n)} - \frac{|X_n - X_{\tau_{k(n)}}|}{k(n)} \leqslant \frac{|X_n|}{k(n)} \leqslant \frac{|X_{\tau_{k(n)}}|}{k(n)} + \frac{|X_n - X_{\tau_{k(n)}}|}{k(n)}.$$

Using (2.15) and (2.17), we obtain,

$$\frac{|X_n|}{k(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} |E_0\left[X_{\tau_1}\cdot\ell | D_\alpha^\ell = \infty\right]| \qquad P_0 - a.s.$$

We finally obtain the desired convergence :

$$\frac{X_n}{|X_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu = \frac{E_0\left[X_{\tau_1}|D_\alpha^\ell = \infty\right]}{|E_0\left[X_{\tau_1}|D_\alpha^\ell = \infty\right]|} \qquad P_0 - a.s.$$

The end of the proof of Theorem 2.1 is easy: it is obvious that *iii*) implies *i*) and so we just have to show that *ii*) implies *iii*).
Let ℓ be a direction such that $\ell\cdot\nu > 0$. It is known since [**70**] (Lemma 1.1) that $P_0(A_\ell \cup A_{-\ell})$ follows a $0-1$ law under assumption of uniform ellipticity, but we use here Proposition 3 in [**80**] where the same result is proved under the weaker assumption of strict ellipticity.
If $P_0(A_\ell \cup A_{-\ell}) = 0$, it is known that the walk under P_0 oscillates,

$$\limsup_{n\to\infty} X_n\cdot\ell = -\liminf_{n\to\infty} X_n\cdot\ell = +\infty \qquad P_0 - a.s.$$

This is not possible in view of *ii)* and so $P_0(A_\ell \cup A_{-\ell}) = 1$.
But because of *ii*), $P_0(A_{-\ell}) = 0$, and we can conclude

$$P_0(A_\ell) = 1.$$

□

REMARK 2.2. *From the proof of Theorem 2.1, we know that if a walk has an asymptotic direction, we can construct a renewal structure with cones and* $E[X_{\tau_1}|D_\alpha^\ell = \infty]$ *is finite. We can then easily derive a law of large numbers, namely*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{E_0[X_{\tau_1}|D_\alpha^\ell = \infty]}{E_0[\tau_1|D_\alpha^\ell = \infty]} \overset{(def)}{=} \mu \qquad P_0 - a.s.$$

However this limit can be zero (if and only if $E_0[\tau_1|D_\alpha^\ell = \infty] = +\infty$ *) and, in this case, the asymptotic direction is an interesting information about the walk's behaviour.*

REMARK 2.3. *If a walk admits an asymptotic direction, we know that the walk is transient in any direction* ℓ *satisfying* $\ell\cdot\nu > 0$*. For any such* ℓ*, we can consider a slab renewal structure defined as the cone renewal structure except that in the definitions of* $(R_k)_{k\geqslant 0}, (S_k)_{k\geqslant 0}$ *and* $(M_k)_{k\geqslant 0}$*,* D_α^ℓ *is replaced by* $\widetilde{D}^\ell = \inf\{n > 0, X_n\cdot\ell < X_0\cdot\ell\}$ *(this construction is very similar to that of* [**70**]*). For any* $k \geqslant 1$*,* τ_k^ℓ *will denote the* k*-th slab renewal time. The variables* $(X_{\tau_{k+1}^\ell} - X_{\tau_k^\ell})_{k\geqslant 1}$ *are i.i.d., and the purpose of this remark is to show that the expectation of their norm,* $E_0[|X_{\tau_1^\ell}||\widetilde{D}^\ell = \infty]$ *is finite. From Corollary 3 in* [**41**]*, it is enough to prove that* $(\frac{X_{\tau_k^\ell}}{k})_{k\geqslant 1}$ *is bounded* P_0-*almost surely*[1]*. For any* $k \geqslant 1$*, we introduce*

$$J(k) = \sup\{j \geqslant 1, \tau_j \leqslant \tau_k^\ell\} \qquad (\sup\emptyset = 0).$$

As P_0*-almost surely* $(\tau_k^\ell)_{k\geqslant 1}$ *is increasing, we have*

$$\lim_{k\to\infty} J(k) = \infty \qquad P_0 - a.s. \tag{2.20}$$

Notice that a cone renewal time is also a slab renewal time and as a consequence

$$J(k) \leqslant k \qquad P_0 - a.s. \tag{2.21}$$

P_0*-a.s. for large* k *so that* $J(k) \geqslant 1$*:*

$$\frac{X_{\tau_k^\ell}}{k} = \frac{X_{\tau_k^\ell} - X_{\tau_{J(k)}}}{k} + \frac{X_{\tau_{J(k)}}}{k}.$$

The norm of the first term is bounded by $\frac{c(\alpha)|X_{\tau_{J(k)+1}}\cdot\ell - X_{\tau_{J(k)}}\cdot\ell|}{J(k)}$*. From the same argument as in (2.17),* $\frac{c(\alpha)|X_{\tau_{j+1}}\cdot\ell - X_{\tau_j}\cdot\ell|}{j}$ *converges* P_0*-almost surely to* 0*, and using (2.20), we obtain the* P_0*-almost surely convergence of the first term to* 0*. Rewriting the second term*

$$\frac{X_{\tau_{J(k)}}}{k} = \frac{X_{\tau_{J(k)}}}{J(k)}\frac{J(k)}{k},$$

from (2.21),(2.20) and (2.15) we obtain that the second term is almost surely bounded as k *goes to infinity.*

[1]The result in [**41**] is for $d = 1$. Considering all the coordinates separately, the claim in arbitrary dimension follows.

Proof of Proposition 2.2. Suppose that the proposition is false and call ν and ν' two vectors of S^{d-1} different and non opposite such that $P_0(B_\nu)P_0(B_{\nu'}) > 0$, then we will show that

$$\exists \nu_0 \text{ such that } P_0(B_{\nu_0}|B_\nu \cup B_{\nu'}) = 1, \tag{2.22}$$

what establishes, of course, a contradiction.

First, notice that for $\nu \in S^{d-1}$ with $P_0(B_\nu) > 0$ we have,

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^d \text{ such that } \ell \cdot \nu > 0, \quad P_0(A_\ell|B_\nu) = 1. \tag{2.23}$$

Indeed, from the $0-1$ law $P_0(A_\ell \cup A_{-\ell}) = 1$ (just notice that the walk does not oscillate along direction ℓ on B_ν, event of positive probability), but since $B_\nu \subset \{\exists N \ s.t. \ \forall n \geqslant N, \ X_n \cdot \ell > 0\}$, we have $B_\nu \subset A_\ell$, P_0-almost surely, which implies (2.23).

The set $\mathcal{V} = \{\ell \in \mathbb{R}^d, \ \ell \cdot \nu > 0\} \cap \{\ell \in \mathbb{R}^d, \ \ell \cdot \nu' > 0\}$ is non empty and open and from (2.23) it has the property,

$$\forall \ell \in \mathcal{V}, \qquad P_0(A_\ell|B_\nu \cup B_{\nu'}) = 1. \qquad \textit{(H')}$$

From now on, we fix ℓ_0 in $\mathcal{V}$. The property *(H')* is similar to assumption (H) and the proof of (2.22) will be adapted from that of Theorem 2.1. In fact, we will use the cone renewal structure on A_{ℓ_0} and show

$$\exists \nu_0 \ s.t. \ P_0(B_{\nu_0}|A_{\ell_0}) = 1, \tag{2.24}$$

which is stronger that (2.22). Before the proof, notice that if $P_0(B_\nu \cup B_{\nu'}) = 1$, we can easily conclude using Theorem 2.1, but the proof is not that obvious if $P_0(B_\nu \cup B_{\nu'}) < 1$.

In order to construct a renewal structure with cones on the event A_{ℓ_0} of positive probability, we have to show that there exists $\alpha > 0$ such that $P_0(D_\alpha^{\ell_0} = \infty) > 0$. We will use a proof very close to the one of Lemma 2.1 except that we will work on the event $\{B_\nu \cup B_{\nu'}\}$ and show the stronger result $P_0(D_\alpha^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) > 0$. Our first step will be to prove that

$$P_0(D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) > 0. \tag{2.25}$$

We argue by contradiction and assume the left hand side of (2.25) is zero. By translation-invariance, it holds $P_x(D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) = 0$ for any x in $\mathbb{Z}^d$, which means

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \ \mathbb{P} - a.s., \quad P_{x,\omega}(D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) = 0,$$

and also

$$\mathbb{P} - a.s., \ \forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad P_{x,\omega}(D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) = 0.$$

We denote by $(D^{\ell_0})^n$ the n-th backtrack time of the walk, defined by the following recursive relation

$$\begin{aligned} (D^{\ell_0})^1 &= D^{\ell_0}, \\ (D^{\ell_0})^n &= D^{\ell_0} \circ \theta_{(D^{\ell_0})^{n-1}} 1_{\{(D^{\ell_0})^{n-1} < \infty\}} + \infty 1_{\{D^{\ell_0})^{n-1} = \infty\}}, \quad \forall n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Notice that for any $n \geqslant 1$,

$$\{(D^{\ell_0})^n < \infty, (D^{\ell_0})^{n+1} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}\} =$$

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \bigcup_{m \geqslant 1} \{(D^{\ell_0})^n < \infty, (D^{\ell_0})^n = m, X_m = x\} \bigcap \{D^{\ell_0} \circ \theta_m = \infty, \lim_{k\to\infty} \frac{X_k - x}{|X_k - x|} \in \{\nu, \nu'\}\}.$$

We can then use the Markov property to show that $\mathbb{P} - a.s.$, for any $n \geqslant 1$,

$$P_{0,\omega}((D^{\ell_0})^n < \infty, (D^{\ell_0})^{n+1} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) =$$
$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} P_{0,\omega}((D^{\ell_0})^n < \infty, X_{(D^{\ell_0})^n} = x) P_{x,\omega}(D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}).$$

We finally obtain $P_0((D^{\ell_0})^n < \infty, \forall n \geqslant 1 | B_\nu \cup B_{\nu'}) = 1$. This establishes a contradiction with *(H')* and concludes the proof of (2.25). It is possible to choose $\alpha > 0$ such that for every $i \in [\![2, d]\!]$:

$$\ell'_i(\alpha) \in \mathcal{V} \text{ and } \ell'_{-i}(\alpha) \in \mathcal{V},$$

in the notations of (2.3) with $\ell = \ell_0$. From (2.23) and Proposition 1.2 in [**70**], it is clear that almost surely on $\{B_\nu \cup B_{\nu'}\} \cap \{D^{\ell_0} = \infty\}$,

$$\tau^{\ell'_2(\alpha)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell'_d(\alpha)} \vee \tau^{\ell'_{-2}(\alpha)} \vee \cdots \vee \tau^{\ell'_{-d}(\alpha)} < \infty.$$

We can then follow the end of the proof of Lemma 2.1 and we obtain:

$$\bigcup_{\alpha>0} \{D^{\ell_0}_\alpha = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}\} \overset{P_0-a.s.}{=} \{D^{\ell_0} = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}\},$$

and hence we can fix $\alpha > 0$ such that,

$$P_0(D^{\ell_0}_\alpha = \infty, B_\nu \cup B_{\nu'}) > 0.$$

We will now show that on A_{ℓ_0} (this is much easier than on $B_\nu \cup B_{\nu'}$), the walk admits almost surely a unique asymptotic direction. We use the same renewal structure with cones as in the proof of Theorem 2.1. Following the proof of Proposition 1.2 in [**70**], we obtain

Proposition 2.5. *Under assumption (H'),*

$$P_0 - a.s., \qquad A_{\ell_0} = \{K < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\}.$$

We also adopt the notation Q_0 to denote the probability measure $P_0(\cdot|A_{\ell_0})$. The proof of Corollary 1.5 in [**70**] leads to,

Proposition 2.6. *Under assumption (H'),* $((X_{\tau_1\wedge\cdot}), \tau_1), \left(\left(X_{(\tau_1+\cdot)\wedge\tau_2} - X_{\tau_1}\right), \tau_2 - \tau_1\right), \ldots, \left(\left(X_{(\tau_k+\cdot)\wedge\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}\right), \tau_{k+1} - \tau_k\right)$ *are independent variables under* Q_0 *and for* $k \geqslant 1$, $\left(\left(X_{(\tau_k+\cdot)\wedge\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}\right), \tau_{k+1} - \tau_k\right)$ *are distributed like* $((X_{\tau_1\wedge\cdot}), \tau_1)$ *under* $P_0\left(\cdot|D^{\ell_0}_\alpha = \infty\right)$.

Using again Lemma 3.2.5 p. 265 in [**76**], we also have

Lemma 2.3. *Under assumption (H'),*

$$E_{Q_0}[X_{\tau_1} \cdot \ell | D^\ell_\alpha = \infty] = \frac{1}{P_0\left(D^\ell_\alpha = \infty\right)}.$$

We have now all the tools to follow the proof of Theorem 2.1 except that Q_0 replaces P_0. We obtain the existence of ν_0 satisfying (2.22). $\square$

CHAPITRE 3

Un modèle en temps continu

Dans ce chapitre nous décrivons un modèle de marches aléatoires en milieu aléatoire i.i.d. en temps continu. On compare notamment la vitesse du squelette à la vitesse de la marche en temps continu. On s'intéresse en particulier à la vitesse maximale ou minimale que l'on peut obtenir pour la marche continue ainsi qu'à la possibilité d'atteindre une vitesse nulle. Les résultats obtenus sont explicites pour la dimension 1 mais s'expriment en fonction de la structure de renouvellement en dimensions supérieures.

Sommaire

1.	**Modèle et questions**	**53**
1.1.	Modèle	54
1.2.	Problématique	56
2.	**Résultats pour $d = 1$**	**57**
2.1.	Transience et récurrence	58
2.2.	Loi des grands nombres	58
2.3.	Étude de la vitesse	62
3.	**Le cas multidimensionnel**	**64**

Ce chapitre est entièrement rédigé en français. Il est constitué de résultats originaux mais qui n'ont pas fait l'objet d'une publication.

1. Modèle et questions

Dans ce chapitre nous allons étudier un modèle de Marches Aléatoires en Milieux Aléatoires en temps continu, nous nous limiterons au cas d'environnements i.i.d. De plus, on ne considérera que des chaînes de Markov pouvant être décrites par un squelette et des taux de saut en chaque site. Un environnement ω devra donc nous permettre de construire une chaîne en temps discret ainsi que la déformation aléatoire du temps que l'on va lui appliquer. Plus précisément, un environnement ω sera une famille de couples

$$(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} := (\boldsymbol{\omega}_x, \lambda_x)_{x\in\mathbb{Z}^d},$$

où $\boldsymbol{\omega}_x$ désigne la transition en x du squelette et $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$ le temps moyen de saut (c'est-à-dire l'inverse du taux de saut) au site x. Dans ce chapitre, on ne trouvera pas de nouveaux éléments d'étude du squelette puisque ce travail est similaire à l'étude des MAMA en temps discret. En revanche, on s'attachera à comprendre la partie intéressante de ce modèle, c'est-à-dire la déformation du temps. On étudiera essentiellement l'influence de cette déformation sur la vitesse du squelette (dans le cas où cette vitesse existe) et la possibilité de ralentir une marche balistique jusqu'à une vitesse nulle. Ces questions se ramèneront à des problèmes de couplage. On se demandera en effet comment associer de façon optimale les temps de saut (on ne précisera plus *moyens*) et les vecteurs de transitions pour obtenir une vitesse maximum ou minimum, et même nulle. Ce chapitre se divise en trois sections. Dans cette première partie, nous donnons une description précise du modèle et un énoncé correct des questions que l'on essaiera de résoudre, la seconde partie est consacrée à l'étude de la dimension 1 et la troisième au cas des dimensions $d \geqslant 2$.

1.1. Modèle. On note $\Omega := (S_{2d-1} \times \mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{Z}^d}$ l'espace des environnements. On munit Ω de la tribu produit borélienne et on considère une loi $\mathbb{P}$ sur cet espace. Les marginales de $\mathbb{P}$ seront notées $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. Dans tout ce chapitre, on ne s'intéressera qu'aux environnements i.i.d. c'est-à-dire satisfaisants l'hypothèse $(H3.1)$,

Hypothèse 3.1 $(H3.1)$. *Les marginales de $\mathbb{P}$ sont des mesures produits homogènes.*

On supposera également que la première composante de l'environnement satisfait l'hypothèse d'ellipticité $(H3.2)$ que l'on a déjà rencontrée,

Hypothèse 3.2 $(H3.2)$. $\mathbb{P}_1(\boldsymbol{\omega}_0(e) = 0) = 0, \qquad \forall e \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1,$

ce qui nous permettra d'utiliser les résultats connus en temps discret. On utilisera également parfois l'hypothèse $(H3.3)$ d'uniforme d'ellipticité :

Hypothèse 3.3 $(H3.3)$. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_0(e) < \epsilon) = 0$ pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$ satisfaisant $|e| = 1$.*

Soit $\omega = (\boldsymbol{\omega}, \lambda) \in \Omega$ un environnement. On définit pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, la chaîne de Markov en temps discret $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de loi $\widetilde{P}_{x,\boldsymbol{\omega}}$ par :

$$X_0 = x, \qquad \widetilde{P}_{x,\boldsymbol{\omega}} - p.s.,$$

et par les transitions

$$\widetilde{P}_{x,\boldsymbol{\omega}}(X_{n+1} = X_n + e | X_0, \cdots, X_n) = \boldsymbol{\omega}_{X_n}(e),\ e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1,\ n \geqslant 0.$$

Le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sera appelé *squelette*. On se donne par ailleurs une famille $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables exponentielles i.i.d. de moyenne 1, on note Q la loi de cette famille. Le processus horloge (clock process en anglais) $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est défini pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{X_i} \epsilon_i,$$

ainsi que son inverse généralisé $(S^{-1}(t))_{t \geqslant 0}$, avec $S^{-1}(t)$ unique entier n tel que

$$S_n \leqslant t < S_{n+1}.$$

On définit maintenant le processus en temps continu

$$Y_t = X_{S^{-1}(t)}, \qquad t \geqslant 0,$$

la théorie classique des chaînes de Markov nous assure que ce processus est markovien sous $\widetilde{P}_{x,\boldsymbol{\omega}} \otimes Q$, et on notera $P_{x,\omega}$ sa loi. On a également les propriétés suivantes pour le processus $(Y_t)_{t \geqslant 0}$,

- Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathbb{Z}^d$ un vecteur unitaire, le taux de saut $c_{x,x+e}$ de x à $x+e$ est $\boldsymbol{\omega}_x(e)\frac{1}{\lambda_x}$.
- Le générateur L^ω est défini pour toute fonction f borélienne bornée par

$$L^\omega f(y) = \sum_{|e|=1} \frac{1}{\lambda_x} \boldsymbol{\omega}_y(e)(f(y+e) - f(y)), \quad y \in \mathbb{Z}^d,\ e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$$

Notons que l'on peut également reconstruire $(X_n)_{n \geqslant 0}$ (et $(\epsilon_i)_{i \geqslant 0}$) comme fonction de $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ ce qui nous autorisera à parler de propriétés $P_{0,\omega} - p.s.$ pour $(X_n)_{n \geqslant 0}$ également.
Définissons maintenant pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ la loi annealed P_x en intégrant sur les environnements selon $\mathbb{P}$,

$$P_x := \mathbb{P} \times P_{x,\omega}.$$

Nous aurons aussi besoin dans certaines démonstrations de la loi annealed en temps discret $\widetilde{P}_x := \mathbb{P}_1 \times \widetilde{P}_{x,\boldsymbol{\omega}}$. De manière générale, nous essaierons de réserver le ˜ aux notations relatives au processus en temps discret. Pour terminer cette partie, nous allons montrer une propriété élémentaire (mais très importante) du clock process.

