



HAL
open science

Outils d'évaluation de la qualité d'un paramétrage de propriétés visuelles : cas des textures couleur

Amadou Sawadogo

► **To cite this version:**

Amadou Sawadogo. Outils d'évaluation de la qualité d'un paramétrage de propriétés visuelles : cas des textures couleur. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2009. Français. NNT: . tel-00460261

HAL Id: tel-00460261

<https://theses.hal.science/tel-00460261>

Submitted on 26 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET LEURS APPLICATIONS

par

Amadou SAWADOGO

pour obtenir le grade de

Docteur

Discipline : Mathématiques Appliquées

OUTIL D'ÉVALUATION DE LA QUALITÉ D'UN PARAMÉTRAGE DE PROPRIÉTÉS VISUELLES : CAS DES TEXTURES COULEUR

Soutenue le 10 Décembre 2009

Devant le jury composé de

M^{me}. Dominique LAFON, Maître de Conférences, École des Mines d'Alès

M. El Mostafa QANNARI, Professeur, ENITIAA/INRIA Département S.M.A.D. Nantes

M. Laurent BORDES, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour

M. Noël RICHARD, Maître de Conférences, Université de Poitiers

M. Roland BECKER, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour

M. Simplicie DOSSOU-GBÉTÉ, Maître de Conférences, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Rapporteurs

M. Antoine DE FALGUEROLLES, Maître de Conférences HDR, Université de Toulouse 3

M. Denys POMMERET, Professeur, Université de la Méditerranée

M. El Mostafa QANNARI, Professeur, ENITIAA/INRIA Département S.M.A.D. Nantes

Directeurs de thèse

M. Dominique LAFON

M. Roland BECKER

M. Simplicie DOSSOU-GBÉTÉ

Remerciements

Ce travail a été réalisé en partie au sein de l'équipe paloise du Centre des Matériaux de Grande Diffusion (CMGD) de l'École des Mines d'Alès (**EMA**) de Pau (FRANCE) et au laboratoire de Mathématiques Appliquées et leurs applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA).

Qu'il me soit permis de remercier :

- tout d'abord, très chaleureusement mes parents pour leur soutien moral et particulièrement, mes mères Aminata OUEDRAOGO et Jacqueline OUEDRAOGO alias « grand maman », mon père Ouagaré Malick SAWADOGO, mon oncle Boureima OUEDRAOGO et sa femme Rihanata OUEDRAOGO, mes frères et soeurs Fatoumata SAWADOGO, Abdoulaye SAWADOGO alias « Naba », Moumouni SAWADOGO alias « Vier », Abibata SAWADOGO et Abdoul Aziz SAWADOGO.
- Blaise SOME, Professeur, Université de Ouagadougou, Longin SOME, Professeur, Université de Ouagadougou qui m'ont apporté des conseils de près et de loin. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.
- Simplicie DOSSOU-GBETE, Maître de Conférences, UPPA pour sa disponibilité malgré ses multiples occupations.
- Dominique LAFON, Maître de Conférences, CMGD pour avoir proposé ce sujet, pour sa disponibilité et pour les nombreuses discussions que nous avons eues tout au long de la préparation de ce mémoire et grâce à qui, le financement de ce travail a été possible ; qu'elle soit assurée de ma profonde gratitude.
- Roland BECKER, Professeur, UPPA
- Mireille FOULLETIER, Professeur, l'ex-directrice du CMGD.
- très sincèrement tous les membres de l'équipe paloise du Centre des Matériaux de Grande Diffusion (CMGD) de l'École des Mines d'Alès (EMA) de Pau pour l'accueil chaleureux et l'esprit de fraternité qu'elle a eus à mon égard. Il s'agit principalement de Dominique LAFON, Olivier ETERRADOSSO, Hélène GARAY, Jean-Serge BIDOURET, Sylvie BEUHORRY-SASSUS, Valerie DESAUZIERS, Leïla GHANNAM, Tahiana RAMANANANTOANDRO, Narimane Kamélia AKKOUCHE, Virginie LARROQUE.
- Daniel DUPOND, Maître de Conférences HDR, Gilbert MAITRE, Adjoint

scientifique, et Youssef LIATIMI, 3C conseils, pour leurs multiples aides et conseils qu'ils m'ont apportés. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.

- les Professeurs Mohamed AMARA et Laurent BORDES, ancien et nouveau directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de leurs Applications pour m'avoir permis d'évoluer dans un bon environnement de travail.
- Stanislas OUARO, Maître de Conférences, Université de Ouagadougou, Joseph BOUTE, Biologiste à la retraite, Célestin Clotaire KOKONENDJI, Professeur, Université de Besançon alias « Le Créateur », Marc ARTZROUNI, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour pour leurs multiples conseils et aides qu'ils m'ont apportés. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.
- très amicalement les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et particulièrement Marc ARTZROUNI, Professeur, Christian PAROISSIN, Maître de Conférence, Bénédicte PUIG, Maître de Conférence, Walter TINSON, Maître de conférence, Olivier AUTEXIER, Informaticien, Chantal BLANCHARD Ingénieur d'études, Michèle RICHARD, Secrétaire d'administration, Lina GONCALVES, Marie-Claire HUMMEL, Technicienne, Marie-Laure RIUS, Agent contractuel, Marion LACAZE, Marc ODUNLAMI, Informaticien, Vanessa PEINGS ...pour leur amitié et leur appui technique.
- mes collègues doctorants et docteurs du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'UPPA avec qui j'ai partagé, mes angoisses et mes rêves et aussi pour leur soutien moral. Il s'agit d'Agnès PETRAU, Anne-Gaëlle SAINT-GUIRONS, Anne Marie CHANA, Caroline BALDASSARI, Hannen HANNA, Lena STRUGARU, Julie JOIE, Khadra NACHI, Nour El Houda SELOULA, Veronique DUPRAT, Abdelaziz TAAKILI, Amar MOKRANI, Ali SALAMI, Cyril AGUT, Florian BONZOM, Guillaume LAVIE, Huy Hoang NGUYEN, Julien JIMENEZ, Kaushik BAL, Mohamed Salem LOULY, Ngonn SEAM, Yves RAUDIN, Vivient Corneille KAMLA, Donatien CHEDOM FOTSO, Tristan SENG KIESSE, Mor NDONGO, Stéphane TCHOUANMO, Fakhreddine HABIB, Mohamed ELFATINI, François GODONOU, Aurélie BILLON, Paul SAUVY, Elodie ESTECAHANDY, Salem ALAKHDAR, Fabien CAUBET, Saïd LAHRAICHI, William LAIR, Abdellah LAMNII, Mohamed MESLAMENI.
- Mes amis et frères Léon N'GUESSAN DANVIDE alias « Golpantcho », Amidou LASSINA, Idrissa SORE alias « KORO », Souleymane OUEDRAOGO alias « Nabla », Elisée GOUBA, Adama THIOMBIANO, Pascal ZONGO, Malick ZOROME, Narcisse OUEDRAOGO alias « Cauchy », Soumaila SANA, Blami KOTE, Goumbila SAM, Emile OUEDRAOGO, Patigma ZOUGRANA, Aristide ZOUNGRANA alias « Popodipo », Herman SORE, Abdouldrame GUIRO, Abouba MAMOUDOU, Cellou Mamadou SALL, Assane NDAO,

Martial OBAME, Tenin COULIBALY, Adjara KOUSSOUBE, Elise OUEDRAOGO, Céline SIMPORE, G n vienne RAMDE, Gabrielle Bidet, Dominique SIBIFFA NNANG alias « Honorable », Thierry EYA MBA, Omar FALLY, Abdou TOURE, Cadellan AUDREY, Yaya DRAME, Théophile Tapsoba pour leur très grand sens d'amitié et de fraternité.

– les membres de la famille CHENAUX : Barthelemy CHENAUX, Clémentine CHENAUX, Ghyslaine CHENAUX, Laurent CHENAUX, Raoul CHENAUX, Solange CHENAUX. Que le bon Dieu leur rende au centuple de leur bienfait.

– très respectueusement les membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail, notamment.

Monsieur Antoine DE FALGUEROLLES, Maître de Conférence HDR, Université de Toulouse 3, France.

Monsieur Denys POMMERET, Professeur, Université de la Méditerranée, France.

Monsieur El Mostafa QANNARI, Professeur, ENITIAA/INRIA Département S.M.A.D. Nantes, France.

Monsieur Noël RICHARD, Maître de Conférences, Université de Poitiers, France.

Monsieur Roland BECKER, Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour, France.

Monsieur Simplicie DOSSOU-GBETE, Maître de Conférences, Université de Pau et des Pays de l'Adour, France.

Monsieur Dominique LAFON, Maître de Conférences, Ecole des Mines d'Alès, France.

– Enfin, mes remerciements vont également à tous ceux qui m'ont accompagné, de près ou de loins ces dernières années.

Table des matières

Introduction	13
1 Modèles de Mallows-Bradley-Terry pour l'analyse de données de préférence	17
1.1 Modèle général de Babington Smith et extension	18
1.1.1 Modèle de Babington Smith pour classements sans ex-aequo	18
1.1.2 Extension du modèle de Babington Smith pour classements avec ex-aequo	19
1.2 Modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classements sans ex-aequo	19
1.2.1 Présentation du modèle : paramètres et identifiabilité	20
1.2.2 Méthode de Monte Carlo pour la simulation d'un échantillon de la loi $p(r; \theta)$, $r \in \mathcal{S}(q)$ et le calcul de l'espérance mathématique	22
1.2.3 Estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry par la méthode du maximum de vraisemblance	25
1.2.4 Maximum de vraisemblance <i>via</i> une méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov	31
1.3 Modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classements avec ex-aequo	49
1.3.1 Présentation du modèle : paramètres et propriétés	49
1.3.2 Méthodes de Monte Carlo pour la simulation d'un échantillon de la loi $p(r; \theta, \gamma)$ $r \in E$ et le calcul d'espérance mathématique	53
1.3.3 Estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry par la méthode du maximum de vraisemblance	62
1.3.4 Maximum de vraisemblance <i>via</i> méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov	70
1.4 Conclusion	87
2 Le système visuel humain (SVH) : du stimulus à la perception	89
2.1 Le stimulus	90
2.1.1 Caractéristiques et rôle des sources de lumières	90
2.1.2 Interaction lumière-matière	92

2.2	Traitement de l'information : anatomie et physiologie du système visuel humain	94
2.2.1	L'œil humain	94
2.2.2	Le rôle de la rétine	96
2.2.3	La transmission : de la rétine au cerveau	102
2.3	Conclusion	103
2.4	Mesure de la couleur	104
2.4.1	Principe de Trichromie	104
2.4.2	Les expériences d'égalisation : la base de la colorimétrie classique	105
2.4.3	Les lois de Grassmann et les hypothèses d'une colorimétrie trichromatique	106
2.4.4	Système de représentation	107
2.5	Conclusion	107
3	Le système de stimulation	109
3.1	Espaces de représentation de la couleur	109
3.1.1	Les systèmes de primaires	110
3.1.2	Espaces approximativement uniformes	116
3.2	Caractérisation et calibrage du moniteur	122
3.2.1	Choix du moniteur	123
3.2.2	Modèles de caractérisation du moniteur	126
3.2.3	Méthodes et résultats de la caractérisation du moniteur	129
3.2.4	Calibrage du moniteur CRT	137
3.3	Conclusion	139
4	Approche expérimentale de la discernabilité perceptive de textures colorées	141
4.1	Images texturées colorées et textures visuelles	142
4.1.1	Caractéristiques physiques des stimulations visuelles	144
4.1.2	Modèle d'Ising généralisé et algorithme	150
4.2	Description de l'expérience psychophysique	164
4.2.1	Cadre environnemental	164
4.2.2	Juges ou observateurs	165
4.2.3	Épreuve de classement	165
5	Approches statistiques de l'analyse de la discernabilité visuelle des textures colorées	167
5.1	Mise en évidence d'une échelle sensorielle par ajustement d'un modèle factoriel à effets fixes aux rangs moyens de classement	168
5.1.1	Modèle factoriel à effets fixes pour l'analyse des classements sans ex-aequo	168

5.1.2	Ajustement du modèle à effets fixes à une suite de classement avec ex-aequo	168
5.1.3	Résultats de l'ajustement du modèle	170
5.1.4	Dimensions sensorielles	176
5.1.5	Conclusion	183
5.2	Analyse de la discernabilité perceptive des textures colorées à l'aide d'un test de rapport de vraisemblance dans le cadre du modèle de Mallows-Bradley-Terry	184
5.2.1	Estimation du paramètre ν sous l'hypothèse nulle	185
5.2.2	Test du rapport de vraisemblance pour tester l'hypothèse de discernabilité perceptive	188
5.2.3	Analyse de la discernabilité perceptive	192
5.2.4	Conclusion	199
	Conclusion générale et perspectives	201
	Bibliographie	204
	A Log-vraisemblance et matrice hessienne associée	215
A.1	Log-vraisemblance et matrice hessienne du modèle de Mallows-Bradley-Terry	215
A.1.1	Vecteur score associé au modèle de Mallows-Bradley-Terry	215
A.1.2	Hessienne associée au modèle de Mallows-Bradley-Terry . .	216
A.2	Log-vraisemblance et matrice hessienne du modèle de Mallows-bradley-Terry avec ex-aequo	217
A.2.1	Vecteur score associé au modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo	217
A.2.2	Hessienne associée au modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aquo	218
A.2.3	Éléments de calcul du rapport de Métropolis-Hastings-Green dans le modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo . .	222
	B Mesures effectuées pour la caractérisation du moniteur CRT	231
	C Programme sous R	235
	D Liste complète des images texturées colorées soumises aux mesures visuelles de classement	243
D.1	Images texturées colorées dans la teinte rouge	244
D.1.1	Réseaux à orientation horizontale	244
D.1.2	Réseaux à orientation verticale	246
D.1.3	Textures isotropes	248
D.1.4	Textures aléatoires	250
D.2	Images texturées colorées dans la teinte verte	252

D.2.1	Réseaux à orientation horizontale	252
D.2.2	Réseaux à orientation verticale	254
D.2.3	Textures isotropes	256
D.2.4	Textures aléatoires	258
D.3	Images texturées colorées dans la teinte bleue	260
D.3.1	Réseaux à orientation horizontale	260
D.3.2	Réseaux à orientation verticale	262
D.3.3	Textures isotropes	264
D.3.4	Textures aléatoires	266
D.4	Images texturées colorées dans la teinte jaune	268
D.4.1	Réseaux à orientation horizontale	268
D.4.2	Réseaux à orientation verticale	270
D.4.3	Textures isotropes	272
D.4.4	Textures aléatoires	274

Liste des tableaux

1.1	Moyennes empiriques ($\bar{\hat{\theta}}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = 1.26, \theta_2 = 1.53, \theta_3 = -0.39$	36
1.2	Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = -0.61, \theta_2 = -0.83, \theta_3 = 1.18, \theta_4 = -0.25$	43
1.3	Moyennes empiriques et erreurs quadratiques empiriques des estimations des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques $\theta = (2.0, 1.3, 2.5)$ et $\gamma = 1.2$	69
1.4	Moyennes empiriques et erreurs quadratiques empiriques des estimations des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques $\theta = (1.13, 1.00, 1.88, 1.18)$ et $\gamma = -0.91$	70
1.5	Moyennes empiriques ($\bar{\hat{\theta}}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = 1.89, \theta_2 = 1.96, \theta_3 = 1.82, \gamma = 1.71$	75
1.6	Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = -0.76, \theta_2 = -1.44, \theta_3 = 1.56, \theta_4 = -0.93, \gamma = -0.14$	82
3.1	Mesures effectuées dans le système XYZ CIE 1931 pour la détermination de la matrice de la transformation M	131
3.2	Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle simple.	133
3.3	Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle GG0.	133
3.4	Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle GOG.	134

3.5	Données de validation des modèles de caractérisation : valeurs d'adressage (R,V,B), coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) dans le système CIE1931 des types et des contretypes.	135
3.6	Coordonnées trichromatiques (L^*, a^*, b^*) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$	135
3.7	Coordonnées cylindriques (L^*, C^*, h) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$	136
3.8	Valeurs d'écart de couleur entre couleurs T et couleurs contre-types CT calculées pour les équations ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^*	136
3.9	Coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) utilisées pour le calibrage, valeurs ($R_{cal}, G_{cal}, B_{cal}$) obtenues et ($X_{mes}, Y_{mes}, Z_{mes}$) obtenues par mesure au spectroradiomètre des couleurs définies par ($R_{cal}, G_{cal}, B_{cal}$)	138
3.10	Coordonnées trichromatiques (L^*, a^*, b^*) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$ des couleurs utilisées pour l'étude de la performance du calibrage.	138
3.11	Coordonnées cylindriques (L^*, C^*, h) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$ des couleurs utilisées pour l'étude de la performance du calibrage.	139
3.12	Valeurs d'écart de couleur entre couleurs cibles et couleurs calibrées calculées pour les équations ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^*	139
4.1	Les coordonnées trichromatiques des différentes gammes de couleurs dans le système colorimétrique XYZ de la CIE 1931.	146
4.2	Les coordonnées trichromatiques des couleurs dans la teinte Rouge, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.51, 0.33, 15.56)$ et $r = 0.52$	148
4.3	Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Verte, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.29, 0.54, 20.28)$ et $r = 1.10$	149
4.4	Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Bleue, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.18, 0.12, 14.05)$ et $r = 0.31$	149
4.5	Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Jaune, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.39, 0.49, 84.83)$ et $r = 0.43$	150
4.6	Paramètres de Markov associés aux textures isotropes et aléatoires.	161

5.1	Pourcentage de variation expliquée pour les types de textures dans les teintes rouge et verte en fonction du nombre de dimensions sensorielles.	171
5.2	Pourcentage de variation expliquée pour les types de textures dans les teintes bleue et jaune en fonction du nombre de dimensions sensorielles.	171
5.3	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la première dimension sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.	177
5.4	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la deuxième dimension sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.	177
5.5	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et les deux premières dimensions sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.	177
5.6	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la première dimension sensorielle dans les niveaux de teinte bleu et jaune.	178
5.7	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la deuxième dimension sensorielle dans les niveaux de teinte bleu et jaune.	178
5.8	Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et les deux premières dimensions sensorielles dans les niveaux de teinte bleu et jaune.	178
5.9	Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte rouge.	193
5.10	Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte rouge.	193
5.11	Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte rouge.	194
5.12	Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte verte.	194
5.13	Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte verte.	194
5.14	Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte verte. .	195
5.15	Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte jaune.	195
5.16	Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte jaune.	195
5.17	Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte Jaune.	196

B.1	Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Rouge.	232
B.2	Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Vert.	233
B.3	Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Bleu.	234

Table des figures

1.1	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	37
1.2	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	38
1.3	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	39
1.4	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	40
1.5	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	41
1.6	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	44
1.7	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	45
1.8	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	46
1.9	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	47
1.10	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	48
1.11	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	76

1.12	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	77
1.13	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	78
1.14	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	79
1.15	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	80
1.16	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	83
1.17	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	84
1.18	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	85
1.19	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	86
1.20	Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.	87
2.1	Perception humaine de la couleur [135]	90
2.2	Principaux illuminants standards de la CIE (E désignant la répartition spectrale relative d'énergie) [54].	92
2.3	Interaction entre une lumière incidente et la matière.	93
2.4	Système visuel humain [143].	94
2.5	Coupe de l'œil humain [135].	95
2.6	La rétine [143].	96
2.7	Cellules photo-réceptrices : cônes et bâtonnets [143].	97
2.8	Répartition des cônes et des bâtonnets sur la rétine. L'axe horizontal représente le degré d'excentricité rétinienne par rapport à la fovéa [143].	98
2.9	Courbes de sensibilité spectrale des trois types de cônes [83].	98
2.10	Expérience d'égalisation entre un tri-stimulus de référence et le stimulus de test.	106

3.1	Les fonctions colorimétriques du système de primaires RVB de longueurs d'onde respectives 700.0 nm (Rouge), 546.1 nm (Vert) et 435.8 nm (Bleu) de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° d'angle visuel.	111
3.2	Les fonctions colorimétriques du système de primaire XYZ de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° degré d'angle visuel.	113
3.3	Diagramme de chromaticité (x, y) de l'espace XYZ CIE 1931 [83].	115
3.4	Diagramme de chromaticité (x, y) de l'espace XYZ CIE 1931.	116
3.5	Les ellipses de Mac Adam dans le diagramme de chromaticité (x, y) [36].	117
3.6	Modèle CIELAB : coordonnées triangulaires.	119
3.7	Modèle CIELAB : coordonnées cylindriques.	119
3.8	Diagramme de calibrage d'un moniteur.	122
3.9	Dispositif expérimental pour le calibrage.	122
3.10	Mesures effectuées pour l'étude de la stabilité temporelle du moniteur.	125
3.11	Variation spatiale de la luminance maximale du moniteur par rapport à son centre.	125
3.12	Diagramme de caractérisation d'un moniteur CRT.	126
3.13	Courbe gamma : caractérisation des phosphores Rouge, Vert et Bleu.	132
4.1	Types de cliques dans un système de voisinage d'ordre 2	152
4.2	Système de voisinage d'ordre 2 : huit pixels voisins du pixel s	157
4.3	Textures aléatoires constituées de deux couleurs de teinte rouge, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes	162
4.4	Réseau à orientation horizontale constitué de deux couleurs de teinte verte, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.	162
4.5	Textures isotropes constituées de deux couleurs de teinte bleue, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.	163
4.6	Réseau à orientation verticale constitué de deux couleurs de teinte jaune, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.	163
4.7	Environnement mis en place pour les épreuves psychophysiques.	164
5.1	Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte rouge.	172
5.2	Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte verte.	173

5.3	Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte bleue.	174
5.4	Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte jaune.	175
5.5	Sensibilités spectrales de l'observateur standard. Fonctions d'efficacité lumineuse normalisée en vision photopique ou scotopique [131]	179
5.6	Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte rouge.	180
5.7	Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte verte.	181
5.8	Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte bleue.	182
5.9	Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte jaune.	183
5.10	Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte rouge.	197
5.11	Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte verte.	198
5.12	Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte jaune.	199

Introduction

L'utilisation de l'impact sensoriel des matériaux constitutifs d'un objet est une pratique qui tend à se généraliser dans une démarche de création/design. Les industriels du matériau sont donc conduits à optimiser l'impact sensoriel de leurs produits à la fois sous l'angle de la fonctionnalité et de leur caractère hédonique. Ainsi, la métrologie sensorielle est-elle un élément clef dans la mise au point de nouveaux matériaux à propriétés psychosensorielles maîtrisées, optimisées et exploitées. Dans ce contexte, la caractérisation de l'aspect visuel d'une surface texturée colorée est un enjeu important.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'appréciation visuelle de la texturation des surfaces non pas en tant que propriété physique intrinsèque des matériaux mais plutôt en tant que traduction consciente de l'interaction entre un *stimulus*¹ lumineux produit par l'interaction lumière/matière texturée colorée et le système visuel humain. Dans le cadre du présent travail, nous nous intéresserons au stimulus lumineux lui même. Les causes de ses propriétés physiques ne seront pas recherchées. Notre contribution vise plus particulièrement à établir les bases nécessaires à la mise au point d'évaluations quantitatives des effets de *contraste psychovisuel* entre différentes zones ou points d'une surface texturée colorée. En effet, bien que les cellules photoréceptrices du système visuel humain soient sensibles à l'intensité lumineuse reçue dans différentes bandes du spectre visible, la perception visuelle ne se limite pas à la simple transmission point à point d'un signal. Le système visuel humain fonctionne selon un principe de détection de contrastes. Lorsque l'on observe une série de surfaces texturées colorées, on est spontanément capable de réaliser un allotissage regroupant les éléments perçus comme semblables. Par contre, il est très difficile d'exprimer les raisons de son choix, sous formes d'attributs, en particulier dans le cas des textures non complètement régulières. Notre objectif est d'être capable de classer les textures perçues selon des critères de similarité visuelle à partir de paramètres mesurables sur le signal physique. Nous étudions l'impact de la répartition spatiale des primitives de texture sur l'appréciation visuelle en fonction de leurs caractéristiques couleur (au sens physique). Ce faisant, nous cherchons à mettre en évidence une à n ($n > 1$) relations d'ordre dans l'espace des paramètres mesurables capable(s) de restituer le classement obtenu lors d'expériences psychovisuelles.

1. Signal capable de provoquer la réaction d'un système excitable [9].

Notre problématique nous a conduit à utiliser le signal lumineux produit par l’affichage d’une image numérique sur écran comme stimulus coloré texturé. Ce choix nous permet en effet de maîtriser et gérer complètement les propriétés physiques du stimulus.

La problématique présentée ci-dessus s’inscrit dans celle plus générale de la discernabilité perceptive des textures. Elle sera étudiée à travers la combinaison de deux approches : une approche expérimentale qui permettra de collecter des données et une approche statistique de l’analyse des données et l’inférence.

