HAL open science

Convergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles

Marcel Berland

To cite this version:

Marcel Berland. Convergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles. 2008. hal-00347349

HAL Id: hal-00347349

https://hal.science/hal-00347349

Preprint submitted on 15 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Convergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles

Marcel BERLAND
8, rue Dupin
75006 PARIS

Résumé

On se propose d'étudier la convergence et l'ultraconvergence de certaine série d'exponentielles complexes dont les coefficients sont des fonctions entières d'indices bornés, qui permettent, sous certaines conditions, de localiser la frontière naturelle de la fonction analytique définie par de telle série.

Dans la deuxième partie, on considère une sous-classe de série dont les coefficients sont des fonctions entières d'indices bornés n'ayant qu'un nombre fini de zéros. En appliquant une importante propriété due à A. F. Leont'ev et à G. P. Lapin, on localise ces singularités.

Introduction

On se propose d'étudier l'ultraconvergence (convergence d'une suite de sommes partielles) et les singularités de certaine fonction analytique représentée par une série d'exponentielles à exposants complexes dont les coefficients sont des fonctions entières d'indices bornées au sens de B. Lepson [18].

Mots clés : convergence, ultraconvergence, singularités, fonctions entières d'indices bornés.

Pour l'ultraconvergence de la série de Dirichlet classique A. Ostrowski montre, sous certaines conditions sur les exposants, que certaines sommes partielles de cette série convergent uniformément dans un voisinage suffisamment petit de chaque point de sa droite de convergence en lequel la fonction définie par cette série est holomorphe.

T. M. Gallie [13] a inauguré, pour les séries de Dirichlet à exposants complexes, une méthode d'étude féconde affinée par M. Blambert & J. Siméon [11].

G. L. Luntz [19] montre l'ultraconvergence pour les séries de Taylor-Dirichlet.

M. Blambert & R. Parvatham [8] étendent le problème de l'ultraconvergence à des séries d'exponentielles dont les coefficients sont des polynômes tayloriens.

Ce travail s'inspire des méthodes introduites par ces deux auteurs [8], [9], [10].

Dans la première partie, on traite des propriétés de convergence et d'ultraconvergence d'une série d'exponentielles dont les coefficients sont les fonctions entières d'indices bornés, dans le but d'utiliser un résultat lié au prolongement analytique de la fonction définie par cette série dans un ouvert connexe et de localiser ces singularités.

Dans la seconde partie, on aborde le problème de la localisation des singularités d'une fonction analytique définie par une série d'exponentielles dont les coefficients sont des fonctions entières d'indices bornés n'ayant qu'un nombre fini de zéros. Le résultat obtenu est déduit du rapprochement de deux types de propriétés : l'un relatif à la détermination d'une portion de frontière naturelle d'une fonction analytique (conséquence d'une propriété d'ultraconvergence) et l'autre reposant sur un théorème de A. F. Leont'ev [17] et G. P. Lapin [16], relatif à l'existence de fonctions entières du type exponentiel au sens de G. Pólya, sous des conditions portant sur la donnée des valeurs de ces fonctions et de certaines de leurs dérivées en des points déterminés.

Chapitre premier

Définition (B. Lepson [18] et S. M. Shah [20], p. 118)**.** *g est une fonction entière d'indice borné s'il existe un entier naturel fini, que l'on note m tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \in \mathbb{C}\colon \frac{|g^{(n)}(s)|}{n!} \leq \max\left\{\frac{|g^{(j)}(s)|}{j!} \mid j \in \{0, 1, \ldots, m\}\right\}$$

où $g^{(n)}(s)$ est la valeur au point s de $\mathbb{C}$ de la fonction dérivée d'ordre n de g avec $g^{(0)}(s) = g(s)$ et $0! = 1$. Le plus petit entier m ayant cette propriété est l'indice borné de g.

Lemme (W. K. Hayman [15], p. 121)**.** *Soit g une fonction entière d'indice borné que l'on note m, on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}\colon |g(s)| \leq A \exp\left[(m+1)|s|\right]$$

où

$$A = \max\left\{\frac{|g^{(j)}(0)|}{(m+1)^j} \mid j \in \{0, 1, \ldots, m\}\right\}.$$

On considère une suite de fonctions entières f_n d'indices bornés m_n (> 0), que l'on note $(f_n)_1^\infty$ et une suite $(\lambda_n)_1^\infty$ où les λ_n sont des constantes complexes telles que la suite des modules des λ_n, $(|\lambda_n|)_1^\infty$ est une D-suite $\Big(\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ 0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|,\ \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty\Big)$.

Soit l'élément suivant :

$$\{f\}\colon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) \exp(-s\lambda_n).$$

On désigne par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ qui sont les zéros de f_n et par $\mathcal{E}_\infty$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ qui sont chacun un zéro pour une infinité de f_n. On a donc :

$$\mathcal{E}_\infty = \left\{s \in \mathbb{C} \mid \exists (n_{s,j})_1^\infty,\ f_{n_{s,j}}(s) = 0\right\}.$$

On pose : $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^d \cup \mathcal{E}_\infty$ où $\mathcal{E}^d$ est le dérivé de $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ ($\mathcal{E}^d$ est donc l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{E}$). On supposera, dans tout ce travail $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \neq \emptyset$.

Remarque 1. Il est évident que $\mathcal{E}^*$ est un fermé de $\mathbb{C}$ ($\Longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$).

Remarque 2. Pour chaque point s de $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$, on a : $f_n(s) \neq 0$ à partir d'une certaine valeur de l'entier n dépendant du point s considéré. Sinon :

$$\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \exists n' \geq n,\ \exists s' \in \bar{d}_{(s,\varepsilon)} \colon f_{n'}(s') = 0$$

où ($\bar{d}_{s,\varepsilon)}$ est l'adhérence du disque ouvert $d_{(s,\varepsilon)}$ de centre s et de rayon ε $\big(\in\,]0, \operatorname{dist}(s, \mathcal{E}^*)[\big)$.