Proposition 3.1. *Sous* $(H3.1)$ *et* $(H3.2)$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty, \quad P_0 - p.s.$

Preuve de la proposition 3.1. Avant de donner une courte preuve de ce résultat, nous introduisons les notations suivantes. On définit le temps de sortie $\widetilde{T}_i$ de la boite de taille i,

$$\widetilde{T}_i := \inf\{n \geqslant 0,\ |X_n|_\infty = i\},$$

ainsi que le maximum m_n de la trajectoire au temps n,

$$m_n := \max\{|X_i|_\infty,\ i \leqslant n\}.$$

Il est clair, par la condition d'ellipticité $(H3.2)$ que, P_0-p.s., $\widetilde{T}_n < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty$. Pour montrer la proposition 3.1, nous allons utiliser la remarque suivante :

Remarque 3.1. *Sous* P_0, *les variables* $(\lambda_{X_{\widetilde{T}_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ *sont i.i.d. de même loi que* λ_0 *sous* $\mathbb{P}$.

En effet, fixons un entier $n > 0$ et considérons une famille d'évènements $A_0, \cdots, A_n$. On a,

$$\begin{aligned}
&P_0(\lambda_{X_{\widetilde{T}_0}} \in A_0, \cdots, \lambda_{X_{\widetilde{T}_n}} \in A_n) \\
&\qquad = \sum_{|x|_\infty = n} \mathbb{E}(P_{0,\omega}(\lambda_{X_{\widetilde{T}_0}} \in A_0, \cdots, \lambda_{X_{\widetilde{T}_{n-1}}} \in A_{n-1}, \lambda_x \in A_n, X_{\widetilde{T}_n} = x)) \\
&\qquad = \sum_{|x|_\infty = n} \mathbb{E}(\lambda_x \in A_n, P_{0,\omega}(\lambda_{X_{\widetilde{T}_0}} \in A_0, \cdots, \lambda_{X_{\widetilde{T}_{n-1}}} \in A_{n-1}, X_{\widetilde{T}_n} = x)) \\
&\qquad = \sum_{|x|_\infty = n} \mathbb{P}(\lambda_x \in A_n)\mathbb{E}(P_{0,\omega}(\lambda_{X_{\widetilde{T}_0}} \in A_0, \cdots, \lambda_{X_{\widetilde{T}_{n-1}}} \in A_{n-1}, X_{\widetilde{T}_n} = x)) \\
&\qquad = \mathbb{P}(\lambda_0 \in A_n) P_0(\lambda_{X_{\widetilde{T}_0}} \in A_0, \cdots, \lambda_{X_{\widetilde{T}_{n-1}}} \in A_{n-1}).
\end{aligned}$$

Dans le passage de la deuxième à la troisième ligne, on utilise uniquement le caractère i.i.d. de l'environnement et on termine la preuve de la Remarque 3.1 en itérant sur les évènements restants. On peut maintenant finir la preuve de la Proposition 3.1. On a $P_0 - p.s.$,

$$S_n \geqslant \sum_{i=0}^{m_n} \lambda_{X_{\widetilde{T}_i}},$$

et sous l'hypothèse d'ellipticité $(H3.2)$, $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ $P_0 - p.s.$, ce qui permet de conclure en utilisant la loi des grands nombres. □

Dans la section suivante, nous allons énoncer quelques questions que l'on peut poser sur ce modèle.

1.2. Problématique. Remarquons tout de suite que la Proposition 3.1 permet de ramener les problèmes de récurrence et de transience (incluant également la transience directionnelle) à l'étude du squelette ; le fait de considérer les marches en temps continu n'apporte donc rien de nouveau sur ces questions. On se contentera donc de rappeler les résultats existants lorsqu'ils seront nécessaires.
La question de la vitesse est en revanche bien plus intéressante. Nous allons tenter d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : « Comment la vitesse d'une marche discrète est-elle modifiée par un passage en temps continu ? ». Donnons une description plus précise de cette question.

Question 1. On dira que la marche admet pour vitesse $v \in \mathbb{R}^d$ si

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{Y_t}{t} = v, \quad P_0 - p.s.$$

Fixons une probabilité $\mathbb{P}_1$ sur $S_{2d-1}^{\mathbb{Z}^d}$ ainsi qu'une probabilité $\mathbb{P}_2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{Z}^d}$.

Définition. *On note $\Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$ l'ensemble des probabilités sur Ω dont la première marginale est $\mathbb{P}_1$ et la seconde est $\mathbb{P}_2$.*

La vitesse v de la marche en temps continu, si elle existe, est une fonction du couplage $\mathbb{P}$ des deux marginales. On peut donc *chercher le, ou les, couplages qui maximisent ou qui minimisent cette vitesse* et comparer la vitesse du processus en temps continu à celle du processus en temps discret. On cherchera donc à associer

de façon optimale les temps de saut et les transitions pour retarder ou accélérer la marche lors du passage en temps continu. De façon plus précise, on cherche à résoudre les problèmes d'optimisation suivant :

$$\sup_{\mathbb{P}\in\Pi(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2)} v \quad \text{et} \quad \inf_{\mathbb{P}\in\Pi(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2)} v.$$

On cherchera également à caractériser les couplages, s'ils existent, qui permettent d'atteindre ces bornes.

Question 2. Pour le modèle en temps discret, la classe des marches ayant un comportement balistique a fait l'objet de nombreux travaux. On s'intéresse ici aussi à cette classe à travers la question suivante : est-il possible d'avoir une marche balistique en temps discret ($(X_n)_{n\geqslant 0}$ sous $\widetilde{P}_0$) et à vitesse nulle lors du passage en temps continu ($(Y_t)_{t\geqslant 0}$ sous P_0) ? On parlera alors de *marche arrêtée*. D'après la Remarque 3.1, la réponse à cette question est évidemment simple et positive si la marginale $\mathbb{P}_2$ a une espérance infinie. On supposera donc dans la suite que $\mathbb{P}_2$ satisfait l'hypothèse $(H3.4)$:

Hypothèse 3.4 $(H3.4)$. *La loi $\mathbb{P}_2$ est d'espérance finie.*

La définition suivante nous permet d'énoncer correctement la Question 2.

Définition 3.1. *On dira qu'une MAMA en temps discret, guidée par un environnement $\mathbb{P}_1$ assurant un comportement balistique, peut être arrêtée s'il existe une loi $\mathbb{P}_2$ satisfaisant $(H3.4)$ et un couplage $\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$ tel que la MAMA en temps continu avec environnement $\mathbb{P}$ soit de vitesse nulle.*

On essaiera de caractériser les marches pouvant être arrêtées.

2. Résultats pour $d = 1$

Dans cette section, on s'intéresse au cas de la dimension 1. Comme pour le modèle en temps discret, l'étude de la dimension 1 est spécifique car, contrairement aux dimensions supérieures, de nombreux calculs peuvent être menés jusqu'à des résultats explicites. Certains des résultats présentés ici sont très proches de ceux déjà obtenus en temps discret. On donnera cependant les démonstrations dès que des modifications, même mineures, sont nécessaires. On essaiera également de conserver, autant que possible, les notations et la structure des notes de Saint-Flour de Ofer Zeitouni ([**76**]). Définissons les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_i &= (1-\boldsymbol{\omega}_i)/\boldsymbol{\omega}_i, \quad i \in \mathbb{Z},\\
T_i &= \min\{t \geqslant 0, Y_t = i\}, \quad i \in \mathbb{Z},\\
\Delta_i &= T_i - T_{i-1}, \quad i \geqslant 1
\end{aligned}$$

Comme dans le cas discret, on fera l'hypothèse suivante sur le milieu :

Hypothèse 3.5 $(H3.5)$. $\mathbb{E}(\ln(\rho_0))$ *est bien définie dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1. Transience et récurrence. La première proposition concerne le problème de la transience et de la récurrence. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la Proposition 3.1 nous permet de ramener cette question au modèle en temps discret. On se contentera donc de rappeler le résultat de Solomon ([**64**]) et de le réécrire avec nos notations.

PROPOSITION 3.2 (Récurence/Transience). *Sous P_0, le processus $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ a le même comportement en terme de récurrence/transience que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sous $\widetilde{P}_0$. On a donc :*

$$\begin{aligned}
(i)\ (E_{\mathbb{P}_1}(\ln \rho_0) < 0) &\Leftrightarrow (\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty, \quad \widetilde{P}_0 - p.s.)\\
&\Leftrightarrow (\lim_{t\to+\infty} Y_t = +\infty, \quad P_0 - p.s.);\\
(ii)\ (E_{\mathbb{P}_1}(\ln \rho_0) > 0) &\Leftrightarrow (\lim_{n\to+\infty} X_n = -\infty, \quad \widetilde{P}_0 - p.s.)\\
&\Leftrightarrow (\lim_{t\to+\infty} Y_t = -\infty, \quad P_0 - p.s.);\\
(iii)\ (E_{\mathbb{P}_1}(\ln \rho_0) = 0) &\Leftrightarrow (-\infty = \liminf_{n\to+\infty} X_n < \limsup_{n\to+\infty} X_n = +\infty, \quad \widetilde{P}_0 - p.s.)\\
&\Leftrightarrow (-\infty = \liminf_{t\to+\infty} Y_t < \limsup_{t\to+\infty} Y_t = +\infty, \quad P_0 - p.s.).
\end{aligned}$$

2.2. Loi des grands nombres. Dans cette section, nous énonçons une loi des grands nombres et on donne une expression explicite de la vitesse. Cette question a été totalement résolue par Solomon ([**64**]) en temps discret, on reprend les grandes étapes de la démonstration. La première consiste à établir l'ergodicité de la famille $(\Delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 3.3 (Ergodicité de $(\Delta_i)_{i \geqslant 1}$). *Si $\lim_{t\to+\infty} Y_t = +\infty$, $P_0 - p.s.$ alors $(\Delta_i)_{i \geqslant 1}$ est stationnaire et fortement mélangeant. En particulier $(\Delta_i)_{i \geqslant 1}$ est ergodique.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3. La stationnarité est une conséquence de la propriété de Markov et de la stationnarité de l'environnement. Nous allons maintenant montrer le caractère fortement mélangeant. Soient $A_1, \ldots, A_i$ et $B_1, \ldots, B_j$ des boreliens de $\mathbb{R}$. On considère les évènements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}^m$ $(m \geqslant 0)$ définis par

$$\mathcal{A} = \bigcap_{p=1}^{i} \{\Delta_p \in A_p\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^m = \bigcap_{p=1}^{j} \{\Delta_{m+p} \in B_p\}.$$

On doit montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} P_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^m) = P_0(\mathcal{A}) P_0(\mathcal{B}^0). \tag{3.1}$$

Introduisons pour tout $L > 0$ l'évènement

$$\mathcal{B}_L^m = \bigcap_{p=1}^{j} \{\Delta_{m+p} \in B_p\} \cap \{\forall t \in [T_{m+p-1}, T_{m+p}],\ |m + p - 1 - Y_t| < L\}.$$

Fixons $\epsilon > 0$. La stationnarité de l'environnement entraîne $P_0(\mathcal{B}^m \backslash \mathcal{B}_L^m) = P_0(\mathcal{B}^0 \backslash \mathcal{B}_L^0)$ et l'hypothèse, $\lim_{t\to+\infty} Y_t = +\infty,\ P_0 - p.s.$, assure $\lim_{L\to+\infty} P_0(\mathcal{B}^0 \setminus \mathcal{B}_L^0) = 0$. On peut donc choisir L assez grand pour que pour tout $m \geqslant 0$,

$$P_0(\mathcal{B}^m \setminus \mathcal{B}_L^m) \leqslant \epsilon. \tag{3.2}$$

La variable $P_{0,\omega}(\mathcal{A})$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\omega_x, x \leqslant i-1)$ tandis que pour $m > L + i$, la variable $P_{0,\omega}(\mathcal{B}_L^m)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\omega_x, x \geqslant i)$. Le caractère i.i.d. de l'environnement justifie donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} P_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_L^m) &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(P_{0,\omega}(\mathcal{A}) P_{0,\omega}(\mathcal{B}_L^m)) \\ &= \mathbb{P}(P_{0,\omega}(\mathcal{A}))\mathbb{P}(P_{0,\omega}(\mathcal{B}_L^m)) \\ &= P_0(\mathcal{A}) P_0(\mathcal{B}_L^0).\end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient,

$$|\lim_{m\to\infty} P_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^m) - P_0(\mathcal{A}) P_0(\mathcal{B}^0)| < 2\epsilon.$$

et on a prouvé (3.1).

□

En utilisant le théorème ergodique, on va pouvoir déduire de la proposition précédente une loi des grands nombres. Pour obtenir une expression explicite de la vitesse, on doit cependant calculer $E_0(\Delta_1)$. On se limite au cas d'une marche transiente vers la droite, ce qui est suffisant pour répondre aux questions formulées dans la Section 1.2.

Proposition 3.4. *On suppose la marche transiente vers la droite, on a alors,*

(1) $\mathbb{E}(\rho_0) < 1 \Rightarrow E(\Delta_1) = \frac{\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})}{1-\mathbb{E}(\rho_0)} \in (0, +\infty]$,

(2) $\mathbb{E}(\rho_0) \geqslant 1 \Rightarrow E(\Delta_1) = +\infty$.

Demonstration de la Proposition 3.4. On décompose le temps Δ_1 selon la valeur du premier saut de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$:

$$\Delta_1 = S_1 1_{X_1=1} + 1_{X_1=-1}(S_1 + (R_0 - S_1) + \Delta_1'), \tag{3.3}$$

où R_0 désigne le temps de retour en 0, $R_0 := \inf\{t \geqslant S_1,\ Y_t = 0\}$ et $\Delta_1' := T_1 - R_0$ est le temps d'atteinte de 1 après R_0. On prend maintenant l'espérance quenched dans (3.3) et, en utilisant la propriété de Markov forte aux temps S_1 et R_0 (qui sont finis $P_{0,\omega} - p.s.$), on obtient,

$$E_{0,\omega}(\Delta_1) = \lambda_0 \boldsymbol{\omega}_0 + (1 - \boldsymbol{\omega}_0)(\lambda_0 + E_{0,\theta^{-1}\omega}(\Delta_1) + E_{0,\omega}(\Delta_1)).$$

Si $E_{0,\omega}(\Delta_1) < \infty$ on peut réécrire l'équation précédente,

$$E_{0,\omega}(\Delta_1) = \frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0} + \rho_0 E_{0,\theta^{-1}\omega}(\Delta_1), \tag{3.4}$$

et on étend cette égalité au cas $E_{0,\omega}(\Delta_1) = +\infty$ en remarquant que $E_{0,\omega}(\Delta_1) = +\infty$ implique $E_{0,\theta^{-1}\omega}(\Delta_1) = +\infty$. Par récurrence, on obtient pour tout entier m positif,

$$E_{0,\omega}(\Delta_1) = \frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0} + \rho_0 \frac{\lambda_{-1}}{\boldsymbol{\omega}_{-1}} + \cdots + \rho_0 \cdots \rho_{-m+1} \frac{\lambda_{-m}}{\boldsymbol{\omega}_{-m}} + \rho_0 \cdots \rho_{-m} E_{0,\theta^{-m-1}\omega}(\Delta_1).$$

Prenons maintenant l'espérance sur le milieu dans l'égalité précédente et utilisons l'indépendance de l'environnement, on conclut alors dans le cas 2. Pour le cas 1, on obtient uniquement l'inégalité suivante :

$$E_0(\Delta_1) \geqslant \frac{\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})}{1-\mathbb{E}(\rho_0)}.$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, on fixe un réel M positif et on multiplie les deux membres de (3.3) par $1_{\{\Delta_1<M\}}$. On note maintenant que $\{\Delta_1 < M\} \subset \{R_0 < M\}$ et $\{\Delta_1 < M\} \subset \{\Delta_1' < M\}$ et en prenant de nouveau l'espérance quenched,

$$E_{0,\omega}(\Delta_1 1_{\{\Delta_1<M\}}) \leqslant \lambda_0 + (1-\boldsymbol{\omega}_0)(\lambda_0 + E_{0,\theta^{-1}\omega}(\Delta_1 1_{\{\Delta_1<M\}}) + E_{0,\omega}(\Delta_1 1_{\{\Delta_1<M\}})).$$

Par récurrence on obtient une inégalité semblable à (3.4). On peut de nouveau prendre l'espérance annealed pour obtenir pour tout entier m positif,

$$E_0(\Delta_1 1_{\{\Delta_1<M\}}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})}{1-\mathbb{E}(\rho_0)} + M\mathbb{E}(\rho_0)^{m+1}$$

On obtient donc $E_0(\Delta_1 1_{\{\Delta_1<M\}}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})}{1-\mathbb{E}(\rho_0)}$ puis par le théorème de convergence monotone $E_0(\Delta_1) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})}{1-\mathbb{E}(\rho_0)}$, ce qui achève la preuve. □

On peut maintenant énoncer la loi des grands nombres pour les MAMA en temps continu.

THÉORÈME 3.1. *Si $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ est transiente vers la droite (cas (i) de la Proposition 3.2), alors,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{Y_t}{t} = \begin{cases} 0 & si\ \mathbb{E}(\rho_0) \geqslant 1 \\ \frac{1-\mathbb{E}(\rho_0)}{\mathbb{E}(\lambda_0/\boldsymbol{\omega}_0)} & si\ \mathbb{E}(\rho_0) < 1 \end{cases} \qquad P_0 - p.s.$$

En notant $\widetilde{v}$ la vitesse du squelette, on a également,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{Y_t}{t} = \widetilde{v} \times \frac{\mathbb{E}(1/\boldsymbol{\omega}_0)}{\mathbb{E}(\lambda_0/\boldsymbol{\omega}_0)}, \qquad P_0 - p.s.,$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 3.1. Pour tout temps $t \geqslant 0$, on définit l'entier k_t, maximum atteint par $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ au temps t, c'est-à-dire $k_t := \max\{Y_t,\ t \geqslant 0\}$. On a donc pour tout $t \geqslant 0$:

$$T_{k_t} \leqslant t < T_{k_t+1}. \tag{3.5}$$

On note également, pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n = \max\{n - Y_t,\ T_n \leqslant t < T_{n+1}\}.$$

On a donc pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{k_t - H_{k_t}}{t} \leqslant \frac{Y_t}{t} < \frac{k_t+1}{t}. \tag{3.6}$$

Par ailleurs le théorème ergodique et la Proposition (3.3) entraînent

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n} = E_0(\Delta_1), \quad P_0 - p.s.,$$

et on déduit aisément de (3.5) que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{k_t}{t} = \frac{1}{E_0(\Delta_1)}, \quad P_0 - p.s.$$

Pour contrôler $(H_n)_{n \geqslant 0}$, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Dans le cas (i) de la Proposition 3.2, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = 0, \quad P_0 - p.s.$$

Preuve du Lemme 3.1. Il est clair que pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n = \max\{n - X_i,\ \widetilde{T}_n \leqslant i < \widetilde{T}_{n+1}\}.$$

La MAMA en temps discret $(X_n)_{n \geqslant}$ est, par hypothèse, transiente vers la droite et on peut donc construire la structure de renouvellement introduite dans le Chapitre 1. On rappelle que les temps de renouvellement sont notés $(\tau_k)_{k \geqslant 1}$. Par ailleurs, le Lemme 1.1 p. 30 nous assure que,

$$\widetilde{E}_0(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) < \infty.$$

Les variables $(X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n})_{n \geqslant 1}$ sont donc i.i.d. d'espérance finie, et on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}}{n} = 0, \quad \widetilde{P}_0 - p.s. \tag{3.7}$$

Définissons maintenant pour tout $n \geqslant 0$, la variable α_n par,

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{\tau_1} \geqslant n \\ k & \text{si } X_{\tau_k} \leqslant n < X_{\tau_{k+1}} \end{cases}$$

On remarque en particulier que $\alpha_n \leqslant n, n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \widetilde{P}_0 - p.s.$ La définition des temps de renouvellement nous assure que, P_0-p.s., pour tout $n \geqslant X_{\tau_1}$,

$$H_n \leqslant X_{\tau_{\alpha_{n+1}}} - X_{\tau_{\alpha_n}}, \quad \widetilde{P}_0 - p.s.$$

et donc

$$\frac{H_n}{n} \leqslant \frac{X_{\tau_{\alpha_{n+1}}} - X_{\tau_{\alpha_n}}}{\alpha_n}, \quad \widetilde{P}_0 - p.s.$$

On conclut en utilisant (3.7) et le fait que τ_1 est fini $\widetilde{P}_0$-p.s. □

On déduit aisément de ce lemme que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H_{k_t}}{t} = 0, \qquad P_0 - p.s.,$$

ce qui nous permet, en utilisant (3.6), d'achever la preuve du Théorème 3.1. □

2.3. Étude de la vitesse. On va maintenant essayer de répondre aux différentes questions posées dans la Section 1.2 dans le cas précis de la dimension 1. D'après le Théorème 3.1, le cas $\mathbb{E}(\rho_0) \geqslant 1$ est sans intérêt puisque la vitesse de la marche est nulle quelque soit le couplage. Observons maintenant l'expression de la vitesse donnée par le même théorème dans le cas $\mathbb{E}(\rho_0) < 1$. On remarque qu'une partie de cette expression ne dépend que des marginales tandis que la partie $\mathbb{E}(\frac{\lambda_0}{\boldsymbol{\omega}_0})$ dépend réellement du couplage. Le problème de la maximisation ou de la minimisation de la vitesse est évidemment très proche d'un problème de transport optimal, rappelons brièvement de quoi il s'agit sous forme d'une remarque.