Les données collectées et analysées résultent d’expériences psychovisuelles de classement d’images texturées colorées suivant un critère de contraste visuel dans un environnement contrôlé mis en place en laboratoire. Un ensemble d’observateurs humains des deux sexes recrutés sur la base du volontariat ont réalisé ces expériences psychophysiques. La tâche qui leur a été assignée a été de classer une série de stimuli en fonction du contraste visuel perçu. La contrainte appliquée à la sélection de ces sujets est qu’ils soient en mesure de percevoir la modalité sensorielle du classement de ces textures. Les *ex-aequo* sont permis dans les classements c’est-à-dire que le juge est libre d’attribuer le même rang à différentes textures, s’il juge qu’elles ont le même niveau de contraste visuel. Les données sensorielles recueillies sont donc des données de classement avec *ex-aequo*.

La thèse est organisée comme suit :

Le **premier chapitre** apporte une contribution à l’étude d’une classe de modèles statistiques pour l’analyse des données de préférence basée sur une approche de comparaison par paires. Ces modèles appelés modèles de Mallows-Bradley-Terry sont basés sur une approche de comparaison par paires. Ils constituent une sous-classe de classe des modèles de Babington Smith pour des classements sans *ex-aequo* ainsi qu’une extension de ceux-ci aux classements avec *ex-aequo*. Ce chapitre résout le problème de l’estimation des paramètres des modèles de Mallows-Bradley-Terry par la méthode du maximum de vraisemblance tant dans le cas des classements sans *ex-aequo* que dans celui des classements avec *ex-aequo*. L’inférence sur les paramètres de l’extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour l’analyse des données de classements avec *ex-aequo* permettra de répondre à la question de la discernabilité perceptive étudiée au chapitre 5.

Le **deuxième chapitre** expose la notion de couleur au sens psychovisuel du terme. Il présente une synthèse non exhaustive des très nombreuses publications qui décrivent le trajet suivi par l’information visuelle depuis la création d’un stimulus lumineux par interaction lumière/matière jusqu’à l’expression consciente de l’aspect visuel perçu (couleurs perçues). Cette information visuelle est d’abord véhiculée par la lumière et ensuite traitée et transmise au cortex cérébral par notre système nerveux selon un processus complexe non encore complètement élucidé.

Le **chapitre trois** présente tout d'abord les concepts qui sont à la base du choix d'une représentation couleur adaptée à notre problématique. Cet exposé comprend entre autre une présentation non exhaustive des différents espaces colorimétriques utilisés pour quantifier la couleur et éventuels calculs de distance en lien avec la notion de discernabilité entre couleurs physiques proches. Par ailleurs, nous exposons les critères qui ont présidé au choix d'un moniteur adapté aux expériences à réaliser. Afin de pouvoir contrôler et moduler les différentes stimulations lumineuses texturées colorées, il a été nécessaire de calibrer ce moniteur. Ce calibrage a été obtenu à l'aide d'un traitement statistique des données issues de mesures réalisées à cet effet.

Le **chapitre quatre** décrit la mise en place des expériences psychovisuelles. Les stimuli d'investigation et leurs caractéristiques physiques sont d'abord définis. Puis, Les méthodes de synthèse de ces stimuli sont présentées. Enfin, nous décrivons le *modus operandi* des épreuves psychophysiques de classement qui ont permis à la collecte des données.

Le **chapitre cinq** traite de l'analyse des données de classement avec *ex-aequo* recueillies lors des épreuves psychophysiques en vue d'étudier la discernabilité perceptive des images texturées colorées. Deux approches ont été considérées. La première considère une modélisation factorielle des rangs moyens (au sens de Kendall [95]) et permet d'établir l'existence d'une échelle sensorielle. La seconde approche est basée sur l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry et un test du rapport de vraisemblance de l'hypothèse nulle de non discernabilité contre l'hypothèse alternative de discernabilité. Le rejet de l'hypothèse nulle et l'interprétation des paramètres de Bradley-Terry permet alors de conclure à l'existence d'une échelle sensorielle.

Le **chapitre six** conclut la thèse et ouvre quelques pistes pour les recherches futures.

Chapitre 1

Modèles de Mallows-Bradley-Terry pour l'analyse de données de préférence

Pour pouvoir apporter des réponses aux questionnements liés à la problématique générale de notre thèse, il a fallu mettre en place une expérience psychophysique d'appréciation visuelle de textures qui a consisté en des épreuves de classement. Il était donc indispensable de nous intéresser aux modèles statistiques qui pourraient être utilisés pour soutenir le traitement statistique des données issues de cette expérience afin de pouvoir les analyser. Dans ce contexte, nous avons étudié les modèles de Mallows-Bradley-Terry pour les épreuves de classement avec ou sans ex-aequo.

Le présent chapitre est une contribution à l'étude d'une classe de modèles statistiques pour l'analyse des données de préférence basée sur une approche de comparaison par paires. Ces modèles appelés modèles de Mallows-Bradley-Terry sont basés sur une approche de comparaison par paires. Ils constituent une sous-classe de classe des modèles de Babington Smith pour des classements sans ex-aequo ainsi qu'une extension de ceux-ci aux classements avec ex-aequo. Cependant, dans la littérature il existe d'autres modèles parmi lesquels, on peut citer [95] les modèles de classement basés sur les statistiques d'ordre, les modèles de classement multi-étapes et les modèles de classement basés sur le calcul de distances entre les différents classements obtenus des juges. La section qui va suivre rappelle d'abord le modèle de Mallows-Bradley-Terry avec les techniques d'estimation des paramètres. Puis, on étend le résultat au cas avec ex-aequo. Les estimations des paramètres sont aussi présentées de manière détaillée.

1.1 Modèle général de Babington Smith et extension

Une épreuve de classement de q objets est reliée à une épreuve de comparaisons par paires de ces objets. D'une part, il est clair qu'étant donné un classement, il est aisé de déterminer les $q(q-1)/2$ paires de préférence possibles. D'autre part, une comparaison par paires peut conduire à un classement pourvu qu'il y ait transitivité dans les paires de préférence obtenues. Nous entendons, par transitivité, que si l'objet x est préféré à l'objet y , et si l'objet y est préféré à l'objet z alors l'objet x est préféré à l'objet z . Le paradigme sous-jacent aux modèles d'analyse de données de classement basés sur les comparaisons par paire est la possibilité de pouvoir générer des classements à partir des comparaisons par paires d'un ensemble d'objets : le juge construit un classement consistant en commençant par une épreuve de comparaison par paire et ne reporte ses préférences qu'après avoir eu un ensemble de paires de préférence consistant, c'est-à-dire aboutissant à un classement (Marden, 1995). Ce paradigme remonte au moins à Babington Smith (Smith, 1950) qui a introduit un modèle général de classement basé sur des probabilités de comparaisons par paires.

1.1.1 Modèle de Babington Smith pour classements sans ex-aequo

Considérons un ensemble de q objets identifiés par les entiers naturels distincts de 1 à q . Ces q objets sont soumis à un juge pour une épreuve de classement sans ex-aequo. On note r le vecteur contenant les rangs attribués à chacun des objets soumis au classement : la j -ème composante du vecteur r , soit $r(j)$, est donc le rang attribué à l'objet j . Les ex-aequo n'étant pas permis, r est donc une permutation de l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, q\}$ donc un élément du groupe des permutations $\mathcal{S}(q)$.

L'idée du modèle de Babington Smith est que la probabilité d'un classement s'exprime à partir des probabilités des résultats des comparaisons par paires. Ainsi, on suppose qu'il existe un ensemble de $q(q-1)/2$ paramètres $\theta_{ij} \in]0, 1[$, $1 \leq i < j \leq q$ tels que la probabilité de réalisation d'un classement r quelconque est définie par la distribution

$$p(r; \theta) = c(\theta) \prod_{(i,j)} \theta_{ij}^{I[r(i) < r(j)]} \quad i \neq j,$$

où $\theta_{ji} + \theta_{ij} = 1$ pour $i < j$ et $I[A]$ désigne la fonction indicatrice de l'événement A , c'est-à-dire $I[A] = 1$ quand A se produit et $I[A] = 0$ sinon. $c(\theta)$ est la constante de normalisation c'est-à-dire que

$$c(\theta) \sum_r \prod_{(i,j)} \theta_{ij}^{I[r(i) < r(j)]} = 1.$$

θ_{ij} s'interprète comme la probabilité que l'objet i soit classé avant l'objet j si l'expérience se réduisait uniquement à la comparaison par paire des objets i et j . En remarquant que

$$\prod_{(i,j)} \theta_{ij}^{I[r(i) < r(j)]} = \prod_{1 \leq i < j \leq q} \theta_{ij}^{I[r(i) < r(j)]} (1 - \theta_{ij})^{I[r(i) > r(j)]},$$

On a :

$$p(r; \theta) = \exp \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \left(\frac{\theta_{ij}}{1 - \theta_{ij}} \right) - b(\theta) \right\}$$

$$\text{où } b(\theta) = -\log\{c(\theta)\} - \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log(1 - \theta_{ij}).$$

Par conséquent, le modèle de Babington Smith est un modèle exponentiel régulier et la suite $(I[r(i) < r(j)])_{1 \leq i < j \leq q}$ est une statistique exhaustive pour ce modèle. Cela signifie que la quantité d'information apportée par les données sur les paramètres est la même que celle apportée par cette statistique.

1.1.2 Extension du modèle de Babington Smith pour classements avec ex-aequo

Il a été remarqué dans Marden [95] qu'une extension possible du modèle de Babington Smith pour tenir compte des ex-aequo pourrait considérer que chaque comparaison par paires admette trois éventualités : $r(i) < r(j)$ (rang de l'objet i inférieur au rang de j), $r(i) > r(j)$ (rang de l'objet i supérieur au rang de l'objet j) et, $r(i) = r(j)$ (les objets i et j ont le même rang).

Une formulation possible de cette idée est la suivante

$$p(r; \theta) = c(\theta) \prod_{1 \leq i < j \leq q} \{\theta_{ij1}(1 - \theta_{ij2})\}^{I[r(i) < r(j)]} \{(1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})\}^{I[r(i) > r(j)]} \theta_{ij2}^{I[r(i) = r(j)]} \quad (1.1.1)$$

où $\theta = (\theta_{ij1}, \theta_{ij2})_{i < j; i, j \in \{1, 2, \dots, q\}} \in]0, 1[^2$ et $c(\theta)$ la constante de normalisation. Le paramètre $\theta_{ij1} = p\{r(i) < r(j) \mid r(i) \neq r(j)\}$ désigne la probabilité que l'objet i soit préféré à l'objet j dans une épreuve de comparaison par paires sachant que le juge soit capable de discriminer les deux objets. $\theta_{ij2} = p\{r(i) = r(j)\}$ est la probabilité que le juge ne soit pas capable de discriminer les objets i et j et décide donc que i et j soient ex-aequo. Cette généralisation est obtenue en exprimant la probabilité d'un classement r comme le produit des lois de Bernoulli généralisées

$$\{\theta_{ij1}(1 - \theta_{ij2})\}^{I[r(i) < r(j)]} \{(1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})\}^{I[r(i) > r(j)]} \theta_{ij2}^{I[r(i) = r(j)]}.$$

1.2 Modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classements sans ex-aequo

Comme on peut s'en rendre compte le modèle de Babington Smith nécessite $q(q - 1)/2$ paramètres et son utilisation peut s'avérer peu commode si le nombre

q d'objets à classer est élevé. Le désir de disposer d'un modèle avec un nombre réduit de paramètres aisément interprétables a conduit à des sous-modèles de ce modèle parmi lesquels le modèle de Mallows-Bradley-Terry sans ex-aequo que nous considérons dans la sous-section suivante.

1.2.1 Présentation du modèle : paramètres et identifiabilité

Lorsque le nombre d'objets à classer devient élevé, le nombre de paramètres du modèle de Babington Smith devient très élevé rendant ainsi l'analyse des données plus compliquée et non pertinente. De plus, les calculs deviennent très compliqués à effectuer, spécialement en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson pour la maximisation de la vraisemblance. Pour pallier ces inconvénients, un sous-modèle du modèle de Babington Smith a été proposé par Mallows en supposant le modèle de Bradley-Terry pour l'analyse des résultats des épreuves de comparaison par paires comme suit : $\theta_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \pi_j)$ avec $\pi_i > 0$. Chaque paramètre π_i , $i = 1, 2, \dots, q$ s'interprète comme la probabilité que l'objet i , $i = 1, 2, \dots, q$ soit préféré si on soumet au juge l'ensemble des q objets pour qu'il les classe; l'idée étant que la valeur π_i est d'autant plus élevée que la préférence de l'objet i est grande. On remarque bien que le modèle de Bradley-Terry est compatible avec l'axiome du choix Luce [95, 104, 39] puisque $\theta_{ij} / (1 - \theta_{ij}) = \pi_i / \pi_j$. En effet, dans notre contexte l'axiome du choix Luce stipule que : si θ_{ij} désigne la probabilité que l'objet i soit préféré à l'objet j si on ne soumet au juge que les deux objets i et j (probabilité de choix binaire) et si π_i est la probabilité que l'objet i soit préféré si on soumet au juge l'ensemble des q objets pour qu'il les classe (probabilité de choix multiple) alors

$$\frac{\theta_{ij}}{\theta_{ji}} = \frac{\pi_i}{\pi_j}.$$

Cet axiome traduit, dans le contexte de la théorie de Luce, l'hypothèse que tout choix est imparfait.

Pour une formulation plus générale de cet axiome, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [95, 104].

Le modèle $\theta_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \pi_j)$ étant non identifiable, l'identifiabilité du modèle de Babington Smith est obtenu en recourant à des contraintes sur les paramètres. Il est d'usage de considérer la contrainte $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$ mais d'autres contraintes d'identifiabilité peuvent être utilisées. Ainsi avec cette nouvelle paramétrisation, le modèle de Babington Smith est défini par la distribution de probabilités

$$p(r; \pi) = \exp \left[\sum_{1 \leq i < j \leq q} (\log \pi_i - \log \pi_j) I[r(i) < r(j)] + \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right) + \log \{c(\pi)\} \right].$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq q} (\log \pi_i - \log \pi_j) I[r(i) < r(j)] &= \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \pi_i \\ &\quad + \sum_{1 \leq j < i \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \pi_i \\ &\quad - \sum_{1 \leq j < i \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \pi_i \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \pi_j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \pi_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq q} (1 - I[r(j) < r(i)]) \log \pi_j, \\ &= \sum_{j=2}^q (j-1) \log \pi_j - \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(j) < r(i)] \log \pi_j, \end{aligned}$$

Il vient donc que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq q} (\log \pi_i - \log \pi_j) I[r(i) < r(j)] &= \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i} I[r(i) < r(j)] - \sum_{j=2}^q (j-1) \log \pi_j \\ &= \sum_{i=1}^q (q - r(i)) \log \pi_i - \sum_{j=2}^q (j-1) \log \pi_j. \end{aligned}$$

Ainsi la probabilité $p(r, \pi)$ du classement r est proportionnelle au produit $\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)}$; ce qui permet de réécrire la probabilité correspondant au modèle de classement de Mallows-Bradley-Terry par la distribution

$$p(r; \pi) = c(\pi) \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)}, \quad \forall r \quad (1.2.1)$$

où $c(\pi)$ désigne la constante de normalisation. Posons $\theta_j = \log(\pi_j/\pi_q)$ pour $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, d'où $\theta_q = 0$. Avec la contrainte d'identifiabilité $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$ sur le modèle, les paramètres π_j , $j = 1, 2, \dots, q$ s'obtiennent par la relation $\pi_j = \frac{\exp(\theta_j)}{\sum_{i=1}^q \exp(\theta_i)}$, $j = 1, 2, \dots, q$.

En vertu de cette reparamétrisation, le modèle de Mallows-Bradley-Terry s'écrit donc

$$p(r; \theta) = c(\theta) \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j \right] \quad (1.2.2)$$

où $c(\theta) = \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right] \right)^{-1}$.

Il apparaît donc que le modèle de Mallows-Bradley-Terry est une famille exponentielle courbe de dimension $q-1$ admettant pour statistique exhaustive le vecteur $(q - r(j))_{j \in \{1, 2, \dots, q-1\}}$ pour une observation r .

1.2.2 Méthode de Monte Carlo pour la simulation d'un échantillon de la loi $p(r; \theta)$, $r \in \mathcal{S}(q)$ et le calcul de l'espérance mathématique

On considère q ($q > 2$) objets soumis à un juge pour un classement sans ex-aequo suivant l'ordre croissant de préférence. Le résultat de cette expérience est un vecteur de rang $r = (r(1), r(2), \dots, r(j), \dots, r(q))$ où $r(j)$ est le rang attribué à l'objet j . On note que $r(j) = 1$ signifie que l'objet j est celui qui est le préféré parmi tous et $r(j) = q$ signifie que j est le moins préféré des q objets. Notons que les rangs vérifient alors la contrainte $\sum_{j=1}^q r(j) = q(q+1)/2$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la simulation de la loi $p(r; \theta)$, r étant un classement sans ex-aequo quelconque. Lorsque le nombre d'objets à classer q est petit (*e.g.*, $q = 4$ ou $q = 5$) la simulation d'une suite de réalisations indépendantes et issues de la même distribution de probabilité $p(r; \theta)$ peut se faire en faisant usage de la méthode d'acceptation-rejet.

Méthode d'acceptation-rejet pour la simulation d'un échantillon iid

La mise en œuvre de cette méthode requiert la détermination d'une fonction de masse f et d'une constante $M(\theta) > 1$ telles

$$\forall s \in \mathcal{S}(q), \frac{p(s; \theta)}{c(\theta)} \leq M(\theta)f(s).$$

où $\mathcal{S}(q)$ désigne le support de la loi $p(s; \theta)$. L'algorithme d'acceptation-rejet découle du résultat suivant [144, 117] :

Lemme 1.2.1. -*La procédure*

1. Générer $t \sim f(s)$, $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$;
2. Accepter $r = t$ si $u \leq \frac{p(t; \theta)}{c(\theta)M(\theta)f(t)}$;
retourner en 1 sinon.

fournit une réalisation d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi $p(r, \theta)$.

La notation $\mathcal{U}[0, 1]$ désigne une variable aléatoire distribuée suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} . La probabilité d'acceptation en un passage de l'algorithme d'acceptation-rejet est égale à $1/M$. Le nombre de passages nécessaires pour simuler une réalisation de la loi $p(s; \theta)$, $s \in \mathcal{S}(q)$ suit une loi géométrique de paramètre $1/M$. Le nombre moyen de passages de l'algorithme est par conséquent égal à M . On a donc intérêt à choisir M et la loi instrumentale f de façon à diminuer le nombre moyen de passages.

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à la référence [117].

Proposition 1.2.2. *Soit le modèle de Mallows-Bradley-Terry défini par*

$$p(r; \pi) = c(\pi) \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)}, \pi_i > 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, q\}$$

avec $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$ et $c(\pi)$ la constante de normalisation. En considérant la fonction de masse f égale à la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{S}(q)$, la constante $M(\pi)$ définie par

$$M(\pi) = 2(q-1)! \sum_{j=1}^q \exp\left\{\frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\}.$$

vérifie

$$\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)} \leq M(\pi) f(r), \forall r.$$

Preuve. En effet, la fonction de masse f est définie par la loi uniforme discrète sur $\mathcal{S}(q)$: $f(s) = 1/q!$, $\forall s$ où $|\mathcal{S}(q)| = q!$ désigne le cardinal de l'ensemble des permutations $\mathcal{S}(q)$. Il s'agit donc de déterminer une constante $M > 1$ tel que : $p(r; \pi)/\{c(\pi)f(r)\} \leq M(\pi)$, $\forall r$.

On a,

$$\frac{p(r; \pi)}{c(\pi)f(r)} = q! \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)}.$$

On a,

$$\forall j, q - r(j) \geq 0 \text{ car } r(j) \leq q, \forall j \text{ et } \sum_{j=1}^q \frac{2(q-r(j))}{q(q-1)} = 1.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)} &= \exp\left\{\sum_{j=1}^q (q-r(j)) \log \pi_j\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{2}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q (q-r(j)) \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\} \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^q \frac{2(q-r(j))}{q(q-1)} \left\{\frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\}\right], \end{aligned}$$

on peut appliquer à bon droit la convexité de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

On obtient ainsi,

$$\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)} \leq \sum_{j=1}^q \frac{2(q-r(j))}{q(q-1)} \exp\left\{\frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\}.$$

Comme $q - r(j) \leq q - 1$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$, on obtient finalement

$$\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r(j)} \leq \frac{2}{q} \sum_{j=1}^q \exp\left\{\frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\},$$

$\forall r \in \mathcal{S}(q)$.

On peut donc poser

$$M(\pi) = 2(q-1)! \sum_{j=1}^q \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}.$$

On obtient finalement

$$\frac{p(r; \pi)}{c(\pi)M(\pi)f(r)} = \frac{\exp \left\{ \sum_{j=1}^q (q-r(j)) \log \pi_j \right\}}{2 \sum_{j=1}^q \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}}.$$

Échantillonneur de Gibbs généralisé

Le recours à une trajectoire d'une chaîne de Markov est parfois nécessaire pour le calcul de sommes et d'intégrales intervenant dans certains calculs numériques. La simulation d'une telle trajectoire peut être un moyen pour générer des réalisations d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. C'est pour cette raison que nous proposons dans cette section un algorithme de Monte Carlo par chaîne de Markov dont la loi stationnaire appartient à la famille définie par le modèle de Mallows-Bradley-Terry. Plusieurs solutions peuvent être envisagées. Comme nous avons à faire à une distribution multivariée, il est naturel de penser à un échantillonneur de Gibbs. Malheureusement, les rangs $r(j)$, $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ d'un classement sans ex-aequo r sont soumis à la contrainte de somme $\sum_{j=1}^q r(j) = q(q+1)/2$. Il n'est donc pas possible de recourir à un algorithme de Gibbs classique. Un algorithme de Métropolis-Hastings indépendant avec la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{S}(q)$ comme loi instrumentale pour la simulation du classement proposé pour l'état suivant est une solution possible. Comme on peut s'y attendre, étant donné la grande dimension (par exemple, $q = 20$) du support de la loi, la convergence vers la distribution stationnaire est difficile. On désigne par $\tau(a, b)$ la transposition sur l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, q\}$ qui permute les entiers a et b avec $a, b \in \{1, 2, \dots, q\}$, tels $a \neq b$. Soit $r = (r(1), r(2), \dots, r(j), \dots, r(q))$ un vecteur de rangs où $r(j)$ est le rang attribué à l'objet j .

$$\tau(a, b)r = s \iff \begin{cases} s(j) = r(j) & \text{si } j \neq r^{-1}(a), j \neq r^{-1}(b) \\ s(r^{-1}(a)) = b \\ s(r^{-1}(b)) = a. \end{cases}$$

On sait que le sous-ensemble des transpositions est un système générateur du groupe $\mathcal{S}(q)$ des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, q\}$. Il en résulte que si r et s sont des vecteurs de rangs il existe une suite finie (a_i, b_i) , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ telle que $s = \{\prod_{i=1}^n \tau(a_i, b_i)\}r$. On peut alors envisager l'algorithme suivant, inspiré

d'une idée de Diaconis P. [43] et Lange K. [87] pour la simulation de la trajectoire d'une chaîne de Markov : on obtient une trajectoire d'une chaîne Markov dont les

Algorithm 1 Gibbs généralisé.

Initialiser r : choisir arbitrairement un classement r comme état initial de la chaîne de Markov ;
 Répéter jusqu'à la convergence
 Début
 1. Tirer dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, q\}$ un couple d'entiers distincts (a, b) suivant la loi uniforme,
 2. Si $U(0, 1) < \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{p(r)}$ alors $r = \tau(a, b)r$ sinon $r=r$
 Fin.

probabilités de transition $q(r, s)$ de l'état initial r à l'état final s sont tels que :

$$q(r, s) = \begin{cases} \frac{2}{q(q-1)} & \text{si } \exists(a, b), s = \tau(a, b)r, \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{p(r)} \geq 1 \\ \frac{2}{q(q-1)} \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{r} & \text{si } \exists(a, b), s = \tau(a, b)r, \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{p(r)} < 1 \\ \frac{2}{q(q-1)} \sum_{a,b} [1 - \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{p(r)}] & \text{si } s = r, \frac{p\{\tau(a,b)r\}}{p(r)} \geq 1 \\ 0 & \text{si } \forall(a, b), s \neq \tau(a, b)r. \end{cases}$$

On vérifie que cette chaîne est irréductible et apériodique. La condition de réversibilité de la chaîne est obtenue en remarquant que toute transposition est involutive; ce qui implique que $s = \tau(a, b)r \iff r = \tau(a, b)s$, soit donc que $p(r)q(r, s) = p(s)q(s, r)$. Il en résulte donc que $p(r), r \in \mathcal{S}(q)$ est l'unique probabilité stationnaire.