Il existe une suite infinie d'entiers strictement croissante $(n_j)_1^\infty$ et une suite infinie de points s'_j que l'on note $(s'_j)_1^\infty$ telles que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall s'_j \in \bar{d}_{(s,\varepsilon)} \colon f_{n_j}(s'_j) = 0.$$

La suite $(s'_j)_1^\infty$ possède, au moins, un point d'accumulation sur $\bar{d}_{(s,\varepsilon)}$ et donc $\bar{d}_{(s,\varepsilon)} \cap \mathcal{E}^d \neq \emptyset$, ou, à défaut, un point limite sur $\bar{d}_{(s,\varepsilon)}$ et donc $\bar{d}_{(s,\varepsilon)} \cap \mathcal{E}_\infty \neq \emptyset$. En définitive, $\bar{d}_{(s,\varepsilon)} \cap \mathcal{E}^* \neq \emptyset$. La contradiction établit l'assertion.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \colon A_n = \max \left\{ \frac{|f_n^{(j)}(0)}{(m_n+1)^j} \mid j \in \{0, 1, \ldots, m_n\} \right\},$$

$$\forall s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*,\ \exists n'\ (= n_s) \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall n \geq n' \colon$$

$$f_n(s) \exp(-s\lambda_n) \neq 0,$$

$$\delta(n, s) = \frac{-\log |f_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|},$$

(où $\log x$ désigne, pour $x > 0$, le logarithme népérien de x),

$$\delta_*(s) = \liminf_{n \to \infty} \{\delta(n, s)\}$$

$$\beta^* = \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{m_n}{|\lambda_n|} \right\},$$

$$D^* = \limsup_{n \to \infty} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} (m_j + 1)}{|\lambda_n|} \right\},$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \colon \mathcal{D}_{*,\alpha} = \big\{ s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \mid \delta_*(s) > \alpha \big\}.$$

On rappelle le théorème suivant :

Théorème 1 (M. Berland [5], p. 56)**.** *Sous les conditions :*

$$\sigma^* = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log A_n}{|\lambda_n|} = 0,\ \beta^* < \infty,$$

alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\colon \Big\{ \mathcal{D}_{*,\alpha} \neq \emptyset \Longrightarrow \forall K \ \textit{(compact)} \ \subset \mathcal{D}_{*,\alpha},\ \forall \beta' > \beta^*,$$

$$\exists n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \geq n',\ \forall s \in K\colon$$

$$|f_n(s)\exp(-s\lambda_n)| < \exp\big[-(\alpha-\beta')|\lambda_n|\big] \Big\}.$$

Remarque I.

① On considère l'élément dirichlétien de type classique :

$$\{\varphi\}\colon \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-s|\lambda_n|\right)$$

où $(a_n)_1^\infty$ est la suite des coefficients complexes a_n et $(|\lambda_n|)_1^\infty$ est une D-suite.

On désigne par σ_c^φ son abscisse de convergence simple et on pose :

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log|\sum_{t=1}^n a_t|}{|\lambda_n|} \right\}.$$

La condition $\alpha \in \,]0,\infty[$ implique $\sigma_c^\varphi \leq \alpha$. En effet, on considère une constante $\sigma_1 > \alpha$ et on a :

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \sigma_1 - \alpha[,\ \exists n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \geq n'\colon \left| \sum_{t=1}^n a_t \right| < \exp\left[(\alpha+\varepsilon)|\lambda_n|\right].$$

Il résulte de cette dernière relation qu'on a :

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \sigma_1 - \alpha[,\ \exists \theta_\varepsilon \in [1,\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\colon$$

$$\left| \sum_{t=1}^n a_t \right| < \theta_\varepsilon \exp\left[(\alpha+\varepsilon)|\lambda_n|\right]$$

et

$$\exp\big[(\alpha+\varepsilon)|\lambda_n|\big]\cdot\big[\exp\left(-\sigma_1|\lambda_n|\right)-\exp\left(-\sigma_1|\lambda_{n+1}|\right)\big]$$
$$\leq \sigma_1\int_{|\lambda_n|}^{|\lambda_{n+1}|}\exp\big[-(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)\sigma\big]d\sigma.$$

Or, d'après l'identité d'Euler, on a :

$$\sum_{t=1}^{n}a_t\exp\left(-\sigma_1|\lambda_n|\right)=\left(\sum_{t=1}^{n}a_t\right)\exp\left(-\sigma_1|\lambda_n|\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{r}a_t\right)\Big[\exp\left(-\sigma_1|\lambda_r|\right)-\exp\left(-\sigma_1|\lambda_{r+1}|\right)\Big],$$

on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}\colon\ \left|\sum_{t=1}^{n}a_t\exp\left(-\sigma_1|\lambda_t|\right)\right|\leq\theta_\varepsilon\exp\big[-\left(\sigma_1-\alpha-\varepsilon\right)|\lambda_n|\big]$$
$$+\frac{\theta_\varepsilon\sigma_1}{(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)}\cdot\Big\{\exp\big(-(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)|\lambda_1|\big)-\exp\big[-(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)|\lambda_n|\big]\Big\}$$
$$\cdot\left|\sum_{t=1}^{n}a_t\exp\left(-\sigma_1|\lambda_t|\right)\right|<\frac{\theta_\varepsilon\sigma_1}{(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)}\cdot\exp\big[-(\sigma_1-\alpha-\varepsilon)|\lambda_1|\big].$$

La suite $(\sum_{t=1}^{n}a_t\exp\left(-s|\lambda_t|\right))_1^\infty$ est bornée au point $s=\sigma_1$; il en résulte que l'élément dirichlétien $\{\varphi\}$ converge sur $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)=\sigma>\sigma_1\}$ et donc $\sigma_c^\varphi\leq\sigma_1$ or σ_1 étant arbitraire sur $]\alpha,\infty[$, on a donc :

$$\sigma_c^\varphi\leq\inf\sigma_1=\alpha.$$

② La condition $\sigma_c^\varphi\in\,]0,\infty[$ implique $\alpha\leq\sigma_c^\varphi$. En effet, on considère une constante $\sigma_1\in\,]\sigma_c^\varphi,\infty[$ et l'identité d'Abel :

$$\sum_{t=1}^{n}a_t=\left(\sum_{t=1}^{n}a_t\exp\left(-\sigma_1|\lambda_t|\right)\right)\exp\left(\sigma_1|\lambda_n|\right)$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{r}a_t\exp\left(-\sigma_1|\lambda_t|\right)\right)\Big(\exp\left(\sigma_1|\lambda_r|\right)-\exp\left(\sigma_1|\lambda_{r+1}|\right)\Big).$$

Or,

$$\exists M_{\sigma_1} \in \,]0,\infty[\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \colon \left|\sum_{t=1}^{n} a_t \exp\left(-\sigma_1|\lambda_t|\right)\right| \leq M_{\sigma_1}$$

et donc, puisque σ_1 est strictement positif :

$$\left(\left|\sum_{t=1}^{n} a_t\right| \leq 2M_{\sigma_1} \exp\left(\sigma_1|\lambda_n|\right) \Longrightarrow \alpha \leq \sigma_1\right).$$

Or σ_1 étant arbitraire sur $]\sigma_c^{\varphi}, \infty[$, on a :

$$\left(\sigma_c^{\varphi} \in \,]0,\infty[\Longrightarrow \alpha \leq \sigma_c^{\varphi}\right).$$

③ La condition $\alpha \in \,]0,\infty[$ implique $\sigma_c^{\varphi} \geq 0$. En effet, on considère un réel $\theta_1 \in \,]0,1[$. Il existe une suite infinie strictement croissante d'entiers $(n_p)_1^{\infty}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$\forall p \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} : \frac{|\lambda_{n_p}|}{|\lambda_{n_{p+1}}|} \leq \theta_1$$

$$\lim_{p\to\infty} \left\{\frac{\log\left|\sum_{t=1}^{n_p} a_t\right|}{|\lambda_{n_p}|}\right\} = \alpha.$$

On a :