Remarque (Transport optimal). *Nous ne donnons ici que l'énoncé du problème originel de transport optimal. Il faut signaler que ce domaine a connu des développements récents considérables, le lecteur intéressé trouvera les bases de cette théorie, et bien plus, dans* [**74**].
Considérons deux espaces probabilisés $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. On rappelle que l'on note $\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des couplage de μ et ν, c'est-à-dire l'ensemble des probabilités π sur $X \times Y$ tel que,

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \qquad \pi(X \times B) = \nu(B),$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$. On considère maintenant une fonction c mesurable positive sur $X \times Y$ que l'on appelle fonction de coût. Le problème de transport optimal de Kantorovitch est le calcul de :

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{X,Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

On cherche également éventuellement les couplages permettant d'atteindre cet infimum que l'on appelle couplages optimaux.

Revenons maintenant au problème de la vitesse dans le modèle en temps continu. Evidemment le rôle de μ et ν est joué par $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. Pour le problème de minimisation, on peut considérer la fonction de coût c définie pour tout $(\lambda, \boldsymbol{\omega})$ par,

$$c(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\omega}}. \tag{3.8}$$

Pour la maximisation, on peut facilement vérifier que les minimiseurs coïncident avec les couplages optimaux du problème avec fonction de coût c',

$$c'(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = |\lambda - \frac{1}{\boldsymbol{\omega}}|^2$$

La fonction de coût c' est connue en théorie du transport sous le nom de fonction de coût quadratique.

Notre problème étant cependant relativement simple, nous n'allons pas utiliser les outils de la théorie du transport. Rappelons les problèmes que l'on souhaite résoudre, il s'agit de trouver les valeurs de :

$$\sup_{\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)} \mathbb{E}(c(\omega, \lambda)) \text{ et } \inf_{\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)} \mathbb{E}(c(\omega, \lambda)),$$

où c est défini par (3.8). On cherche également à savoir si ces extrema sont atteints et, si c'est le cas, à caractériser les, ou des, couplages permettant de les atteindre. Le lemme suivant nous fournit des bornes satisfaisantes (c'est-à-dire atteintes). Il est, semble-t-il, dû à Hoeffding et on le trouvera énoncé et démontré au début du chapitre 3 de [**52**].

LEMME 3.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires positives. On appelle F (resp. G) la fonction de répartition de X (resp. Y). On a alors :*

$$\int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(1-u)du \leqslant E(XY) \leqslant \int_0^1 F^{-1}(u)G^{-1}(u)du$$

Par ailleurs, ces bornes sont atteintes puisque si U désigne une variable uniforme sur $[0, 1]$, il est clair que les variables $(F^{-1}(U), G^{-1}(U))$ et $(F^{-1}(U), G^{-1}(1-U))$ ont des lois appartenant à $\Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$. Remarquons enfin que le couplage correspondant à l'inégalité de droite est connu sous le nom de couplage monotone, car il consiste à « associer les petites valeurs de la première marginale aux petites valeurs de la seconde et à procéder de même pour les grandes ». Le couplage qui permet de minimiser l'espérance adopte au contraire la stratégie inverse qui consiste à associer les petites valeurs de la première marginale aux grandes valeurs de la seconde, et on l'appellera donc couplage décroissant. Afin d'énoncer de façon simple le théorème sur les vitesses maximale et minimale, on introduit les notations suivantes : F_1 désignera la fonction de répartition de $\frac{1}{\omega}$ sous $\mathbb{P}_1$ et F_2 désignera celle de $\mathbb{P}_2$. Pour tout $\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$ on notera également

$$v_{\mathbb{P}} = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t}, \quad P_0 - p.s.$$

THÉORÈME 3.2. *Soit $\mathbb{P}_1$ tel que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ soit transiente vers la droite (cas (i) de la Proposition 3.2) et $\mathbb{P}_2$ satisfaisant $(H3.4)$.*

– *Si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\rho_0) \geqslant 1$, alors pour tout $\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$,*

$$v_{\mathbb{P}} = 0.$$

– *Si $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\rho_0) < 1$, alors pour tout $\mathbb{P} \in \Pi(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$,*

$$v_{min} := \frac{1 - E_{\mathbb{P}_1}(\rho_0)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u)F_2^{-1}(u)du} \leqslant v_{\mathbb{P}} \leqslant v_{max} := \frac{1 - E_{\mathbb{P}_1}(\rho_0)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u)F_2^{-1}(1-u)du}.$$

De plus v_{min} est atteint par le couplage monotone et v_{max} par le couplage décroissant.

PREUVE DU THÉORÈME 3.2. La preuve découle du Théorème 3.1 ainsi que du Lemme 3.2. □

On peut facilement interpréter le résultats du théorème précédent. Pour obtenir une vitesse minimale, il s'agit de ralentir au maximum la marche sur les sites qui représentent les plus grands obstacles, c'est-à-dire ceux où la marche discrète va passer le plus de temps. L'intuition serait donc d'associer les plus grands temps de saut aux sites qui se situent au fond des vallées du potentiel. Cette stratégie ne

peut évidemment pas s'appliquer lorsque l'environnement est i.i.d. et il faut ici se contenter d'obstacles « de taille 1 » c'est-à-dire associer les grands temps de saut aux sites dont la transition vers la droite est la plus faible.

On s'intéresse maintenant à l'autre question posée dans l'introduction de ce chapitre. Le théorème suivant caractérise la classe des MAMA en dimension 1 pouvant être arrêtées.

THÉORÈME 3.3. *Une marche balistique en temps discret avec environnement* $\mathbb{P}_1$ *peut être arrêtée si et seulement si* $\mathbb{P}_1$ *ne vérifie pas l'hypothèse d'uniforme ellipticité* $(H3.3)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3. On peut montrer ce résultat en s'appuyant sur le Théorème 3.2 mais on va plutôt utiliser le lemme suivant :

LEMME 3.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire positive, il y a équivalence entre*

(1) $\exists M < +\infty$ *tel que* $X \leqslant M$, *p.s.*

(2) *Pour toute variable aléatoire* Y *positive,* $E(Y) < +\infty \Rightarrow E(XY) < +\infty$.

PREUVE DU LEMME 3.3. Le sens direct est immédiat. Nous allons montrer la contraposée de la réciproque. On se donne X ne vérifiant pas la condition (1) et on définit par récurrence la suite $(\phi(n))_{n \geqslant 0}$ par $\phi(0) = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $\phi(n+1) = \inf\{k \geqslant \phi(n)+1, P(X \in [\phi(i), k]) > 0\}$. On remarque en particulier que si X ne vérifie pas (1) alors pour tout $n \geqslant 0$, $n \leqslant \phi(n) < +\infty$. On considère maintenant

$$Y = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{P(X \in [\phi(i), \phi(i+1)))} \frac{1}{n^2} 1_{\{X \in [\phi(i), \phi(i+1))\}},$$

et on vérifie que $E[Y] < +\infty$ et $E[XY] \geqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}\phi(n) = +\infty$. □

La preuve du Théorème 3.3 découle maintenant du Théorème 3.1 ainsi que du Lemme 3.3. □

3. Le cas multidimensionnel

Cette partie est consacrée aux dimensions $d \geqslant 2$. Malheureusement, comme pour le modèle en temps discret, nous allons obtenir moins de résultats que pour la dimension 1. Comme pour le cas unidimensionnel, les problèmes de transience, récurrence et transience directionnelle sont sans intérêt au regard de la Proposition 3.1. Rappelons également que nous ne disposons pas de critères pour caractériser la transience et la récurrence pour les dimensions supérieures à 2 dans le modèle en temps discret (et nous n'en aurons donc pas ici non plus).
Pour essayer de répondre aux mêmes questions que dans la partie unidimensionnelle, nous allons utiliser la structure de renouvellement que nous avons décrite au Chapitre 1. On va supposer que sous $\widetilde{P}_0$, $(X_n)_{n \geqslant 0}$ admet un comportement balistique et on note $\widetilde{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ sa vitesse. On fixe maintenant $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$ et $e \cdot v > 0$. On considère la structure de renouvellement classique dans la direction

e et on note $\widetilde{\tau}_k$ le k-ème temps renouvellement. On vérifie en utilisant le lemme de Zerner (Lemme 1.1 p. 30) que $\widetilde{E}_0(\widetilde{\tau}_1|D=\infty)<\infty$ et on a donc,

$$\widetilde{v}=\frac{\widetilde{E}_0(X_{\widetilde{\tau}_1}|D=\infty)}{\widetilde{E}_0(\widetilde{\tau}_1|D=\infty)}.$$

On introduit maintenant la structure de renouvellement pour la marche en temps continu toujours dans la direction e. Pour tout $k\geqslant 1$, on définit le k-ème temps renouvellement τ_k de la marche en temps continu par

$$\tau_k=S_{\widetilde{\tau}_k}.$$

Cette structure nous permet d'énoncer une loi des grands nombres pour $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ en utilisant le même raisonnement qu'en temps discret,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{Y_t}{t}=\frac{E_0(Y_{\tau_1}|D=\infty)}{E_0(\tau_1|D=\infty)}:=v_{\mathbb{P}}\qquad P_0-p.s. \tag{3.9}$$

Remarque. *Dans cette partie, on utilise la notation D aussi bien pour les trajectoires en temps discret que pour les trajectoires en temps continu.*

On notera que rien n'assure que le dénominateur de (3.9) est fini et la vitesse peut donc être nulle. On remarque également que l'on peut réécrire le numérateur en fonction du squelette uniquement,

$$E_0(Y_{\tau_1}|D=\infty)=\widetilde{E}_0(X_{\widetilde{\tau}_1}|D=\infty),$$

et cette quantité ne dépend donc que de la première marginale de l'environnement. Pour étudier les possibles variations de la vitesse, on va donc s'intéresser au dénominateur de (3.9). Plus précisément, on essaie, comme dans le cas unidimensionnel de se ramener à un problème de transport optimal que l'on sait résoudre. Pour rendre l'écriture du calcul plus lisible, on notera $\bar{X}$ la partie de la trajectoire de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ comprise entre 0 et le premier temps de renouvellement discret $\widetilde{\tau}_1$,

$$\bar{X}:=(X_i)_{0\leqslant i\leqslant\widetilde{\tau}_1}.$$

Le support de $\bar{X}$ sous $\widetilde{P}_0(\cdot|D=\infty)$ sera noté Γ. Intuitivement, les trajectoires de Γ sont donc les parties de trajectoires séparant deux temps de renouvellement. A tout site $x\in\mathbb{Z}^d$ et toute trajectoire $\gamma\in\Gamma$, on associe le vecteur $\alpha(x,\gamma)$ dans $\mathbb{N}^{2d}$ dont la i-ème composante représente le nombre de passage de la trajectoire γ le long de l'arrête $(x,x+e_i)$ (le vecteur est indexé de $-d$ à -1 puis de 1 à d et on fait la convention $e_{-i}:=-e_i$). Enfin pour tout vecteur α de $\mathbb{N}^{2d}$, on note $\bar{\alpha}=\sum_{i=1}^d(\alpha_i+\alpha_{-i})$, on remarquera en particulier que $\overline{\alpha(x,\gamma)}$ est le nombre de

passage de la trajectoire γ au site x. On a $\mathbb{P}-p.s.$,

$$\begin{aligned}
E_{0,\omega}(\tau_1, D=\infty) &= \int_{\{D=\infty\}} S_{\widetilde{\tau}_1}\ dP_{0,\omega} = \int_{\{D=\infty\}} \sum_{i=0}^{\widetilde{\tau}_1} \lambda_{X_i}\epsilon_i\ d\widetilde{P}_{0,\omega}\otimes dQ \\
&= \int_{\{D=\infty\}} \sum_{i=0}^{\widetilde{\tau}_1} \lambda_{X_i}\ d\widetilde{P}_{0,\omega} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{P}_{0,\omega}(\bar{X}=\gamma) \sum_{x\in\gamma} \overline{\alpha(x,\gamma)}\lambda_x.
\end{aligned}$$

On intègre maintenant par rapport à l'environnement,

$$\begin{aligned}
E_0(\tau_1, D=\infty) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{P}_{0,\omega}(\bar{X}=\gamma) \sum_{x\in\gamma} \overline{\alpha(x,\gamma)}\lambda_x\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in\gamma} \overline{\alpha(x,\gamma)}\mathbb{E}\left(\widetilde{P}_{0,\omega}(\bar{X}=\gamma)\lambda_x\right).
\end{aligned}$$

On adoptera, à partir de maintenant, pour $\boldsymbol{\omega}\in S_{2d-1}$ et $\alpha\in\mathbb{N}^{2d}$, la notation

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha = \prod_{i=1}^{d} \boldsymbol{\omega}(e_i)^{\alpha_i}\boldsymbol{\omega}(-e_i)^{\alpha_{-i}}.$$

Le caractère i.i.d. de l'environnement associé au caractère markovien de la loi quenched assurent que pour $\gamma\in\Gamma$ et $x\in\mathbb{Z}^d$:

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{P}_{0,\omega}(\bar{X}=\gamma)\lambda_x\right) = \frac{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_x^{\alpha(x,\gamma)}\lambda_x\right)}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_x^{\alpha(x,\gamma)}\right)}\widetilde{P}_0(\bar{X}=\gamma).$$

On obtient donc

$$E_0(\tau_1, D=\infty) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in\gamma} \overline{\alpha(x,\gamma)}\frac{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_x^{\alpha(x,\gamma)}\lambda_x\right)}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_x^{\alpha(x,\gamma)}\right)}\widetilde{P}_0(\bar{X}=\gamma).$$

Pour tout vecteur $\alpha\in\mathbb{N}^{2d}$ et toute trajectoire $\gamma\in\Gamma$, on notera

$$\phi(\alpha,\gamma) = \sum_{x\in\gamma} 1_{\{\alpha(x,\gamma)=\alpha\}},$$

le nombre de site « de type α » dans la trajectoire γ. Poursuivons le calcul,

$$\begin{aligned}
E_0(\tau_1, D=\infty) &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in\gamma}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2d}} \bar{\alpha}1_{\{\alpha(x,\gamma)=\alpha\}}\frac{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\lambda_0\right)}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\right)}\widetilde{P}_0(\bar{X}=\gamma) \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2d}} \bar{\alpha}\frac{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\lambda_0\right)}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\right)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\widetilde{P}_0(\bar{X}=\gamma)\phi(\alpha,\gamma)
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$E_0(\tau_1|D=\infty) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2d}} \bar{\alpha}\frac{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\lambda_0\right)}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\right)}\widetilde{E}_0(\phi(\alpha,\bar{X})|D=\infty).$$

On peut ici remarquer que le couplage indépendant $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2$ donne, sans surprise,

$$E_0(\tau_1|D=\infty) = \widetilde{E}_0(\widetilde{\tau}_1|D=\infty)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(\lambda_0),$$

et on en déduit la vitesse,

$$v_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2} = \frac{\widetilde{v}}{E_{\mathbb{P}_2}(\lambda_0)},$$

comme c'était déjà le cas pour la dimension 1. Pour poursuivre le calcul dans le cas d'un couplage quelconque, on peut faire apparaître un produit de fonctions de chacune des deux marginales comme dans le cas unidimensionnel.

$$E_0(\tau_1|D=\infty) = \mathbb{E}\left([\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2d}} \bar{\alpha}\widetilde{E}_0(\phi(\alpha,\bar{X})|D=\infty)\frac{\boldsymbol{\omega}_0^\alpha}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}_0^\alpha\right)}]\times\lambda_0\right) \tag{3.10}$$

On introduit donc la fonction $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ définie pour tout élément $\boldsymbol{\omega}$ du simplexe par :

$$\Phi(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{2d}} \bar{\alpha}\widetilde{E}_0(\phi(\alpha,\gamma)|D=\infty)\frac{\boldsymbol{\omega}^\alpha}{\mathbb{E}\left(\boldsymbol{\omega}^\alpha\right)}.$$

On notera que cette fonction dépend de la première marginale de l'environnement, contrairement au cas unidimensionnel où la fonction des transitions apparaissant dans le produit était indépendante de la loi $\mathbb{P}_1$. Ce n'est pas surprenant : pour une marche unidimensionnelle transiente vers la droite, les sites où la marche passe le plus sont ceux avec $\boldsymbol{\omega}$ petit mais pour une marche multidimensionnelle, il est nécessaire de connaître la loi $\mathbb{P}_1$ pour déterminer les sites les plus fréquentés. On peut maintenant donner la vitesse de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$.

Théorème 3.4. *Soit $\mathbb{P}_1$ tel que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit balistique sous $\widetilde{P}_0$ et $\mathbb{P}_2$ satisfaisant $(H3.4)$. On a alors pour tout $\mathbb{P}$ appartenant à $\Pi(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2)$*

$$v_{\mathbb{P}} = \widetilde{v}\times\frac{\mathbb{E}(\Phi(\boldsymbol{\omega}))}{\mathbb{E}(\Phi(\boldsymbol{\omega})\lambda_0)}$$

Après avoir remarqué que $\mathbb{E}(\Phi) = \widetilde{E}_0(\widetilde{\tau}_1|D=\infty)$, la preuve découle de (3.10) et de (3.9). On pourra comparer l'expression de la vitesse au cas unidimensionnel (voir Théorème 3.1). Le Lemme 3.2 fournit les bornes théoriques optimales pour les vitesses maximum et minimum en temps continu. On note F_1 la fonction de répartition de la probabilité image de $\mathbb{P}_1$ par Φ et F_2 la fonction de répartition de $\mathbb{P}_2$.