1.2.3 Estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans ce qui suit, le modèle de Mallows-Bradley-Terry est considéré sous la forme suivante

$$p(r; \theta) = c(\theta) \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j \right]$$

où $c(\theta) = \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right] \right)^{-1}$.

La log-vraisemblance des paramètres $(\theta_j)_{j \in \{1, 2, \dots, q-1\}}$ associée à un échantillon de n classements indépendants et identiquement distribués $r_i, i = 1 : n$ est

$$l(\theta) = \sum_{j=1}^q \theta_j \sum_{i=1}^n (q - r_i(j)) + n \log \{c(\theta)\}$$

avec $\log\{c(\theta)\} = -\log\{\sum_s \exp[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\}\theta_j]\}$.

Plusieurs auteurs (*e.g.*, Marden [95]) ont attiré l'attention sur la principale difficulté liée au calcul de la constante de normalisation $c(\theta)$ lorsque le nombre d'objets à classer est élevé. En effet, lorsque le nombre d'objets q est supérieur ou égal à 10, le calcul de $c(\theta)$ implique une somme de plus de 3×10^6 termes. Les difficultés liées à ce calcul ont limité l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres du modèle. Afin de pallier ce problème, Critchlow et Fligner [32] ont proposé de traiter le modèle de Mallows-Bradley-Terry comme un modèle linéaire généralisé avec pour fonction de lien la fonction log et une famille multinomiale ; $c(\theta)$ est considéré comme un paramètre de nuisance estimé comme le terme constant du prédicteur linéaire. Cette approche est jusqu'à présent largement utilisée dans la littérature de l'analyse des données de préférence, *e.g.* [32].

Il ne nous semble pas correct cependant de traiter la constante de normalisation $c(\theta)$ comme une constante dans la mesure où elle dépend des paramètres du modèle. Une approche alternative pour surmonter le calcul de la constante de normalisation $c(\theta)$ consistant en un algorithme EM a été évoquée par Marden [95], mais il n'a pas indiqué la façon de l'implémenter. Dans ce qui suit, nous nous proposons de mettre en œuvre cette solution sous la forme d'un algorithme MM *via* les méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov.

Méthode du maximum de vraisemblance par l'algorithme MM

L'algorithme MM est une classe générale d'algorithmes qui inclut l'algorithme EM. Cette classe d'algorithmes a pour but de transformer des problèmes d'optimisation très complexes en des problèmes d'optimisation moins complexes et aisément abordables [74, 88]. Le schéma général d'un algorithme MM pour un problème de maximisation peut être résumé comme suit : soit θ' une valeur courante du vecteur des paramètres θ .

1. remplacer la fonction objectif l à optimiser par une fonction auxiliaire $S(\cdot; \theta')$ telle que $l(\theta) \geq S(\theta; \theta')$ et $l(\theta') = S(\theta'; \theta')$;
2. mettre à jour l'évaluation de θ en maximisant la fonction auxiliaire $S(\cdot; \theta')$ par rapport à θ , θ' étant fixé à la valeur courante de θ .

On voit aisément que si $\theta'' = \operatorname{argmax}\{S(\theta; \theta')\}$ alors $l(\theta') = S(\theta'; \theta') \leq S(\theta'; \theta'') \leq l(\theta'') = S(\theta''; \theta'')$ et par conséquent un algorithme MM est monotone.

Fonctions auxiliaires pour l'algorithme MM du maximum de vraisemblance

Étant donné un échantillon de classement indépendant et identiquement distribué $r_i, i = 1 : n$ la log-vraisemblance des paramètres $\theta = (\theta_j)_{j \in \{1, 2, \dots, q-1\}}$ est $l(\theta) = \sum_{i=1}^n l(\theta; r_i)$ où $l(\theta; r_i) = \sum_{j=1}^q (q - r_i(j))\theta_j + \log\{c(\theta)\}$. Le vecteur score associé

à la vraisemblance est donc

$$\nabla_{\theta} l(\theta) = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E}_{\theta}(l) - r_i(l) \right] \right\}_{l=1:(q-1)}$$

tandis que la matrice hessienne est

$$\nabla_{\theta}^2 l(\theta) = -n {}^t M \{ \mathcal{S}(q) \} [\text{diag} \{ p(\theta) \} - p(\theta) {}^t p(\theta)] M \{ \mathcal{S}(q) \}$$

où $p(\theta) = \{ p(s; \theta) \}_s$ est le vecteur des probabilités discrètes associées aux classements et $M \{ \mathcal{S}(q) \}$ est la matrice à $q!$ lignes et $q - 1$ colonnes définie par $M \{ \mathcal{S}(q) \} = \{ s_i(j) \}_{i=1,2,\dots,q!}^{j=1,2,\dots,(q-1)}$ où $i \in \{1, 2, \dots, q!\}$, $s_i \in \mathcal{S}(q)$.

On rappelle que la log-vraisemblance associée à un échantillon de classements sans ex-aequo r_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ indépendants et identiquement distribués est donnée par

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^q \{ q - r_i(j) \} \theta_j \right] + n \log \{ c(\theta) \},$$

avec $\log \{ c(\theta) \} = -\log \left(\sum_s \exp \left[\left\{ \sum_{j=1}^q \{ q - s(j) \} \theta_j \right\} \right] \right)$.

La technique que nous utilisons pour déterminer la fonction auxiliaire $S(\cdot; \theta')$ est due à Böhning et Lindsay [18, 74] qui stipule que s'il existe une matrice symétrique B définie négative et indépendant du vecteur des paramètres θ telle que $\nabla^2 l(\theta) - B \geq 0$ pour tout θ (c'est-à-dire positive) alors

$$l(\theta) \geq l(\theta') + {}^t \nabla_{\theta'} l(\theta) (\theta - \theta') + 1/2 {}^t (\theta - \theta') B (\theta - \theta'),$$

fournit une fonction quadratique minorante de $l(\theta)$ au point θ' .

Proposition 1.2.3. *Soit B la matrice carrée d'ordre $q - 1$ définie par $B = -n(q - 1)^3 \mathbf{I}_{q-1}$ où n désigne la taille de l'échantillon. La fonction $S(\cdot; \theta')$ de \mathbb{R}^{q-1} dans \mathbb{R} définie par $S(\cdot; \theta') = l(\theta') + {}^t \nabla_{\theta'} l(\theta) (\theta - \theta') + 1/2 {}^t (\theta - \theta') B (\theta - \theta')$ est une fonction minorante de $l(\theta)$ au point θ' . L'algorithme MM est défini par la récurrence suivante,*

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{1}{(q-1)^3} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E}_{\theta^{(m)}}(l) - r_i(l) \right] \right\}, \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

$$\mathbf{E}_{\theta}(l) = \sum_s s(l) p(s; \theta), \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

Preuve. *En effet, on rappelle que la matrice hessienne est définie par*

$$\nabla_{\theta}^2 l(\theta) = -n {}^t M \{ \mathcal{S}(q) \} [\text{diag} \{ p(\theta) \} - p(\theta) {}^t p(\theta)] M \{ \mathcal{S}(q) \}$$

où $p(\theta) = \{ p(s; \theta) \}_s$ est le vecteur des probabilités discrètes associées aux classements et $M \{ \mathcal{S}(q) \}$ est la matrice à $q!$ lignes et $q - 1$ colonnes définie par

$M\{\mathcal{S}(q)\} = \{s_i(j)\}_{i=1,2,\dots,q!}^{j=1,2,\dots,(q-1)}$ où $i \in \{1, 2, \dots, q!\}$, $s_i \in \mathcal{S}(q)$.

On peut écrire que

$$\nabla_{\theta}^2 l(\theta) = -nV$$

où $V = \{\mathbf{Cov}_{\theta}(l, k)\}_{k=1,2,\dots,(q-1)}^{l=1,2,\dots,(q-1)}$.

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\begin{aligned} |v_{kl}| &= |\mathbf{Cov}_{\theta}(l, k)| \leq \mathbf{Var}_{\theta}^{1/2}(l) \mathbf{Var}_{\theta}^{1/2}(k) \\ &\leq (q-1)^2, \end{aligned}$$

car $1 \leq s(k) \leq q, \forall k \in \{1, 2, \dots, q\}$ et donc $\mathbf{Var}_{\theta}^{1/2}\{s(k)\} \leq q-1$.

Par suite, $\forall a \in \mathbf{R}^{q-1}$,

$$\begin{aligned} {}^t a V a &\leq \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |a_k| |a_l| |v_{kl}| \\ &\leq (q-1)^2 \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |a_k| |a_l| \\ &\leq (q-1)^2 \left(\sum_{k=1}^q |a_k| \right) \left(\sum_{l=1}^q |a_l| \right) \\ &\leq (q-1)^2 (q-1)^{1/2} (q-1)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^q a_k^2 \right) \\ &\leq (q-1)^3 {}^t a \mathbf{I}_{q-1} a, \end{aligned}$$

où \mathbf{I}_{q-1} désigne la matrice identité d'ordre $q-1$. On en déduit que $V \leq (q-1)^3 \mathbf{I}_{q-1}$.

La matrice $B = -n(q-1)^3 \mathbf{I}_{q-1}$ est définie négative et $\nabla_{\theta, \gamma}^2 l(\theta, \gamma) - B$ est positive.

Par conséquent, la fonction quadratique $S(\theta; \theta') = l(\theta') + {}^t \nabla_{\theta'} l(\theta) (\theta - \theta') + 1/2 {}^t (\theta - \theta') B (\theta - \theta')$ est une fonction minorante de $l(\theta)$ au point θ' .

L'algorithme MM procède donc par maximisation de la fonction quadratique $S(\theta, \theta')$, donnant ainsi l'algorithme suivant

$$\begin{aligned} \theta^{(m+1)} &= \theta^{(m)} - B^{-1} \nabla_{\theta^{(m)}} l(\theta) \\ &= \theta^{(m)} + \frac{1}{(q-1)^3} \left\{ \frac{1}{n} \nabla_{\theta^{(m)}} l(\theta) \right\}. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} + \frac{1}{(q-1)^3} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E}_{\theta^{(m)}} - r_i \right] \right\},$$

Proposition 1.2.4. *La fonction $S(\theta; \theta')$ de \mathbb{R}^{q-1} dans \mathbb{R} définie par*

$$S(\theta; \theta') = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^q \{q - r_i(j)\} \theta_j \right] - n \log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta'_j \right] \right) \\ - \frac{2n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta'}(j) \right] \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\} + 1.$$

est une fonction auxiliaire qui vérifie les conditions (1).

L'algorithme MM est défini par la récurrence suivante

$\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{2}{q(q-1)} \left[\log \left\{ q - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(l) \right\} - \log \left\{ q - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}}(l) \right\} \right],$$

où

$$\mathbf{E}_{\theta}(l) = \sum_s s(l) p(s, \theta), \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

Preuve. *En effet, la log-vraisemblance associée à un échantillon de classements sans ex-aequo $r_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ indépendants et identiquement distribués est donnée par*

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^q \{q - r_i(j)\} \theta_j \right] + n \log \{c(\theta)\},$$

avec $\log \{c(\theta)\} = -\log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right] \right)$.

La fonction $x \mapsto -\log(x)$ étant convexe sur $]0, +\infty[$, on a pour $u_0 \in]0, +\infty[$, $-\log(u) \geq -\log(u_0) - (u - u_0)/u_0, \forall u \in]0, +\infty[$, par suite

$$\log \{c(\theta)\} \geq -\log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta'_j \right] \right) \\ - \frac{\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right]}{\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta'_j \right]} + 1.$$

Posons,

$$Q(\theta) = -\frac{\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right]}{\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta'_j \right]}.$$

On obtient,

$$Q(\theta) = - \sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} (\theta_j - \theta'_j) \right] \times p(s; \theta'),$$

d'où,

$$\begin{aligned} \log\{c(\theta)\} &\geq - \log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\ &\quad - \sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} (\theta_j - \theta'_j) \right] p(s; \theta') \\ &\quad + 1. \end{aligned}$$

Posons,

$$q(s; \theta) = \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} (\theta_j - \theta'_j) \right].$$

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ étant convexe sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , on a,

$$q(s, \theta) \leq \frac{2}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $p(s; \theta')$, puis en passant à la sommation, on obtient

$$Q(\theta) \geq - \frac{2}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta'}(j) \right] \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\}$$

entraînant que

$$\begin{aligned} \log\{c(\theta)\} &\geq - \log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\ &\quad - \frac{2}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta'}(j) \right] \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\} + 1. \end{aligned}$$

Il en résulte que,

$$\begin{aligned} l(\theta) &\geq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^q \{ q - r_i(j) \} \theta_j \right] - n \log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \left\{ q - s(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\ &\quad - \frac{2n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta'}(j) \right] \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\} + 1. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une fonction auxiliaire $S(\theta; \theta')$ minorante de la log vraisemblance $l(\theta)$ peut être proposée

$$S(\theta; \theta') = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^q \{q - r_i(j)\} \theta_j \right] - n \log \left(\sum_s \exp \left[\sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta'_j \right] \right) - \frac{2n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta'}(j) \right] \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} (\theta_j - \theta'_j) \right\} + 1.$$

L'algorithme MM procède donc par maximisation de la fonction quadratique $S(\theta; \theta')$, donnant ainsi l'algorithme suivant $\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{2}{q(q-1)} \left[\log \left\{ q - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(l) \right\} - \log \left\{ q - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}}(l) \right\} \right],$$

où

$$\mathbf{E}_{\theta}(l) = \sum_s s(l) p(s, \theta), \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

Dans la procédure de mise en œuvre pour le calcul des estimations du maximum de vraisemblance, nous avons considéré la fonction auxiliaire de la proposition 1.2.4. Dans nos expérimentations, il nous a semblé que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est plus faible que lorsqu'on considère la fonction auxiliaire donnée à la proposition 1.2.3.

1.2.4 Maximum de vraisemblance *via* une méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

Lorsque le nombre d'objets à classer devient grand, le calcul des espérances mathématiques qui interviennent dans la règle de mise à jour de l'algorithme MM fait intervenir un nombre de termes trop élevé. On propose de les approximer en simulant une chaîne de Markov s_1, s_2, \dots, s_N de loi stationnaire $p(s, \theta)$, $s \in \mathcal{S}(q)$ pour les valeurs courantes du vecteur des paramètres $\theta^{(m)}$.

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

Proposition 1.2.5. *Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur l'ensemble fini $\mathcal{S}(q)$. Il existe une unique mesure stationnaire $p(\theta) = (p(s, \theta))$, $s \in \mathcal{S}(q)$. Elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Quelle que soit la loi marginale de s_0 , loi de s_N converge vers $p(\theta)$ quand N tend vers $+\infty$.*
2. *$\mathbf{E}_{N,\theta}$ converge presque sûrement vers \mathbf{E}_{θ} quand N tend vers $+\infty$. De plus, d'après le théorème centrale limite $\sqrt{N}(\mathbf{E}_{N,\theta} - \mathbf{E}_{\theta})$ est asymptotiquement gaussien $N(0, \Sigma)$ d'espérance mathématique 0 et de matrice de variance covariance Σ .*

Pour la démonstration de cette proposition, le lecteur pourra se reporter aux références suivantes [118, 144].
L'algorithme MM devient,

- i. Simuler une trajectoire s_1, s_2, \dots, s_N d'une chaîne de Markov de loi stationnaire $p(r; \theta^{(m)})$, $r \in \mathcal{S}(q)$;
- ii. Calculer l'estimation $\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}}$ de $\mathbf{E}_{\theta^{(m)}}$;
- iii. Mettre à jour la composante $\theta_l^{(m)}$ du vecteur des paramètres $\theta^{(m)}$

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{2}{q(q-1)} \left[\log \left\{ q - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(l) \right\} - \log \left\{ q - \mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}}(l) \right\} \right].$$

Critère d'arrêt

En raison du bruit induit par l'échantillonnage de Monte Carlo, il n'est pas raisonnable d'admettre que le gradient $\nabla_{N, \theta^{(m)}} l(\theta)$ convergera exactement vers 0 comme dans le cas analytique. Ainsi, le critère d'arrêt utilisé dans le cas présent doit être plus souple que dans le cas analytique. En suivant l'idée de Flegal, Haran et al. [57], un critère d'arrêt basé sur une statistique $W(\theta^{(m)}) = N^t (\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}} - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}}) \hat{\Sigma}^{-1} (\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}} - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}})$, où $\hat{\Sigma}$ est une estimation consistante de la matrice de variance covariance du vecteur $\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}}$ peut être proposé. Une telle estimation de la matrice de variance covariance de l'estimateur $\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}}$ de la moyenne empirique peut être obtenue en faisant recours à la méthode dite *Batching* [57, 85]. Cette méthode est décrite dans le lemme [66, 64] qui suit.

Lemme 1.2.6. *Soit s_1, s_2, \dots, s_N , l'échantillon de Monte Carlo simulé, de taille N à une étape m correspondant au vecteur des paramètres $\theta^{(m)}$. Les N observations de l'échantillon sont divisées en G sous-échantillons d'observations consécutives appelés groupes, de taille commune b . On suppose dans ce qui suit que $N = Gb$. L'estimateur de la moyenne empirique d'un groupe quelconque g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ est donné par :*

$$\bar{Y}_g = \left\{ \frac{1}{b} \sum_{i=(g-1)b+1}^{gb} s_i(l) \right\}_{l=1,2,\dots,q-1}.$$

L'estimateur de la moyenne empirique (moyenne totale sur tous les G groupes) est donné par

$$\bar{\mu}_N = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(l) \right\}_{l=1,2,\dots,q-1} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \bar{Y}_g.$$

On suppose que la taille b de chaque groupe G est suffisamment grande pour que les estimateurs des moyennes empiriques \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ des groupes soient

indépendants et asymptotiquement gaussiens d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/b . Alors Σ peut être approximée par

$$\hat{\Sigma} = \frac{b}{G-1} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N).$$

Pour la démonstration de ce lemme, le lecteur pourra consulter [64]

Proposition 1.2.7. *Soit $\mu = (\mathbf{E}_{\theta^{(m)}}(l))_{l \in \{1,2,\dots,q-1\}}$, l'espérance mathématique de la loi $p(r, \theta^{(m)})$, $r \in \mathcal{S}(q)$. On désigne par $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$. La statistique $T^2 = G^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu)$ est une statistique du $T^2(q-1, G-1)$ de Hotelling de paramètres $q-1$ et $G-1$.*

Par suite, la statistique

$$\frac{G(G-q+1)}{(G-1)(q-1)} {}^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu),$$

est asymptotiquement distribuée suivant la loi de Fisher $F_{q-1, G-q+1}$, à $q-1$ et $G-q+1$ degrés de liberté.

Proposition 1.2.8. *En utilisant la méthode Batching décrite par lemme ci-dessus, on peut proposer le critère d'arrêt suivant, dans l'algorithme MM : On désigne par $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$. Soit $f_{q-1, G-q+1}$ le quantile supérieur d'ordre α pour une loi de Fisher $F_{q-1, G-q+1}$ à $q-1$ et $G-q+1$ degrés de liberté. On arrête l'algorithme MM lorsque*

$$\frac{G(G-q+1)}{(G-1)(q-1)} {}^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu) < f_{q-1, G-q+1}.$$

Preuve. *On désignera par $\mu = (\mathbf{E}_{\theta^{(m)}}(l))_{l \in \{1,2,\dots,q-1\}}$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire de loi $p(s; \theta)$ $s \in \mathcal{S}(q)$. Par définition, le vecteur aléatoire $\bar{\mu}_N - \mu$ est gaussien de dimension $q-1$ de moyenne 0 et $\hat{\Sigma}/N$ est une approximation de sa matrice de variance covariance. L'estimation de l'erreur de Monte Carlo commise sur l'estimation de μ , $\bar{\mu}_N$, par la méthode Batching est donc $\hat{\Sigma}/N$. Les vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ sont indépendants et asymptotiquement gaussiens de dimension $q-1$ d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/b , par suite l'estimateur de la moyennne empirique $\bar{\mu}_N$ est asymptotiquement gaussien de dimension $q-1$ d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/Gb . De plus, la matrice $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ égale à la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ est asymptotiquement distribuée suivant une distribution de Wishart de degré*

de liberté $G - 1$, $\mathbf{W} \sim W_{q-1}(\hat{\Sigma}/b, G - 1)$ [122]. Il en résulte que la statistique $T^2 = G^t(\bar{\mu}_N - \mu)\mathbf{W}^{-1}(\bar{\mu}_N - \mu)$ suit une loi du T^2 de Hotelling de paramètres $q - 1$ et $G - 1$ notée $T^2(q - 1, G - 1)$, soit $t^2 \sim T^2(q - 1, G - 1)$. Soit $F_{q-1, G-q+1}$ la loi de Fisher à $q - 1$ et $G - q + 1$ degrés de liberté. On a la relation suivante [122]

$$T^2(q - 1, G - 1) = \frac{(G - 1)(q - 1)}{G - q + 1} F_{q-1, G-q+1}.$$

On conclut que la statistique

$$\frac{(G - q + 1)}{(G - 1)(q - 1)} T^2 = \frac{G(G - q + 1)}{(G - 1)(q - 1)} t(\bar{\mu}_N - \mu)\mathbf{W}^{-1}(\bar{\mu}_N - \mu),$$

suit la loi de Fisher $F_{q-1, G-q+1}$, à $q - 1$ et $G - q + 1$ degrés de liberté. Le critère d'arrêt proposé dans l'estimation des paramètres est $\{(G - q + 1)/(G - 1)(q - 1)\} T^2 < f_{q-1, G-q+1}$, où $f_{q-1, G-q+1}$ est le quantile supérieur d'ordre α pour la loi de Fisher $F_{q-1, G-q+1}$ à $q - 1$ et $G - q + 1$ degrés de liberté.

Dans la méthode de Batching, l'approximation consistante $\hat{\Sigma}$ de la matrice de variance covariance Σ reste valide lorsque G et b sont choisis tels que $b = [N^v]$ et $G = [N/b]$ avec $v \in \mathbb{Q}$ [57]. La notation $[x]$, $x \in \mathbb{R}$ désigne la partie entière x .

Expérimentation

Dans cette section, nous discutons de l'estimation des paramètres du modèle lorsque le nombre d'objets q à classer est respectivement égal à $q = 4$ et $q = 5$. L'estimation des paramètres concerne des échantillons de classements sans ex-aequo indépendants et identiquement distribués que nous avons simulés via la méthode MCMC. Chaque échantillon de classements avec ex-aequo d'observations indépendantes et identiquement distribuées de taille M donnée pour un vecteur de paramètres θ connus est obtenu en simulant M trajectoires indépendantes de loi stationnaire $p(s; \theta)$, $s \in \mathcal{S}(q)$ jusqu'à un certain temps d'arrêt. Le temps d'arrêt étant la taille de l'échantillon simulé. Les échantillons de Monte Carlo de taille N donnée pour l'estimation des espérances mathématiques sont obtenus en soustrayant N observations d'une seule trajectoire. Dans les deux cas, nous avons simulé la chaîne dans le futur pendant suffisamment longtemps, pour qu'elle approche sa loi stationnaire. Cette période dite de préchauffage (en anglais, Burn-in) permettant à l'algorithme de s'extraire des conditions initiales, n'est pas prise en compte dans la taille des différents échantillons simulés. Dans notre cas, la période de préchauffage a été considérée comme fonction de la taille des objets à classer et fixée à la valeur $q^\beta \log(q)$ où q désigne le nombre d'objets à classer et $\beta \in \mathbb{R}$.

Dans les deux exemples qui suivent, nous avons simulé 1000 échantillons de classement sans ex-aequo d'observations indépendantes et identiquement distribuées,

de tailles différentes suivant la loi $p(s; \theta)$, $s \in \mathcal{S}(q)$, pour des valeurs connues du vecteur des paramètres. Ensuite ces différents échantillons sont utilisés pour estimer les paramètres du modèle. Dans l'estimation du vecteur des paramètres θ du modèle, la taille de l'échantillon de Monte Carlo simulée à chaque étape de l'algorithme MM est fixée à $N = 10000$. La période de préchauffage dans la simulation des échantillons de Monte Carlo vaut $q^\beta \log(q) = 10000$ pour $q = 4$ ($\beta = 6.41$) et $q = 5$ ($\beta = 6.86$). Le paramètre de puissance v intervenant dans le calcul du nombre de groupes G et de la taille commune b des groupes dans la méthode Batching est fixé à $v = 0.5$. On en déduit que $G = 100$ et $b = 100$. Pour le critère d'arrêt dans l'estimation des paramètres, nous avons considéré le quantile supérieur $f_{q-1, G-q+1}$ d'ordre $\alpha = 0.05$ de la loi de Fisher $F_{q-1, G-q+1}$ à $q - 1$ et $G - q + 1$ degrés de liberté. On obtient ainsi, $f_{q-1, G-q+1} = 2.70$ pour $q = 4$ et $f_{q-1, G-q+1} = 2.47$ pour $q = 5$.