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists p_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall p \geq p_{\varepsilon_1} \colon$$

$$\exp\left[(\alpha - \varepsilon_1)|\lambda_{n_p}|\right] < \left|\sum_{t=1}^{n_p} a_t\right| < \exp\left[(\alpha + \varepsilon_1)|\lambda_{n_p}|\right].$$

On choisit ε_1 satisfaisant à la condition :

$$\left(\frac{\alpha - \varepsilon_1}{\alpha + \varepsilon_1}\right) > \theta_1$$

(ce qui est toujours possible). On a :

$$\forall p \geq p_{\varepsilon_1} \colon \left|\sum_{t=n_p+1}^{n_{p+1}} a_t\right| \geq \left|\sum_{t=1}^{n_{p+1}} a_t\right| - \left|\sum_{t=1}^{n_p} a_t\right|$$

$$> \exp\left[(\alpha - \varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\right] - \exp\left[(\alpha + \varepsilon_1)|\lambda_{n_p}|\right].$$

On a :

$$\left|\sum_{t=n_p+1}^{n_{p+1}} a_t\right| > \exp\left[(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\right] \cdot \Big\{1-\exp\left[(\alpha+\varepsilon_1)|\lambda_{n_p}|-(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\right]\Big\}.$$

Or

$$\begin{aligned}\exp&\left[(\alpha+\varepsilon_1)|\lambda_{n_p}|-(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\right]\\ &= \exp\left\{-(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\left[1-\left(\frac{\alpha+\varepsilon_1}{\alpha-\varepsilon_1}\right)\frac{|\lambda_{n_p}|}{|\lambda_{n_{p+1}}|}\right]\right\}\\ &\leq \exp\left[-(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|(1-\theta_2)\right]\end{aligned}$$

avec :

$$1 > \theta_2 \geq \left(\frac{\alpha+\varepsilon_1}{\alpha-\varepsilon_1}\right)\frac{|\lambda_{n_p}|}{|\lambda_{n_{p+1}}|},$$

en posant :

$$\theta_2 = \theta_1\left(\frac{\alpha+\varepsilon_1}{\alpha-\varepsilon_1}\right).$$

On a donc :

$$\forall\varepsilon_2 \in \,]0,1[\,,\ \exists p_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\},\ \forall p \geq p_{\varepsilon_2}:\quad 1-\exp\Big[(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|(1-\theta_2)\Big] \geq 1-\varepsilon_2,$$

et

$$\forall p \geq \max\left(p_{\varepsilon_1}, p_{\varepsilon_2}\right):\ \left|\sum_{t=n_p+1}^{n_{p+1}} a_t\right| > (1-\varepsilon_2)\exp\Big[(\alpha-\varepsilon_1)|\lambda_{n_{p+1}}|\Big],$$

d'où $\sigma_c^\varphi \geq 0$. On a donc :

$$\big(\alpha \in \,]0,\infty[\, \Longrightarrow \sigma_c^\varphi \geq 0\big).$$

④ La condition $\alpha < 0$ implique $\sigma_c^\varphi \leq 0 \Longleftrightarrow (\sigma_c^\varphi > 0 \Longrightarrow \alpha \geq 0)$. En effet,

$$\forall\alpha' \in\ [\alpha,0[,\ \exists n_{\alpha'} \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\},\ \forall n \geq n_{\alpha'}:\ \left|\sum_{t=1}^{n} a_t\right| \leq \exp\left(\alpha'|\lambda_n|\right),$$

et donc :

$$M = \max\left\{\left|\sum_{t=1}^{n} a_t\right| \mid n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\right\} < \infty.$$

Il en résulte que l'élément dirichlétien $\{\varphi\}$ converge sur le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > 0\}$ et donc $\sigma_c^\varphi \leq 0$.

De ② et ③, on déduit : $\left\{\alpha \in]0, \infty[\Longrightarrow \alpha \leq \sigma_c^\varphi\right\}$ et d'après ① on a : $\left\{\alpha \in]0, \infty[\Longrightarrow \alpha = \sigma_c^\varphi\right\}$.

De ② et ④, on déduit : $\left\{\sigma_c^\varphi \in]0, \infty[\Longrightarrow \alpha \leq \sigma_c^\varphi\right\}$ et d'après ① on a : $\left\{\sigma_c^\varphi \in]0, \infty[\Longrightarrow \alpha = \sigma_c^\varphi\right\}$.

On propose sous le vocable ¡¡ algorithme de E. Cahen ¿¿ – au cas positif – cet énoncé ci-dessus (V. Bernstein [7], p. 5).

Remarque II.

Si $\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$: $a_n = 1$, l'élément dirichlétien $\{\varphi\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-s|\lambda_n|)$ a pour abscisse de convergence

$$(0 \leq)\ \sigma_c^\varphi\ (= \sigma_a^\varphi)\ = \alpha = L^* = \limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{\log n}{|\lambda_n|}\right\}.$$

On énonce :

Théorème 2. *Sous les conditions :*

$$\sigma^* = 0,\ L^* < \infty,\ \beta^* < \infty, \exists s_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \colon \delta_*(s_0) < \infty,$$

alors l'élément

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) \exp(-s\lambda_n)$$

converge absolument sur $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$ et uniformément sur tout compact K inclus dans $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$.

$\{f\}$ diverge sur $(\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*) \smallsetminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$ (où $\overline{\mathcal{D}}_{*,0}$ désigne l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de $\mathcal{D}_{*,0}$).

Démonstration.

1) On suppose que $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$ n'est pas vide. Soit un compact K inclus dans $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$. Il existe $\alpha > L^* + \beta^*$: $K \subset \mathcal{D}_{*,\alpha}$.

Remarque. δ_* étant la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$ est uniformément continue sur chaque compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$ (M. Berland [5], p. 58). L'ensemble $\mathcal{D}_{*,\alpha}$ pour chaque α de $\mathbb{R}$, est alors un ouvert (s'il n'est pas vide) de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$.

Soit $\beta' \in]\beta^*, \alpha - L^*[$. D'après le théorème 1, on a :

$$\alpha - \beta' > L^*,\ \exists n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \geq n',\ \forall s \in K\colon \\ |f_n(s)\exp(-s\lambda_n)| < \exp\left[-(\alpha - \beta')|\lambda_n|\right].$$

D'où :

$$\forall n_1 \geq n \geq n',\ \forall s \in K\colon \left|\sum_{n=n'}^{n_1} f_n(s)\exp(-s\lambda_n)\right| \leq \sum_{n=n'}^{n_1} \left|f_n(s)\exp(-s\lambda_n)\right| \\ < \sum_{n=n'}^{n_1} \exp\left[-(\alpha - \beta')|\lambda_n|\right].$$

L'élément dirichlétien $\{\varphi\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-s|\lambda_n|)$ converge et son abscisse de convergence est L^* ($< \alpha - \beta'$). D'où $\{f\}$ converge absolument et uniformément dans K. Puisque K est compact arbitraire inclus dans $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$, $\{f\}$ converge uniformément dans tout compact inclus dans $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$ et converge absolument dans $\mathcal{D}_{*,L^*+\beta^*}$.