Théorème 3.5. *Soit $\mathbb{P}_1$ tel que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit balistique sous $\widetilde{P}_0$ et $\mathbb{P}_2$ satisfaisant $(H3.4)$. On a alors pour tout $\mathbb{P}$ appartenant à $\Pi(\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2)$*

$$v_{min} := \frac{\widetilde{E}_0(X_{\widetilde{\tau}_1}|D=\infty)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u)F_2^{-1}(u)du} \leqslant v_{\mathbb{P}} \leqslant v_{max} := \frac{\widetilde{E}_0(X_{\widetilde{\tau}_1}|D=\infty)}{\int_0^1 F_1^{-1}(u)F_2^{-1}(1-u)du}$$

Ces bornes ne sont pas calculables explicitement car elles dépendent de la structure de renouvellement et de la fonction Φ. Il faut également admettre que l'on a perdu la description des couplages permettant d'atteindre les bornes du Théorème 3.5 car la fonction Φ ne présente pas de monotonie évidente. Ces bornes sont cependant optimales.
Enfin, cette formulation du problème n'aura pas permis d'avancer sur la question des marches arrêtées car nous n'avons pas trouvé de caractérisation sur les lois $\mathbb{P}_1$ vérifiant « $\Phi(\omega)$ est borné $\mathbb{P}_1 - p.s.$ ».

CHAPITRE 4

Percolation et MAMA

Dans ce chapitre nous présentons quelques modèles de MAMA où le milieu (non i.i.d.) est construit à partir d'une percolation dans $\mathbb{Z}^d$. Après les rappels essentiels sur la percolation permettant surtout de fixer les notations, nous nous intéresserons à la marche sur le cluster infini avec ou sans drift. Nous présenterons ensuite une marche attirée par les clusters d'une percolation sous-critique (introduite dans [**51**]). Enfin, on énoncera et prouvera un principe d'invariance annealed pour ce modèle.

Sommaire

1.	**Percolation**	**69**
1.1.	Percolation de sites	70
1.2.	Percolation d'arêtes	70
1.3.	Quelques résultats	70
2.	**Marcher sur le cluster infini**	**71**
2.1.	Des points communs avec la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$	72
2.2.	Une exception : la marche driftée	72
3.	**Une marche attirée par les clusters**	**73**
3.1.	Modèle et résultats	74
3.2.	Théorème central limite annealed	75

Ce chapitre est entièrement rédigé en français. A l'exception du principe d'invariance (Théorème 4.8), il ne contient pas de résultats originaux.

1. Percolation

Nous avons jusqu'à maintenant étudié des modèles où l'environnement était i.i.d. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à des modèles où l'environnement est fourni par une percolation de sites ou d'arêtes dans $\mathbb{Z}^d$. Cette première section est consacrée à l'exposé de quelques notions de percolation. L'objectif est surtout d'introduire les notations que l'on utilisera par la suite dans la description des différents modèles ainsi que les outils qui nous permettront de les étudier. Tous les résultats présentés sont tirés de l'ouvrage de référence de Geoffrey Grimmett, Percolation, [**36**]. Les deux modèles (percolation de sites ou d'arêtes) sont en fait très proches,

nous allons donc présenter les deux modèles puis une série de théorèmes valables dans les deux cas.

1.1. Percolation de sites. On se place dans $\mathbb{Z}^d$ et on se donne $p \in [0,1]$. Nous allons associer à chaque site $x \in \mathbb{Z}^d$, indépendamment de tous les autres sites, la valeur 1 avec probabilité p (on dira que le site est ouvert) et la valeur 0 avec probabilité $1-p$ (et on dira du site qu'il est fermé). Plus formellement, on note Ω l'espace $\{0,1\}^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ et on le munit de la tribu produit canonique $\mathcal{F}$. On définit maintenant la loi $\mathbb{P}_p$, mesure produit sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que chaque marginale suive une loi de Bernoulli de paramètre p (que l'on note $Ber(p)$). On a donc,

$$\mathbb{P}_p = Ber(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

Deux sites x et y sont dit voisins si $|x-y| = 1$. Étant donné une configuraton $\omega \in \Omega$, on dira que deux sites x et y sont reliés s'il existe un chemin de sites ouverts partant de x et arrivant en y. L'ensemble des sites reliés à un site x, s'appelle le cluster de x et sera noté C_x. Considérons maintenant ω une variable de loi $\mathbb{P}_p$ (par exemple le processus canonique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$). La théorie de la percolation a pour objet l'étude géométrique de cette variable et notamment des clusters.

1.2. Percolation d'arêtes. Pour la percolation d'arêtes, les variables de Bernoulli ne sont plus associées aux sites de $\mathbb{Z}^d$ mais aux arrêtes de A_d, ensemble des arêtes joignant deux sites voisins de $\mathbb{Z}^d$. Cette fois $\Omega = \{0,1\}^{A_d}$ et on munit aussi cet espace de sa tribu produit canonique $\mathcal{F}$. On définit, comme pour la percolation de sites, la loi $\mathbb{P}_p$, mesure produit sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et on utilise la même terminologie que pour la percolation de sites. Pour une configuration $\omega \in \Omega$, une arête $a \in A_d$ sera dite ouverte si $\omega(a) = 1$ et fermée si $\omega(a) = 0$. On dira que deux sites x et y sont reliés s'il existe un chemin d'arêtes ouvertes partant de x et arrivant en y. On définit la notion de cluster comme pour la percolation de sites et on se donne également une variable ω de loi $\mathbb{P}_p$.

Remarque 4.1. *Nous n'avons pas distingué les notations entre les deux modèles afin de pouvoir énoncer de façon simple les résultats communs. Pour les modèles de MAMA que nous allons présenter par la suite, nous construirons l'environnement à partir d'une des deux percolation seulement, et il n'y aura donc pas de risque de confusion.*

1.3. Quelques résultats. Les théorèmes que nous donnons dans cette section sont valables pour la percolation de sites comme d'arêtes, seules les constantes et valeurs critiques peuvent varier et nous ne préciserons pas cette dépendance dans les notations. Le résultat fondamental de la théorie de la percolation établit l'existence de deux phases selon la valeur de p (Théorème 1.10 p. 14 de [**36**])

Théorème 4.1. *Pour tout $d \geqslant 2$, il existe $0 < p_c(d) < 1$ tel que,*

(1) *Pour $0 \leqslant p < p_c$, $\mathbb{P}_p - p.s.$ tous les clusters de ω sont finis ;*

(2) *Pour $p_c < p \leqslant 1$, $\mathbb{P}_p - p.s.$, ω a un cluster infini.*

Dans le cas 1 du Théorème 4.1, on parle de percolation (ou phase) sur-critique tandis que dans le cas 2, on parle de percolation sous-critique. Nous donnons maintenant deux théorèmes permettant de décrire chacune des deux phases.
Le théorème 8.1 p. 198 de [**36**] assure l'unicité du cluster dans le cas d'une percolation sur-critique.

THÉORÈME 4.2. *Si $p > p_c(d)$, alors $\mathbb{P}_p - p.s.$, ω a un unique cluster infini.*

Intéressons-nous maintenant à la phase sous-critique. Notons $|C_x|$ la taille du cluster de x. Le théorème 6.78 p. 132 de [**36**], dû à Menshikov, nous assure la décroissance exponentielle de la queue de distribution de la taille du cluster de 0 (et donc de tout cluster).

THÉORÈME 4.3. *Si $p < p_c(d)$, il existe $\xi(p,d) > 0$ tel que,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_p(|C_0| \geqslant n) = -\xi(p,d). \tag{4.1}$$

Nous allons maintenant utiliser la percolation pour construire différents milieux aléatoires dont les transitions ne sont pas indépendantes.

2. Marcher sur le cluster infini

Dans cette partie, nous allons utiliser la percolation d'arêtes sur-critique sur $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqslant 2$). Nous avons vu dans la partie précédente que, pour $p > p_c$, il existe $\mathbb{P}_p - p.s.$ un unique cluster infini. De nombreux travaux ont été consacrés aux marches aléatoires sur cette composante infinie. Le but de cette partie est de rappeler quelques résultats sans donner les démonstrations.
L'un des résultats élémentaires de la théorie de la percolation (voir [**36**]) nous assure que pour $p > p_c$,

$$\mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty) > 0,$$

nous pouvons donc conditionner la mesure de percolation à ce que 0 appartienne à la composante infinie,

$$\mathbb{P}_p^0 = \mathbb{P}_p(\cdot|\{|C_0| = +\infty\}).$$

Pour une configuration $\omega \in \Omega$ tel que $|C_0| = +\infty$, nous noterons P_ω la marche simple sur C_0, c'est-à-dire la chaîne de Markov partant de 0 et choisissant à chaque pas l'un des sites voisins dans C_0,

$$P_\omega(X_{n+1} = x + e|X_n = e) = \frac{\omega(\{x, x+e\})}{\sum_{|e'|=1} \omega(\{x, x+e'\})}$$

où la transition est bien définie car tout site $x \in C_0$ a au moins une arête adjacente ouverte. On définit également la marche annealed

$$P = \mathbb{P}_p^0 \times P_\omega.$$

Nous allons voir que la marche sur le cluster infini se comporte en fait, au regard de nombreuses propriétés, comme la marche sur $\mathbb{Z}^d$.

2.1. Des points communs avec la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

(1) **Récurrence-Transience**
On peut montrer sans difficulté en utilisant l'analogie entre chaînes de Markov réversibles et les réseaux électriques que la marche sur l'amas infini est récurrente en dimension 2 (et en dimension 1 aussi bien sûr). On pourra se référer par exemple au livre de Doyle et Snell, [**28**]. La question de la transience en dimension $d \geqslant 3$, autrement plus difficile, a été résolue par Grimmett, Kesten et Zhang dans [**35**].

THÉORÈME 4.4 (Grimmett-Kesten-Zhang-1992). *Si $d \geqslant 3$ et $p > p_c(d)$, alors $\mathbb{P}_p^0$-p.s., P_ω est transiente.*

Il est par ailleurs clair que le conditionnement ne joue ici aucun rôle, le théorème énoncé dans [**35**] est d'ailleurs formulé sans cette contrainte. Signalons également une autre preuve de ce résultat donnée par Benjamini, Pemantle et Peres que l'on trouvera dans le Chapitre 11 de [**50**].

(2) **Principe d'invariance**
Le principe d'invariance annealed est montré dans [**26**]. Ce résultat a été récemment considérablement amélioré. En effet le principe d'invariance quenched a été montré, très récemment, par différents auteurs, Berger et Biskup [**9**], Sidoravivius et Sznitman (pour $d \geqslant 4$) [**61**] et Mathieu et Piatnitzki [**45**].

THÉORÈME 4.5. *$\mathbb{P}_p^0$-presque sûrement, sous P_ω le processus*

$$X_t^\epsilon = \epsilon^{1/2} X_{\frac{t}{\epsilon}}, t \in \mathbb{R}^+,$$

converge en loi vers un mouvement brownien avec matrice de variance $\sigma^2 I$, où σ^2 est non nul et déterministe.

Signalons également le principe d'invariance très général pour des marches aléatoires dans un milieu formé de conductances aléatoires prouvé récemment par Pierre Mathieu dans [**44**].

(3) **Nombre de points visités**
Le nombre de points visités à un temps $n \in \mathbb{N}$ par la marche sur le cluster infini a été étudié par Clément Rau dans [**57**]. Il retrouve de nouveau des résultats comparables à ceux connus dans $\mathbb{Z}^d$ que nous n'énoncerons pas.

2.2. Une exception : la marche driftée. Nous allons maintenant nous intéresser à un cas où la marche a un comportement très différent sur l'amas infini et sur $\mathbb{Z}^d$. Le modèle de la marche anisotropique sur l'amas a été traité par Sznitman dans [**68**] et, séparément, par Berger, Gantert et Peres dans [**10**]. Nous allons présenter ce modèle en utilisant les notations de Sznitman. On fixe donc la direction $\hat{\ell} \in S^{d-1}$ privilégiée par la marche, la force du biais sera paramétrée par $\lambda \geqslant 0$, on notera $\ell = \lambda\hat{\ell}$. On définit pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $|C_0| = +\infty$, la chaîne de Markov P_ω

partant de 0 et dont les transitions sont données pour tout $x \in C_0$ et $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$ par :

$$P_\omega(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \frac{e^{\ell \cdot e}}{n_\omega(x)} \omega(\{x, x+e\}),$$

où

$$n_\omega(x) := \sum_{|e|=1} e^{\ell \cdot e} \omega(\{x, x+e\}).$$

Définissons également la loi annealed,

$$P = \mathbb{P}_p^0 \times P_\omega.$$

Dans [**68**] et [**10**], les auteurs établissent la transience directionnelle (voir le Chapitre 1 pour une définition) et mettent en évidence l'existence de deux régimes selon la valeur de λ. Pour les valeurs faibles de λ, la marche satisfait une loi des grands nombres balistique, tandis que pour les valeurs fortes, la marche a un comportement sous-balistique.

Théorème 4.6 (Sznitman-2003 ; Berger-Gantert-Peres-2003). *Il existe λ_0 et λ_1 tel que $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1$ et*

(1) *pour $\lambda_0 < \lambda$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{X_n}{n} = v, \qquad P - p.s.,$$

avec $v \cdot \ell > 0$;

(2) *pour $\lambda_1 < \lambda$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{X_n}{n^{\lambda_1/\lambda}} = 0, \qquad P - p.s.$$

La technique utilisée dans [**68**] est une structure de renouvellement comparable à celle introduite dans [**70**] que nous avons décrite dans le Chapitre 1. Notons cependant que les temps de renouvellement sont cette fois dépendants de la trajectoire mais aussi de l'environnement, alors que dans [**70**], ils ne dépendaient que de la trajectoire. Par ailleurs, aucun des deux articles n'a mis en évidence l'existence d'une valeur critique séparant les deux régimes. Il reste donc des valeurs du paramètre pour lesquelles le comportement de la marche est inconnu. De façon heuristique, le ralentissement apparaissant dans le cas sous-balistique du Théorème 4.6 est dû à la présence de « bras fermés dans la direction ℓ » dans le cluster infini où la marche reste piégée à cause de la force du drift.

3. Une marche attirée par les clusters

Si une très large littérature dont nous n'avons donné qu'un aperçu dans la section précédente a été consacrée aux marches sur le cluster infini d'une percolation surcritique, la phase sous-critique n'a pas remportée le même succès. Nous allons ici décrire un modèle introduit et étudié par Sergueï Popov et Marina Vachkovskaïa dans [**51**]. Dans ce modèle, l'environnement est construit à partir d'une percolation de sites sous-critique, et les transitions sont définies de telle sorte que la marche

soit attirée par les clusters, l'attraction étant d'autant plus forte que le cluster est gros. La marche peut cependant se déplacer dans tout $\mathbb{Z}^d$ contrairement aux modèles précédents.

3.1. Modèle et résultats. On considère donc une percolation de sites dans $\mathbb{Z}^d$ de loi $\mathbb{P}_p$ avec $p < p_c(d)$. On se donne également un paramètre β pour déterminer la force de l'attraction des clusters. Enfin, pour alléger les notations dans cette partie, nous allons abandonner la notation $|C_x|$ pour le cardinal du cluster d'un site x au profit de la notation C_x qui ne nous fera pas défaut car les clusters n'apparaîtront dans le modèle qu'à travers leurs cardinaux.
Fixons une réalisation $\omega \in \Omega$ dont toutes les composantes sont finies. On peut définir la chaîne de Markov en temps discret $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de loi P_ω par les transitions,

$$p_\omega(x, x+e) = \frac{e^{\beta C_{x+e}}}{\sum_{|e'=1|} e^{\beta C_{x+e'}}}, \quad x \in \mathbb{Z}^d,\ e \in \mathbb{Z}^d,\ |e| = 1.$$

Le point de départ de la chaîne sera déterministe en 0,

$$P_\omega(X_0 = 0) = 1,$$

ce qui justifie qu'il n'apparaisse pas en indice pour la notation de la loi. De nouveau la loi P_ω sera appelée loi quenched et on définit la loi annealed P par,

$$P = \mathbb{P}_p \times P_\omega.$$

On remarque que la loi quenched est bien définie $\mathbb{P}_p$-p.s car, d'après le Théorème 4.1, $\mathbb{P}_p$-p.s., tous les clusters de ω sont finis et les transitions de P_ω sont donc bien définies. Il est par ailleurs clair que sous $\mathbb{P}_p$ les vecteurs de transitions de P_ω ne forment pas une famille i.i.d. Nous allons faire quelques remarques sur la loi quenched avant de donner les résultats de Popov et Vachkovskaïa.

(1) $\mathbb{P}_p - p.s.$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$ on a,

$$0 < p_\omega(x, x+e) < 1. \tag{4.2}$$

La marche satisfait donc l'hypothèse d'ellipticité stricte. On peut cependant facilement vérifier qu'elle ne satisfait pas celle d'uniforme ellipticité.

(2) La marche est attirée par un cluster uniquement lorsqu'elle passe sur un site appartenant à sa frontière. L'attraction croit exponentiellement avec $\beta > 0$.

(3) $\mathbb{P}_p - p.s.$, la marche est réversible sous P_ω et admet pour mesure réversible, μ_ω définie pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ par :

$$\mu_\omega(x) = e^{\beta C_x} \sum_{|e|=1} e^{\beta C_{x+e}}.$$

(4) Comme toute chaîne de Markov réversible, P_ω peut être vu comme un graphe pondéré. Pour tout $\omega \in \Omega$, on associe donc la collection de poids

$(c_{x,y}(\omega))_{\{x,y\}\in A_d}$ appartenant à $(0,+\infty)^{A_d}$ (rappelons que A_d désigne l'ensemble des arrêtes entre sites voisins de $\mathbb{Z}^d$) où pour tout $\{x,y\}\in A_d$:

$$\begin{aligned} c_{x,y} &= e^{\beta C_x(\omega)+\beta C_y(\omega)} \\ &= \mu_\omega(x)p_\omega(x,y) \\ &= \mu_\omega(y)p_\omega(y,x). \end{aligned}$$

Notons également que

$$\mu_\omega(x) = \sum_{|e|=1} c_{x,x+e}, \qquad x\in\mathbb{Z}^d.$$

Le principal résultat de [**51**] est le Théorème 1.1 p. 264. Les auteurs mettent en évidence l'existence de deux régions selon la valeur de β. Pour β suffisamment grand, la marche a un comportement sous-diffusif tandis que pour β petit, elle se comporte de façon diffusive (et donc, de ce point de vue, ignore l'environnement).

Théorème 4.7 (Popov-Vachkovskaïa-2005). *Il existe des valeurs critiques $\beta_0(d)$ et $\beta_1(d)$ tel que $0\leqslant\beta_0\leqslant\beta_1<+\infty$ et*

(1) *Si $\beta\in[0,\beta_0)$ alors*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|X_k\|_\infty)}{\ln n} = \frac{1}{2} \qquad P-p.s.;$$

(2) *Si $\beta\in(\beta_1,+\infty)$ alors*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|X_k\|_\infty)}{\ln n} < \frac{1}{2} \qquad P-p.s.$$

Notons que le théorème établit l'existence de deux régions mais pas d'une valeur critique, il n'est pas prouvé que $\beta_0=\beta_1$. Comme pour le modèle de marche anisotropique sur le cluster infini décrit dans la Section 2.2, il existe donc des valeurs du paramètre pour lesquelles on ne connaît pas le comportement de la marche.

3.2. Théorème central limite annealed. Dans cette partie, nous allons affiner la description du régime sous-diffusif, au moins pour β suffisamant petit, en donnant un théorème central limite annealed. Définissons pour tout $\epsilon>0$, le processus $(X_t^\epsilon)_{t\geqslant 0}$ par,

$$X_t^\epsilon = \epsilon^{1/2}X_{\frac{t}{\epsilon}}, \qquad t\geqslant 0.$$

On choisit maintenant β suffisamment petit pour que

$$E_{\mathbb{P}_p}(c_{0,e}(\omega))<\infty.$$

Définissons la mesure de probabilité Q sur $(\Omega,\mathcal{F})$ par sa densité,

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}_p}(\omega) = f(\omega), \tag{4.3}$$

avec

$$f(\omega) = \frac{1}{Z}\sum_{|e|=1} c_{0,e}(\omega), \qquad \omega\in\Omega,$$

et Z désignant une constante de normalisation. Cette définition est nécessaire pour énoncer le principe d'invariance, nous la justifierons dans la démonstration.