Dans le but de vérifier l'hypothèse de la normalité asymptotique d'un estimateur du maximum de vraisemblance, nous avons construit le diagramme quantile-quantile correspondant à chaque composante du vecteur des paramètres estimés. Cette représentation est souvent utilisée pour juger graphiquement de la normalité d'une distribution observée. Rappelons que pour une distribution observée normale, les points obtenus sont alignés.

Exemple 1 : ($q = 4$)

Les résultats présentés ci-après (cf. Tableau 1.1) concernent 1000 échantillons de tailles respectives 100, 200, 500, 800 et 1100. On observe que les estimateurs associés aux paramètres sont faiblement biaisés. De plus, les précisions des estimateurs sont bonnes (les erreurs quadratiques empiriques sont faibles) dans l'ensemble et elles augmentent avec la taille des échantillons. Les variances des estimateurs deviennent faibles lorsque la taille des échantillons augmente. Les graphiques 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 représentent les variations des quantiles empiriques de la série statistique des estimations calculées en fonction des quantiles d'une loi gaussienne centrée réduite. On observe que ces variations peuvent être ajustées par une droite. Ce résultat suggère que asymptotiquement les estimations obtenues sont des réalisations d'une loi normale.

Table 1.1 Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = 1.26, \theta_2 = 1.53, \theta_3 = -0.39$.

Taille	θ_1			θ_2			θ_3					
	$\hat{\theta}_1$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_2$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_3$	EQM	Var	EAM
100	1.438	0.082	0.050	0.223	1.763	0.114	0.060	0.266	-0.353	0.032	0.031	0.143
200	1.429	0.051	0.022	0.185	1.751	0.075	0.026	0.230	-0.352	0.015	0.014	0.099
500	1.441	0.042	0.009	0.183	1.746	0.058	0.011	0.217	-0.339	0.008	0.006	0.074
800	1.429	0.034	0.006	0.170	1.726	0.045	0.007	0.196	-0.342	0.006	0.004	0.063
1100	1.438	0.036	0.004	0.178	1.735	0.047	0.005	0.205	-0.333	0.005	0.002	0.062

Figure 1.1 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

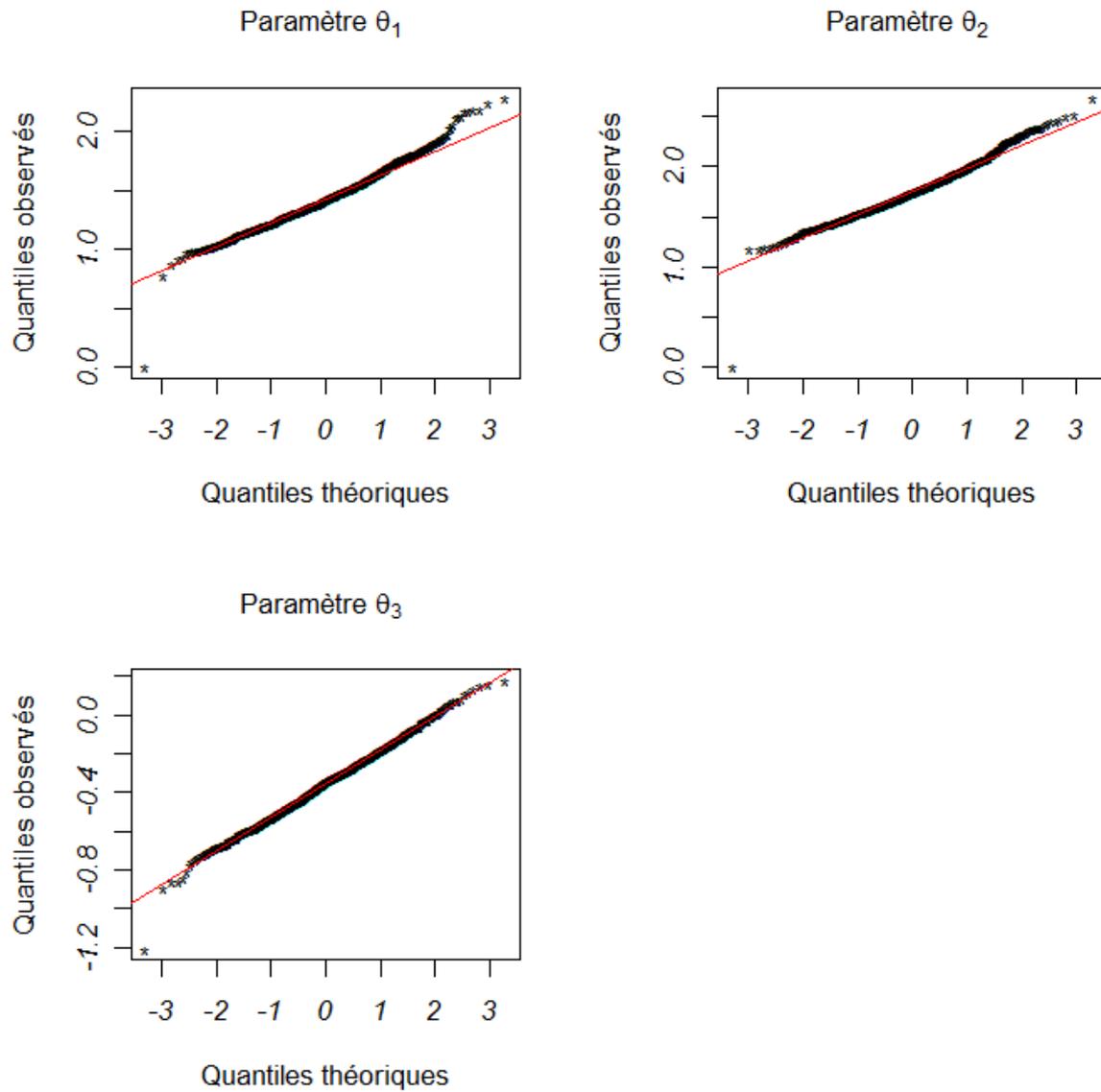


Figure 1.2 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

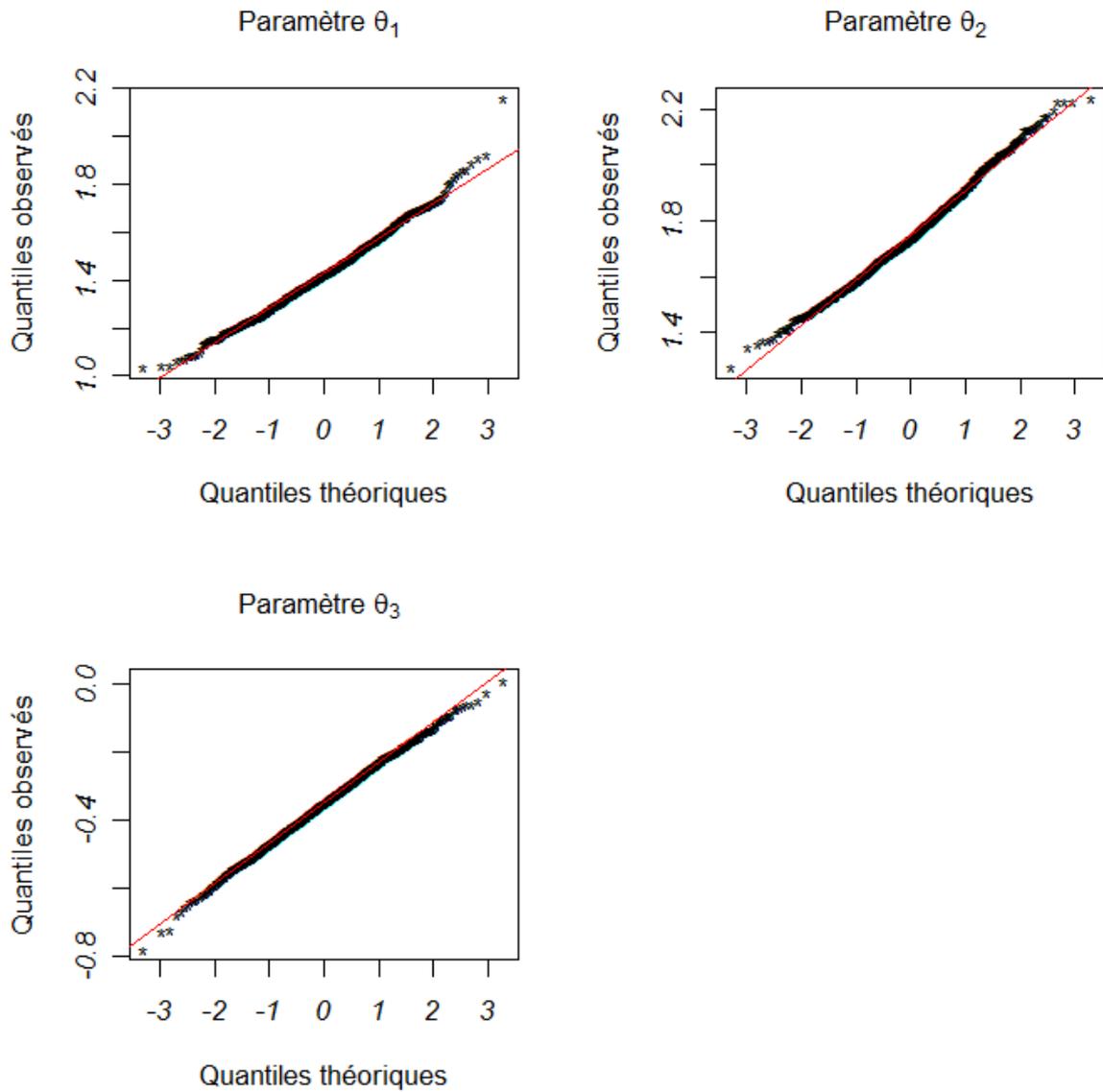


Figure 1.3 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

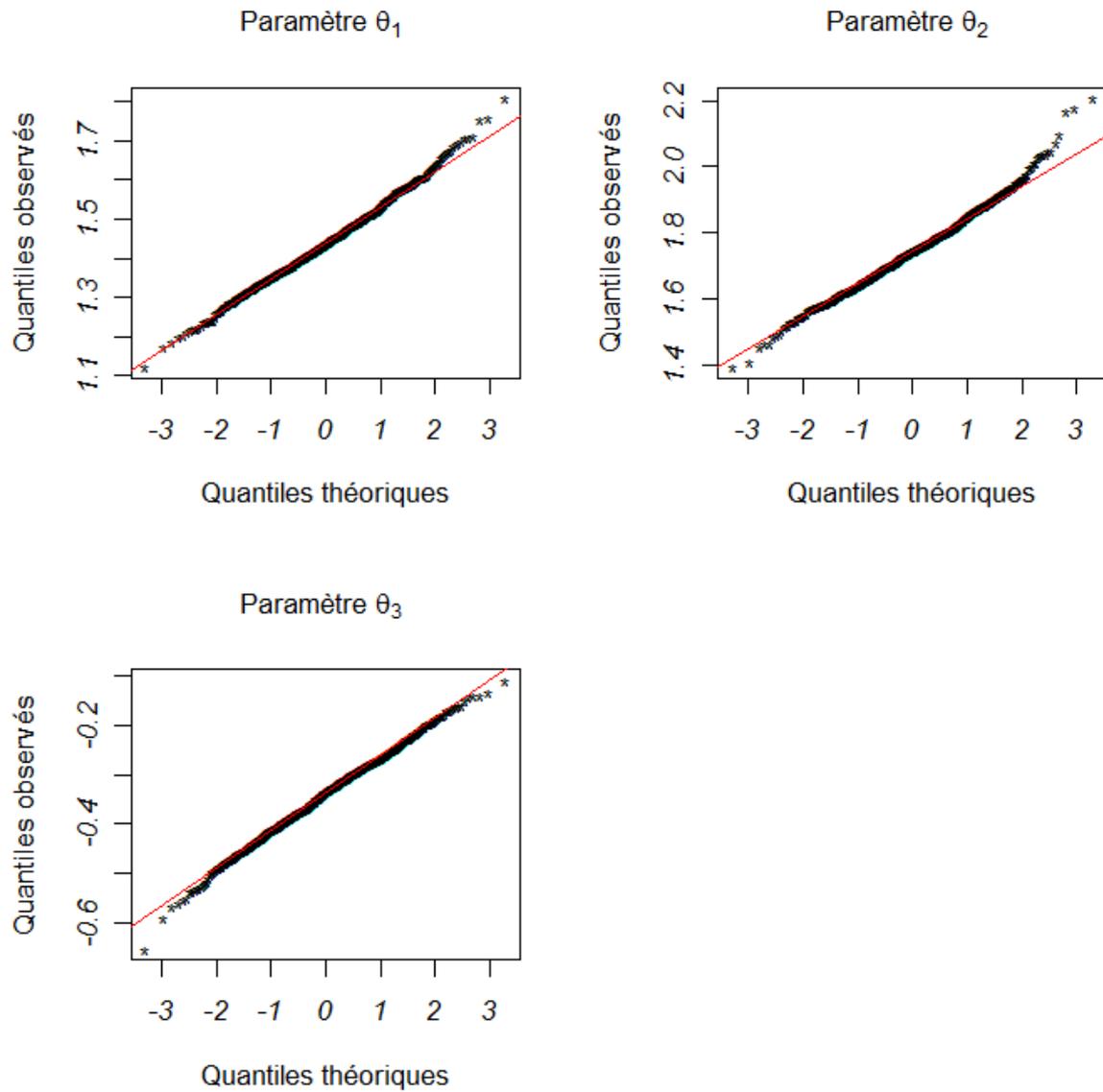


Figure 1.4 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

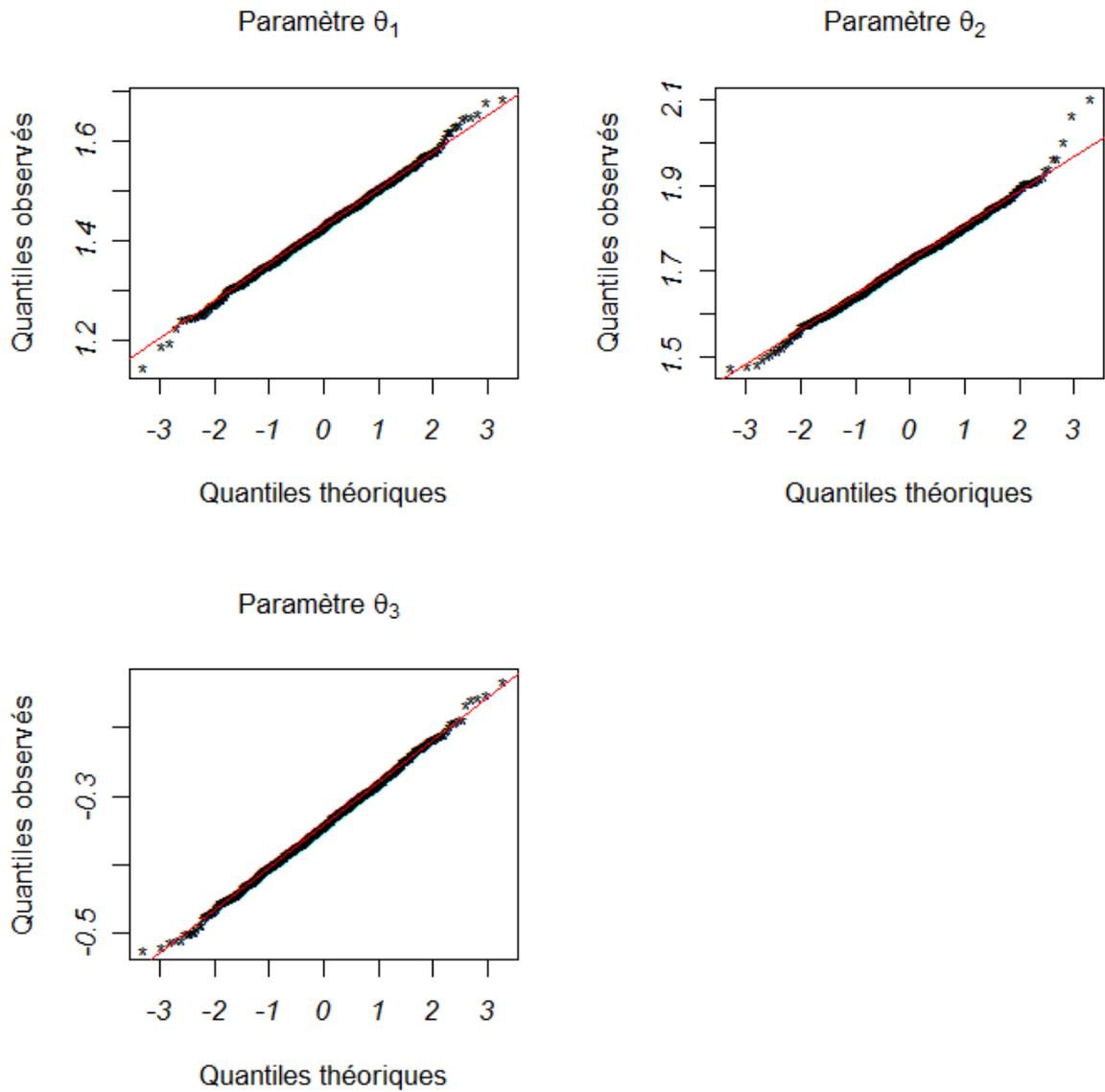
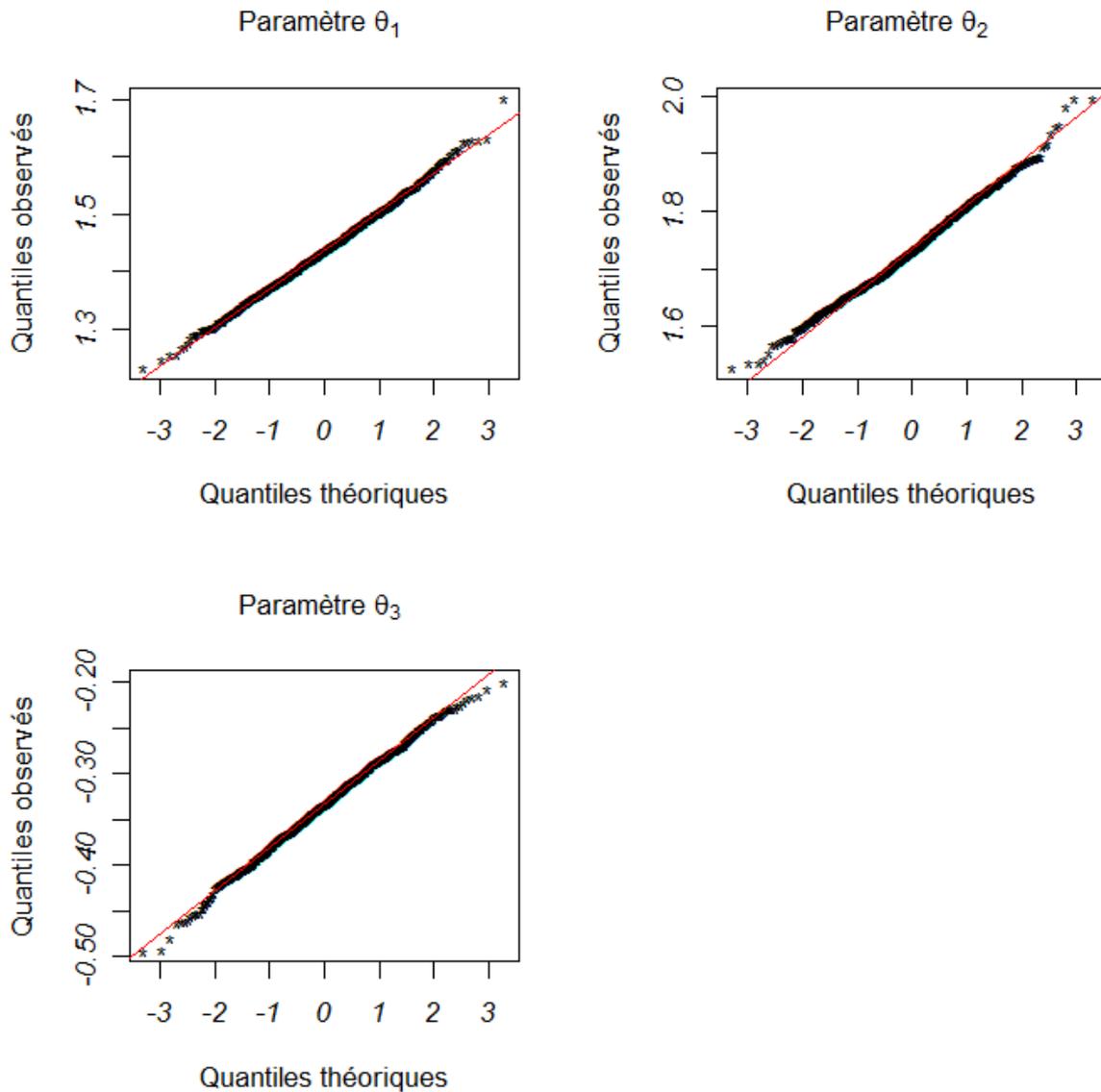


Figure 1.5 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.



Exemple 2 : ($q = 5$)

Les résultats présentés ci-après (cf. Tableau 1.2) concernent 1000 échantillons de tailles respectives 100, 200, 500, 800 et 1100. Les conclusions restent les mêmes que dans le cas de l'exemple 1 présenté ci-dessus. Les graphiques 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10 représentent les variations des quantiles empiriques de la série statistique des estimations calculées en fonction des quantiles d'une loi gaussienne centrée

réduite. On observe que ces variations peuvent être ajustées par une droite. Ce résultat suggère que asymptotiquement les estimations obtenues sont des réalisations d'une loi normale.

Table 1.2 Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = -0.61, \theta_2 = -0.83, \theta_3 = 1.18, \theta_4 = -0.25$.