2) $\{f\}$ diverge sur $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$. En effet, soit $s \in (\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$. Alors :

$$\delta_*(s) < 0 \text{ et } \exists \alpha > 0\colon \delta_*(s) < -\alpha.$$

On a donc :

$$\forall s \in (\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0},\ \exists \alpha > 0,\ \exists (n_j)_1^{\infty}\colon \delta(n_j, s) < -\alpha$$

où $(n_j)_1^{\infty}$ est une sous-suite de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors :

$$\left|f_{n_j}(s)\exp(-s\lambda_{n_j})\right| > \exp\left(\alpha|\lambda_{n_j}|\right) > 1.$$

Donc $\{f\}$ diverge sur $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$. □

Remarque. Soit $\mathcal{D}_{*,L^*} \neq \emptyset$ et $L^* \in [0, \infty[$. On a :

$$\forall s \in \mathcal{D}_{*,L^*},\ \exists \varepsilon_s > 0 \colon \delta_*(s) > L^* + \varepsilon_s\ ;$$

$$\exists n'_s \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall n \geq n'_s \colon \delta(n,s) > L^* + \varepsilon_s\ ;$$

$$\forall n \geq n'_s \colon\ -\log\big|f_n(s)\exp(-s\lambda_n)\big| > (L^* + \varepsilon_s)|\lambda_n|$$

et

$$\sum_{n=n'_s}^{\infty} \big|f_n(s)\exp(-s\lambda_n)\big| < \sum_{n=n'_s}^{\infty} \exp\big[-(L^* + \varepsilon_s)|\lambda_n|\big].$$

La série à droite converge et donc $\{f\}$ converge absolument dans $\mathcal{D}_{*,L^*}$.

Quand $L^* = 0$, $\{f\}$ converge dans $\mathcal{D}_{*,0}(\subset \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*)$ et diverge dans $(\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*) \smallsetminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$. Sous condition sur β^*, sous les deux conditions $\sigma^* = 0$ et $L^* = 0$, l'ouvert $\mathcal{D}_{*,0}$ est alors l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$ dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$.

Définition. *La suite $(\lambda_n)_1^\infty$ satisfait aux conditions (C) suivantes :*

1) *La série de Dirichlet $\{\varphi\}\colon \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-s|\lambda_n|)$ converge dans*

$$P_0 = \big\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\big\}.$$

2) *$\forall \eta > 0$, la suite de fonctions $(\theta_n)_1^\infty$ est bornée dans*

$$\bar{P}_\eta = \big\{\forall s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \geq \eta\big\}$$

où :

$$\forall s \in P_0 \colon \theta_n(s) = \sum_{j=n}^{\infty} \exp\big[-s\,(|\lambda_j| - |\lambda_n|)\big].$$

3) *$\forall \eta > 0$, la suite de fonctions $(\theta_n^*)_1^\infty$ est bornée dans $\bar{P}_\eta$ où :*

$$\forall s \in P_0 \colon \theta_n^*(s) = \sum_{j=1}^{n} \exp\big[-s\,(|\lambda_n| - |\lambda_j|)\big].$$

Théorème 3. *Sous les conditions :*

1) *La suite* $(\lambda_n)_1^\infty$ *satisfait les conditions* (C) *(implique* $L^* = 0$*),*

2) $\sigma^* = 0$, $\beta^* < \infty$ *et* $\mathcal{D}_{*,\beta^*} \neq \emptyset$*,*

3) *Il existe une sous-suite* $(n_\nu)_0^\infty$ *de* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et une suite de constantes strictement positives* $(\theta_\nu)_0^\infty$ *avec* $\lim_{\nu\to\infty} \theta_\nu = \infty$*, telles que :*

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\colon\ |\lambda_{n_\nu+1}| > (1+\theta_\nu)\,|\lambda_{n_\nu}|\,,$$

alors la suite $(S_{n_\nu}(s))_0^\infty$ *où* $S_{n_\nu}(s) = \sum_{j=1}^{n_\nu} f_j(s)\exp(-s\lambda_j)$ *converge en chaque point* s *d'un ouvert connexe* D *inclus dans* $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$ *et tel que* $D \cap \mathcal{D}_{*,\beta^*} \neq \emptyset$ *dans lequel la fonction analytique* f *définie par* $\{f\}\colon \sum_{n=1}^\infty f_n(s)\exp(-s\lambda_n)$ *est holomorphe.*

Remarque. Même démonstration d'un théorème de M. Blambert & R. Parvatham [8] en remplaçant le polynôme $P_n(s)$ par f_n et, p. 251 :

$$\begin{aligned}
&\forall s \in \bar{\Delta}_3,\ \exists n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \geq n'\colon \\
&\qquad \delta(n,s) \geq \frac{-\log A_n}{|\lambda_n|} - \left(\frac{m_n+1}{|\lambda_n|} + 1\right)|s| \\
&\qquad \delta_*(s) \geq -(\beta^*+1)\mu_{\Delta_3} \quad \text{car} \quad \sigma^* = 0 \quad \text{et} \quad \beta^* < \infty.
\end{aligned}$$

Théorème 4. *Sous les conditions :*

1) *La suite* $(\lambda_n)_1^\infty$ *satisfait les conditions* (C)*,*

2) $\sigma^* = 0$, $\beta^* < \infty$ *et* $\mathcal{D}_{*,\beta^*} \neq \emptyset$*,*

3) $(\theta_n)_1^\infty$ *étant une suite strictement positive, telle que :*

$$\exists n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \geq n'\colon\ |\lambda_{n+1}| > (1+\theta_n)|\lambda_n| \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty,$$

alors chaque point de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*)$ *est un point singulier pour* f *définie par*

$$\{f\}\colon \sum_{n=1}^\infty f_n(s)\exp(-s\lambda_n).$$

En particulier, si $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$*, alors* $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0})$ *est la frontière naturelle pour* f*.*

Démonstration. On suppose faux ce théorème. Il existe alors un point s_0 de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*)$ et un disque ouvert de centre s_0 et de rayon $\varepsilon > 0$, noté $d_{(s_0,\varepsilon)}$ pour lequel f est holomorphe. On pose :

$$\forall s \in d_{(s_0,\varepsilon)} \colon S_n(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(s) \exp(-s\lambda_j).$$

D'après le théorème 3, la suite de sommes partielles d'indice n de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, notée $(S_n(s))_1^\infty$, converge dans $d_{(s_0,\varepsilon)}$. Or $\{f\}$ diverge dans $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$ d'après le théorème 2. Il existe nécessairement des points communs de $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$ et de $d_{(s_0,\varepsilon)}$. La contradiction établit l'assertion.