THÉORÈME 4.8. *Soit $\beta > 0$ tel que $E_{\mathbb{P}_p}(e^{\beta C_0 + \beta C_1}) < +\infty$ alors sous $\mathbb{Q} \times P_\omega$, le processus $(X_t^\epsilon)_{t \geqslant 0}$ converge en loi vers un mouvement brownien de variance $\sigma^2 I$, avec $\sigma^2 > 0$.*

REMARQUE 4.2. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure que l'hypothèse du théorème est satisfaite pour $\beta < \xi/2$ avec ξ défini par (4.1).*

Ce théorème peut être vu comme une application directe du théorème 4.5 de [**26**], nous allons néanmoins donner les étapes importantes de la stratégie développée par De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick. L'outil principal pour obtenir ce résultat est l'introduction de **l'environnement vu depuis la particule**. On appelle environnement vu depuis la particule, le processus en temps discret $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ à valeur dans Ω défini par,

$$\widetilde{\omega}_n = T^{X_n}\omega, \qquad n \geqslant 0.$$

Intuitivement, ce processus représente l'environnement vu par un observateur se déplaçant avec la marche. C'est un outil puissant qui permet de montrer la loi des grands nombres ou des principes d'invariance annealed et quenched pour certains modèles. On trouvera des exemples d'utilisation dans [**42**], [**53**] ou encore [**75**]. Pour d'autres références, nous renvoyons également le lecteur à [**12**]. L'un des intérêts majeurs du processus « environnement vu depuis la particule » est son caractère Markovien sous la loi quenched mais surtout sous la loi annealed ; en contrepartie, il faut noter que la chaîne est à valeur dans l'espace des environnements Ω, non dénombrable, ce qui rend son étude difficile.

PROPOSITION 4.1. *Le processus $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ est markovien sous P_ω (pour $\omega \in \Omega$) et sous P. Son noyau de transition R est identique dans les deux cas et il est défini pour toutes fonctions f mesurables bornées sur Ω par :*

$$Rf(\omega) = \sum_{|e|=1} p_\omega(0,e) f(T_e\omega).$$

Notons également que sous P_ω, $\widetilde{\omega}_0$ a pour loi δ_ω tandis que sous P, $\widetilde{\omega}_0$ a pour loi $\mathbb{P}_p$.

Nous ne donnons pas la preuve de cette proposition élémentaire (voir la Lecture 1 de [**12**]). L'outil principal pour étudier la chaîne $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ est le théorème montré par Kozlov dans [**43**]. Avant d'énoncer ce théorème, rappelons que la marche satisfait bien les hypothèses nécessaires :

(1) Sous $\mathbb{P}_p$, les transitions satisfont l'hypothèse d'ellipticité stricte (voir (4.2))

(2) $\mathbb{P}_p$ est ergodique et $(T^x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ invariant.

Énonçons maintenant le théorème de Kozlov ([**43**])

THÉORÈME 4.9 (Kozlov-1985). *Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ invariante pour $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ et* ***absolument continue*** *par rapport à $\mathbb{P}_p$ alors*

(1) *Les probabilités $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}_p$ sont en fait équivalentes.*

(2) ***La chaîne de Markov*** $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ ***avec distribution initiale*** $\mathbb{Q}$ ***est ergodique.***

(3) *La seule probabilité satisfaisant les hypothèses du théorème est* $\mathbb{Q}$.

(4) *On a la loi des grands nombres suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = E_{\mathbb{Q}}(E_{P_\omega}(X_1)), \qquad P-p.s.$$

On trouvera la preuve de ce théorème dans [**43**] ou une version plus récente dans [**12**]. Pour étudier la chaîne $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$, il faut donc trouver une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure $\mathbb{P}_p$ et appliquer le théorème de Kozlov. Pour le modèle de Popov et Vachkovskaïa, la probabilité Q, définie en (4.3) convient.

Proposition 4.2. *La mesure Q est réversible pour R et absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_p$.*

Preuve de la Proposition 4.2. Il est immédiat que Q est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_p$ de par sa définition. Nous allons donc juste montrer que Q est réversible, c'est-à-dire que R est autoadjoint dans $L^2(Q)$ (on notera $(\cdot,\cdot)_{L^2_Q}$ le produit scalaire de L^2_Q). Soit h et g deux fonctions mesurables et bornées sur Ω, on a alors,

$$\begin{aligned}
(h, Rg)_{L^2_Q} &= \int h(\omega) Rg(\omega) dQ(\omega) \\
&= \int h(\omega) \left(\sum_{|e|=1} p_\omega(0,e) g(T^e\omega) \right) f(\omega) d\mathbb{P}_p(\omega) \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{|e|=1} \int h(\omega) c_{0,e}(\omega) g(T^e\omega) d\mathbb{P}_p(\omega).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que $\mathbb{P}_p$ est invariant par translation.

$$\begin{aligned}
(h, Rg)_{L^2_Q} &= \frac{1}{Z} \sum_{|e|=1} \int h(T^{-e}\omega) c_{0,e}(T^{-e}\omega) g(\omega) d\mathbb{P}_p(\omega) \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{|e|=1} \int h(T^{-e}\omega) c_{0,-e}(\omega) g(\omega) d\mathbb{P}_p(\omega) \\
&= \int g(\omega) \left(\sum_{|e|=1} p_\omega(0,-e) h(T^{-e}\omega) \right) f(\omega) d\mathbb{P}_p(\omega) \\
&= \int g(\omega) Rh(\omega) dQ(\omega) \\
&= (Rh, g)_{L^2_Q}
\end{aligned}$$

Et la preuve de la Proposition 4.2 est complète. □

Nous allons maintenant utiliser le Théorème 2.1 de [**26**] pour obtenir la preuve du Théorème 4.8.

THÉORÈME 4.10 (De Masi-Ferrari-Goldstein-Wick-1989). *Soit* $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ *une chaîne de Markov en temps discret réversible et ergodique avec mesure invariante* μ. *Soit* X *une variable* $\sigma(Y_0, Y_1)$*-mesurable antisymétrique (voir la Définition 4.1 juste après le théorème) et de carré intégrable. Alors le processus,*

$$X^\epsilon = \epsilon^{1/2} \sum_{n=1}^{[t/\epsilon]} X \circ \theta_{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

converge, quand ϵ *tend vers* 0, *vers un mouvement brownien.*

Nous rappelons la définition d'une variable antisymétrique.

DÉFINITION 4.1. *Une variable aléatoire* X *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$, *et* $\sigma(Y_0, Y_1)$*-mesurable, est dite antisymétrique si*

$$X(Y_0, Y_1) = -X(Y_1, Y_0), \qquad p.s.$$

Nous utilisons maintenant le Théorème 4.10 avec $(\widetilde{\omega}_n)_{n \geqslant 0}$ comme chaîne de Markov. On définit $X(\widetilde{\omega}_0, \widetilde{\omega}_1)$ comme l'unique $e \in \mathbb{Z}^d$ ($|e| = 1$) tel que

$$\widetilde{\omega}_1 = T^e \widetilde{\omega}_0.$$

On peut facilement vérifier que les hypothèses sont satisfaites et achever la preuve de la convergence. Il reste à montrer que la matrice de variance n'est pas dégénérée. Nous allons pour cela utiliser le Théorème 4.6 de [**26**].

- $\mathbb{P}_p$ étant isotropique (c'est-à-dire invariante par les rotations d'angle $\pi/2$), le point (*iii*) nous assure que la matrice est un multiple de l'identité que l'on note σ^2.
- Le point (*i*) du même théorème nous assure ensuite que σ^2 est strictement positif car $\mathbb{P}$-p.s., $c_{0,e_1} > 1$.

La preuve du Théorème 4.8 est maintenant complète.

REMARQUE 4.3. *Nous avons choisi pour cette preuve de considérer le processus environnement vu depuis la particule à valeur dans* Ω, *c'est-à-dire d'observer la percolation. Dans les articles* [**43**] *et* [**26**], *le processus environnement vu depuis la particule est à valeur dans* $(0, +\infty)^{A_d}$ *et on observe donc le réseau de conductances. On peut cependant facilement vérifier que les hypothèses que nous avons contrôlées pour notre processus sont également vraies pour le processus des conductances.*

CHAPITRE 5

Une marche ralentie par les clusters d'une percolation

Dans ce chapitre, nous étudions une marche ralentie par les clusters d'une percolation de sites sous-critique et également soumise à un biais. On établit l'existence de deux régimes selon la puissance du ralentissement. Pour un ralentissement faible, on observe un régime balistique (ou diffusif en l'absence de drift) tandis que pour un fort ralentissement, on bascule dans un régime sous-diffusif. On donne la valeur critique séparant les deux régimes et on décrit chacun des deux régimes en caractérisant l'expansion dans le cas sous-diffusif et par un principe d'invariance quenched dans le cas diffusif.

Sommaire

1. Présentation de l'article *Random Walk Delayed on Percolation Clusters* 79

1.1. Rappel du modèle et des principaux résultats 79

1.2. Modèle de trappes de Bouchaud 81

2. Model and results 84

3. Preliminaries and the proof of Theorem 5.1 88

4. Subballistic regime, and the proofs of Theorem 5.2 and 5.3 91

Ce chapitre est constitué de l'article *Random Walk Delayed on Percolation Clusters* publié dans *Journal of Applied Probability* ([**21**]). Cet article rédigé en anglais est précédé d'une brève présentation en français (décrivant essentiellement le modèle de trappes de Bouchaud).

1. Présentation de l'article *Random Walk Delayed on Percolation Clusters*

Cette partie complète l'introduction de l'article *Random Walk delayed on percolation clusters* ([**21**]). On y trouvera une courte présentation du modèle et on insistera, davantage que dans [**21**], sur les liens avec les modèles déjà existants.

1.1. Rappel du modèle et des principaux résultats. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un nouveau modèle de marche aléatoire en milieu

aléatoire. L'environnement sera construit comme dans [**51**] à partir d'une percolation de sites sous-critique. Les transitions seront construites de manière à ralentir la marche lorsqu'elle passe dans un cluster. Ce ralentissement sera croisant (exponentiellement) avec la taille du cluster traversé. On se donne également la possibilité d'ajouter un biais à la marche. Donnons maintenant une définition précise de ce modèle.

On considère $p < p_c$ ainsi que la mesure de percolation de sites $\mathbb{P}_p$ que nous avons définie et sommairement décrite au début du Chapitre 4. Comme p est fixé pour cette partie, et afin d'alléger les notations, nous noterons $\mathbb{P}$ la loi de la percolation au lieu de $\mathbb{P}_p$. On se donne également une variable ω de loi $\mathbb{P}$. On fixe une direction de biais $\ell \in S^{d-1}$ ainsi qu'un paramètre $\lambda \geqslant 0$ représentant la force de ce biais. On se donne également un paramètre $\beta \geqslant 0$ pour la force de l'attraction exercée par les clusters. Pour un environnement ω fixé, on définit la chaîne de Markov $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ de loi P_ω en temps continu et à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ en donnant son squelette et ses temps de sauts (rappelons qu'on appelle *temps de saut* les inverses des *taux de saut*).

- **Squelette** Le squelette $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est la marche simple driftée partant de 0 et de loi $\widetilde{P}$, définie pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$ par,
$$\widetilde{P}(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \frac{e^{\lambda \ell \cdot e}}{\sum_{|e'|=1} e^{\lambda \ell \cdot e'}}.$$
On notera en particulier que **le squelette ne dépend pas de l'environnement $\boldsymbol{\omega}$**. C'est un point important qui facilite beaucoup l'étude de P_ω.
- **Taux de saut** En tout point $x \in \mathbb{Z}^d$, le taux de saut de la marche est $e^{-\beta C_x}$. Le temps moyen passé au point x est donc $e^{\beta C_x}$ et on notera que ce temps croit exponentiellement avec la taille du cluster de x (dans le cas non trivial $\beta > 0$).

La loi annealed, comme toujours, est définie en intégrant sur l'environnement :
$$P = \mathbb{P} \times P_\omega.$$
On trouvera une description de cette loi sous forme de générateur ainsi que d'autres commentaires sur ce modèle dans l'introduction de [**21**]. Rappelons brièvement les résultats principaux de cet article,

- Le Théorème 5.1 établit la loi des grands nombres annealed et donne une expression de la vitesse.
- Le Théorème 5.2 établit l'existence d'un régime sous-diffusif pour une attraction $\beta \geqslant \xi$ et donne l'expansion algébrique de la marche selon la dimension d et la présence (ou non) d'un drift pour le squelette.
- Le Théorème 5.3 établit un régime diffusif pour $\beta < \xi$ et $\lambda = 0$ caractérisé par un principe d'invariance quenched.

Ces résultats s'inscrivent très bien dans le cadre des MAMA dont le milieu est fourni par une percolation. On retrouve notamment comme dans [**68**], [**10**] et [**51**] l'existence de deux régimes selon la valeur du paramètre. Pour une attraction faible, l'environnement est ignoré et la marche se comporte comme la marche simple satisfaisant un principe d'invariance tandis que pour une attraction forte la marche est ralentie et on bascule dans un régime sous-diffusif. Ce modèle est également très

proche du **Modèle de Trappes de Bouchaud**. Dans la prochaine partie, nous présentons ce modèle ainsi que ses liens mathématiques avec le modèle que l'on vient d'introduire.

1.2. Modèle de trappes de Bouchaud.

Un peu de physique. Le Modèle de trappes de Bouchaud (BTM) a été introduit par le physicien Jean-Philippe Bouchaud dans [**14**] en 1992. Le but du BTM est de modéliser le phénomène de vieillissement (*aging* en anglais) apparaissant dans certains systèmes physiques. Il s'agit plus précisément d'un modèle phénoménologique introduit pour expliquer la dynamique de verres de spin mais pouvant être adapté pour analyser la dynamique d'autres systèmes désordonnés. Nous allons maintenant décrire très brièvement les idées de cette modélisation ; nous nous appuierons sur l'article original et sur les notes de cours de Jiří Černý, [**18**]. Le paysage d'énergie libre pour les modèles de Edwards-Anderson ou Sherrington-Kirkpatrick, comme ceux de nombreux systèmes désordonnés présentent un profil « escarpé » mal connu. La dynamique du système est donc difficile à comprendre. Selon l'intuition physique, le système passe une grande partie du temps dans les vallées du paysage d'énergie tandis que le temps pour changer de vallée est négligeable. L'idée de Bouchaud est donc de remplacer ce paysage compliqué par un graphe où chaque sommet correspond à une vallée ou puits d'énergie et chaque arrête correspond à un « col » séparant deux puits. On ne suppose pas de géométrie à priori sur la fonction d'énergie et on considérera donc le graphe complet. Nous donnons une illustration de la construction de ce type de graphe à environnement fixé (c'est-à-dire ici à fonction d'énergie fixée) avec la Figure 5.1. Pour rendre le dessin lisible, nous considérons un espace unidimensionnel alors que l'espace des états est de très grande dimension. Après avoir

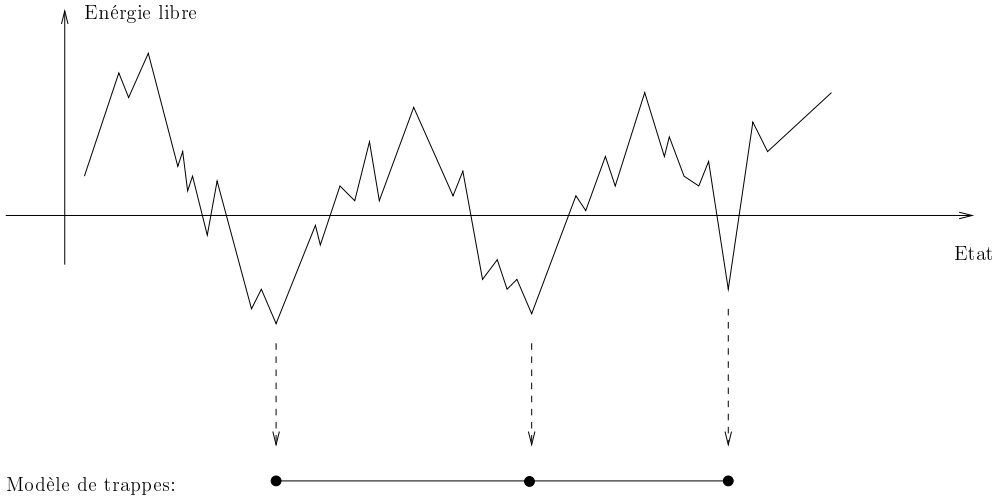

Fig. 5.1. Simplification de la fonction d'énergie libre

fait cette simplification, nous étudions maintenant l'aspect dynamique qui est le but réel de cette modélisation. La dynamique du système (déterminée par la fonction d'énergie) est remplacée par une dynamique markovienne sur le graphe. Le squelette

est la marche simple sur le graphe complet (on conserve ainsi l'idée qu'il ne faut pas privilégier de géométrie), et il faut encore choisir les taux de saut. Bouchaud propose de tirer de façon i.i.d. la profondeur de chaque puits d'énergie selon une variable exponentielle (que l'on prend de paramètre 1 pour simplifier). En accord avec la loi d'Arrhenius, le temps de sortie d'un puits de profondeur ΔE est en moyenne $e^{c\Delta E/T}$, où c désigne une constante physique que l'on supposera désormais égale à 1. On considérera donc comme temps de sauts en x, une famille i.i.d. de variables exponentielles de moyenne $e^{\Delta E/T}$. Il est important de noter que la queue de distribution de ces temps de sortie est en $1/u^T$ et le temps moyen *annealed* passé dans une trappe n'est donc pas intégrable à basse température. Lorsque le système évolue, il découvre donc des puits dans lesquels il séjourne pendant une durée comparable à la durée de vie du système (au moins jusqu'à ce qu'il ait parcouru la totalité du graphe que l'on doit penser très grand). C'est cette particularité que Bouchaud exploite pour expliquer avec succès le vieillissement du verre de spin.

Retour aux mathématiques. Le modèle physique de Bouchaud a donné lieu a une importante littérature mathématique ; citons par exemple [**3**], [**15**], [**32**] ou encore [**4**], cette liste étant bien évidemment loin d'être exhaustive. Nous ne présenterons ici que les résultats les plus proches du modèle que l'on étudie dans [**21**], c'est-à-dire le modèle de trappe dans $\mathbb{Z}^d$. Ce modèle a été étudié par Ben Arous et Černý dans [**6**]. Notons que la géométrie particulière des trappes dans $\mathbb{Z}^d$ (chaque trappe a $2d$ voisins) n'a, à priori, aucune justification physique. Le processus étudié dans [**6**] est similaire à celui que nous avons étudié dans [**21**], mais les taux de saut sont cette fois distribués de façon i.i.d. selon une loi $\mathbb{P}$. Plus précisément, un environnement sera une famille $(\tau_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} \in (0,+\infty)^{\mathbb{Z}^d}$ et pour un environnement fixé, on définit, comme dans la première partie de ce chapitre, la chaîne de Markov en temps continu $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ par son squelette et ses taux de saut :

- Le squelette $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est la marche simple aux plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$ partant de 0. Notons, comme pour le modèle de [**21**], que le squelette ne dépend pas de l'environnement.
- Le taux de saut en $x \in \mathbb{Z}^d$ est égal à τ_x^{-1}. Chacun des temps d'attente au site x est donc donné par une variable exponentielle de moyenne τ_x.