Taille	θ_1			θ_2			θ_3			θ_4						
	$\hat{\theta}_1$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_2$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_3$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_4$	EQM	Var	EAM
100	-0.649	0.023	0.022	0.121	-0.874	0.025	0.023	0.124	1.431	0.124	0.061	0.285	-0.275	0.020	0.019	0.113
200	-0.639	0.012	0.011	0.086	-0.872	0.014	0.012	0.092	1.413	0.087	0.032	0.246	-0.268	0.010	0.010	0.080
500	-0.637	0.005	0.004	0.057	-0.859	0.006	0.005	0.061	1.428	0.074	0.013	0.249	-0.264	0.005	0.004	0.054
800	-0.636	0.004	0.003	0.048	-0.858	0.004	0.003	0.051	1.423	0.067	0.008	0.243	-0.264	0.003	0.003	0.045
1100	-0.639	0.003	0.002	0.044	-0.864	0.004	0.002	0.048	1.424	0.066	0.007	0.244	-0.273	0.003	0.002	0.041

Figure 1.6 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

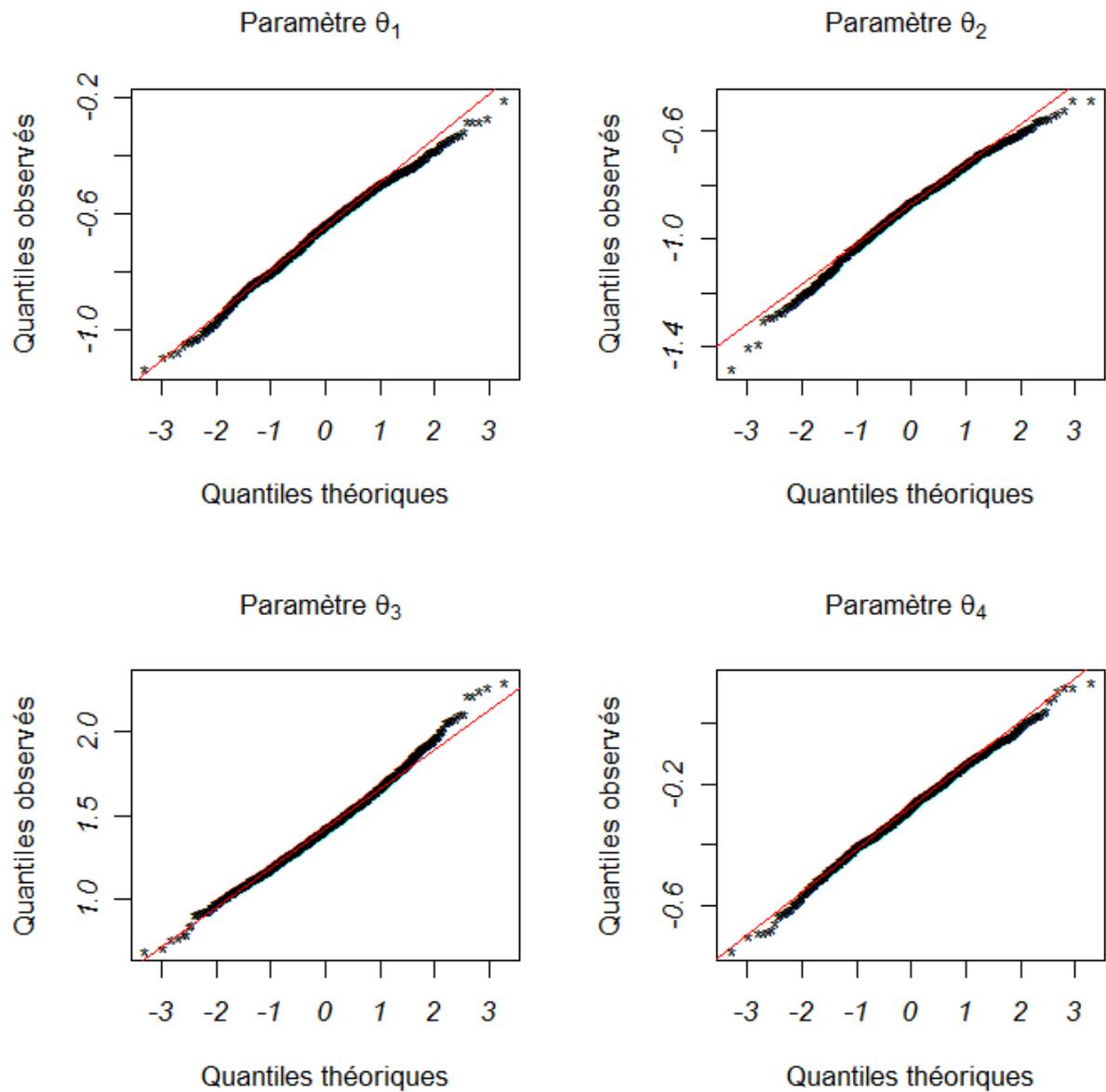


Figure 1.7 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

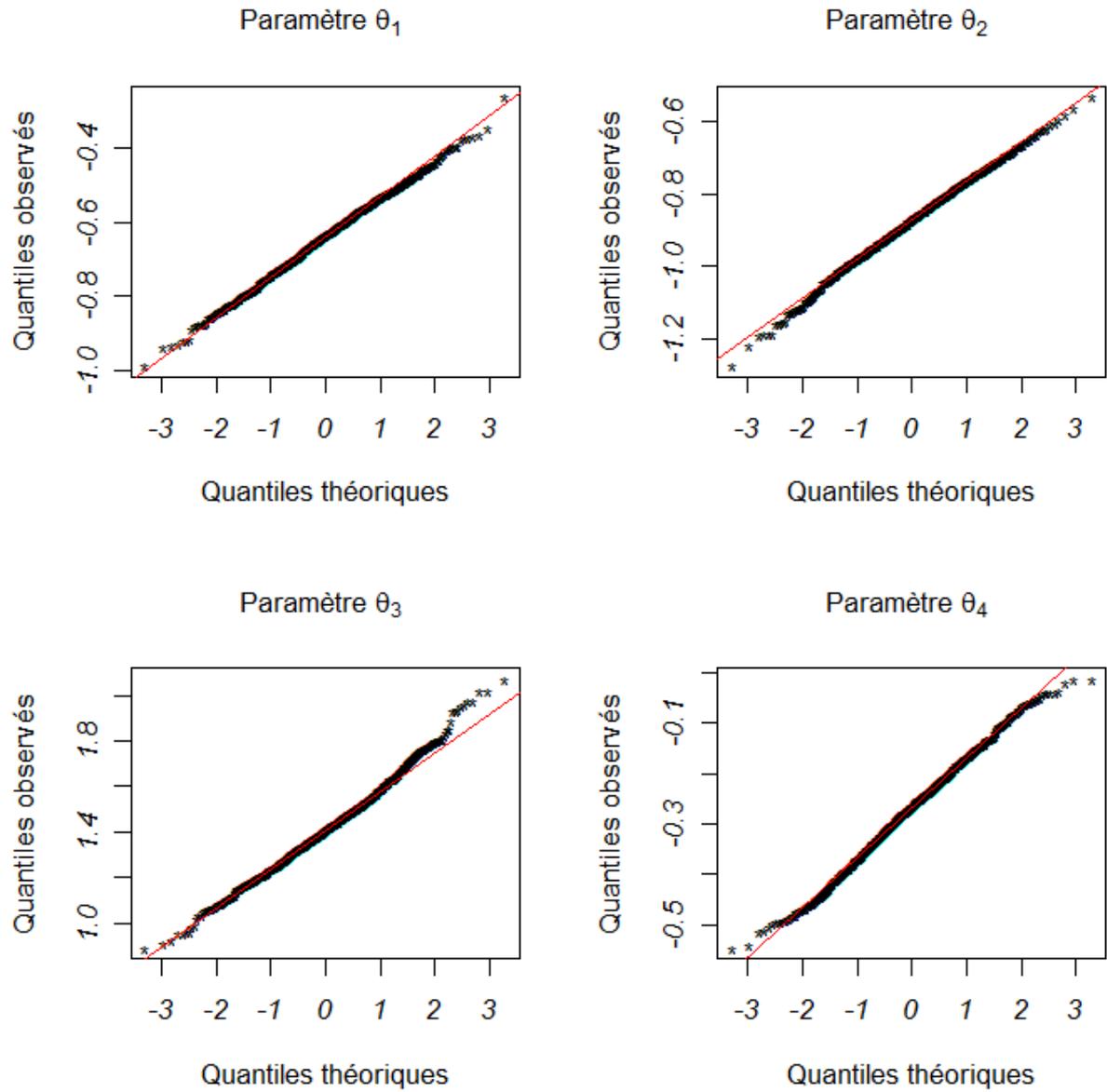


Figure 1.8 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

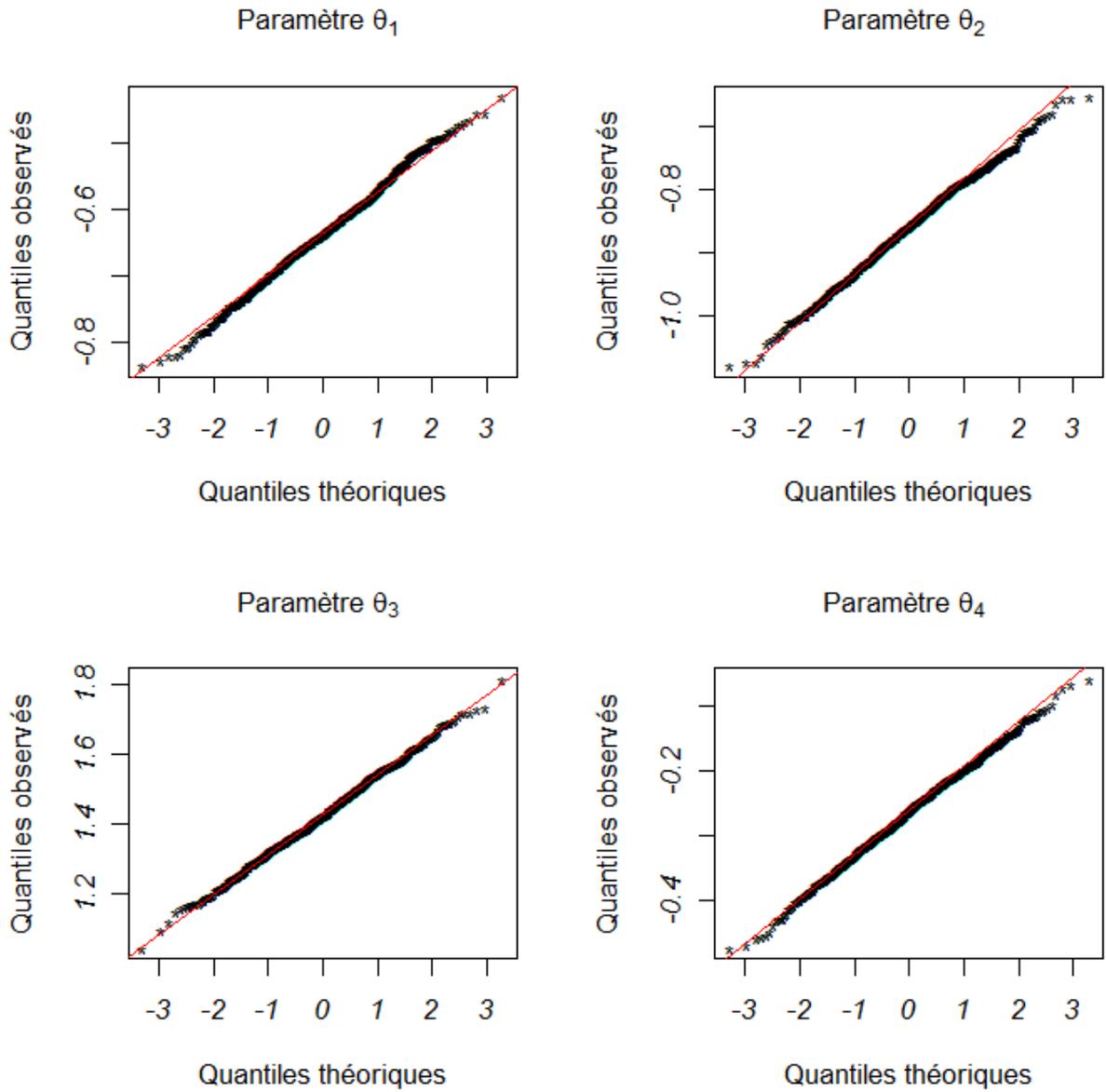


Figure 1.9 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

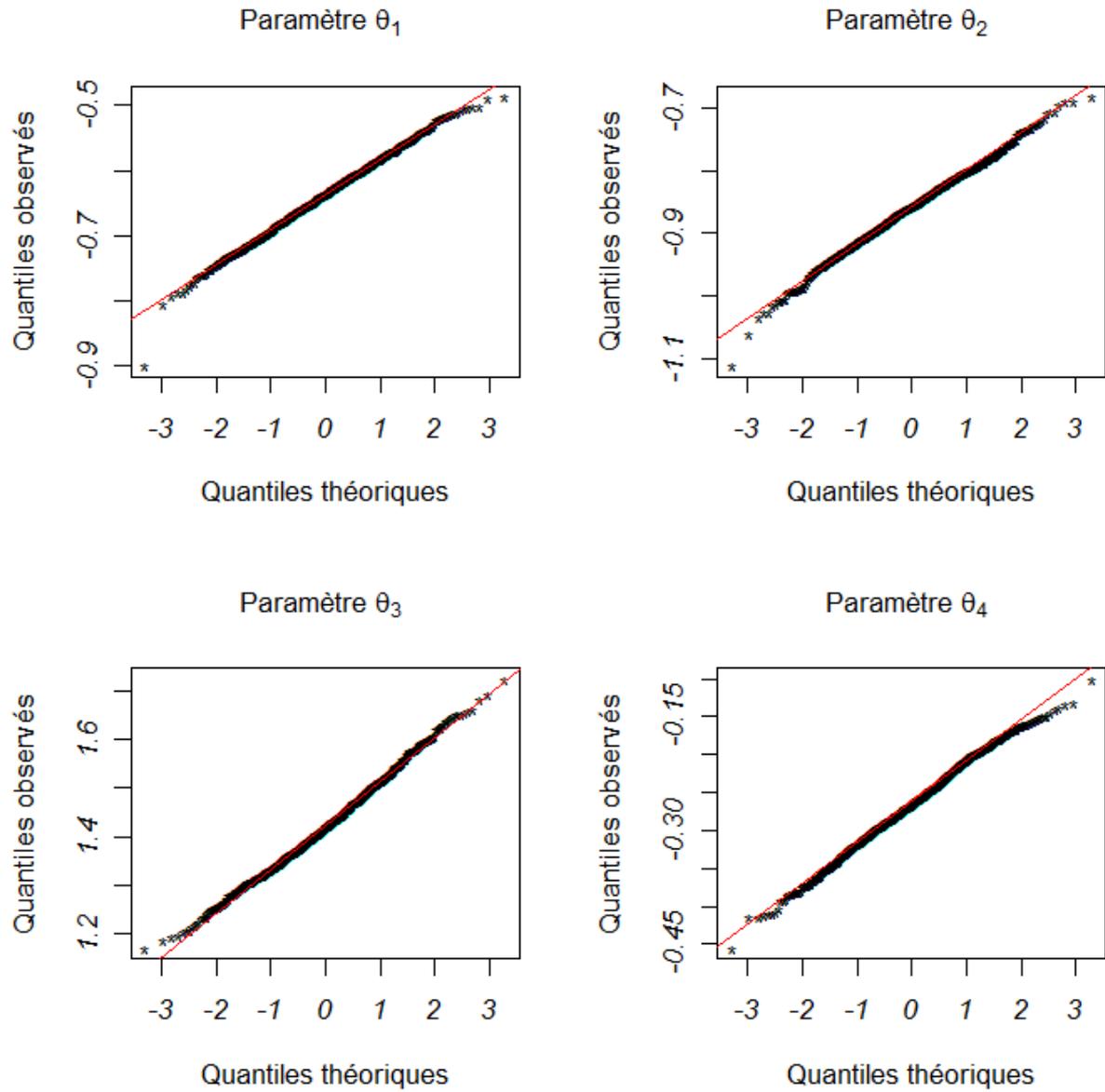
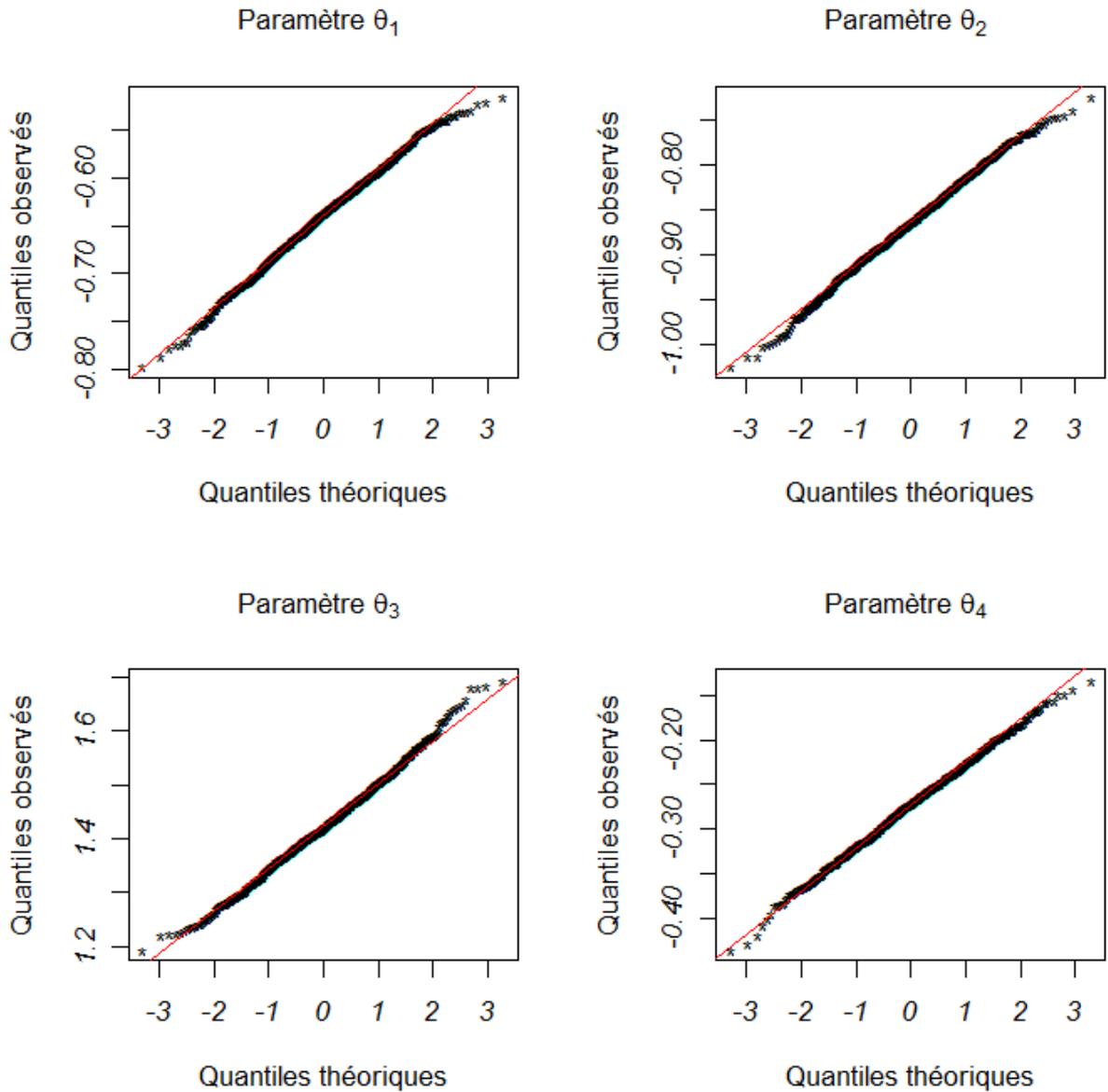


Figure 1.10 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.



1.3 Modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classements avec ex-aequo

Dans cette section, nous proposons une extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry permettant de prendre en compte, des classements avec ex-aequo [95, 31].

Chaque classement avec ex-aequo observé $r = (r(1), r(2), \dots, r(j), \dots, r(q))$ de q objets est un vecteur de longueur q dont les composantes $r(j)$ sont des entiers naturels appartenant au sous-ensemble $\{1, 2, \dots, r_+\}$ de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , où $r_+ = \max_{j \in \{1, 2, \dots, q\}} \{r(j)\}$ ($r_+ \leq q$). Par conséquent, plusieurs objets peuvent avoir le même rang.

1.3.1 Présentation du modèle : paramètres et propriétés

L'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry aux classements avec ex-aequo que nous proposons s'appuie sur l'extension du modèle de Babington Smith aux classements avec ex-aequo proposée dans la sous-section 1.1.2 de ce chapitre.

On peut adapter le modèle de Mallows-Bradley-Terry aux cas des comparaisons avec ex-aequo en considérant les extensions proposées par Rao et Kupper [113] ou par Davidson [39]. Dans Rao et Kupper [113], le modèle de Bradley-Terry pour les probabilités de préférence θ_{ij} a été étendu pour tenir compte des ex-aequo dans les expériences de comparaisons par paires comme suit : $\theta_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \nu\pi_j)$, $\theta_{ji} = \pi_j / (\nu\pi_i + \pi_j)$, et $\theta_{ij2} = \pi_i\pi_j(\nu^2 - 1) / \{(\pi_i + \nu\pi_j)(\nu\pi_i + \pi_j)\}$ avec $\pi_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^q \pi_j = 1$ et $\nu \geq 0$. Rao et Kupper [113] ont interprété le paramètre ν comme un seuil différentiel de perception entre deux objets par le juge. $\nu = 1$ correspond à une situation où il n'y a pas d'ex-aequo ce qui entraîne que la différence entre les deux objets est toujours perceptible par le juge. Il en résulte donc que $\theta_{ij} = \theta_{ij1}(1 - \theta_{ij2})$ avec $\theta_{ij1} = (\pi_i\pi_j + \nu\pi_i^2) / (\nu\pi_i^2 + \nu\pi_j^2 + 2\pi_i\pi_j)$ et $\theta_{ij2} = \{\pi_i\pi_j(\nu^2 - 1)\} / \{(\pi_i + \nu\pi_j)(\pi_j + \nu\pi_i)\}$. On remarque que cette extension du modèle de Bradley-Terry n'est pas compatible avec l'axiome du choix de Luce. Dans le but d'avoir un modèle compatible avec l'axiome du choix de Luce pour les comparaisons par paires, Davidson [39] a proposé plus tard une autre extension du modèle de Bradley-Terry qui tiendra compte des ex-aequo dans une épreuve de comparaison par paires comme suit : $\theta_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \pi_j + c_{ij})$, $\theta_{ji} = \pi_j / (\pi_i + \pi_j + c_{ij})$ et $\theta_{ij2} = c_{ij} / (\pi_i + \pi_j + c_{ij})$ avec $c_{ij} = \nu\sqrt{\pi_i\pi_j}$ et $\nu \geq 0$. Davidson a interprété le paramètre ν comme un indice de discrimination entre les objets soumis à l'expérience de comparaison par paire et indépendant de ceux-ci. On a une discrimination parfaite lorsque $\nu = 0$.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre réel ν est strictement positif.

On rappelle que l'extension du modèle de Babington Smith aux classements

avec ex-aequo proposée est définie par la distribution de probabilité

$$p(r; \theta) = c(\theta) \prod_{1 \leq i < j \leq q} \{\theta_{ij1}(1-\theta_{ij2})\}^{I[r(i) < r(j)]} \{(1-\theta_{ij1})(1-\theta_{ij2})\}^{I[r(i) > r(j)]} \theta_{ij2}^{I[r(i)=r(j)]}$$

où $\theta = (\theta_{ij1}, \theta_{ij2})_{i < j; i, j \in \{1, 2, \dots, q\}} \in]0, 1[^2$ et $c(\theta)$ la constante de normalisation. Le paramètre $\theta_{ij1} = p\{r(i) < r(j) \mid r(i) \neq r(j)\}$ désigne la probabilité que l'objet i ait un rang inférieur à l'objet j dans une épreuve de comparaison par paire sachant que le juge est capable de discriminer les deux objets. Le paramètre $\theta_{ij2} = p\{r(i) = r(j)\}$ est la probabilité que le juge ne soit pas capable de discriminer les objets i et j et décide donc que i et j sont ex-aequo.

Cette extension peut encore s'écrire sous la forme suivante,

$$p(r, \theta) = \exp \left[-b(\theta) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \left(\frac{\theta_{ij1}}{1 - \theta_{ij1}} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) = r(j)] \log \left\{ \frac{\theta_{ij2}}{(1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})} \right\} \right], \quad (1.3.1)$$

où $b(\theta) = -\log\{c(\theta)\} - \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log\{(1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})\}$ est la constante de normalisation.

En considérant le modèle de Davidson [39] dans l'extension du modèle de Babington Smith donnée par l'équation (1.3.1), on obtient

$$p(r, \pi, \nu) \propto \exp \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log \left(\frac{\pi_i}{\pi_j} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} \frac{I[r(i) = r(j)]}{2} \log \left(\nu^2 \frac{\pi_i}{\pi_j} \right) \right\}. \quad (1.3.2)$$

En effet, la formule de probabilité conditionnelle nous permet d'obtenir les relations suivantes : $\theta_{ij} = p\{r(i) < r(j)\} = \theta_{ij1}(1 - \theta_{ij2})$ et $\theta_{ji} = p\{r(i) > r(j)\} = (1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})$. Par suite, en considérant le modèle de Davidson, il vient que

$$\frac{\theta_{ij1}}{1 - \theta_{ij1}} = \frac{\pi_i}{\pi_j},$$

et

$$\frac{\theta_{ij2}}{(1 - \theta_{ij1})(1 - \theta_{ij2})} = \nu \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_j}}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) < r(j)] \log\left(\frac{\pi_i}{\pi_j}\right) &= \sum_{i=1}^q \log(\pi_i) \sum_{j \neq i} I[r(i) < r(j)] - \sum_{1 \leq j < i \leq q} I[r(i) < r(j)] \log(\pi_i) \\
 &- \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log(\pi_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) > r(j)] \log(\pi_j) \\
 &+ \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) = r(j)] \log(\pi_j), \\
 &= \sum_{i=1}^q \log(\pi_i) \sum_{j \neq i} I[r(i) < r(j)] + \sum_{1 \leq i < j \leq q} I[r(i) = r(j)] \log(\pi_j) \\
 &- \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log(\pi_i),
 \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned}
 p(r, \pi, \nu) \propto \exp \left[\sum_{i=1}^q \log(\pi_i) \sum_{j \neq i} \left\{ I[r(i) < r(j)] + \frac{1}{2} I[r(i) = r(j)] \right\} \right] \\
 \times \exp \left\{ \log(\nu) \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i} \frac{I[r(i) = r(j)]}{2} \right\},
 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Soit $r = \{r(j)\}_{j=1,2,\dots,q}$ un classement de q objets avec ex-aequo et $r_+ \leq q$ l'entier naturel tel que $1 \leq r(j) \leq r_+, \forall j = 1, 2, \dots, q$. On associe au classement avec ex-aequo r la distribution d'ex-aequo correspondante λ_r [95] définie par $\lambda_r = (\lambda_r(1), \lambda_r(2), \dots, \lambda_r(r_+))$ avec $\lambda_r(k) = \text{card}\{j; r(j) = k\}, \forall k = 1, 2, \dots, r_+$ ($\lambda_r(k)$ est l'effectif du rang k dans le classement r). Il résulte de la définition de la distribution d'ex-aequo λ_r associée au classement r que

$$\forall i, \quad \sum_{j \neq i} I[r(i) < r(j)] = \sum_{k=r(i)+1}^{r_+} \lambda_r(k) = q - \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_r(k),$$

et

$$\sum_{j \neq i} I[r(i) = r(j)] = \lambda_r\{r(i)\} - 1.$$

L'équation (1.3.3) devient alors

$$\begin{aligned}
 p(r, \pi, \nu) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^q \log(\pi_i) \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{r(i)} \lambda_r(\alpha) + \frac{\lambda_r\{r(i)\} - 1}{2} \right\} \right\} \\
 \times \exp \left\{ \log(\nu) \sum_{i=1}^q \frac{\lambda_r\{r(i)\} - 1}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

On a,

$$\sum_{i=1}^q \lambda_r\{r(i)\} = \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k).$$

En effet,

$$\lambda_r\{r(i)\} = \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r(k) I[r(i) = k], \text{ par suite}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \lambda_r\{r(i)\} &= \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r(k) \sum_{i=1}^q I[r(i) = k] \\ &= \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r(k) \lambda_r(k) \\ &= \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k). \end{aligned}$$

$$\text{Soit } r^*(i) = \frac{\lambda_r\{r(i)\} + 1}{2} + \sum_{\alpha=1}^{r(i)-1} \lambda_r(\alpha) \text{ avec } r^*(i) = \frac{\lambda_r(1) + 1}{2} \text{ si } r(i) = 1,$$

pour tout classement r avec ex-aequo. Le nombre réel $r^*(i)$ désigne ce qu'on convient d'appeler le rang moyen de l'objet i .