Si $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) = \overline{\mathcal{D}}_{*,0} \cap ((\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*) \setminus \mathcal{D}_{*,0}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*$ (où $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{*,0} = \mathcal{D}_{*,0}$) est la frontière naturelle pour f. $\square$

Chapitre 2

Définition (R. P. Boas [12])**.** *φ est une fonction entière du ¡¡ type exponentiel ¿¿ (au sens de G. Pólya) si φ est au plus de l'ordre borélien égal à 1 et au plus du type fini de cet ordre, par exemple égal à σ, si cet ordre est 1. On note $\varphi \in [1, \infty)$ et, plus précisément, $\varphi \in [1, \sigma]$.*

Le développement taylorien de φ au point $z = 0$ de $\mathbb{C}$ est :

$$\forall z \in \mathbb{C} \colon \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$$

($\Longleftrightarrow \{\varphi\} \colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est le ¡¡ germe taylorien de φ au point $z = 0$ ¿¿).

L'élément $\{\Phi\} : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n n!}{z^{n+1}}\right)$ est le ¡¡ germe taylorien au point ∞ du plan gaussien $\overline{\mathbb{C}}$ d'une fonction holomorphe dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{d}_{(0,\sigma)}$ ¿¿, que l'on note Φ.

On a :

$$\forall s \in \mathbb{C} \colon \varphi(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\mathrm{Fr}(\overset{\circlearrowleft}{d}_{(0,\sigma')})} \Phi(z) \exp(zs)\, dz$$

où $\sigma' > \sigma$ (R. P. Boas [12], p. 74).

Φ est la transformée de E. Borel de φ.

Lemmes (A. F Leont'ev [17] et G. P. Lapin [16])**.** *Sous les conditions :*

1) *$(\mu_n)_1^\infty$ une suite de constantes complexes telle que : $(|\mu_n|)_1^\infty$ est une D-suite.*

2) *$(p_n)_1^\infty$ est une suite d'entiers strictement positifs.*

3) *ρ est une constante strictement positive et*

$$m = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid n > \rho\}.$$

4) *$(a_{n,i,q})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p_n\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, est un ensemble de constantes complexes satisfaisant à la condition :*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log b_n}{|\mu_n|^\rho} \right\} < \infty$$

où

$$b_n = \max \left\{ \frac{|a_{n,i,q}|}{(i-1)!} \mid i \in \{1, 2, \ldots, p_n\},\ q \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \right\}.$$

Posant :

$$\theta_1 = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{|\mu_n|^\rho} \right\} < \infty$$

et

$$\theta_2 = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log \left(\max \left\{ \frac{|\gamma_{n,j}|}{j!} \mid j \in \{1, 2, \ldots, p_n\} \right\} \right)}{|\mu_n|^\rho} \right\} < \infty$$

où :

$$\gamma_{n,j} = \frac{d^{(j-1)}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z-\mu_n)^{p_n}}{F(z)} \right]_{z=\mu_n}$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C} \colon F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\mu_n} \right)^m \right)^{p_n}.$$

Alors, il existe une fonction entière $\varphi \in [\rho, \infty)$ satisfaisant aux conditions :

$$(C_1): \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, p_n\},\ \forall q \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$
$$a_{n,i,q} = \varphi^{(i-1)}(\varepsilon^q \mu_n) \quad \textit{où} \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right).$$

Posant :

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log M_n}{|\mu_n|^\rho} \right\}, \quad \gamma^+ = \max(0, \gamma),$$
$$M_n = \max \left\{ \frac{|\gamma_{n,p_n-i-\ell+1}|}{(p_n - i - \ell)!} \cdot \frac{|a_{n,\ell+1,q}|}{\ell!} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} i\in\{1,2,\ldots,p_n\} \\ \ell\in\{0,1,\ldots,p_n-i\} \\ q\in\{0,1,\ldots,m-1\} \end{smallmatrix} \right\}.$$

Si $\gamma < \infty$, et il existe une fonction entière φ satisfaisant aux conditions (C_1) et $\varphi \in [\rho, \tau + \gamma^+]$, avec : $F \in [\rho, \tau]$.

Remarque I. La notation :

$$\gamma_{n,j} = \frac{d^{(j-1)}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z-\mu_n)^{p_n}}{F(z)} \right]_{z=\mu_n}$$

signifie que $\gamma_{n,j}$ est la dérivée au point $z = \mu_n$ de l'extension à $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j\neq n}\{\mu_j\}$ de la fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}\{\mu_j\}$ en lui attribuant pour valeur au point μ_n : $\lim_{z\to\mu_n} \frac{(z-\mu_n)^{p_n}}{F(z)}$.

Remarque II. La condition $\theta_1 < \infty$ implique que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\mu_n}\right)^m\right)^{p_n}$$

est absolument convergent dans $\mathbb{C}$ et uniformément convergent sur tout compact dans $\mathbb{C}$ et qu'en outre, il existe un réel strictement positif $\mathfrak{r}$ tel que $F \in [\rho, \mathfrak{r}]$.

Remarque III. La suite $(\mu_n)_1^\infty$ satisfait à une condition un peu plus restrictive que celle figurant dans le lemme de Leont'ev. En effet, ici, la suite des modules $(|\mu_n|)_1^\infty$ est une D-suite.

On considère l'élément suivant :

$$\{f\}\colon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\exp(-s\lambda_n)$$

où la suite $(f_n)_1^\infty$ des fonctions entières f_n est d'indices bornés m_n n'ayant qu'un nombre fini de zéros. Utilisant un théorème (F. Gross [14], p.975 et S. M. Shah [20]), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall s \in \mathbb{C}\colon f_n(s) = P_n(s)\exp(\alpha_n s)$$

où $P_n(s)$ est un polynôme taylorien de degré ν_n et α_n est une constante complexe. On a donc :

$$\{f\}\colon \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)\exp(-s\mu_n)$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\colon \mu_n = \lambda_n - \alpha_n.$$

On suppose que $(|\mu_n|)_1^\infty$ est une D-suite. On pose :

$$D_*^* = \limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}(\nu_j+1)}{|\mu_n|}\right\}.$$

$D_*^* < \infty$ implique la convergence absolue et uniforme dans tout compact dans $\mathbb{C}$ du produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\mu_n^2}\right)^{\nu_n+1}.$$

On désigne par $L(z)$ sa valeur au point z de $\mathbb{C}$. La fonction L est une fonction entière et $L \in [1, \pi D_*^*]$.