On notera P_τ la loi de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ pour un environnement $(\tau_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} \in (0,+\infty)^{\mathbb{Z}^d}$ fixé. On définit maintenant la loi $\mathbb{P}$ sur l'environnement comme étant la mesure produit dont la marginale en $x \in \mathbb{Z}^d$ vérifie :

$$\mathbb{P}(\tau_x \geqslant u) = \frac{1}{u^\alpha}, \qquad u \in \mathbb{R}^+,$$

avec $\alpha \in (0,1)$ un paramètre fixé. On peut maintenant définir la loi annealed P par

$$P = \mathbb{P} \times P_\tau.$$

Ben Arous et Černý établissent dans [**6**] la convergence en loi de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ correctement renormalisé vers un processus $(Z_t^{d,\alpha})_{t\geqslant 0}$ non dégénéré appelé *Kinetical-fractional process*. Avant d'énoncer leur résultat, nous définissons ce processus.

Définition 5.1. *On considère un mouvement brownien* $(B_t)_{\geqslant 0}$ *dans* $\mathbb{Z}^d$ *et un subordinateur* $(V_t^\alpha)_{t\geqslant 0}$*, indépendant de* $(B_t)_{\geqslant 0}$*,* α*-stable et dont la loi est caractérisée par* $E(e^{-\lambda V_t^\alpha}) = e^{-\lambda t^\alpha}$*, pour tout* $t \geqslant 0$*. On définit alors le processus*

$$Z_t^{d,\alpha} = B_{(V^\alpha)_t^{-1}}, \qquad t \geqslant 0,$$

où $((V^\alpha)_t^{-1})_{t\geqslant 0}$ *désigne l'inverse généralisé de* $(V_t^\alpha)_{t\geqslant 0}$*,*

$$(V^\alpha)_t^{-1} = \inf\{s \geqslant 0, V_s^\alpha > t\}.$$

La renormalisation du processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ étant différente selon la dimension, définissons pour tout $N > 0$ le processus,

$$Y_t^N = \frac{Y_{tN}}{f(N)}, \qquad t \geqslant 0,$$

où la renormalisation $f(N)$ est définie pour tout $N > 0$ par

$$f(N) = \begin{cases} C_2(\alpha) N^{\alpha/2} (\ln N)^{(1-\alpha)/2} & \text{si } d = 2 \\ C_d(\alpha) N^{\alpha/2} & \text{si } d \geqslant 3, \end{cases}$$

où $C_2(\alpha)$ et $C_d(\alpha)$ sont des constantes calculées dans [**6**] que l'on ne précisera pas. On peut maintenant énoncer le résultat principal de Ben Arous et Černý dans [**6**].

Théorème 5.1 (Ben Arous-Černý-2007). *Fixons* $T > 0$*. Pour* $\mathbb{P}$*-presque tout environnement* $(\tau_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$*,* $(Y_t^N)_{t\geqslant 0}$ *converge en loi vers* $(Z_t^{d,\alpha})_{t\geqslant 0}$ *dans l'espace des fonctions càdlàg muni de la topologie uniforme.*

Ce résultat est bien plus précis que les théorèmes que nous avons obtenus dans [**21**]. Signalons cependant plusieurs difficultés apparaissant dans le modèle étudié dans [**21**] qui ne sont pas présentes dans [**6**].

- Les connaissances sur la distribution de la taille du cluster de 0 en percolation sous-critique (voir le chapitre 6.3 de [**36**]) sont insuffisantes pour affirmer que la variable $e^{\beta C_0}$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable.
- La loi des taux de saut n'est plus une mesure produit mais présente au contraire une dépendance entre toutes les marginales.
- La géométrie d'un cluster en percolation sous-critique est mal connue et il est donc difficile d'évaluer correctement la fonction de Green d'un cluster, contrairement à celle d'un point qui est bien connue.

Pour achever cette partie nous allons décrire un modèle de trappe généralisé dont le BTM que l'on vient de présenter est un cas particulier. On considère un graphe G dont l'ensemble des sommets est noté $\mathcal{S}$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}$. On suppose que $\mathcal{S}$ est dénombrable et on associe à chaque sommet $x \in \mathcal{S}$ un réel strictement positif τ_x. On fixe également un paramètre $a \in [0,1]$. Définissons maintenant la chaîne de Markov $(Y_t)_{t\geqslant 0}$, partant d'un sommet fixé, dont le générateur L est donné pour toute fonction f mesurable par :

$$Lf(x) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{A}} w_{x,y}(f(y) - f(x)), \quad x \in \mathcal{S},$$

où pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}$

$$w_{x,y} = \tau_x^{-(1-a)} \tau_y^a.$$

On va s'intéresser maintenant comme pour le BTM à des trappes de tailles aléatoires et à queues lourdes, que l'on appellera aussi environnement. On considère donc maintenant que les $(\tau_x)_{x \in \mathcal{S}}$ forment une famille de variables positives i.i.d. de loi $\mathbb{P}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(\tau_x > u) = \frac{1}{u^\alpha}, \quad u > 0,$$

où $\alpha \in (0, 1)$ désigne un paramètre. Notons que l'on peut élargir un peu la définition de ce modèle en considérant que les trappes sont dans le domaine d'attraction d'une loi α-stable. On peut vérifier que pour $a = 0$, on retrouve le modèle de Bouchaud « simple » que l'on vient de présenter. Nous allons maintenant faire quelques remarques sur le cas $a \neq 0$.

- Nous avons donné la loi de $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ en utilisant le générateur et non, comme le plus souvent dans ce manuscrit, le squelette et le temps moyen de saut. Ces deux objets sont en effet beaucoup moins pratiques pour ce modèle. **Le squelette, en particulier, n'est plus une marche simple sur le graphe, sa loi dépend de l'environnement**. Notons aussi que le temps moyen de saut au site $x \in \mathcal{S}$ dépend des trappes voisines de x.
- On remarque que la mesure $\sum_{x \in \mathcal{S}} \tau_x \delta_x$ vérifie la *Detailed Balance Condition* et donc

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \tau_x \delta_x \text{ est une mesure réversible (et invariante) pour } (Y_t)_{t \geqslant 0}.$$

- Le fait que la dynamique discrète dépende de l'environnement rend ce modèle considérablement plus difficile a étudier que le BTM et très peu de résultats sont connus pour l'instant.

Random Walk Delayed on Percolation Clusters ([**21**])

---

2. Model and results

Consider the graph of nearest neighbors on $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, and write $x \sim y$ when $\|x - y\|_1 = 1$. Here, $\|\cdot\|_1$ is the ℓ_1-norm, though $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm.

An environment is an element ω of $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Environments are used to construct the independent identically distributed (i.i.d.) Bernoulli site percolation on the lattice. We consider the product σ-field on Ω and for $p \in (0, 1)$, the probability $\mathbb{P} = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, where $\mathcal{B}(p)$ denotes the Bernoulli law with parameter p. A site x in $\mathbb{Z}^d$ is said open if $\omega_x = 1$, and closed otherwise. Consider the open connected components (so-called clusters) in the percolation graph. The cluster of an open site $x \in \mathbb{Z}^d$ is the union of $\{x\}$ with the set of all $y \in \mathbb{Z}^d$ which are connected to x

by a path with all vertices open. The cluster of a closed site is empty. We denote by C_x the cardinality of the cluster of x.

It is well known that there exists a critical $p_c = p_c(d)$ such that for $p < p_c$, $\mathbb{P}$-almost surely, all connected open components (clusters) of ω are finite, though for $p > p_c$, there a.s. exists an infinite cluster. Moreover, it follows from [**2**], [**47**] that, in the first case, the clusters size has an exponential tail: For any $p < p_c$, there exists $\xi = \xi(p) > 0$ such that for all x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(C_x \geqslant n) = -\xi \ .$$

In this paper, we fix $p < p_c$. Let $\ell = (\ell_k; 1 \leqslant k \leqslant d)$ be a unit vector, λ and β two non-negative number. For every environment ω, let P_ω be the law of the continuous time Markov chain $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ on $\mathbb{Z}^d$ starting at 0 with generator L given for continuous bounded functions f by

$$Lf(x) = K \sum_{e\sim 0} e^{\lambda \ell\cdot e - \beta C_x} \Big[f(x+e) - f(x) \Big] \ ,$$

where we chose the normalizing constant K as $K = \big(\sum_{e\sim 0} e^{\lambda\ell\cdot e}\big)^{-1}$ for simplicity. Given ω, define the measure μ on $\mathbb{Z}^d$ by

$$\mu(x) = e^{2\lambda\ell\cdot x + \beta C_x} \ . \tag{5.1}$$

The random measure μ combines a shift in the direction ℓ together with an attraction to large clusters. Observe that the process Y admits μ as invariant, reversible measure. Markov processes having μ as invariant measure are of natural interest in the context of random walks in random environment. They describe random walks which have a tendency to live on large clusters, the attraction becoming stronger as β is increased. The isotropic case, $\lambda = 0$, has been considered in [**51**] with a different, discrete-time dynamics. There, the authors proved that the walk is diffusive for small β, and subdiffusive for large β. The investigation of slowdowns in the anisotropic case is then natural. In [**60**], a random resistor network is considered with a invariant reversible measure of the form $C(x,\omega)e^{2\lambda\ell\cdot x}$ where the random field $(C(x,\omega); x \in \mathbb{Z}^d)$ is stationary ergodic and bounded away from 0 and $+\infty$: in this case, the random walks in random environment is ballistic for all positive λ.

The study of a general dynamics in the presence of a drift contains many difficult questions, and the advantage of the particular process Y considered here is that we can push the analysis further. We could as well handle the discrete time analogous of Y, i.e. the random walks in random environment with geometric holding times instead of exponential ones, which falls in the class of marginally nestling walks in the standard classification (e.g., [**76**]). The Markov process Y can also be described with it skeleton and its jump rates. The skeleton $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is defined as the sequence of distinct consecutive locations visited by Y. Then, X is a discrete time Markov chain with transition probabilities $\widetilde{P}$, given for $x \in \mathbb{Z}^d$ and $e \sim 0$ by

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \forall e \sim 0, \quad \widetilde{P}(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \frac{e^{\lambda\ell\cdot e}}{\sum_{e'\sim 0} e^{\lambda\ell\cdot e'}} =: \widetilde{p}_e \ ,$$

and $\widetilde{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = 0$ if y is not a nearest neighbor of x. The jump rate of Y at site x is equal to $\exp -\beta C_x$, and the holding times are independent, exponentially distributed with mean $\exp \beta C_x$. The Markov chain X is quite simple, it is the random walk on $\mathbb{Z}^d$ with drift

$$d(\lambda) = \frac{1}{\sum_{k=1}^d \cosh(\lambda \ell_k)} \Big(\sinh(\lambda \ell_k)\Big)_{1 \leqslant k \leqslant d}. \tag{5.2}$$

It is plain that for the random walk,

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow d(\lambda) \qquad \widetilde{P} - a.s., \tag{5.3}$$

so directional transience is clear, and the law of large number for Y boils down to studying the clock process which takes care of the jump times. As can be seen from formula (5.6), the process considered here is a generalization of the so-called random walk in a random scenery, or the random walk subordinated to a renewal process, which are used as effective models for anomalous diffusions. The difference is essentially that the environment (i.e., the field of jump rates) has here some space correlations, which are short-range. It is also related to the trap model considered in the analysis of the aging phenomenon introduced in [**14**]: the aging of this model has been studied in details, see [**5**] for a recent review.

For a fixed ω, P_ω is called the quenched law and we define the annealed law P by

$$P = \mathbb{P} \times P_\omega.$$

Of course, statements which hold P-a.s., equivalently hold P_ω-a.s. for $\mathbb{P}$-a.e. environment.

Finally, we stress that we assume $d \geqslant 1$ in this paper. The case $d = 1$ is special since the critical threshold $p_c(1) = 1$. Moreover, specific techniques are available in one dimension, e.g. [**76**] for a survey, however we will stick as much as possible to techniques applying for all d.

Our first result is the law of large numbers.

THEOREM 5.1. **(Law of large numbers)** *For any $\lambda \geqslant 0$ and any $\beta \geqslant 0$,*

$$\frac{Y_t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} v(\lambda, \beta), \quad P - a.s.,$$

where

$$v(\lambda, \beta) = \Big(\mathbb{E} e^{\beta C_0}\Big)^{-1} d(\lambda)\ . \tag{5.4}$$

In particular, $v(\lambda, \beta) = 0$ if $\beta > \xi$ or $\lambda = 0$ though $v(\lambda, \beta) \cdot \ell > 0$ if $\beta < \xi$ and $\lambda \neq 0$.

As in the case $\lambda = 0$ considered in [**51**], slowdowns occur for large disorder intensity β, when the walk gets trapped on large percolation clusters. This behavior is reminiscent of the biased random walk on the supercritical percolation infinite cluster [**68**], [**10**] where ballistic or subballistic regimes take place according to the parameters values. The slowdowns in our paper have a similar nature to those in some one dimensional random walks in random environment, see [**64**], [**40**] and [**63**].

Moreover, as in the one dimensional case, we obtain here explicit values for the rate of escape, a rather unusual fact in larger dimension. More drastic (logarithmic) slowdowns were also found for an unbiased walker in a moon craters landscape in [**29**], [**16**], or diffusions in random potentials [**46**], but in these models the behavior at small disorder is qualitatively different from the behavior without disorder.

The next result contains extra information on the subballistic behavior.

THEOREM 5.2. **(Subballistic regime)** *Let $\beta \geqslant \xi$.*

(1) *For any $d \geqslant 1$ and $\lambda > 0$,*

$$\frac{\ln |Y_t|}{\ln t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\xi}{\beta} \qquad P-a.s.$$

(2) *If $\lambda = 0$, for any $d \geqslant 2$ we have*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \frac{\xi}{2\beta} \qquad P-a.s.$$

(3) *If $d = 1$ and $\lambda = 0$ we have*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\beta}{2\xi} + \frac{1}{2}\Big)^{-1} \qquad P-a.s.$$

Hence, the spread of the random walks in random environment scales algebraically with time in all cases. Note that in the isotropic case $\lambda = 0$, the slowdown is larger for $d = 1$ than for $d \geqslant 2$. This will appear in the proof as a consequence of the strong recurrence of the simple random walk X in the one-dimensional case. Note that our results are only in the logarithmic scale, though the scaling limit has been obtained for the isotropic trap model, in dimension $d = 1$ (e.g., [**5**]), and $d \geqslant 2$ [**6**] with limit given, if the disorder is strong, by the time change of a Brownian motion by the inverse of a stable subordinator (fractional kinetics). Though we believe that the scaling limit of our model without drift ($\lambda = 0$) is the same, we could not get finer results because of the presence of correlations in the medium. Moreover, the case of a drift $\lambda \neq 0$ has not been considered in the literature, except for $d = 1$ with renormalization group arguments [**49**].

To complete the picture, we end by the diffusive case. (Recall that $\beta < \xi$ is sufficient for $\mathbb{E}(e^{\beta C_0}) < \infty$.)

THEOREM 5.3. **(Diffusive case regime)** *Assume $\lambda = 0$, and $\mathbb{E}(e^{\beta C_0}) < \infty$. Then, we have a quenched invariance principle for the rescaled process $Z^\epsilon = (Z^\epsilon_t)_{t\geqslant 0}$, $Z^\epsilon_t = \epsilon^{1/2} Y_{\epsilon^{-1}t}$: For almost every ω, as $\epsilon \searrow 0$, the family of processes Z^ϵ converges in law under P_ω in the Skorohod topology to the d-dimensional Brownian motion with diffusion matrix $\Sigma = \big(d \times \mathbb{E}(e^{\beta C_0})\big)^{-1} I_d$. Moreover,*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \frac{1}{2} \qquad a.s. \tag{5.5}$$

For the proof of our results we will take the point of view of the environment seen from the walker. It turns out that the "static" environmental distribution is invariant for the dynamics. Hence the environment is always at equilibrium.

The paper is organized as follows. In the next section, we introduce the basic ingredients for our analysis and we prove the law of large numbers of Theorem 5.1. The last section is devoted to the subballistic regime and contains the proofs of Theorem 5.2 and 5.3.

3. Preliminaries and the proof of Theorem 5.1

For $x \in \mathbb{Z}^d$, T^x will denote the space shift with vector x. We will consider also the time shift θ.

Skeleton and clock process of Y. The sequence $(S_n; n \geqslant 0)$ of jump times of the Markov process Y with right-continuous paths is defined by $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \ldots$, $Y_t = Y_{S_n}$ for $t \in [S_n, S_{n+1})$, $Y_{S_{n+1}} \neq Y_{S_n}$. The skeleton of Y is the sequence X given by $X_n = Y_{S_n}, n \geqslant 0$. As mentioned above, the skeleton X of Y is the simple random walk with drift. For any x in $\mathbb{Z}^d$, the jump rate of $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ at x is $e^{-\beta C_x}$. Hence the time S_n of the n-th jump is the sum of n independent random variables with exponential distribution with mean $e^{\beta C_{X_i}}, i = 1, \ldots n$. This means that the sequence $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, with $\mathcal{E}_i = e^{-\beta C_{X_i}}(S_{i+1} - S_i)$, is, under the quenched law and then also under the annealed law, a sequence of i.i.d. exponential variables with mean 1, with $\mathcal{E}$ and X independent. The law of this sequence will be denoted by Q ($Q = \mathcal{E}xp(1)^{\otimes \mathbb{N}}$, with $\mathcal{E}xp(1)$ the mean 1, exponential law). For any n in $\mathbb{N}$, the time S_n of the n-th jump is given by

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}_i e^{\beta C_{X_i}}. \tag{5.6}$$

This sequence can be viewed as a step function $S_t := S_{[t]}$, where $[\cdot]$ is the integer part, and we also define its generalized inverse S^{-1}: for any $t \geqslant 0$,

$$S^{-1}(t) = n \iff S_n \leqslant t < S_{n+1} \ .$$

We observe that $S_n \to \infty$ as $n \to \infty$ P_ω-a.s. for all ω, making the function S^{-1} defined on the whole of $\mathbb{R}_+$. Then, P_ω-a.s.,

$$X_{S^{-1}(t)} = Y(t) \ , \quad \forall t \geqslant 0 \ . \tag{5.7}$$

and therefore, the process S^{-1} is called the clock process.

Conversely, let $\mathcal{E}, X$ and ω be independent, with distribution $Q, \widetilde{P}$ and $\mathbb{P}$ respectively, defined on some new probability space. Then, fixing λ and viewing β as a parameter, by (5.6) and (5.7) we construct, on this new probability space, a coupling of the processes $Y = Y^{(\beta)}$ for all $\beta \in \mathbb{R}$. The coupling has the properties that the skeleton is the same for all β, and that the clock processes are such that for $\beta \geqslant \beta'$ and $t \geqslant 0$,

$$S^{-1}(\beta; t) \leqslant S^{-1}(\beta'; t). \tag{5.8}$$

The environment seen from the walker. Depending on the time being discrete or continuous, we consider the processes $(\widetilde{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\hat{\omega}_t)_{t \geqslant 0}$ defined by

$$\widetilde{\omega}_n = T^{X_n}\omega \ , \quad \hat{\omega}_t = T^{Y_t}\omega = \widetilde{\omega}_{S^{-1}(t)}$$

for $n \geqslant 0, t \geqslant 0$. We start with the case of discrete time.