En remarquant que

$$q - \sum_{\alpha=1}^{r(i)} \lambda_r(\alpha) + \frac{\lambda_r\{r(i)\} - 1}{2} = q - \sum_{\alpha=1}^{r(i)-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r\{r(i)\} + 1}{2} = q - r^*(i),$$

il vient que

$$p(r, \pi, \nu) = c(\pi, \nu) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \log(\nu) + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \log(\pi_j) \right] \quad (1.3.5)$$

$$\text{où } c(\pi, \nu) = \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \log(\nu) + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\} \log(\pi_j) \right] \right)^{-1}.$$

À cause de la contrainte d'identifiabilité $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$ sur les paramètres π_j , $j = 1, 2, \dots, q$, on peut envisager la réparamétrisation définie par $\theta_j = \log(\pi_j/\pi_q)$ pour $j = 1, 2, \dots, q$ et $\gamma = \log(\nu)$ avec $\nu > 0$. On a donc $\theta_q = 0$, ce qui permet d'avoir un modèle à q paramètres θ_j pour $j = 1, 2, \dots, q-1$ et γ . Les paramètres π_j , $j = 1, 2, \dots, q$ sont alors liés aux paramètres canoniques θ_j , $j = 1, 2, \dots, q$ du modèle exponentiel par la relation $\pi_j = \exp(\theta_j) / \left\{ \sum_{l=1}^q \exp(\theta_l) \right\}$, $j = 1, 2, \dots, q$.

On obtient donc une transformation bijective de $\{\pi \in \mathbb{R}^q; \pi_j > 0, \sum_{j=1}^q \pi_j = 1\}$

$1\} \times \{\nu \in \mathbb{R}; \nu > 0\}$ dans $\{\theta \in \mathbb{R}^q; \theta_q = 0\} \times \mathbb{R}$. On pourra ainsi utiliser ultérieurement la propriété d'invariance d'un estimateur du maximum de vraisemblance.

En vertu de cette reparamétrisation, l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry s'écrit donc

$$p(r, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j \right] \quad (1.3.6)$$

où $c(\theta, \gamma) = \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\} \theta_j \right] \right)^{-1}$.

La famille de lois obtenue est une famille exponentielle de dimension q admettant pour statistique exhaustive le vecteur $((1/2)\{\sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q\}, q - r^*(j))$, $j \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$ pour une observation r .

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la simulation de la loi $p(r, \theta, \gamma)$, r étant un classement avec ex-aequo quelconque.

1.3.2 Méthodes de Monte Carlo pour la simulation d'un échantillon de la loi $p(r; \theta, \gamma)$ $r \in E$ et le calcul d'espérance mathématique

Lorsque le nombre d'objets à classer q est petit (*e.g.*, $q = 4$ ou $q = 5$) la simulation d'un échantillon indépendant et identiquement distribué de la distribution de probabilité $p(r, \theta, \gamma)$ peut se faire en faisant usage de la méthode d'acceptation-rejet.

Méthode d'acceptation-rejet pour la simulation d'un échantillon iid

La mise en œuvre de cette méthode requiert la détermination d'une fonction densité g et d'une constante $M(\theta, \gamma)$ telles

$$\forall s \in E, \frac{p(s; \theta, \gamma)}{c(\theta, \gamma)} \leq M(\theta, \gamma)g(s).$$

où E désigne le support de la loi $p(s, \theta, \gamma)$. L'algorithme d'acceptation-rejet découle du résultat suivant [144, 117] que nous rappelons :

Lemme 1.3.1. -*La procédure*

1. Générer $t \sim g(s)$, $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$;
2. Accepter $r = t$ si $u \leq p(t; \theta, \gamma) / \{c(\theta, \gamma)M(\theta, \gamma)g(t)\}$;
retourner en 1 sinon.

fournit la réalisation d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi $p(r; \theta, \gamma)$.

La notation $\mathcal{U}[0, 1]$ désigne une variable aléatoire distribuée suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$ de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . L'ensemble E étant l'espace des états (l'ensemble de tous les classements avec ex-aequo pour un nombre d'objets q à classer), on désigne par $|E|$ le cardinal de E (le nombre total de classements avec ex-aequo). On sait que le nombre de permutations de q éléments avec $\lambda_s(1), \lambda_s(2), \dots, \lambda_s(s_+)$ répétitions, avec $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$, où $\lambda_s(k)$ désigne l'effectif du rang k et s_+ le rang maximal est égal à : $\frac{q!}{\prod_{k=1}^{s_+} \{\lambda_s(k)\}!}$. Le nombre d'éléments de E est donc donné par $|E| = \sum_{s_+=1}^q [\{q!\} / \prod_{k=1}^{s_+} \{\lambda_s(k)\}!]$ où les entiers naturels $\lambda_s(k)$ solutions de l'équation $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$, pour s_+ donné sont au nombre de $C_{q-1}^{s_+-1}$.

Proposition 1.3.2. *Soit l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry donnée par*

$$p(r; \pi, \nu) = c(\pi, \nu) \nu^{\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\}} \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)},$$

avec $c(\pi, \nu)$ la constante de normalisation. En considérant la fonction de masse g égale à la loi uniforme discrète sur E , une valeur possible de la constante M est donnée par

$$\begin{aligned} M(\pi, \nu) &= |E| \left[\exp \left\{ \frac{(1-q)}{2} \log \nu \right\} 1_{]0,1[}(\nu) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \nu \right\} 1_{]1,+\infty[}(\nu) \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^q \frac{2}{q} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}. \end{aligned}$$

Preuve. *En effet, la loi g est définie par la loi uniforme discrète sur E : $g(s) = 1/|E|, \forall s$. Il s'agit donc de déterminer une constante $M > 1$ telle que : $p(r; \pi, \nu) / \{c(\pi, \nu)g(r)\} \leq M(\pi, \nu), \forall r, \nu$. On a,*

$$\frac{p(r; \pi, \nu)}{c(\pi, \nu)g(r)} = |E| \nu^{\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\}} \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)}.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)} &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^q (q - r^*(j)) \log \pi_j \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{2}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q (q - r^*(j)) \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\} \\ &= \exp \left[\sum_{j=1}^q \frac{2(q - r^*(j))}{q(q-1)} \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\} \right], \end{aligned}$$

on peut appliquer à bon droit la convexité de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

En effet,

$$\forall j, q - r^*(j) \geq 0 \text{ car } r^*(j) \leq q, \forall j \text{ et } \sum_{j=1}^q \frac{2(q-r^*(j))}{q(q-1)} = 1.$$

On obtient ainsi,

$$\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)} \leq \sum_{j=1}^q \frac{2(q - r^*(j))}{q(q-1)} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}.$$

Comme $q - r^*(j) \leq q - 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$, on obtient finalement

$$\prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)} \leq \sum_{j=1}^q \frac{2}{q} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\},$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\}$$

Il reste à majorer le terme $\nu^{\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\}}$, r étant un classement avec ex-aequo.

On a,

$$\nu^{\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\}} = \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \log \nu \right].$$

Supposons que le paramètre strictement positif ν appartient à l'intervalle $]0, 1[$ du corps des nombres réels \mathbb{R} . Comme $\log \nu < 0, \lambda_r(\alpha) \geq 1, \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, r_+\}$, soit donc $\lambda_r^2(\alpha) \geq 1, \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, r_+\}$ et $r_+ - q \geq 1 - q$, les implications suivantes sont triviales

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) \geq r_+ &\implies \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \geq r_+ - q \\ &\implies \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \geq 1 - q \\ &\implies \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \log \nu \leq (1 - q) \log \nu. \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant une fonction strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , on a finalement,

$$\nu^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \leq \exp \left\{ \frac{(1-q)}{2} \log \nu \right\}, \forall r.$$

Supposons maintenant que le paramètre strictement positif ν appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$ de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . Comme $\log \nu > 0$ et $\sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) \leq q^2$ car $\lambda_r(\alpha) \geq 1, \forall r, \alpha$, l'implication suivante est immédiate,

$$\sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \leq q^2 - q \implies \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \log \nu \leq \frac{q(q-1)}{2} \log \nu,$$

entraînant ainsi, compte tenu de la monotonie strictement croissante de la fonction exponentielle,

$$\nu^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \leq \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \nu \right\}, \forall r.$$

De ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \nu^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \prod_{j=1}^q \pi_j^{q-r^*(j)} &\leq \left[\exp \left\{ \frac{(1-q)}{2} \log \nu \right\} 1_{]0,1[}(\nu) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \nu \right\} 1_{]1,+\infty[}(\nu) \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^q \frac{2}{q} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}. \end{aligned}$$

On peut donc poser

$$\begin{aligned} M(\pi, \nu) &= |E| \left[\exp \left\{ \frac{(1-q)}{2} \log \nu \right\} 1_{]0,1[}(\nu) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \nu \right\} 1_{]1,+\infty[}(\nu) \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^q \frac{2}{q} \exp \left\{ \frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j \right\}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{p(r; \pi, \nu)}{c(\pi, \nu)M(\pi, \nu)g(r)} &= \frac{q}{2} \frac{\exp\left\{\sum_{j=1}^q (q - r^*(j)) \log \pi_j\right\}}{\sum_{j=1}^q \exp\left\{\frac{q(q-1)}{2} \log \pi_j\right\}} \\ &\times \left\{ \exp\left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - 1 \right\} \log \nu\right] 1_{]0,1[}(\nu) \right. \\ &\left. + \exp\left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_+} \lambda_r^2(k) - q^2 \right\} \log \nu\right] 1_{]1,+\infty[}(\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Échantillonneur de Gibbs généralisé avec sauts réversibles

Le recours à une trajectoire d'une chaîne de Markov est parfois nécessaire pour le calcul de sommes et d'intégrales intervenant dans certains calculs numériques. La simulation d'une telle trajectoire peut être un moyen pour générer des réalisations d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. C'est pour cette raison que nous proposons dans cette section un algorithme de Monte Carlo par chaîne de Markov dont la loi stationnaire appartient à la famille définie par le modèle de Mallows-Bradley-Terry. Plusieurs solutions peuvent être envisagées.

Comme nous avons à faire à une distribution multivariée, il est naturel de penser à un échantillonneur de Gibbs. Dans la simulation des classements avec ex-aequo $s = (s(1), s(2), \dots, s(q))$ de q objets, les valeurs des entiers entre 1 et une valeur maximale s_+ (avec $s_+ \leq q$) apparaissent au moins une fois dans le vecteur des classements avec ex-aequo s . Ce qui entraîne que les valeurs possibles sont seulement les entiers naturels compris entre 1 et s_+ . Il n'est donc pas possible de recourir à un algorithme de Gibbs classique. Un algorithme de Métropolis-Hastings indépendant avec la loi uniforme sur l'ensemble E comme loi instrumentale pour la simulation du classement proposé pour l'état suivant est une solution possible. Comme on peut s'y attendre, étant donné la grande dimension (*e.g.*, $q = 20$) du support de la loi, la convergence vers la distribution stationnaire est difficile. On propose donc de recourir à un algorithme MCMC de Métropolis-Hastings à sauts réversibles [117, 67], pour simuler une trajectoire d'une chaîne de Markov de distribution stationnaire $p(s; \theta, \gamma)$, $s \in E$.

Dans toute la suite, nous adoptons les définitions suivantes :

Définition 1. On dira qu'un classement s de rang maximal s_+ résulte de la scission d'un rang k du classement r de rang maximal r_+ en deux rangs consécutifs k et $k + 1$, si :

$$r_+ < q, s_+ = r_+ + 1, \{s = k\} \cup \{s = k + 1\} = \{r = k\}, \forall j < k, \{s = j\} = \{r = j\}$$

et $\forall j \geq k + 1, \{s = j + 1\} = \{r = j\}$;

Définition 2. *On dira qu'un classement s de rang maximal s_+ résulte de la fusion de deux rangs consécutifs k et $k + 1$ du classement r de rang maximal r_+ , si : $r_+ > 1, s_+ = r_+ - 1, \{s = k\} = \{r = k\} \cup \{r = k + 1\}, \forall j < k, \{s = j\} = \{r = j\}$ et $\forall j > k + 1, \{s = j\} = \{r = j + 1\}$.*

La procédure de Métropolis-Hastings à sauts réversibles envisagée peut être décrite comme suit :

1. Choisir avec une probabilité τ si le classement qui sera proposé à la transition suivante sera issu de la fusion de deux rangs consécutifs du classement courant r ou de la scission en deux rangs consécutifs d'un rang d'effectif supérieur à 1. $\tau = 0$ si $r_+ = 1$ et $\tau = 1$ si $r_+ = q$;
2. Si le classement à proposer doit résulter d'une fusion alors :
 - (a) choisir un rang a entre 1 et $r_+ - 1$ avec probabilité $\frac{1}{r_+ - 1}$ puis transposer les rangs a et $a + 1$ du classement r précédent ;
 - (b) choisir un rang k compris entre 1 et $r_+ - 1$ avec une probabilité $\frac{1}{r_+ - 1}$ et fusionner les rangs k et $k + 1$ du classement issu de l'étape précédente ;
 - (c) accepter la proposition avec une probabilité d'acceptation de Metropolis-Hastings.
3. Si le classement à proposer doit résulter d'une scission alors :
 - (a) choisir un rang k compris entre 1 et r_+ avec une probabilité $\frac{\lambda_r(k) - 1}{q - r_+}$;
 - (b) choisir un effectif l compris entre 1 et $\lambda_r(k) - 1$ avec une probabilité $\frac{1}{\lambda_r(k) - 1}$;
 - (c) choisir un sous-ensemble de $\{r = k\}$ de taille l avec une probabilité $\frac{1}{C_{\lambda_r(k)}^l}$;
 - (d) choisir un rang a entre 1 et r_+ avec probabilité $\frac{1}{r_+}$ et transposer les rangs a et $a + 1$ du classement issu de l'étape (c) ;
 - (e) accepter la proposition issue des étapes précédentes avec une probabilité d'acceptation de Metropolis-Hastings.

On note $r_{k \vee (k+1)}$ et $r_{k|l}$ les classements obtenus respectivement à partir de la fusion des rangs k et $k + 1$ ou de la scission du rang k en deux sous-ensembles d'objets de cardinaux respectifs l et $\lambda_r(k) - l$ (avec $\lambda_r(k) > 1$) à partir d'un classement r .

On a :

$$q_f(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{(r_+ - 1)^2} & \text{si } \exists a, \exists k, s = \{t(a, a + 1)r\}_{k \vee (k+1)} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.3.7)$$

$$q_d(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{r_+} \frac{1}{(q-r_+)} \frac{1}{C_{\lambda_r(k)}^l} & \text{si } \exists k, \exists l, \exists a, s = t(a, a+1)r_{k|l} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Algorithm 2 Metropolis-Hastings-Green.

Initialiser r : choisir arbitrairement un classement avec ex-aequo r comme état initial de la chaîne de Markov ;

Début

1. Choisir avec une probabilité τ si la partition de q associée au nouveau classement s résultera de la fusion de deux éléments de la partition associée à r ou de la scission en deux parties d'un élément de cette partition.

– si $r_+ = 1$ alors $\tau = 0$ et la stratégie à appliquer est la division ;

– si $r_+ = q$ alors $\tau = 1$ et la stratégie à appliquer est la fusion ;

2. Proposition de l'état de transition

(a) En cas de fusion

– (i) choisir un rang a au hasard entre 1 et $r_+ - 1$, transposer les rangs a et $a + 1$ du classement r et noter σ le classement obtenu ;

– (ii) choisir au hasard un entier k entre 1 et $r_+ - 1$ du classement σ et réunir les ensembles $\{\sigma = k\}$ et $\{\sigma = k + 1\}$;

– (iii) définir l'état final s par

$$s(j) = \begin{cases} k & \text{si } \sigma(j) = k \text{ ou } \sigma(j) = k + 1 \\ \sigma(j) & \text{si } \sigma(j) < k \\ \sigma(j) - 1 & \text{si } \sigma(j) > k + 1 \end{cases}$$

– (iv) accepter s avec la probabilité $\alpha(r, s) = \min\left\{1, \frac{p(s; \theta, \gamma)q_d(s, r)}{p(r; \theta, \gamma)q_f(r, s)}\right\}$;

(b) En cas de scission

– (i) tirer au hasard un entier k entre 1 et r_+ avec probabilité $\frac{\lambda_r(k)-1}{q-r_+}$;

– (ii) scinder l'ensemble $\{r = k\}$ en deux sous-ensembles $\{\delta = k\}$ et $\{\delta = k + 1\}$ de tailles respectives $\lambda_\delta(k) = l$ et $\lambda_\delta(k + 1) = \lambda_r(k) - l$; définir le classement intermédiaire δ par :

$$\delta(j) = \begin{cases} r(j) & \text{si } r(j) < k \\ r(j) + 1 & \text{si } r(j) > k \\ k & \text{si } j \in \{\delta = k\} \\ k + 1 & \text{si } j \in \{\delta = k + 1\} \end{cases}$$

– (iii) choisir au hasard un rang a entre 1 et $\delta_+ - 1$ ($= r_+$) et permuter les rangs a et $a + 1$ du classement δ et noter s le classement final obtenu ;

– (iv) accepter s avec la probabilité $\alpha(r, s) = \min\left\{1, \frac{p(s; \theta, \gamma)q_f(s, r)}{p(r; \theta, \gamma)q_d(r, s)}\right\}$;

Fin.

Le rapport de Métropolis-Hastings-Green dans l'algorithme est défini par les quantités $\{p(s; \theta, \gamma)q_d(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_f(r, s)\}$ et $\{p(s; \theta, \gamma)q_f(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_d(r, s)\}$ respectivement dans le cas de la fusion de deux rangs consécutifs k et $k + 1$ ($k \in \{1, 2, \dots, r_+ - 1\}$) et dans le cas de la division d'un rang k ($k \in \{1, 2, \dots, r_+\}$) du classement courant r .

On se place tout d'abord dans le cas de la fusion : la quantité à calculer est donc $\{p(s; \theta, \gamma)q_d(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_f(r, s)\}$ que l'on peut décomposer en un produit de deux facteurs $\{p(s; \theta, \gamma)\}/\{p(r; \theta, \gamma)\}$ et $\{q_d(s, r)\}/\{q_f(r, s)\}$. L'état initial r et l'état final s de la chaîne de Markov sont ainsi définis par $s = \{t(a, a + 1)r\}_{k \vee (k+1)}$, où $t(a, a + 1)r = \sigma$ désigne la transposition des rangs a et $a + 1$ dans le classement avec ex-aequo r avec $a \in \{1, 2, \dots, r_+ - 1\}$.

On a

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)} \frac{p(\sigma; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)},$$

où

$$\frac{p(\sigma; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \exp \left\{ \lambda_r(a) \sum_{j \in \{r=a+1\}} \theta_j - \lambda_r(a+1) \sum_{j \in \{r=a\}} \theta_j \right\}. \quad (1.3.9)$$

et

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)} = \exp \left[\gamma \lambda_\sigma(k) \lambda_\sigma(k+1) - \frac{\lambda_\sigma(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j + \frac{\lambda_\sigma(k)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k+1\}} \theta_j \right] \quad (1.3.10)$$

avec $s = \{t(a, a + 1)r\}_{k \vee (k+1)}$ et $\sigma = t(a, a + 1)r$.

En vertu des équations (1.3.7) et (1.3.8), on obtient

$$\frac{q_d(s, r)}{q_f(r, s)} = \frac{(r_+ - 1)^2}{s_+(q - s_+) C_{\lambda_s(k)}^l}, \quad (1.3.11)$$

avec $l = \lambda_\sigma(k)$.

On se place maintenant dans le cas de la stratégie de division : la quantité à calculer $\{p(s; \theta, \gamma)q_f(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_d(r, s)\}$ se décompose en un produit de deux facteurs $\{p(s; \theta, \gamma)\}/\{p(r; \theta, \gamma)\}$ et $\{q_f(s, r)\}/\{q_d(r, s)\}$. L'état initial r et l'état final s de la chaîne de Markov sont ainsi définis par $s = t(a, a + 1)\delta$, ($a \in \{1, 2, \dots, \delta_+ - 1\}$) où $\delta = r_{k/l}$ désigne la division du rang k ($k \in \{1, 2, \dots, r_+\}$ et $\lambda_r(k) > 1$) du classement avec ex-aequo r .

On a

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\delta; \theta, \gamma)} \frac{p(\delta; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)},$$

où

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\delta; \theta, \gamma)} = \exp \left\{ \lambda_\delta(a) \sum_{j \in \{\delta=a+1\}} \theta_j - \lambda_\delta(a+1) \sum_{j \in \{\delta=a\}} \theta_j \right\}, \quad (1.3.12)$$

et

$$\frac{p(\delta; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \exp \left[l\gamma \left(l - \lambda_r(k) \right) + \frac{\lambda_\delta(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k\}} \theta_j - \frac{\lambda_\delta(k)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k+1\}} \theta_j \right], \quad (1.3.13)$$

avec $\delta = r_k/l$.

Les équations (1.3.7) et (1.3.8) permettent d'obtenir

$$\frac{q_f(s, r)}{q_d(r, s)} = \frac{r_+(q - r_+) C_{\lambda_r(k)}^l}{(s_+ - 1)^2}, \quad (1.3.14)$$

avec $l = \lambda_\sigma(k)$.

Pour les détails sur les différents calculs, on pourra se reporter à l'annexe A, section A.2.3.

1.3.3 Estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry par la méthode du maximum de vraisemblance

Méthode du maximum de vraisemblance par l'algorithme MM

Dans ce qui suit, l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry est donnée par l'équation (5.2.2) que nous rappelons :

$$p(r, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - r^*(j) \right\} \theta_j \right],$$

$$\text{où } c(\theta, \gamma) = \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta_j \right] \right)^{-1}.$$

Étant donné un échantillon de classement avec ex-aequo r_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, indépendant et identiquement distribué la log-vraisemblance des paramètres $(\theta, \gamma) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1}, \gamma)$ est donnée par

$$\begin{aligned} l(\theta, \gamma) &= \sum_{i=1}^n l(\theta, \gamma, r_i) \\ &= \sum_{j=1}^q \theta_j \sum_{i=1}^n \{q - r_i^*(j)\} + \frac{1}{2} \gamma \left[-nq + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} \right] + n \log \{c(\theta, \gamma)\}, \end{aligned}$$

avec $\log \{c(\theta, \gamma)\} = -\log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta_j \right] \right)$. Le vecteur des scores associé à la vraisemblance est donc

$$\nabla_{\theta, \gamma} l(\theta, \gamma) = \left(\sum_{i=1}^n \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) - r_i^*(l) \right], \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - \mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \right] \right),$$

$\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$.