Choisissant, dans le lemme de Leont'ev & Lapin, la constante ρ égale à 1, on a : $m = 2$. On suppose que la constante $\theta_2 < \infty$ est satisfaite ici, avec

$L(z)$ en place de $F(z)$. Pour valeurs $a_{n,i,q}$, on choisit :

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall i \in \{2,3,\ldots,\nu_n+1\},\ \forall q \in \{0,1\}\colon a_{n,i,q} = 0\\
&\forall p \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\colon a_{n_p,1,0} = 1,\ a_{n_p,1,1} = 0\\
&\forall q \in \{0,1\},\ \forall n \notin (n_p)_1^\infty\colon a_{n,1,q} = 0\\
&M_{n_p} = \max\left\{ \frac{\left|\gamma_{n_p,\nu_{n_p}+2-i}\right|}{(\nu_{n_p}+1-i)!} \mid i \in \{1,2,\ldots,\nu_{n_p}+1\} \right\}\\
&\text{et pour} \quad n \notin (n_p)\colon M_n = 0.
\end{aligned}$$

La condition $\theta_1 < \infty$ implique $\gamma = \theta_2 < \infty$. Les conditions des lemmes Leont'ev & Lapin étant satisfaites, il existe, au moins, une fonction entière $\varphi \in [1, \pi D_*^* + \gamma^+]$ telle que les conditions (C_1) suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall i \in \{1,2,\ldots,\nu_n\}\colon \varphi^{(i)}(\mu_n) = 0\\
&\forall p \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\colon \varphi(\mu_{n_p}) = 1, \quad \forall n \notin (n_p)_1^\infty\colon \varphi(\mu_n) = 0.
\end{aligned}$$

Soit donc une certaine fonction entière $\varphi \in [1, \sigma]$ avec $\sigma = \pi D_*^* + \gamma^+$, satisfaisant aux conditions (C_1) précisées ci-dessus.

Remarque. On a donc :

$$\forall s \in \mathbb{C}\colon \varphi(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\mathrm{Fr}(\overset{\curvearrowleft}{d}_{(0,\sigma')})} \exp(us)\Phi(u)\ du$$

où $\sigma' > \sigma$.

Φ est la transformée de E. Borel de φ, et

$$\forall t \in \mathbb{N}\colon \varphi^{(t)}(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\mathrm{Fr}(\overset{\curvearrowleft}{d}_{(0,\sigma')})} u^t \exp(us)\Phi(u)\ du.$$

On désigne par E_f un ensemble sur lequel $\{f\}$ converge uniformément. On suppose l'ouvert $\overset{\circ}{E}_f \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{G}$ un ouvert connexe inclus dans $\overset{\circ}{E}_f$ et $\mathcal{G}_H$ un ouvert connexe tel que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_H$, dans lequel est holomorphe une extension $\bar{f}$ de la fonction f définie sur $\mathcal{G}$. On a, par définition :

$$\forall s \in \mathcal{G}\colon \bar{f}(s) = f(s).$$

On pose :

$$\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{G} \smallsetminus \overline{\left(\bigcup_{z \in \mathrm{Fr}(\mathcal{G})} d_{(z,\sigma)} \right)}$$

(où $\sigma = \pi D_*^* + \gamma^*$). On suppose que $\mathcal{G}_\sigma \neq \emptyset$. Soit un composant connexe de $\mathcal{G}_H \smallsetminus \overline{\left(\bigcup_{z \in \mathrm{Fr}(\mathcal{G})} d_{(z,\sigma)} \right)}$ — que l'on note $\mathcal{G}_{H,\sigma}$ — ayant une intersection non vide avec $\mathcal{G}_\sigma$ ($\Longleftrightarrow \mathcal{G}_{H,\sigma} \cap \mathcal{G}_\sigma \neq \emptyset$). On peut donc trouver un réel strictement ε_0 (suffisamment petit) de sorte qu'il existe un ouvert connexe $\mathcal{G}_{H,\sigma+2\varepsilon_0}$ satisfaisant aux conditions :

$$\mathcal{G}_{H,\sigma+2\varepsilon_0} \subset \mathcal{G}_H \smallsetminus \overline{\left(\bigcup_{z \in \mathrm{Fr}(\mathcal{G})} d_{(z,\sigma+2\varepsilon_0)} \right)}$$

$$\mathcal{G}_{H,\sigma+2\varepsilon_0} \cap \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0} \neq \emptyset \quad \text{où} \quad \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0} = \mathcal{G} \smallsetminus \overline{\left(\bigcup_{z \in \mathrm{Fr}(\mathcal{G})} d_{(z,\sigma+2\varepsilon_0)} \right)} \neq \emptyset.$$

On a :

$$\forall z \in \mathcal{G}_{H,\sigma+2\varepsilon_0},\ \forall \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)},\ \forall u \in d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)} \colon \xi - u \in \overline{d_{(z,\sigma+2\varepsilon_0)}} \subset \mathcal{G}_H.$$

Posant $\mathcal{G}'_\sigma = \bigcup_{z \in \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0}} d_{(z,2\varepsilon_0)}$, on a : $\mathcal{G}'_\sigma \subset \mathcal{G}_\sigma$.

L'élément $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\xi - u) \exp\left[-(\xi - u)\mu_n\right]$ converge uniformément par rapport à $(\xi, u) = \overline{d_{(z,\varepsilon_0)}} \times \overline{d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}}$ pour chaque point $z \in \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0}$. La fonction f des deux variables ξ et u : $(\xi, u) \mapsto f(\xi - u)$ est holomorphe sur $d_{(z,\varepsilon_0)} \times d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}$ et continue sur $\overline{d_{(z,\varepsilon_0)}} \times \overline{d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}}$.

Or le point z étant fixé dans $\mathcal{G}_{H,\sigma+2\varepsilon_0}$, la fonction $\bar{f}$ définie dans $d_{(z,\varepsilon_0)}$:

$$\forall \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)} \colon \bar{f}(\xi - u),$$

indexée par u dans $\overline{d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}}$ (et plus particulièrement dans $\mathrm{Fr}\left(d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}\right)$ est holomorphe dans $d_{(z,\varepsilon_0)}$.

On considère la fonction F_z, indexée par z dans $\mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0}$, définie dans $d_{(z,\varepsilon_0)}$, telle que :

$$\forall \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)} \colon F_z(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}} f(\xi - u)\Phi(u)\, du$$

où $\Gamma_{\varepsilon_0} = \mathrm{Fr}\left(d_{(0,\sigma+\varepsilon_0)}\right)$.

F_z est holomorphe dans $d_{(z,\varepsilon_0)}$, donc au point z. On a : $\forall \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)}$:

$$F_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \left(\sum_{j=0}^{\nu_n} a_{n,j} (\xi - u)^j \right) \exp(u\mu_n)\Phi(u)\ du \right\} \exp(-\xi\mu_n)$$

où

$$\forall \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall s \in \mathbb{C} \colon P_n(s) = \sum_{j=0}^{\nu_n} a_{n,j} s^j$$

avec :

$$a_{n,j} = \frac{P_n^{(j)}(0)}{j!},$$

$$F_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu_n} a_{n,j} \left(\sum_{t=0}^{j} (-1)^t \binom{j}{t} \xi^{j-t} \varphi^{(t)}(\mu_n) \right) \exp(-\xi\mu_n) \right\} \exp(-\xi\mu_n)$$

puisque $\varphi^{(t)}(\mu_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}} u^t \exp(u\mu_n)\Phi(u)\ du)$.