LEMMA 5.1. *Under P, $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is a stationary ergodic Markov chain. The same holds for $(\widetilde{\omega}_i, \mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

PROOF OF LEMMA 5.1. As $(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is an i.i.d. sequence of variables independent of $\widetilde{\omega}$, it is enough to prove Lemma 5.1 for the process $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Under P (resp P_ω) $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is Markovian with transition kernel R defined for any bounded function f by

$$Rf(\omega) = \sum_{e\sim 0} \widetilde{p}_e f(T^e\omega) \quad \forall \omega \in \Omega,$$

and initial distribution $\mathbb{P}$ (resp δ_ω). The transitions of $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ does not depend on ω like those of X and, in this sense, the sequence is itself a random walk. Since $\mathbb{P}$ is invariant by translation,

$$E[f(\widetilde{\omega}_1)] = \int \sum_{e\sim 0} \widetilde{p}_e f(T^e\omega) d\mathbb{P} = \sum_{e\sim 0} \widetilde{p}_e \int f(T^e\omega) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[f(\omega)],$$

showing that $\mathbb{P}$ is an invariant measure for $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

We will use $\mathcal{F}$ to denote the product σ-field on $\Omega^{\mathbb{N}}$, and for any $k \geqslant 0$, $\mathcal{F}_k$ will denote the σ-field generated by the k first coordinates. Note that θ is measurable and preserves the law of $\widetilde{\omega}$ under P. We have to prove that the invariant σ-field $\Sigma := \{A \in \mathcal{F}, 1_A(\widetilde{\omega}) = 1_A(\theta\widetilde{\omega}),\ P\text{-a.s.}\}$ is trivial. Let Y be a Σ-measurable bounded random variable on $\Omega^{\mathbb{N}}$, we have to show that it is P-a.s. constant.

Define for all ω in Ω, $h_Y(\omega) := E_\omega[Y]$. We will study this function with standard arguments e.g. chapter 17.1.1 of [**48**]. Using Markov property and the θ-invariance of Y, we can show that,

$$h_Y(\widetilde{\omega}_k) = E[Y|\mathcal{F}_k] \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ P\text{-a.s.} \tag{5.9}$$

As a consequence, under P, $(h_Y(\widetilde{\omega}_k))_{k\geqslant 0}$ is both a stationary process and an a.s. convergent martingale, and hence it is a.s. constant. In particular,

$$Y = h_Y(\widetilde{\omega}_0) \qquad P\text{-a.s.},$$

what means that Y can be considered as a function of the first coordinate alone. The next step is to show that h_Y is $\mathbb{P}$-a.s. harmonic, that is

$$Rh_Y(\widetilde{\omega}_0) = h_Y(\widetilde{\omega}_0), \quad P\text{-a.s.}$$

It is a consequence of the following computation,

$$\begin{aligned} Rh_Y(\widetilde{\omega}_0) &= E[h_Y(\widetilde{\omega}_1)|\mathcal{F}_0] \qquad P\text{-a.s.} \\ &= E[E[Y|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_0] \qquad P\text{-a.s.} \\ &= h_Y(\widetilde{\omega}_0) \qquad P\text{-a.s.}, \end{aligned}$$

where the second equality is true because of (5.9). We will now show that Y is invariant by translation in space. By invariance of $\mathbb{P}$ and harmonicity of h_Y, it is true that

$$\sum_{e\sim 0} \int \widetilde{p}_e (Y - Y\circ T^e)^2 d\mathbb{P} = 0.$$

For every e neighbour of 0, $\widetilde{p}_e > 0$, and the previous equation implies that, $\mathbb{P}$ almost surely $Y = Y \circ T^e$ for any $e \sim 0$. Together with the ergodicity of $\mathbb{P}$, this shows that Y is P-a.s. constant, and completes the proof. □

As a consequence of Lemma 5.1 and Birkhoff's ergodic theorem, for any function f in $L_1(\Omega^{\mathbb{N}})$ (or f non negative),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\theta^k \widetilde{\omega}) \xrightarrow{n\to+\infty} E[f] \qquad P\text{- a.s.}$$

Now, we turn to the time continuous case, and we consider the empirical distribution $\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\hat{\omega}_s} ds$ of the environment seen from the walker up to time t. Our next result is a law of large numbers for this random probability measure. For small β, the empirical distribution converges to some limit $\mathbb{P}^0$, which is then an invariant measure for $(\hat{\omega}_t)_{t \geqslant 0}$.

Corollary 5.1. *If $\beta < \xi$ then P-almost surely, the empirical distribution of the environment seen from the walker, $\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\hat{\omega}_s} ds$, converges weakly to $\mathbb{P}^0$ defined by $d\mathbb{P}^0 = \frac{e^{\beta C}}{\mathbb{E}[e^{\beta C}]} d\mathbb{P}$.*

Proof of Corollary 5.1. We need to show that $t^{-1}\int_0^t f(\hat{\omega}_s)ds \to \int f d\mathbb{P}^0$ as $t \to \infty$, for all real bounded continuous function f on Ω. Since $e^{\beta C_0}$ is integrable when $\beta < \xi$, this follows from the convergence along the sequence $t = S_n$, $n \to \infty$. By (5.6), this is equivalent to

$$\frac{n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}_i e^{\beta C_{X_i}} f(\widetilde{\omega}_i)}{n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}_i e^{\beta C_{X_i}}} \longrightarrow \int_\Omega f d\mathbb{P}^0 \ , \quad n \to \infty.$$

We first study the P-almost sure convergence of the denominator, i.e. of $n^{-1}S_n$. Define the real function g on $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \Omega^{\mathbb{N}})$

$$g : ((\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto \mathcal{E}_0 e^{\beta C_0(\widetilde{\omega}_0)}$$

and note that $C_{X_n} = C_0(\widetilde{\omega}_n)$. Applying Lemma 5.1 and the ergodic theorem to $(\widetilde{\omega}, \mathcal{E})$ and to the non negative function g, we obtain that $n^{-1}S_n$ converges P-almost surely to $\mathbb{E}[e^{\beta C_0}]$. The numerator can be studied with the same arguments, and we obtain the claim since for $\beta < \xi$ both limits are finite. □

With this in hand, we can easily complete the

Proof of Theorem 5.1. Write

$$\frac{Y_t}{t} = \frac{X_{S^{-1}(t)}}{S^{-1}(t))} \frac{S^{-1}(t)}{S(S^{-1}(t))} \frac{S(S^{-1}(t))}{t} \ .$$

Recall from (5.3) that the first factor in the right-hand side converge almost surely to $d(\lambda)$ as $t \to \infty$. In the proof of Corollary 5.1 we have shown that $S(S^{-1}(t))/S^{-1}(t) \to \mathbb{E}[e^{\beta C_0}]$ a.s. for $\beta < \xi$, but clearly the result remains true for all β (the limit is infinite for $\beta > \xi$). For the last factor in the right-hand side we simply observe that

$$\frac{S(S^{-1}(t))}{S(S^{-1}(t)+1)} \leqslant \frac{S(S^{-1}(t))}{t} \leqslant 1 \ , \tag{5.10}$$

yielding that $S(S^{-1}(t))/t$ converges P-almost surely to 1 if $\mathbb{E}[e^{\beta C_0}] < \infty$: in this case, we then conclude that Y_t/t converges P-almost surely to $v(\lambda, \beta)$ given by (5.4).

In the case $\mathbb{E}[e^{\beta C_0}] = \infty$, we just use the right inequality in (5.10) to obtain the P-almost surely convergence of Y_t/t to $v(\lambda, \beta) = 0$. □

4. Subballistic regime, and the proofs of Theorem 5.2 and 5.3

We start with a few auxiliary results.

LEMMA 5.2. *Assume $d \geqslant 2$ or $\lambda > 0$. Then, for any $\epsilon > 0$, there exists $\alpha > 0$ such that P-almost surely, we eventually have*

$$\sharp\Big\{i \leqslant n,\ C_{X_i} > (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\Big\} \geqslant n^{\alpha}$$

with the notation $\sharp A$ for the cardinality of a set A.

PROOF OF LEMMA 5.2. Define the range R_n as the number of points visited by $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ during the first n steps. For $\lambda > 0$, there exists a constant $c_1 > 0$ such that $\widetilde{P}$-almost surely eventually $R_n > c_1 n$. For $\lambda = 0$ and $d \geqslant 2$, it is well known (see chapter 21 of [**58**]) that there exists a constant c_2 such that $\widetilde{P}$-almost surely eventually $R_n > c_2 \frac{n}{\ln n}$ (when $d \geqslant 3$, the walk is transient and the correct order of R_n is n). In all cases, there exists a constant $c_3 > 0$ such that under the assumptions of Lemma 5.2, we have $\widetilde{P}$-almost surely, eventually, $R_n > c_3 \frac{n}{\ln n}$. For a fixed n in $\mathbb{N}$, we define recursively the time T_i^n by

$$\begin{aligned}
&T_0^n = 0,\\
&T_i^n = \inf\{T_{i-1}^n < k \leqslant n,\ |X_k - X_{T_j^n}| > 2(\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n,\ \forall j < i\} \qquad \forall i \geqslant 1,\\
&\inf\emptyset = +\infty.
\end{aligned}$$

Note that the balls with center $X_{T_j^n}$ and radius $(\xi^{-1} - \epsilon)\ln n$ are pairwise disjoint, and define K_n the number of such balls, i.e.

$$K_n = \max\{i \geqslant 0 :\ T_i^n < +\infty\}$$

As the cardinality of those ball is $c_4 \ln^d n$ (for some $c_4 > 0$), it follows from the previous discussion on the range that $\widetilde{P}$-almost surely, eventually, $K_n > c\frac{n}{\ln^{d+1} n}$, where c denotes a positive constant. From now on we fix a path $(X_i)_{i\geqslant 0}$ such that $K_n > c\frac{n}{\ln^{d+1} n}$ eventually. In the rest of the proof, we take n large enough so that the inequality holds. Then,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sharp\big\{i \leqslant K_n,\ C_{X_{T_i^n}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\big\} \geqslant K_n - n^{\alpha}\Big)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(\exists I \subset \{1, \dots K_n\}, \sharp I = K_n - [n^{\alpha}] : \forall i \in I,\ C_{X_{T_i^n}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\ \Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{I\subset\{1,\dots K_n\}, \sharp I = K_n - [n^{\alpha}]} \mathbb{P}\Big(\forall i \in I,\ C_{X_{T_i^n}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\ \Big)
\end{aligned}$$

For all j such that $0 \leqslant j \leqslant K_n - n^\alpha$, B_i^n denotes the ball with center $X_{T_i^n}$ and radius $(\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n$. The event $\{C_{X_{T_i^n}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n)\}$ is $\sigma\{\omega_x, x \in B_i^n\}$ measurable. As the balls B_i^n are disjoint and the environment is i.i.d.,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sharp\big\{i \leqslant K_n,\ C_{X_{T_i^n}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\big\} \geqslant K_n - n^\alpha\Big) \\
&\quad \leqslant \binom{K_n}{[n^\alpha]}\big(1 - \mathbb{P}(C_0 > (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n)\big)^{K_n - [n^\alpha]} \\
&\quad \leqslant c_5 n^{n^\alpha}\big(1 - n^{-(1-\epsilon\xi)+o(1)}\big)^{c\frac{n}{\ln^{d+1} n} - n^\alpha},
\end{aligned}$$

for some suitable constant $c_5 > 0$. We now choose $\alpha < \min(1, \epsilon\xi)$, so that

$$\sum_n \mathbb{P}\Big(\sharp\big\{i \leqslant K_n,\ C_{X_{T_i}} \leqslant (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\big\} \geqslant K_n - n^\alpha\Big) < \infty$$

We conclude using Borel-Cantelli's lemma. □

Lemma 5.3. *Assume $\beta > \xi$. For $d \geqslant 2$ or $\lambda > 0$, we have $\liminf_n \frac{\ln S_n}{\ln n} \geqslant \frac{\beta}{\xi}$, P-almost surely.*

Proof of Lemma 5.3. Let η be a positive real number. With $\epsilon := \eta/\beta$, from Lemma 5.2, there exists $\alpha > 0$ such that $\widetilde{P} \otimes \mathbb{P}$-almost surely, there exists a natural number $N = N(X, \omega)$ such that for $n > N$, the set $I = \{i \leqslant n,\ C_{X_i} > (\frac{1}{\xi} - \epsilon)\ln n\}$ has cardinality $\sharp I \geqslant n^\alpha$. For $n > N$,

$$\begin{aligned}
Q(S_n < n^{\beta/\xi - \eta}) &\leqslant Q(\mathcal{E}_i e^{\beta C_{X_i}} < n^{\beta/\xi - \eta},\ i \in I) \\
&\leqslant Q(\mathcal{E}_1 e^{\beta C_{X_1}} < n^{\beta/\xi - \eta})^{n^\alpha} \\
&\leqslant Q(\mathcal{E}_1 < n^{\beta\epsilon - \eta})^{n^\alpha} \\
&= (1 - e^{-1})^{n^\alpha}.
\end{aligned}$$

From previous inequality, we obtain that $Q(S_n < n^{\beta/\xi - \eta})$ is the general term of a convergent series and we can use Borel-Cantelli's Lemma to conclude. □

Lemma 5.4. *Assume $\beta > \xi$. For $d \geqslant 1$ and $\lambda \geqslant 0$, we have P-almost surely, $\limsup_n \frac{\ln S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\beta}{\xi}$.*

Proof of Lemma 5.4. For any α in $(0, 1)$, by subadditivity we have $(u + v)^\alpha \leqslant u^\alpha + v^\alpha$ for all positive u, v, and then

$$S_n^\alpha \leqslant \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i^\alpha e^{\alpha\beta C_{X_i}}.$$

Now, define the function f_α

$$\begin{aligned}
f_\alpha : \quad (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \Omega^{\mathbb{N}}) &\to \mathbb{R} \\
((\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}) &\to \mathcal{E}_0^\alpha e^{\alpha\beta C_0(\widetilde{\omega}_0)}.
\end{aligned}$$

Applying Lemma 5.1 and the ergodic theorem to $(\widetilde{\omega}, \mathcal{E})$ with the non negative function f_α, we obtain that for any α such that $\alpha\beta < \xi$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n^\alpha}{n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i^\alpha e^{\alpha\beta C_{X_i}}}{n} = E_Q(\mathcal{E}_1^\alpha) \times \mathbb{E}(e^{\alpha\beta C_0}) < \infty$$

almost surely. Therefore,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} < \frac{1}{\alpha}.$$

Since α is arbitrary in $(0, \xi/\beta)$, the proof is complete. □

The two following lemmas deal with the one dimensional case. Notice that when $d = 1$, for all $n > 0$,

$$\mathbb{P}(C \geqslant n) = p \sum_{k=0}^{n-1} p^k p^{n-1-k} = np^n,$$

and as a consequence $\xi = -\ln p$.

Lemma 5.5. *Assume $\beta > \xi$. For $d = 1$ and $\lambda = 0$, we have P-almost surely,* $\limsup_n \frac{\ln S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\beta}{2\xi} + \frac{1}{2}$.

Proof of Lemma 5.5. Here we need to relabel our sequence of exponential variables $(\mathcal{E}_i; i \geqslant 0)$. For $y \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, define $\mathcal{E}_{y,k}$ by

$$\mathcal{E}_{y,k} = \mathcal{E}_i \quad \text{with } i \text{ such that} \quad X_i = y,\ \sharp\{j : 0 \leqslant j \leqslant i, X_j = y\} = k\ ,$$

i.e. the exponential corresponding to the k-th passage at y. These new variables are a.s. well defined when $d = 1$ and $\lambda = 0$, and it is not difficult to see that the sequence $(\mathcal{E}_{y,k})_{y\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$ is i.i.d. with mean 1 exponential distribution, and independent of X and of ω. The number of visits of the walk to a site y at time n will be denoted by $\theta(n, y)$. We can rewrite S_n in the following way,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\beta C_{X_i}} \mathcal{E}_i = \sum_{y\in\mathbb{Z}} e^{\beta C_y} \left(\sum_{k=0}^{\theta(n,y)-1} \mathcal{E}_{y,k} \right). \tag{5.11}$$

Notice that for any $\eta > 0$,

$$\widetilde{P} - a.s. \text{ for } n \text{ large enough}, \quad \theta(n, y) = 0 \quad \forall y > n^{\frac{1}{2}+\eta} \tag{5.12}$$

(see for example Theorem 5.7 p.44 in [**58**]). As a consequence, we obtain that for any positive $\alpha < 1$, $\widetilde{P}$-almost surely for n large enough,

$$S_n^\alpha \leqslant \sum_{y=-n^{-\frac{1}{2}+\eta}}^{n^{\frac{1}{2}+\eta}} e^{\alpha\beta C_y} \left(\sum_{k=0}^{\theta(n,y)-1} \mathcal{E}_{y,k} \right)^\alpha.$$

Here and below, the sum $\sum_{y=a}^b$ with real numbers $a < b$, ranges over all $y \in \mathbb{Z}$ with $a \leqslant y \leqslant b$. Notice now that for any $\nu > 0$,

$$\widetilde{P} - a.s. \text{ for } n \text{ large enough}, \quad \sup\{\theta(n, y), y \in \mathbb{Z}\} < n^{\frac{1}{2}+\nu} \tag{5.13}$$

(see for example Theorem 11.3 p. 118 in [**58**]), and we obtain for such n,

$$\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+\eta}n^{(\frac{1}{2}+\nu)\alpha}}S_n^\alpha \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+\eta}}\sum_{y=-n^{-\frac{1}{2}+\eta}}^{n^{\frac{1}{2}+\eta}} e^{\alpha\beta C_y}\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\nu}}\sum_{k=0}^{n^{\frac{1}{2}+\nu}}\mathcal{E}_{y,k}\Big)^\alpha. \tag{5.14}$$

For any y in $\mathbb{Z}$ and n in $\mathbb{N}$, we define $u_{y,n} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}+\nu}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n^{\frac{1}{2}+\nu}}\mathcal{E}_{y,k}$. Fix $\mu > 0$, according to the large deviation principle for i.i.d. sequences, there exists $I_\mu > 0$ such that, for any y in $\mathbb{Z}$ and any n in $\mathbb{N}$,

$$Q(|u_{y,n} - 1| > \mu) \leqslant e^{-I_\mu n^{\frac{1}{2}+\nu}}.$$

Using the independence of the $(\mathcal{E}_{y,k})_{y\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$, it is easy to check that

$$Q(\exists y \in [-n^{\frac{1}{2}+\eta}, n^{\frac{1}{2}+\eta}], |u_{y,n} - 1| > \mu),$$

is the general term of a convergent series and using Borel-Cantelli's lemma we obtain that Q-almost surely, for n large enough and for any $-n^{\frac{1}{2}+\eta} < y < n^{\frac{1}{2}+\eta}$,

$$|u_{y,n} - 1| < \mu. \tag{5.15}$$

From the ergodicity of the environment, it is true that $\mathbb{P}$-almost surely,

$$\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+\eta}}\sum_{y=-n^{-\frac{1}{2}+\eta}}^{n^{\frac{1}{2}+\eta}} e^{\alpha\beta C_y} \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}[e^{\alpha\beta C}]. \tag{5.16}$$

Using now (5.14),(5.15) and (5.16), we obtain that for any $\alpha < \xi/\beta$, there exists $M < +\infty$ such that, P-almost surely for n large enough,

$$S_n < Mn^{\frac{1}{2\alpha}+\frac{\eta}{\alpha}+\frac{1}{2}+\nu}.$$

Since the last inequality is true for η and μ arbitrary small and α arbitrary close to ξ/β, the proof is complete. □

Lemma 5.6. *Assume $\beta > \xi$. For $d = 1$ and $\lambda = 0$, we have P-almost surely,* $\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln S_n}{\ln n} \geqslant \frac{\beta}{2\xi} + \frac{1}{2}$.