La matrice hessienne $\nabla_{\theta, \gamma}^2 l(\theta, \gamma)$ en (θ, γ) est donnée par $\nabla_{\theta, \gamma}^2 l(\theta, \gamma) = -nV$, où $S = (1, 2, \dots, q-1, -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha))$ et $V = \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S) = (v_{kl})_{k, l \in \{1, 2, \dots, q\}}$ la matrice de variance covariance du vecteur aléatoire S dont les termes v_{kl} sont définis par

$$v_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = l = q \\ \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(l, k) & \text{si } k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ k, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, q-1\}, l = q \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = q, l \in \{1, 2, \dots, q-1\} . \end{cases}$$

Les différentes raisons évoquées qui justifient et motivent l'utilisation d'un algorithme MM pour l'estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry subsistent encore et se présentent cette fois-ci avec plus d'acuité. En effet, l'ensemble des classements sans ex-aequo est une partie de l'ensemble des classements avec ex-aequo. Dans ce qui suit, nous mettons en place un algorithme MM pour l'estimation des paramètres du modèle.

Fonctions auxiliaires pour l'algorithme MM

La technique que nous utilisons pour déterminer la fonction auxiliaire $S(\beta, \beta')$ est due à Böhning et Lindsay [18, 74].

Proposition 1.3.3. *On désigne par K la matrice diagonale d'ordre q dont les termes diagonaux sont donnés par $K_{ii} = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ et $K_{qq} = \frac{(q+1)}{2}$. Soit B la matrice diagonale d'ordre q définie par : $B = -\frac{n}{2}(q-1)^2(3q-1)K$. La fonction quadratique $S\{(\theta, \gamma), (\theta', \gamma')\}$ de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R} définie par : $S\{(\theta, \gamma), (\theta', \gamma')\} = l(\theta', \gamma') + {}^t \nabla_{(\theta', \gamma')} l(\theta, \gamma) \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\} + 1/2 {}^t \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\} B \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\}$ est une fonction minimisante de la log-vraisemblance $l(\theta, \gamma)$ associée au modèle au point (θ', γ') .*

L'algorithme MM est défini par la récurrence suivante,

$\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{2}{(q-1)^2(3q-1)} \left[\mathbf{E}_{\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}}(l) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^*(l) \right],$$

et

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{2}{(q-1)^2(3q-1)(q+1)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \right],$$

où

$$\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) = \sum_s s^*(l) p(s, \theta, \gamma), \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

et

$$\mathbf{E}_{\theta,\gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} = \sum_s \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} p(s, \theta, \gamma).$$

Preuve. En effet,

on rappelle que la matrice hessienne associée à la log-vraisemblance associée au modèle s'écrit $\nabla_{\theta,\gamma}^2 l(\theta, \gamma) = -n \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma}(S)$, où $S = (1, 2, \dots, q-1, -1/2\{\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha)\})$ et $\mathbf{Cov}_{\theta,\gamma}(S)$ est la matrice de variance covariance du vecteur aléatoire S . Posons $V = \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma}(S) = (v_{kl})_{k,l \in \{1,2,\dots,q\}}$, où les termes v_{kl} sont définis par

$$v_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta,\gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = l = q \\ \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma}(l, k) & \text{si } k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma} \left\{ k, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, q-1\}, l = q \\ -\frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = q, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}. \end{cases}$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$|v_{kl}| = |\mathbf{Cov}_{\theta,\gamma}(l, k)| \leq \mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2}(l) \mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2}(k) \leq (q-1)^2.$$

On a $1 \leq s^*(k) \leq q, \forall k \in \{1, 2, \dots, q\}$ et donc $\mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2}\{s^*(k)\} \leq q-1$.

$\forall k \in \{1, 2, \dots, q-1\}, l = q$,

$$\begin{aligned} |v_{kq}| &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{Cov}_{\theta,\gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \right| \leq \frac{1}{2} \mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2}(l) \mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} (q-1)(q^2-1) \\ &\leq \frac{1}{2} (q-1)^2 (q+1). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_s(\alpha) \geq 1 &\implies \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \leq \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s(\alpha) \right\}^2 \\ &\implies \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \leq q^2, \end{aligned}$$

par suite $\mathbf{Var}_{\theta,\gamma}^{1/2}\{\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha)\} \leq q^2-1$.

$\forall k = l = q$,

$$|v_{qq}| = \frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta,\gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \leq \frac{1}{4} (q^2-1)^2.$$

La matrice V étant définie positive, nous avons les inégalités suivantes $\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q\}, v_{kk} > 0$ et $v_{kl}^2 \leq v_{kk}v_{ll}$. De plus, la fonction $x \mapsto x^2$ étant convexe sur \mathbf{R} , Il en résulte :

$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q\}, \forall a \in \mathbf{R}^q,$

$$\begin{aligned}
 {}^t a V a &\leq \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |a_k| |a_l| v_{kl} \\
 &\leq \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |a_k| |a_l| v_{kk}^{1/2} v_{ll}^{1/2} \\
 &\leq \left(\sum_{k=1}^q |a_k| v_{kk}^{1/2} \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{k=1}^{q-1} |a_k| v_{kk}^{1/2} + |a_q| v_{qq}^{1/2} \right)^2 \\
 &\leq \left\{ (q-1) \sum_{k=1}^{q-1} |a_k| + \frac{(q^2-1)}{2} |a_q| \right\}^2 \\
 &\leq (q-1)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} |a_k| + \frac{(q+1)}{2} |a_q| \right\}^2 \\
 {}^t a V a &\leq \frac{1}{2} (q-1)^2 (3q-1) \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} |a_k|^2 + \frac{(q+1)}{2} |a_q|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Par suite, $V \leq \frac{1}{2} (q-1)^2 (3q-1) K$ où K est la matrice diagonale d'ordre q définie positive dont les termes diagonaux sont donnés par $K_{ii} = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ et $K_{qq} = \frac{(q+1)}{2}$. Ainsi, la matrice $B = -\frac{n}{2} (q-1)^2 (3q-1) K$ est définie négative et donc $\nabla_{\theta, \gamma}^2 l(\theta, \gamma) - B$ est positive. Par conséquent, la fonction quadratique $S\{(\theta, \gamma), (\theta', \gamma')\} = l(\theta', \gamma') + {}^t \nabla_{(\theta', \gamma')} l(\theta, \gamma) \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\} + 1/2 {}^t \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\} B \{(\theta, \gamma) - (\theta', \gamma')\}$ est une fonction minorante de $l(\theta, \gamma)$ au point $(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})$. L'algorithme MM procède donc par maximisation de la fonction quadratique $S\{(\theta, \gamma), (\theta', \gamma')\}$, donnant ainsi l'algorithme suivant

$$\begin{aligned}
 (\theta^{(m+1)}, \gamma^{(m+1)}) &= (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}) - B^{-1} \nabla_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} l(\theta, \gamma) \\
 &= (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}) + \frac{2}{(q-1)^2 (3q-1)} K^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \nabla_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} l(\theta, \gamma) \right\}.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.3.4. *La fonction $S(\cdot; \theta', \gamma')$ de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R} définie par :*

$$\begin{aligned} S(\theta, \gamma; \theta', \gamma') &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r_i^*(j)\} \theta_j \right] \\ &\quad - n \log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma' + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\} \theta'_j \right] \right) \\ &\quad - \frac{n}{2q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \\ &\quad - \frac{n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta', \gamma'}(j) \right] \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\ &\quad + \frac{n}{2} \left[1 + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right\} \right]. \end{aligned}$$

est une fonction auxiliaire de la log-vraisemblance $l(\theta, \gamma)$ associée au modèle au point (θ', γ') .

L'algorithme MM correspondant est défini par la récurrence,

$\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left[\log \left\{ q - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^*(l) \right\} - \log \left\{ q - \mathbf{E}_{\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}}(l) \right\} \right],$$

et

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} - q \right] - \log \left[\mathbf{E}_{\theta^{(m)}, \gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\},$$

où

$$\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) = \sum_s s^*(l) p(s; \theta, \gamma), \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\},$$

et

$$\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} = \sum_s \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} p(s; \theta, \gamma).$$

Preuve. *En effet,*

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ étant convexe sur le corps des nombres réels \mathbf{R} , on a,

$$\begin{aligned} q(s, \theta, \gamma) &\leq \frac{\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\}}{q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^q \frac{\{q - s^*(j)\}}{q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q}{q(q-1)} \right\} \cdot \exp\{0\}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $p(s, \theta', \gamma')$, puis en passant à la sommation, on obtient

$$\begin{aligned} Q(\theta, \gamma) \geq & -\frac{1}{2q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \\ & - \frac{1}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta', \gamma'}(j) \right] \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\ & - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \right], \end{aligned}$$

entraînant que

$$\begin{aligned} \log\{c(\theta, \gamma)\} \geq & -\log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma' + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\ & - \frac{1}{2q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \\ & - \frac{1}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta', \gamma'}(j) \right] \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\ & - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \right] + 1. \end{aligned}$$

Il en résulte que,

$$\begin{aligned} l(\theta, \gamma) \geq & \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - r_i^*(j) \right\} \theta_j \right] \\ & - n \log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma' + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\ & - \frac{n}{2q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \\ & - \frac{n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\theta', \gamma'}(j) \right] \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\ & + \frac{n}{2} \left[1 + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \right]. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une fonction auxiliaire $S(\theta, \gamma; \theta', \gamma')$ minorante de la log vrai-

semblance $l(\theta, \gamma)$ au point (θ', γ') peut être proposée

$$\begin{aligned}
 S(\theta, \gamma; \theta', \gamma') &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r_i^*(j)\} \theta_j \right] \\
 &\quad - n \log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma' + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta'_j \right] \right) \\
 &\quad - \frac{n}{2q(q-1)} \exp\{q(q-1)(\gamma - \gamma')\} \left\{ \mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left(\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right) - q \right\} \\
 &\quad - \frac{n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left\{ q - \mathbf{E}_{\theta', \gamma'}(j) \right\} \exp\{q(q-1)(\theta_j - \theta'_j)\} \\
 &\quad + \frac{n}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{q(q-1)} \left[\mathbf{E}_{\theta', \gamma'} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Dans la procédure de mise en œuvre pour le calcul des estimations du maximum de vraisemblance, nous avons considéré la fonction auxiliaire de la proposition 1.3.4. Dans nos expérimentations, il nous a semblé que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est plus faible que lorsqu'on considère la fonction auxiliaire donnée à la proposition 1.3.3. Les différentes relations qui définissent les règles de mise à jour des paramètres nécessitent le calcul des espérances mathématiques $(\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l)_{l \in \{1, 2, \dots, q-1\}})$ et $\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}$. Le calcul de ces espérances mathématiques fait intervenir un nombre trop élevé de termes lorsque le nombre d'objets à classer q devient très grand (l'espace d'états devient très grand). Dans ce cas, les espérances mathématiques peuvent être évaluées en faisant recours aux méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov. Pour de faibles valeurs de q , notamment $q = 4$ et $q = 5$, les espérances mathématiques peuvent être calculées explicitement.

Dans ce qui suit, nous présentons deux exemples d'estimations des paramètres (θ, γ) pour des valeurs de q égales à 4 et 5.

Expérimentations

Ces exemples sont basés sur des échantillons indépendants et identiquement distribués de classements avec ex-aequo simulés suivant la loi $p(r, \theta, \gamma)$ pour des valeurs connues du vecteur des paramètres (θ, γ) en utilisant la méthode d'acceptation et rejet sus-décrite. Le critère d'arrêt dans les procédures de mise à jour des paramètres (θ, γ) est donné par la norme euclidienne du gradient avec une tolérance de 10^{-4} . L'espace des états E pour un nombre d'objets q à classer est obtenu grâce à la boîte à outils `gtools` de l'environnement de calcul scientifique R.

Exemple 1 : ($q = 4$)

Les rangs maximaux s_+ possibles sont définis par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Pour $s_+ = 1$, l'équation $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$ admet une seule solution $\lambda_s(1) = 4$. On a donc un seul classement avec ex-aequo possible.

Pour $s_+ = 2$, les solutions de $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$ sont définis par les couples d'entiers naturels $(1, 3)$, $(3, 1)$ et $(2, 2)$. Les classements avec ex-aequo possibles sont donc au nombre de 14. Pour $s_+ = 3$, les solutions de $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$ sont définis par les triplets d'entiers naturels $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ et $(2, 1, 1)$. Les classements avec ex-aequo possibles sont donc au nombre de 36. Enfin pour $s_+ = 4$, les différents classements sont des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, q\}$. On a donc $4! = 24$ classements possibles. L'ensemble des classements avec ex-aequo correspondant possèdent donc $|E| = 75$ éléments. Les résultats présentés ci-après concernent 100 échantillons de tailles respectives 100, 150, 200 et 500 suivant le vecteur des paramètres théoriques $(\theta, \gamma) = (2.0, 1.3, 2.5, 1.2)$. On peut remarquer que les précisions sont acceptables dans l'ensemble. Elle s'améliore pour le cas de l'échantillon de taille 500.

Table 1.3 Moyennes empiriques et erreurs quadratiques empiriques des estimations des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques $\theta = (2.0, 1.3, 2.5)$ et $\gamma = 1.2$.

	Tailles d'échantillon	$(\hat{\theta}, \bar{\gamma})$	<i>EQM</i>
1	100	(2.01, 1.25, 2.48, 1.20)	0.23
2	200	(1.97, 1.26, 2.48, 1.20)	0.12
3	500	(1.96, 1.24, 2.46, 1.19)	0.05

Exemple 2 : ($q = 5$)

Les rangs maximaux s_+ possibles sont définis par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. En procédant de façon analogue à l'exemple précédent, on obtient pour : $s_+ = 1$, 1 classement avec ex-aequo possible ; $s_+ = 2$, 30 classements avec ex-aequo possibles ; $s_+ = 3$, 150 classements avec ex-aequo possibles ; $s_+ = 4$, 240 classements avec ex-aequo possibles ; $s_+ = 5$, 120 classements complets possibles. On a $|E| = 541$. Nous avons simulé 100 échantillons de tailles respectives 100, 200 et 500 suivant le vecteur des paramètres théoriques $(1.13, 1.00, 1.88, 1.18, -0.91)$. On peut remarquer que les précisions sont acceptables dans l'ensemble. Elle s'améliore pour le cas de l'échantillon de taille 500.

Table 1.4 Moyennes empiriques et erreurs quadratiques empiriques des estimations des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques $\theta = (1.13, 1.00, 1.88, 1.18)$ et $\gamma = -0.91$.

Tailles d'échantillon		$(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$	EQM
1	100	(1.14, 1.04, 1.92, 1.20, -0.92)	0.12
2	200	(1.16, 1.03, 1.92, 1.22, -0.90)	0.08
3	500	(1.15, 1.02, 1.91, 1.20, -0.91)	0.03

1.3.4 Maximum de vraisemblance via méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

Lorsque le nombre d'objets à classer devient grand, les espérances mathématiques qui interviennent dans la règle de mise à jour de l'algorithme MM ne peuvent pas être calculées analytiquement. On propose de les approximer en simulant une chaîne de Markov s_1, s_2, \dots, s_N de loi stationnaire $p(s, \theta, \gamma)$, $s \in E$ pour les valeurs courantes du vecteur des paramètres $(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})$.

Méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov

Nous rappelons dans ce qui suit, le théorème d'ergodicité et le théorème central limite donnés dans le cas des classements sans ex-aequos.

Proposition 1.3.5. *Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur l'ensemble fini E . Il existe une unique mesure stationnaire $p(\theta) = (p(s, \theta))$, $s \in E$. Elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Quelle que soit la loi marginale de s_0 , la loi de s_N converge vers $p(\theta)$ quand N tend vers $+\infty$.*
2. *$\mathbf{E}_{N,\theta}$ converge presque sûrement vers \mathbf{E}_θ quand N tend vers $+\infty$. De plus, d'après le théorème centrale limite $\sqrt{N}(\mathbf{E}_{N,\theta} - \mathbf{E}_\theta)$ est asymptotiquement gaussien $N(0, \Sigma)$ d'espérance mathématique 0 et de matrice de variance covariance Σ .*

L'algorithme MM est ainsi défini par,

- i. Simuler une trajectoire s_1, s_2, \dots, s_N d'une chaîne de Markov de loi stationnaire $p(s, \theta, \gamma)$, $s \in E$ pour les valeurs courantes du vecteur des paramètres $(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})$.
- ii. Calculer l'estimation $\mathbf{E}_{N,\theta^{(m)},\gamma^{(m)}}$ de $\mathbf{E}_{\theta^{(m)},\gamma^{(m)}}$.

- iii. Mettre à jour les composantes $\theta_l^{(m)}$, γ^m du vecteur des paramètres $(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})$
 $\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\theta_l^{(m+1)} = \theta_l^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left[\log \left\{ q - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^*(l) \right\} - \log \left\{ q - \mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}, \gamma^{(m)}}(l) \right\} \right],$$

et

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} - q \right] - \log \left[\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}, \gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\},$$

Critère d'arrêt

En raison du bruit induit par l'échantillonnage de Monte Carlo, il n'est pas raisonnable d'admettre que le gradient $\nabla_{N, (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} l(\theta)$ convergera exactement vers 0 comme dans le cas analytique. Ainsi, le critère d'arrêt utilisé dans le cas présent doit être plus souple que dans le cas analytique. En suivant l'idée de Flegal, Haran et al. [57], un critère d'arrêt basé sur une statistique $W\{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})\} = N^t(\mathbf{E}_{N, (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} - \hat{\mathbf{E}}_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})}) \hat{\Sigma}^{-1} (\mathbf{E}_{N, (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} - \hat{\mathbf{E}}_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})})$, où $\hat{\Sigma}$ est une estimation consistante de la matrice de variance covariance du vecteur $\mathbf{E}_{N, (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})}$ peut être proposée. Une telle estimation de la matrice de variance covariance de l'estimateur $\mathbf{E}_{N, (\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})}$ de la moyenne empirique peut être obtenue en faisant recours à la méthode dite *Batching* [57, 85]. Cette méthode est décrite dans le lemme [66, 64] qui suit.

Lemme 1.3.6. *Soit s_1, s_2, \dots, s_N , l'échantillon de Monte Carlo simulé, de taille N à une étape m correspondant au vecteur des paramètres $(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})$. Les N observations de l'échantillon sont divisées en G sous-échantillons d'observations consécutives appelés groupes, de taille commune b . On suppose dans ce qui suit que $N = Gb$. L'estimateur de la moyenne empirique d'un groupe quelconque g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ est donné par :*

$$\bar{Y}_g = \left[\frac{1}{b} \sum_{i=(g-1)b+1}^{gb} \left\{ s_i^*(l), \sum_{\alpha=1}^{s_{i,+}} \lambda_{s_i}^2(\alpha) \right\} \right]_{l=1,2,\dots,q-1}.$$

L'estimateur de la moyenne empirique (moyenne totale sur tous les G groupes) est donné par

$$\bar{\mu}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^*(l), \sum_{\alpha=1}^{s_{i,+}} \lambda_{s_i}^2(\alpha) \right\} \right]_{l=1,2,\dots,q-1} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \bar{Y}_g.$$

On suppose que la taille b de chaque groupe G est suffisamment grande pour que les estimateurs des moyennes empiriques \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ des groupes soient

indépendants et approximativement gaussiens d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/b . Alors Σ peut être approximée par

$$\hat{\Sigma} = \frac{b}{G-1} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N).$$

Proposition 1.3.7. Soit $\mu = [\mathbf{E}_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})}]$, l'espérance mathématique de la loi $p(s, \theta, \gamma)$, $s \in E$. On désigne par $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$. La statistique $T^2 = G^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu)$ est une statistique du T^2 de Hotelling de paramètres q et $G-1$ notée $T^2(q, G-1)$.

Par suite, la statistique

$$\frac{G(G-q)}{(G-1)q} {}^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu),$$

est asymptotiquement distribuée suivant la loi de Fisher $F_{q, G-q}$, à q et $G-q$ degrés de liberté.

Proposition 1.3.8. En utilisant la méthode *Batching* décrite par lemme ci-dessus, on peut proposer le critère d'arrêt suivant, dans l'algorithme MM : On désigne par $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$. Soit $f_{q-1, G-q+1}$ le quantile supérieur d'ordre α pour la loi de Fisher à $q-1$ et $G-q+1$ degrés de liberté $F_{q-1, G-q+1}$. On arrête l'algorithme MM lorsque $\frac{G(G-q+1)}{(G-1)(q-1)} {}^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu) < f_{q-1, G-q+1}$.

Preuve. Posons

$\mu = [\mathbf{E}_{(\theta^{(m)}, \gamma^{(m)})} \{(l), \sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha)\}]_{l \in \{1, 2, \dots, q-1\}}$, l'espérance mathématique associée à la distribution de probabilité $p(s, \theta, \gamma)$, $s \in E$. Par définition, le vecteur aléatoire $\bar{\mu}_N - \mu$ est gaussien de dimension q de moyenne 0 et $\hat{\Sigma}/N$ est une approximation de sa matrice de variance covariance. L'estimation de l'erreur de Monte Carlo commise sur l'estimation de μ , $\bar{\mu}_N$, par la méthode *Batching* est donc $\hat{\Sigma}/N$. Les vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ sont indépendants et asymptotiquement gaussiens de dimension q d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/b , par suite l'estimateur de la moyennne empirique $\bar{\mu}_N$ est asymptotiquement gaussien de dimension q d'espérance mathématique μ et de matrice de variance covariance Σ/Gb . De plus, la matrice $\mathbf{W} = \hat{\Sigma}/b = \{1/(G-1)\} \sum_{g=1}^G (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)^t (\bar{Y}_g - \bar{\mu}_N)$ égale à la matrice de variance covariance empirique des vecteurs aléatoires \bar{Y}_g , $g \in \{1, 2, \dots, G\}$ est asymptotiquement distribuée suivant une distribution de Wishart de degré de liberté $G-1$, $\mathbf{W} \sim W_q(\hat{\Sigma}/b, G-1)$ [122]. Il en résulte que la statistique $T^2 = G^t (\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1} (\bar{\mu}_N - \mu)$ suit une loi du T^2 de Hotelling de paramètres q et $G-1$ notée $T^2(q, G-1)$, soit $t^2 \sim T^2(q, G-1)$.

Soit $F_{q,G-q}$ une loi de Fisher à q et $G - q$ degrés de liberté. On a la relation suivante [122]

$$T^2(q, G - 1) = \frac{(G - 1)q}{G - q} F_{q,G-q}.$$

On conclut que la statistique

$$\frac{(G - q)}{(G - 1)q} T^2 = \frac{G(G - q)}{(G - 1)q} t(\bar{\mu}_N - \mu) \mathbf{W}^{-1}(\bar{\mu}_N - \mu),$$

suit la loi de Fisher $F_{q,G-q}$, à q et $G - q$ degrés de liberté. Le critère d'arrêt proposé dans l'estimation des paramètres est $[(G - q)/\{(G - 1)q\}] T^2 < f_{q,G-q}$, où $f_{q,G-q}$ est le quantile supérieur d'ordre α pour la loi de Fisher à q et $G - q$ degrés de liberté $F_{q,G-q}$.

Dans la méthode de Batching, l'estimation $\hat{\Sigma}$ de Σ est consistante lorsque G et b sont choisis tels que $b = \lfloor N^v \rfloor$ et $G = \lfloor N/b \rfloor$ [57] avec $v \in \mathbb{Q}$.

Expérimentation

Dans cette section, nous discutons de l'estimation des paramètres du modèle lorsque le nombre d'objets q à classer est respectivement égal à $q = 4$ et $q = 5$. L'estimation des paramètres concerne des échantillons de classements avec ex-aequo indépendants et identiquement distribués que nous avons simulés via la méthode MCMC. Chaque échantillon de classements avec ex-aequo d'observations indépendantes et identiquement distribuées de taille M donnée pour un vecteur de paramètres (θ, γ) connus est obtenu en simulant M trajectoires indépendantes de loi stationnaire $p(s; \theta, \gamma)$, $s \in E$ jusqu'à un certain temps d'arrêt. Le temps d'arrêt étant la taille de l'échantillon simulé. Les échantillons de Monte Carlo de taille N donnée pour l'estimation des espérances mathématiques sont obtenus en soustrayant N observations d'une seule trajectoire. Dans les deux cas, nous avons simulé la chaîne dans le futur pendant suffisamment longtemps, pour qu'elle approche sa loi stationnaire. Cette période dite de préchauffage (en anglais, Burn-in) permettant à l'algorithme de s'extraire des conditions initiales, n'est pas prise en compte dans la taille des différents échantillons simulés. Dans notre cas, la période de préchauffage a été considérée comme fonction de la taille des objets à classer et fixée à la valeur $q^\beta \log(q)$ où q désigne le nombre d'objets à classer et $\beta \in \mathbb{R}$.