D'où :

$$\forall z \in \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0},\ \forall \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)} \colon$$
$$F_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu_n} \frac{(-1)^j \varphi^{(j)}(\mu_n) P_n^{(j)}(\xi)}{j!} \right\} \exp(-\xi\mu_n).$$

L'espace des doublets $\left(d_{(z,\varepsilon_0)}, F_z\right)$, indexés par z dans $\mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0}$, est, en général, une restriction d'une branche de fonction analytique — que l'on note F — holomorphe dans

$$\mathcal{G}'_{\sigma+\varepsilon_0} = \bigcup_{z \in \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0}} d_{(z,\varepsilon_0)}.$$

Chaque doublet est un germe de F.

On a donc :

$$\forall \xi \in \mathcal{G}'_{\sigma+\varepsilon_0},\ \exists z \in \mathcal{G}_{\sigma+2\varepsilon_0},\ \xi \in d_{(z,\varepsilon_0)} \colon$$
$$F_z(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}} f(\xi - u)\Phi(u)\ du.$$

D'où :

$$\forall \xi \in \mathcal{G}'_{\sigma+\varepsilon_0} \colon F(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}^{\circlearrowleft}} f(\xi - u)\Phi(u)\, du$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu_n} \frac{(-1)^j \varphi^{(j)}(\mu_n) P_n^{(j)}(\xi)}{j!} \right\} \exp(-\xi\mu_n).$$

On considère la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu_n} \frac{(-1)^j \varphi^{(j)}(\mu_n) P_n^{(j)}(s)}{j!} \right\} \exp(-s\mu_n).$$

Cette série converge uniformément dans tout compact inclus dans l'ouvert $G'_{\sigma+\varepsilon_0}$.

$\bar{f}$ est une fonction de deux variables ξ et u, en posant $\xi - u = s$, avec $\xi - u \in \mathcal{G}_H$. La fonction $\bar{f}$ est holomorphe dans $G_{H,\sigma+2\varepsilon_0} \times \Gamma_{\varepsilon_0}$.

La fonction $\overline{F}$ définie dans $G_{H,\sigma+2\varepsilon_0}$

$$\left(\text{à savoir : } \forall s \in G_{H,\sigma+2\varepsilon_0} \colon \overline{F}(s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\varepsilon_0}^{\circlearrowleft}} \bar{f}(s-u)\Phi(u)\, du\right)$$

est une extension holomorphe de F à $G_{H,\sigma+2\varepsilon_0}$.

On énonce :

Théorème 5. *Sous les conditions :*

1) *La suite $(\mu_n)_1^\infty$ satisfait les conditions (C) en remplaçant λ_n par μ_n,*

2) *$D_*^* < \infty$,*

3) *$(\theta_{n_p})_1^\infty$ est une suite strictement positive, telle que :*

$$\exists p' \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall p \geq p' \colon \left|\mu_{n_{p+1}}\right| > (1+\theta_{n_p})|\mu_{n_p}| \quad \textit{et} \quad \lim_{p\to\infty} \theta_{n_p} = \infty.$$

4) *$\mathcal{D}_{*,0}$ est une partie stricte de $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$ où*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \colon \mathcal{D}_{*,\alpha} = \{s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \mid \delta_*(s) > \alpha\}$$

avec

$$\delta_*(s) = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{-\log|P_n(s)\exp(-s\mu_n)|}{|\mu_n|} \right\},$$

$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^d \cup \mathcal{E}_\infty$, $\mathcal{E}^d$ *est le dérivé de* $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n$ *est l'ensemble des points de* $\mathbb{C}$ *qui sont les zéros du polynôme* P_n *et* $\mathcal{E}_\infty$ *est l'ensemble des points de* $\mathbb{C}$ *qui sont chacun un zéro pour une infinité de* P_n.

5) $\gamma < \infty$ *avec :*

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \log\max\left(\frac{|\gamma_{n,j}|}{j!} \mid j \in \{1,2,\ldots,\nu_n+1\} \right) \right\}$$

où :

$$\gamma_{n,j} = \frac{d^{(j-1)}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z-\mu_n)^{\nu_n+1}}{L(z)} \right]_{z=\mu_n}$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon L(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)^{\nu_n+1}, \ L \in [1, \pi D_*^*].$$

6) $m_n \sim \nu_n$, $|\mu_n| \sim |\lambda_n|$.

On ne peut obtenir une extension holomorphe à $\mathcal{D}_{*,0} \cup d_{(s,\sigma')}$, *où* $s \in \mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}^*)$, *de la fonction* f *définie dans* $\mathcal{D}_{*,0}$, *où* $\sigma' > \pi D_*^* + \gamma^+$ $(\Longleftrightarrow \sigma' > \sigma)$ *avec* $\gamma^+ = \max(0,\gamma)$.

Démonstration. Pour toute suite $(\lambda_n)_1^\infty$ satisfaisant aux conditions (C), on a :

$$L^* \left(= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{|\lambda_n|} \right) \right) = 0 \quad \left(= L = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{|\mu_n|} \right) \right) \quad \text{car} \quad |\mu_n| \sim |\lambda_n|.$$

La condition $D_*^* < \infty$ implique :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \log\left(\sum_{j=1}^n \frac{\nu_j+1}{|\mu_n|} \right) \right\} = 0,$$

on sait qu'alors (Théorème 2, remarque) l'élément

$$\{f\} : \sum_{n=1}^\infty P_n(s)\exp(-s\mu_n)$$

converge absolument dans l'ouvert $\mathcal{D}_{*,0}$ est uniformément dans tout compact inclus dans $\mathcal{D}_{*,0}$, et diverge sur $(\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*) \smallsetminus \overline{\mathcal{D}}_{*,0}$ (M. Blambert & R. Parvatham [8], p. 243).

De la suite $(\mu_n)_1^\infty$ on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n_p})_1^\infty$ telle que :

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{-\log |P_{n_p}(s_0) \exp(-s_0 \mu_{n_p})|}{|\mu_{n_p}|} \right) = 0$$

et

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{\mu_{n_p+1}}{\mu_{n_p}} \right| = \infty$$

avec :

$$s_0 \in \mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*) \neq \emptyset$$

(car $\mathcal{D}_{*,0}$ est une partie stricte de $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$), et s_0 étant un point arbitraire de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*)$ et $\delta_*(s_0) = 0$.

On considère l'élément suivant :

$$\{F\} \colon \sum_{p=1}^{\infty} P_{n_p}(s) \exp(-s\mu_{n_p})$$

et on pose :

$$\forall s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \colon \delta_*^1(s) = \liminf_{p\to\infty} \left(\frac{-\log |P_{n_p}(s) \exp(-s\mu_{n_p})|}{|\mu_{n_p}|} \right)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \colon \mathcal{D}_{*,\alpha}^1 = \left\{ s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \mid \delta_*^1(s) > \alpha \right\}.$$

On a :

$$\forall s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^* \colon \left\{ \delta_*^1(s) \geq \delta_*(s) \Longrightarrow \mathcal{D}_{*,\alpha}^1 \supset \mathcal{D}_{*,\alpha} \right\}.$$

δ_*^1 est une fonction lipschitzienne dans tout compact inclus dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$.