Proof of Lemma 5.6. Let η and ν be two positive real numbers. As a consequence of (5.12) and (5.13), $\widetilde{P}$-almost surely, for n large enough, at least $n^{\frac{1}{2}-\frac{\nu\xi}{4}}$ sites are visited more than $n^{\frac{1}{2}-\eta}$ times, we will denote the set of those sites by O_n. Fix now a path $(X_i)_{i\geqslant 0}$ such that for all $n \geqslant 0$, $\sharp O_n \geqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{\nu\xi}{4}}$. As in the proof of Lemma 5.3, we can choose a family of $\alpha_n := \frac{n^{\frac{1}{2}-\frac{\nu\xi}{4}}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{\xi}-\nu)\ln n}$ points $(y_i)_{i\leqslant\alpha_n}$ in O_n such that the intervals $(I_i)_{i\leqslant\alpha_n}$ centered in $(y_i)_{i\leqslant\alpha_n}$ and of length $\frac{1}{2}(\frac{1}{\xi}-\nu)$ are disjoint. If all sites of an interval are open, it will be said open, otherwise it will be said

closed. Using the fact that the $(I_i)_{i \leqslant \alpha_n}$ are disjoint, we obtain that,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I_i \text{ is closed, for all } i \leqslant \alpha_n) &\leqslant (1 - n^{-\frac{1}{2}(1-\nu\xi)+o(1)})^{\alpha_n} \\ &\leqslant e^{-n^{\frac{\nu\xi}{4}+o(1)}}.\end{aligned}$$

As a consequence of Borel-Cantelli's lemma we obtain that P-almost surely, for n large enough, there exists at least one site visited more than $n^{\frac{1}{2}-\eta}$ times and that belongs to a cluster of size greater than $\frac{1}{2}(\frac{1}{\xi} - \nu)\ln n$, we will note this site $\widetilde{y}_n$, and therefore,

$$S_n \geqslant \sum_{i=0}^{n^{\frac{1}{2}-\eta}} n^{\frac{\beta}{2\xi}-\nu\beta}\mathcal{E}_{\widetilde{y}_n,i}.$$

Using the large deviation upper bound similarly to the lines below (5.14), we obtain from the last inequality that P-almost surely, for n large enough,

$$S_n \geqslant \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\nu\beta-\eta}.$$

Since ν and η can be chosen arbitrary small, this last inequality ends the proof. □

Proof of Theorem 5.2. We first assume that $\beta > \xi$. From Lemma 5.3 and Lemma 5.4, we know that under assumptions of parts 1 or 2 of Theorem 5.2,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} = \frac{\beta}{\xi} \qquad P - \text{a.s.}$$

From the inequalities

$$\frac{\ln S(S^{-1}(t))}{\ln S^{-1}(t)} \leqslant \frac{\ln t}{\ln S^{-1}(t)} < \frac{\ln S(S^{-1}(t)+1)}{\ln S^{-1}(t)},$$

we deduced that P-almost surely,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\ln S^{-1}(t)} = \frac{\beta}{\xi}.$$

Applying the same arguments as above, we deduce from Lemma 5.5 and Lemma 5.6 that under assumptions of part 3 of Theorem 5.2,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\ln S^{-1}(t)} = \frac{\beta}{2\xi} + \frac{1}{2}, \qquad P - \text{a.s.}$$

Write now,

$$\frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \frac{\ln |X_{S^{-1}(t)}|}{\ln S^{-1}(t)} \frac{\ln S^{-1}(t)}{\ln t}.$$

To conclude in the case $\beta > \xi$, note that under assumptions of part 1, $\frac{\ln |X_n|}{\ln n}$ converges $\widetilde{P}$-almost surely to 1 and under assumption of part 2 and 3, $\widetilde{P}$-almost surely, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln |X_n|}{\ln n} = \frac{1}{2}$ by the law of iterated logarithm.

To extend the results to the border case $\beta = \xi$, we use the property (5.8) of the coupling, which implies that the long-time limit of $\frac{\ln |Y_t|}{\ln t}$ is non-increasing in β. This completes the proof of part 1 with $\beta = \xi$. For the other parts, we use the property

(5.5), that we will prove independently below. Again, the results claimed for $\beta = \xi$ in parts 2 and 3 follow from the monotonicity of the coupling. $\square$

Proof of Theorem 5.3. First observe that when $\lambda = 0$,

$$f(Y_t) - \int_0^t (2d)^{-1} e^{-\beta C_{Y_s}} \sum_{e \sim 0} \Big[f(Y_s + e) - f(Y_s) \Big] ds$$

is a P_ω-martingale for f continuous and bounded. Then, for all ω, the process Y is a square integrable martingale under the quenched law P_ω. Its bracket is the unique process $\langle Y \rangle$ taking its values in the space of nonnegative symmetric $d \times d$ matrices such that $Y_t Y_t^* - \langle Y \rangle_t$ is a martingale and $\langle Y \rangle_0 = 0$. We easily compute

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t e^{-\beta C_{Y_s}} ds \times d^{-1} I_d$$

By Corollary 5.1, we see that the bracket Z^ϵ is such that, for all $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \langle Z^\epsilon \rangle_t &= \epsilon \langle Y \rangle_{\epsilon^{-1} t} \\ &= \epsilon \int_0^{\epsilon^{-1} t} e^{-\beta C_{Y_s}} ds \times d^{-1} I_d \\ &\longrightarrow t\Sigma \qquad \text{as } \epsilon \searrow 0 \end{aligned}$$

P-a.s., and then in P_ω-probability for a.e. ω. Let us fix such an ω, and use the law P_ω. Since the martingale Z^ϵ has jumps of size $\epsilon^{-1/2}$ tending to 0 and since its bracket converges to a deterministic limit, it is well known (e.g. Theorem VIII-3.11 in [**38**]) that the sequence $(Z^\epsilon, \epsilon > 0)$ converges to the centered Gaussian process with variance $t\Sigma$, yielding the desired invariance principle under P_ω.

We now prove (5.5). Since $\lambda = 0$ we have $\limsup_n \ln |X_n| / \ln n = 1/2$, $\widetilde{P}$-a.s., and since $\mathbb{E} e^{\beta C_0} < \infty$ it holds a.s. $\lim_t \ln S^{-1}(t) / \ln t = 1$. This implies the claim. $\square$

Concluding remarks: (i) Part 2 of Theorem 5.2 deals with the upper limit in the subdiffusive case $\lambda = 0, \beta > \xi$. We comment here on the lower limit. In dimension $d \geqslant 3$, $n^{-1/2} |X_{[ns]}|$ converges to a transient Bessel process, and it is not difficult to see that

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = \xi / (2\beta)$$

In dimension $d \leqslant 2$, X is recurrent, and then $\liminf_t |Y_t| = 0$ and

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\ln |Y_t|}{\ln t} = -\infty$$

(ii) A natural question is: What does the environment seen from the walker look like in the subballistic case? In fact, the prominent feature is that the size of surrounding cluster is essentially the largest one which was visited so far. Consider for instance the case of positive λ. One can prove that, for $\beta > \xi$ and $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{t} \Big| \big\{ s \in [0, t] : (\ln t)^{-1} C_{Y_s} \in [\beta^{-1} - \epsilon, \beta^{-1} + \epsilon] \big\} \Big| \longrightarrow 1$$

P-a.s. as $t \nearrow \infty$.

(iii) We end the paper with a short comment on the case when the environment is a general random field, not necessarily coming from site percolation. It is easy to check that Theorems 5.1 and 5.3, together with their proofs, remain valid for a stationary, ergodic random field $(C_x, x \in \mathbb{Z}^d)$. On the contrary, our proof of Theorem 5.2 uses some independence property specific to the percolation model.

Bibliographie

[1] Omer Adelman and Nathanaël Enriquez. Random walks in random environment : what a single trajectory tells. *Israel J. Math.*, 142 :205–220, 2004.

[2] Michael Aizenman and David J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 108(3) :489–526, 1987.

[3] Gerard Ben Arous, Anton Bovier, and Jiří Černý. Universality of the REM for dynamics of mean-field spin glasses. *arXiv :0706.2135v1.*

[4] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. Bouchaud's model exhibits two different aging regimes in dimension one. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1161–1192, 2005.

[5] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. *Dynamics of Trap Models, Ch. 8 dans Mathematical Statistical Physics, (Les Houches LXXXIII, 2005),.* (Bovier, Dunlop, Van Enter, Den Hollander, Dalibard Ed.), Elsevier, 2005.

[6] Gérard Ben Arous and Jiří Černý. Scaling limit for trap models on $\mathbb{Z}^d$. *Ann. Probab.*, 35(6) :2356–2384, 2007.

[7] Jean Bérard and Alejandro Ramírez. Central limit theorem for the excited random walk in dimension $D \geqslant 2$. *Electron. Comm. Probab.*, 12 :303–314 (electronic), 2007.

[8] Noam Berger. Limiting velocity of high-dimensional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 36(2) :728–738, 2008.

[9] Noam Berger and Marek Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Related Fields*, 137(1-2) :83–120, 2007.

[10] Noam Berger, Nina Gantert, and Yuval Peres. The speed of biased random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Related Fields*, 126(2) :221–242, 2003.

[11] Noam Berger and Ofer Zeitouni. A quenched invariance principle for certain ballistic random walks in i.i.d. environments. *arXiv :math/0702306.*

[12] Erwin Bolthausen and Alain-Sol Sznitman. *Ten lectures on random media*, volume 32 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[13] Erwin Bolthausen and Ofer Zeitouni. Multiscale analysis of exit distributions for random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields*, 138(3-4) :581–645, 2007.

[14] Jean-Philippe Bouchaud. Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. *J. Phys. I France*, 2 :1705–1713, 1992.

[15] Anton Bovier and Alessandra Faggionato. Spectral characterization of aging : the REM-like trap model. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3) :1997–2037, 2005.

[16] Maury Bramson and Richard Durrett. Random walk in random environment : a counterexample ? *Comm. Math. Phys.*, 119(2) :199–211, 1988.

[17] J. Bricmont and A. Kupiainen. Random walks in asymmetric random environments. *Comm. Math. Phys.*, 142(2) :345–420, 1991.

[18] J. Cerny. Special topics in probability - aging in dynamics of disordered systems. *Notes de cours disponibles sur http ://www.math.ethz.ch/ cerny/teaching.html.*

[19] A.A. Chernov. Replication of a multicomponent chain by lightning mechanism. *Biophysics*, 12(2) :336–341, 1967.

[20] Francis Comets, Nina Gantert, and Ofer Zeitouni. Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 118(1) :65–114, 2000.

[21] Francis Comets and François Simenhaus. Random walk delayed on percolation clusters. *Journal of Applied Probability*, 45(3), 2008.

[22] Francis Comets and Ofer Zeitouni. A law of large numbers for random walks in random mixing environments. *Ann. Probab.*, 32(1B) :880–914, 2004.

[23] Francis Comets and Ofer Zeitouni. Gaussian fluctuations for random walks in random mixing environments. *Israel Journal of Mathematics*, 148 :87–114, 2005.

[24] P.G. de Gennes. La percolation : un concept unifiacateur. *La Recherche*, 7 :919–927, 1976.

[25] P.G. de Gennes. La capture d'une fourmi par des pièges sur un amas de percolation. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences*, 296 :881–884, 1983.

[26] A. De Masi, P. A. Ferrari, S. Goldstein, and W. D. Wick. An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments. *J. Statist. Phys.*, 55(3-4) :787–855, 1989.

[27] P. Diaconis. Recent progress on de Finetti's notions of exchangeability. In *Bayesian statistics, 3 (Valencia, 1987)*, Oxford Sci. Publ., pages 111–125. Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[28] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. *Random walks and electric networks*, volume 22 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984.

[29] Richard Durrett. Multidimensional RWRE with subclassical limiting behavior. In *Random media (Minneapolis, Minn., 1985)*, volume 7 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 109–119. Springer, New York, 1987.

[30] Nathanaël Enriquez and Christophe Sabot. Edge oriented reinforced random walks and RWRE. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :941–946, 2002.

[31] Nathanaël Enriquez and Christophe Sabot. Random walks in a Dirichlet environment. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 31, 802–817 (electronic), 2006.

[32] Nathanaël Enriquez, Christophe Sabot, and Olivier Zindy. Aging and quenched localization for one-dimensional random walks in random environment in the sub-ballistic regime. *arXiv :0711.1095*.

[33] Laurent Goergen. Limit velocity and zero-one laws for diffusions in random environment. *Ann. Appl. Probab.*, 16(3) :1086–1123, 2006.

[34] Andreas Greven and Frank den Hollander. Large deviations for a random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 22(3) :1381–1428, 1994.

[35] G. R. Grimmett, H. Kesten, and Y. Zhang. Random walk on the infinite cluster of the percolation model. *Probab. Theory Related Fields*, 96(1) :33–44, 1993.

[36] Geoffrey Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.

[37] T. Gross. *Thèse de doctorat*. Université Paris VII. 2004.

[38] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[39] Steven A. Kalikow. Generalized random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 9(5) :753–768, 1981.

[40] H. Kesten, M. V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Math.*, 30 :145–168, 1975.

[41] Harry Kesten. The limit points of a normalized random walk. *Ann. Math. Statist.*, 41 :1173–1205, 1970.

[42] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :1–19, 1986.

[43] S.M. Kozlov. The averaging method and walks in inhomogeneous environments. *Russian Math. Surveys*, 40(2) :73–145, 1985.

[44] P. Mathieu. Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *J. Stat. Phys.*, 130(5) :1025–1046, 2008.

[45] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 463(2085) :2287–2307, 2007.

[46] Pierre Mathieu. Zero white noise limit through Dirichlet forms, with application to diffusions in a random medium. *Probab. Theory Related Fields*, 99(4) :549–580, 1994.

[47] M. V. Men′shikov. Coincidence of critical points in percolation problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 288(6) :1308–1311, 1986.

[48] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.

[49] C. Monthus. Nonlinear response of the trap model in the aging regime : Exact results in the strong-disorder limit. *Phys. Rev. E*, 69(2) :026103, 2004.

[50] Yuval Peres. Probability on trees : an introductory climb. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 193–280. Springer, Berlin, 1999.

[51] Serguei Popov and Marina Vachkovskaia. Random walk attracted by percolation clusters. *Electron. Comm. Probab.*, 10 :263–272 (electronic), 2005.

[52] Svetlozar T. Rachev and Ludger Rüschendorf. *Mass transportation problems. Vol. I.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998. Theory.

[53] Firas Rassoul-Agha. The point of view of the particle on the law of large numbers for random walks in a mixing random environment. *Ann. Probab.*, 31(3) :1441–1463, 2003.

[54] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for ballistic random walk in random environment. *arXiv :0705.4116.*

[55] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for non-nestling random walk in random environment. *arXiv :0704.1022.*

[56] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Quenched invariance principle for multidimensional ballistic random walk in a random environment with a forbidden direction. *Ann. Probab.*, 35(1) :1–31, 2007.

[57] C. Rau. Sur le nombre de points visités par une marche aléatoire sur un amas infini de percolation. *Bull. Soc. Math. France*, 135(1) :135–169, 2007.

[58] Pál Révész. *Random walk in random and non-random environments.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2005.

[59] Jeffrey M. Rosenbluth. Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment : a variational formula. *arXiv :0804.1444.*

[60] Lian Shen. Asymptotic properties of certain anisotropic walks in random media. *Ann. Appl. Probab.*, 12(2) :477–510, 2002.

[61] Vladas Sidoravicius and Alain-Sol Sznitman. Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances. *Probab. Theory Related Fields*, 129(2) :219–244, 2004.

[62] François Simenhaus. Asymptotic direction for random walks in random environments. *Annales de l'intitut Henri Poincaré(B)*, 6 :751–761, 2007.

[63] Ya. G. Sinaĭ. The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(2) :247–258, 1982.

[64] Fred Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Probability*, 3 :1–31, 1975.

[65] Alain-Sol Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(2) :724–765, 2001.

[66] Alain-Sol Sznitman. An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 122(4) :509–544, 2002.

[67] Alain-Sol Sznitman. On new examples of ballistic random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 31(1) :285–322, 2003.

[68] Alain-Sol Sznitman. On the anisotropic walk on the supercritical percolation cluster. *Comm. Math. Phys.*, 240(1-2) :123–148, 2003.

[69] Alain-Sol Sznitman and Ofer Zeitouni. An invariance principle for isotropic diffusions in random environment. *Invent. Math.*, 164(3) :455–567, 2006.

[70] Alain-Sol Sznitman and Martin Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 27(4) :1851–1869, 1999.

[71] D. E. Temkin. One-dimensional random walks in a two-component chain. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 206 :27–30, 1972.

[72] Hermann Thorisson. *Coupling, stationarity, and regeneration.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2000.

[73] S. R. S. Varadhan. Large deviations for random walks in a random environment. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(8) :1222–1245, 2003. Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser.

[74] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[75] Atilla Yilmaz. Quenched large deviations for random walk in a random environment. *arXiv :0804.0262.*

[76] Ofer Zeitouni. Random walks in random environment. In *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1837 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–312. Springer, Berlin, 2004.

[77] Martin P. W. Zerner. Lyapounov exponents and quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 26(4) :1446–1476, 1998.

[78] Martin P. W. Zerner. A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment. *Electron. Comm. Probab.*, 7 :191–197 (electronic), 2002.

[79] Martin P. W. Zerner. The zero-one law for planar random walks in i.i.d. random environments revisited. *Electron. Comm. Probab.*, 12 :326–335 (electronic), 2007.

[80] Martin P. W. Zerner and Franz Merkl. A zero-one law for planar random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(4) :1716–1732, 2001.

Marches aléatoires en milieux aléatoires : Étude de quelques modèles multidimensionnels

Résumé : Cette thèse est consacrée à différents modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires ; elle est constituée de 5 chapitres. Les chapitres 1 et 4 sont essentiellement bibliographiques, ils couvrent une partie de la littérature consacrée au modèle i.i.d ainsi qu'à différents modèles où l'environnement est construit à partir d'une percolation. Dans le chapitre 2, nous étudions la classe des marches admettant une direction asymptotique dans le cas du modèle i.i.d., c'est-à-dire tel que $X_n/|X_n|$ ait une limite déterministe sous la loi annealed. Nous établissons notamment qu'une marche admet une direction asymptotique si et seulement si elle est transiente dans toutes les directions d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Dans le chapitre 3, nous étudions un modèle de marches en temps continu en milieux aléatoires. Les différents résultats de cette partie décrivent l'impact du couplage entre les transitions et les taux de saut sur la vitesse de la marche. Le chapitre 5 est consacré à un modèle de marche ralentie par les clusters d'une percolation sous-critique dans $\mathbb{Z}^d$. Nous montrons que, selon la force du ralentissement, la marche se place dans un régime sous-diffusif ou diffusif.

Mots-clés : marches aléatoires, milieux aléatoires, chaîne de Markov, structure de renouvellement, percolation, environnement vu depuis la particule.

Random walks in random environments : Study of some multidimensional models

Abstract : This dissertation is devoted to different models of random walks in random environments ; it is made of 5 Chapters. Chapter 1 and 4 are surveys of literature devoted, respectively, to i.i.d model and models where environments is given by a percolation. In Chapter 2 we study the class of walks admitting an asymptotic direction in the case of i.i.d. model, i.e. walks such that $X_n/|X_n|$ has a deterministic limit under the annealed law. We prove that a walk belongs to this class if and only if it is transient in any direction of a non empty open set of $\mathbb{R}^d$. In Chapter 3 we study a model of continuous time random walk in a random i.i.d. environment. More precisely, we describe how the coupling of the transition vectors and the jump rates modify the speed of the walk. Chapter 5 is devoted to a model of walk delayed by clusters of a site subcritical percolation. We find two distinct regimes : a ballistic one and a subballistic one taking place when the attraction is strong enough.

Keywords : random walks, random media, Markov chains, renewal structure, percolation, environment seen from the particle.