En effet, soit un quelconque compact K inclus dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*$. On pose :

$$\varepsilon_K = \mathrm{dist}(K, \mathcal{E}^*).$$

On a :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_K],\ \exists p' \ (= p_\varepsilon) \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ \forall p \geq p',\ \forall (s, s') \in K \times K,\ s \neq s' \colon$$

$$P_{n_p}(s) \neq 0 \quad \text{et} \quad P_{n_p}(s') \neq 0,$$

$$\log|P_{n_p}(s)| - \log|P_{n_p}(s')| \leq \sum_{j=1}^{\nu_{n_p}} \log\left(1 + \frac{|s-s'|}{\varepsilon}\right),$$

$$\begin{aligned}|\delta(n_p,s) - \delta(n_p,s')| &\leq |s-s'| + \frac{|s-s'|}{\varepsilon|\mu_{n_p}|} \sum_{j=1}^{\nu_{n_p}} \left(\frac{\log\left(1+\frac{|s-s'|}{\varepsilon}\right)}{\frac{|s-s'|}{\varepsilon}}\right) \\ &\leq |s-s'| + \frac{\nu_{n_p}|s-s'|}{\varepsilon|\mu_{n_p}|} \sup\left(\frac{\log(1+x)}{x} \mid x>0\right).\end{aligned}$$

Or :

$$\sup\left(\frac{\log(1+x)}{x} \mid x>0\right) = 1.$$

D'où :

$$|\delta(n_p,s) - \delta(n_p,s')| \leq |s-s'|\left(1 + \frac{\nu_{n_p}}{\varepsilon|\mu_{n_p}|}\right).$$

On pose :

$$\mu_\varepsilon^* = \limsup_{p\to\infty}\left(1 + \frac{\nu_{n_p}}{\varepsilon|\mu_{n_p}|}\right) < \infty.$$

$$\exists s_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*,\ \delta_*^1(s_0) < \infty,\ \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_K[,\ \forall (s,s') \in K\times K$$
$$|\delta_*^1(s) - \delta_*^1(s')| \leq \mu_\varepsilon^*|s-s'|$$

et

$$\forall (s,s') \in K\times K\colon |\delta_*^1(s) - \delta_*^1(s')| \leq \mu_{\varepsilon_K}^*|s-s'|$$

en posant :

$$\mu_{\varepsilon_K}^* = \inf\left\{\mu_\varepsilon^* \mid \varepsilon \in]0,\varepsilon_K[\right\}.$$

δ_*^1 est donc une fonction continue dans $\mathbb{C}\smallsetminus\mathcal{E}^*$. $\mathcal{D}_{*,\alpha}^1$ est un ouvert inclus dans $\mathbb{C}\smallsetminus\mathcal{E}^*$.

On a enfin :

$$s_0 \in \mathrm{Fr}(\mathcal{D}^1{}_{,*,0}) \cap (\mathbb{C}\smallsetminus\mathcal{E}^*) = \left\{s \in \mathbb{C}\smallsetminus\mathcal{E}^* \mid \delta_*^1(s) = 0\right\}.$$

Donc $\{F\}$ converge absolument dans l'ouvert $\mathcal{D}_{*,0}^1$ et uniformément dans tout compact inclus dans $\mathcal{D}_{*,0}^1$ et diverge dans $(\mathbb{C}\smallsetminus\mathcal{E}^*)\smallsetminus\mathcal{D}_{*,0}^1$.

Tout point de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}^1_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*)$ est singulier pour F définie par le prolongement de la fonction :

$$\forall s \in \mathcal{D}^1_{*,0} \colon F(s) = \sum_{p=1}^{\infty} P_{n_p}(s) \exp(-s\mu_{n_p}).$$

(d'après le théorème 4) (M. Blambert & R. Parvatham [8], p. 260).

Il est impossible d'obtenir une extension holomorphe de la fonction définie dans $\mathcal{D}_{*,0}$ telle que :

$$\forall s \in \mathcal{D}_{*,0} \colon f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s\mu_n)$$

à $\mathcal{D}_{*,0} \cup d_{(s_0,\sigma')}$ où $\sigma' > \sigma = \pi D^*_* + \gamma^+$.

Or s_0 est un point arbitraire de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*,0}) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{E}^*)$.

On a donc démontré ce théorème. □

Références

[1] M. Berland, *On the singularities of analytic functions defined by L-dirichletian elements*, J. Analysis, **7**, (1999), 37–43.

[2] M. Berland, *On the convergence and singularities of analytic functions defined by E-dirichletian elements*, Ann. Sci. Math. Québec, **22** (1), (1998), 1–15.

[3] M. Berland, *On the Ritt order and type of a certain class of functions defined by BE-dirichletian elements*, Internat. J. Math. & Math. Sci., **22** (3), (1999), 445–458.

[4] M. Berland & P. Berland, *Compléments à des théorèmes de M. Blambert-R. Parvatham sur les singularités d'une fonction analytique définie par un élément E-dirichlétien*, J. Analysis, **8**, (2000), 193–204.

[5] M. Berland, *Ultraconvergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles*, J. Analysis, **10**, (2002), 51–62.

[6] M. Berland, *Convergence d'une certaine série d'exponentielles*, J. Analysis, **11**, (2003), 61–67.

[7] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris (1933).

[8] M. Blambert & R. Parvatham, *Ultraconvergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **29**, (1979), 239–262.

[9] M. Blambert & R. Parvatham, *Sur la localisation des points singuliers des fonctions définies par des éléments L-dirichlétiens*, Bull. Sc. Math., **105** 2e série, (1981), 349–365.

[10] M. Blambert & R. Parvatham, *Sur une inégalité fondamentale et les singularités d'une fonction analytique définie par un élément L-C-dirichlétien*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **33**, (1983), 135–160.

[11] M. Blambert & J. Siméon, *Sur une technique d'étude des propriétés de convergence des séries de Dirichlet à exposants complexes*, Ann. Fac. Sc. Univ. Porto, **56**, (1973), 1–33.

[12] R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, New-York (1954).

[13] T. M. Gallie, *Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents*, Trans. Amer. Math. Soc., **90**, (1959), 57–72.

[14] F. Gross, *Entire functions of bounded index*, Proc. Am. Math. Soc., **18**, (1967), 975.

[15] W. K. Hayman, *Differential inequalities and local valency*, Pacific J. Math., **44**, (1973), 117–137.

[16] G. P. Lapin, *On the interpolation in the class of entire functions of finite order and finite type*, Math. Sb. (N.S.) **29** (11), (1951), 565–580.

[17] A. F. Leont'ev, *On interpolation in the class of entire functions of finite order and normal type*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. (N.S.), **66**, (1949), 153–156.

[18] B. Lepson, *Differential equation of infinite order hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence, **11**, (1968), 289–307.

[19] G. L. Luntz, *Singularities of Taylor Dirichlet series*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. (N.S.), **154**, (1964), 38–40.

[20] S. M. Shah, *Entire functions of bounded index*, Lecture notes in Math. Springer Verlag, **599**, (1977), 117–145.