Dans les deux exemples qui suivent, nous avons simulé 1000 échantillons de classement avec ex-aequo d'observations indépendantes et identiquement distribuées, de tailles différentes suivant la loi $p(s; \theta, \gamma)$, $s \in E$, pour des valeurs connues du vecteur des paramètres. Ensuite ces différents échantillons sont utilisés pour estimer les paramètres du modèle. Dans l'estimation du vecteur des paramètres (θ, γ) du modèle, la taille de l'échantillon de Monte Carlo simulée à chaque étape de l'algorithme MM est fixée à $N = 10000$. La période de préchauffage dans la

simulation des échantillons de Monte Carlo vaut $q^\beta \log(q) = 10000$ pour $q = 4$ ($\beta = 6.41$) et $q = 5$ ($\beta = 6.86$). Le paramètre de puissance v intervenant dans le calcul du nombre de groupes G et de la taille commune b des groupes dans la méthode Batching est fixé à $v = 0.5$. On en déduit que $G = 100$ et $b = 100$. Pour le critère d'arrêt dans l'estimation des paramètres, nous avons considéré le quantile supérieur $f_{q,G-q}$ d'ordre $\alpha = 0.05$ de la loi de Fisher $F_{q,G-q}$ à q et $G - q$ degrés de liberté. On obtient ainsi, $f_{q,G-q} = 2.47$ pour $q = 4$ et $f_{q,G-q} = 2.31$ pour $q = 5$.

Dans le but de vérifier l'hypothèse de la normalité asymptotique d'un estimateur du maximum de vraisemblance, nous avons construit le diagramme quantile-quantile correspondant à chaque composante du vecteur des paramètres estimés. Cette représentation est souvent utilisée pour juger graphiquement de la normalité d'une distribution observée. Rappelons que pour une distribution observée normale, les points obtenus sont alignés.

Exemple 1 : ($q = 4$)

Les résultats présentés ci-après (cf. Tableau 1.5) concernent 1000 échantillons de tailles respectives 100, 200, 500, 800 et 1100. On observe que les estimateurs associés aux paramètres sont faiblement biaisés. De plus, les précisions des estimateurs sont assez bonnes dans l'ensemble et augmentent très légèrement lorsque la taille des échantillons augmente. Les variances des estimateurs deviennent faibles lorsque la taille des échantillons augmente.

Les graphiques 1.11, 1.12 et 1.13, 1.14, 1.15 représentent les variations des quantiles empiriques de la série statistique des estimations calculées en fonction des quantiles d'une loi gaussienne centrée réduite. On observe que ces variations peuvent être ajustées par une droite. Ce résultat suggère que asymptotiquement les estimations obtenues sont des réalisations d'une loi normale.

Table 1.5 Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = 1.89$, $\theta_2 = 1.96$, $\theta_3 = 1.82$, $\gamma = 1.71$.

Taille	θ_1				θ_2				θ_3				γ			
	$\hat{\theta}_1$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_2$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_3$	EQM	Var	EAM	$\hat{\gamma}$	EQM	Var	EAM
100	2.706	0.993	0.328	0.824	2.778	0.998	0.330	0.826	2.641	1.009	0.334	0.832	2.121	0.239	0.070	0.414
200	2.676	0.758	0.141	0.787	2.743	0.752	0.138	0.784	2.612	0.767	0.140	0.793	2.106	0.185	0.028	0.396
500	2.659	0.643	0.052	0.769	2.728	0.641	0.051	0.768	2.597	0.658	0.054	0.777	2.096	0.160	0.011	0.386
800	2.674	0.644	0.030	0.784	2.738	0.635	0.029	0.778	2.609	0.653	0.031	0.789	2.098	0.157	0.006	0.388
1100	2.648	0.597	0.022	0.758	2.715	0.591	0.021	0.755	2.586	0.609	0.023	0.766	2.087	0.147	0.005	0.377

Figure 1.11 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

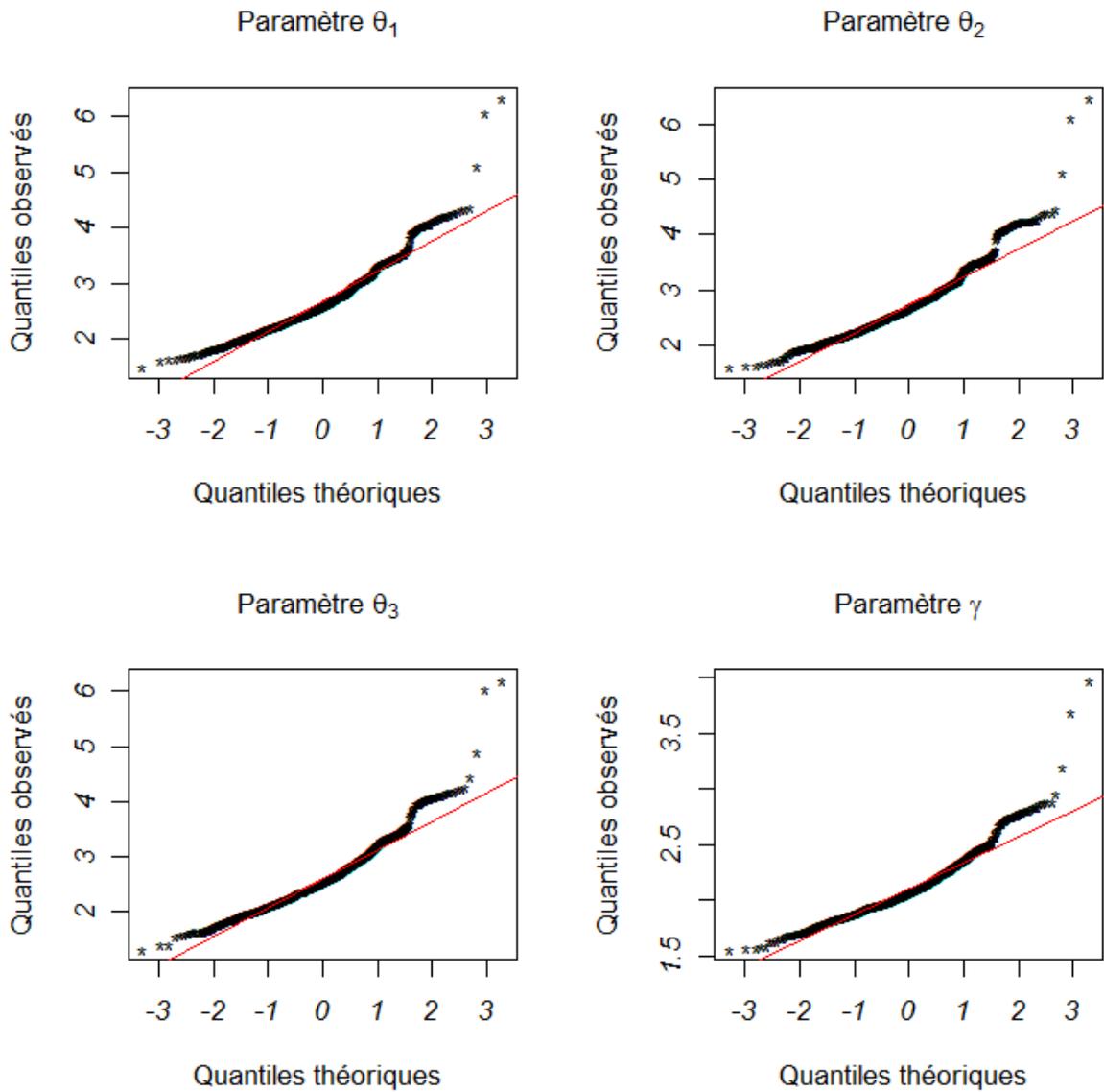


Figure 1.12 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

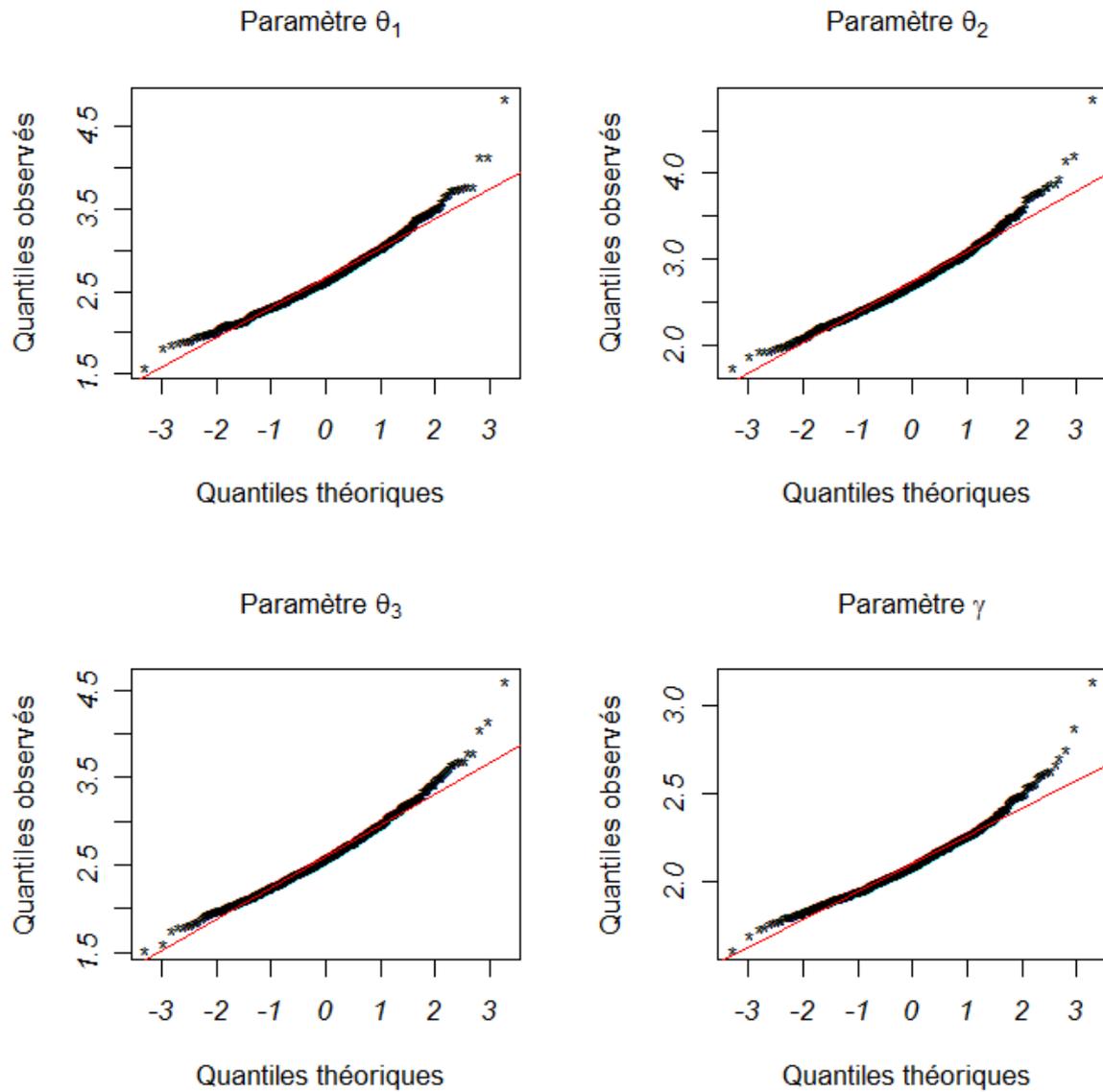


Figure 1.13 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

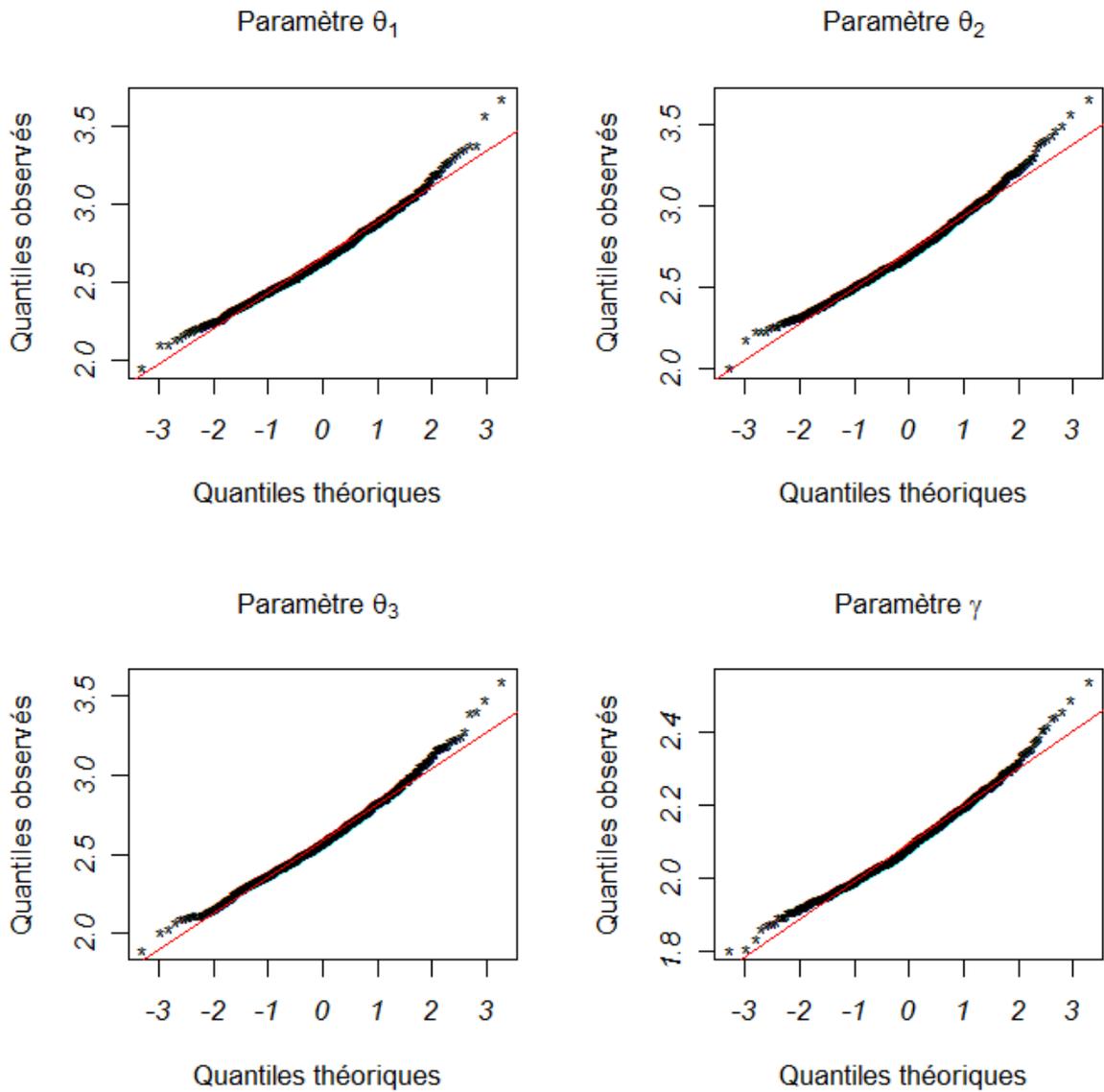


Figure 1.14 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

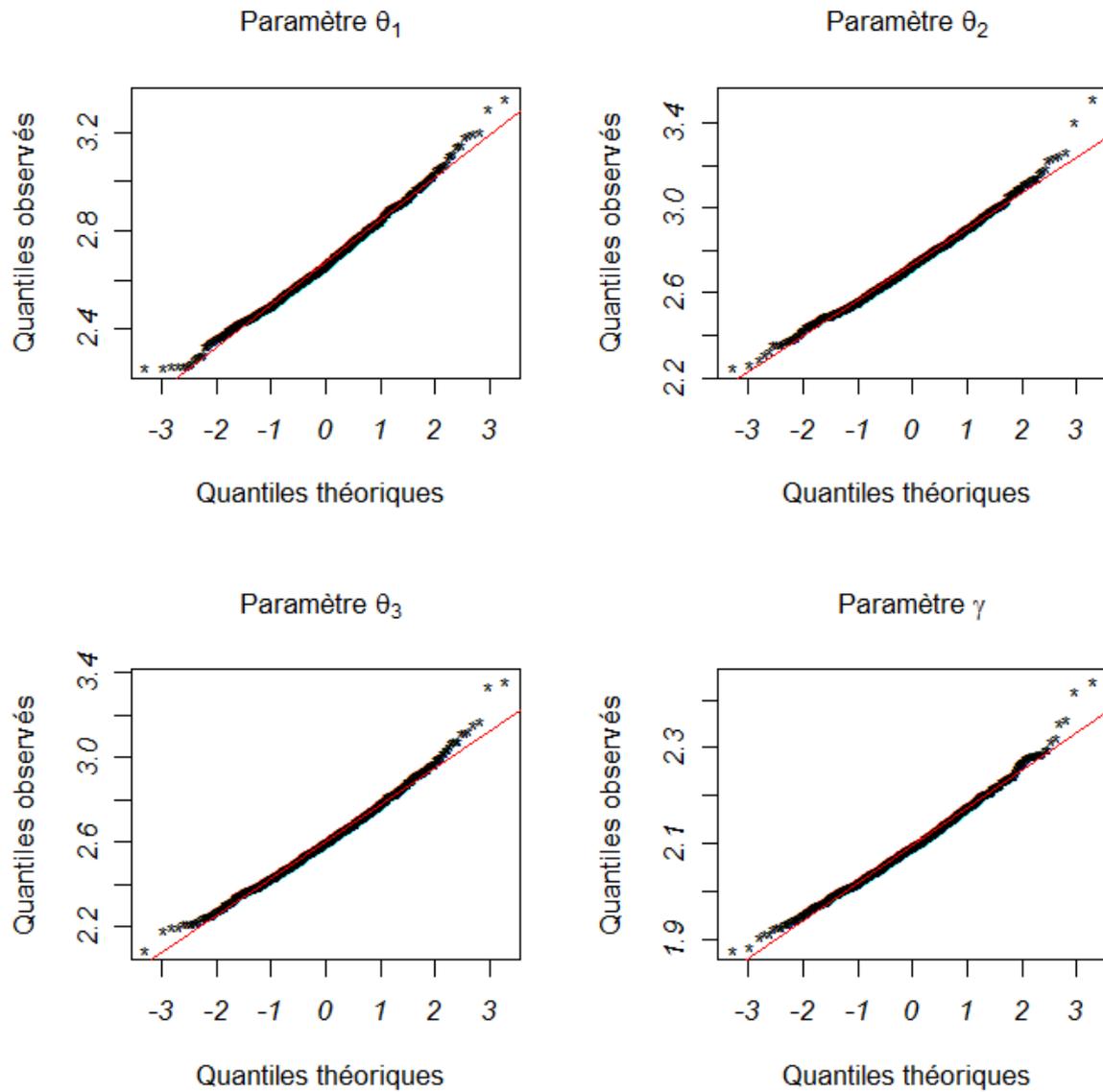
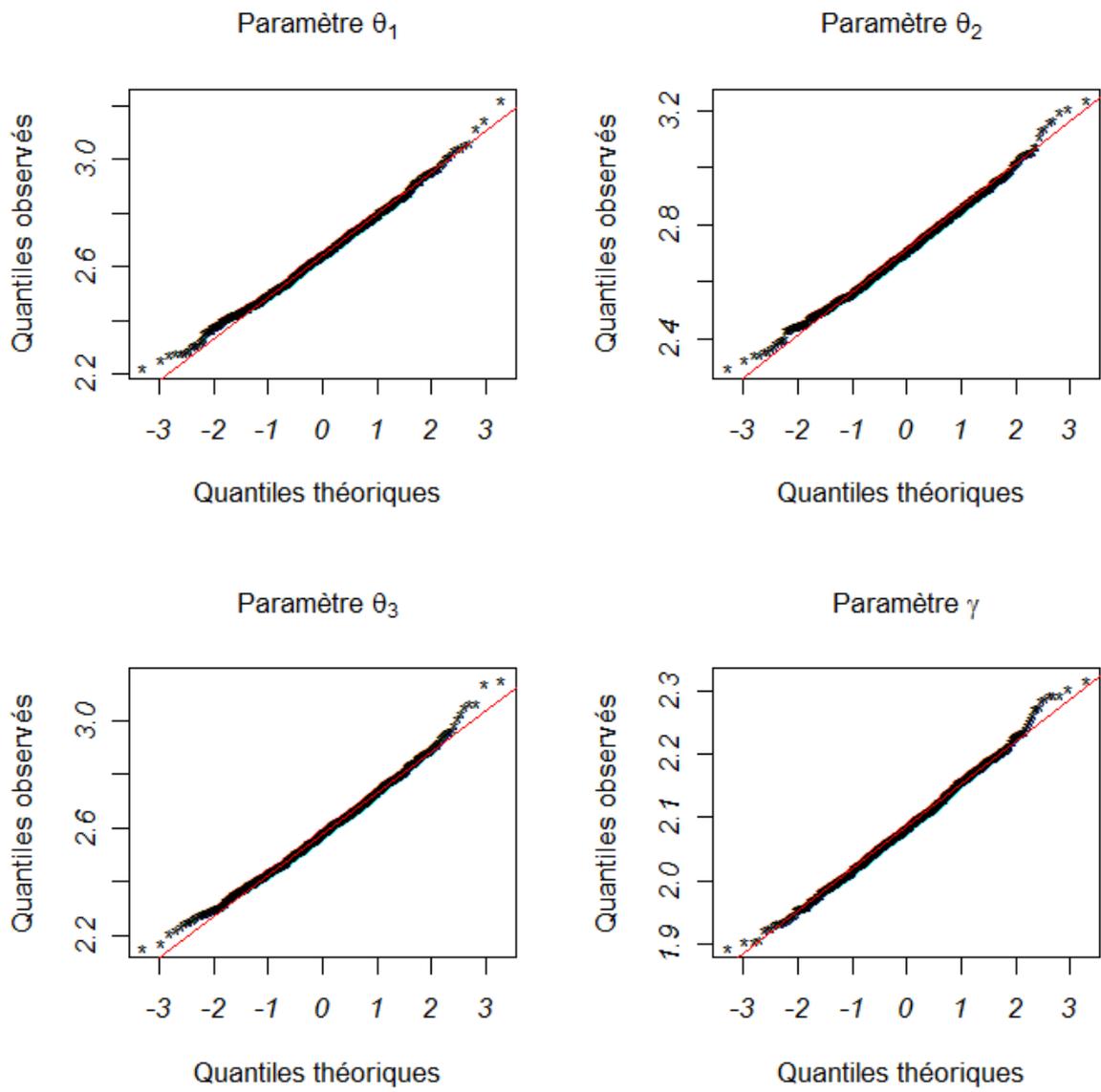


Figure 1.15 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.



Exemple 2 : ($q = 5$)

Les résultats présentés ci-après (cf. Tableau 1.6) concernent 1000 échantillons de tailles respectives 100, 200, 500, 800 et 1100. Les conclusions sont les mêmes que dans l'exemple 1 précédent.

Les graphiques 1.16, 1.17, 1.18, 1.19 et 1.20 représentent les variations des quantiles empiriques de la série statistique des estimations calculées en fonction des quantiles d'une loi gaussienne centrée réduite. On observe que ces variations peuvent être ajustées par une droite. Ce résultat suggère que asymptotiquement les estimations obtenues sont des réalisations d'une loi normale.

Table 1.6 Moyennes empiriques ($\hat{\theta}$), erreurs quadratiques moyennes empiriques (EQM), variances empiriques (Var) et écarts absolus moyens (EAM) associés aux estimateurs des paramètres : le vecteur des paramètres théoriques est $\theta_1 = -0.76, \theta_2 = -1.44, \theta_3 = 1.56, \theta_4 = -0.93, \gamma = -0.14$.

Taille	θ_1			θ_2			θ_3			θ_4			γ							
	$\hat{\theta}_1$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_2$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_3$	EQM	Var	EAM	$\hat{\theta}_4$	EQM	Var	EAM	$\hat{\gamma}$	EQM	Var	EAM
100	-1.041	0.168	0.089	0.322	-1.868	0.360	0.177	0.467	1.448	0.056	0.043	0.189	-1.245	0.204	0.104	0.356	-0.267	0.046	0.030	0.170
200	-1.026	0.109	0.038	0.278	-1.824	0.221	0.074	0.394	1.428	0.041	0.024	0.169	-1.221	0.125	0.041	0.302	-0.273	0.033	0.015	0.149
500	-1.017	0.080	0.014	0.258	-1.802	0.160	0.029	0.363	1.403	0.033	0.008	0.162	-1.217	0.100	0.017	0.288	-0.267	0.022	0.006	0.130
800	-1.021	0.078	0.010	0.261	-1.798	0.147	0.019	0.358	1.395	0.033	0.006	0.166	-1.218	0.094	0.011	0.288	-0.275	0.022	0.004	0.135
1100	-1.022	0.075	0.007	0.262	-1.798	0.141	0.014	0.358	1.392	0.033	0.004	0.168	-1.223	0.094	0.008	0.283	-0.276	0.022	0.003	0.136

Figure 1.16 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

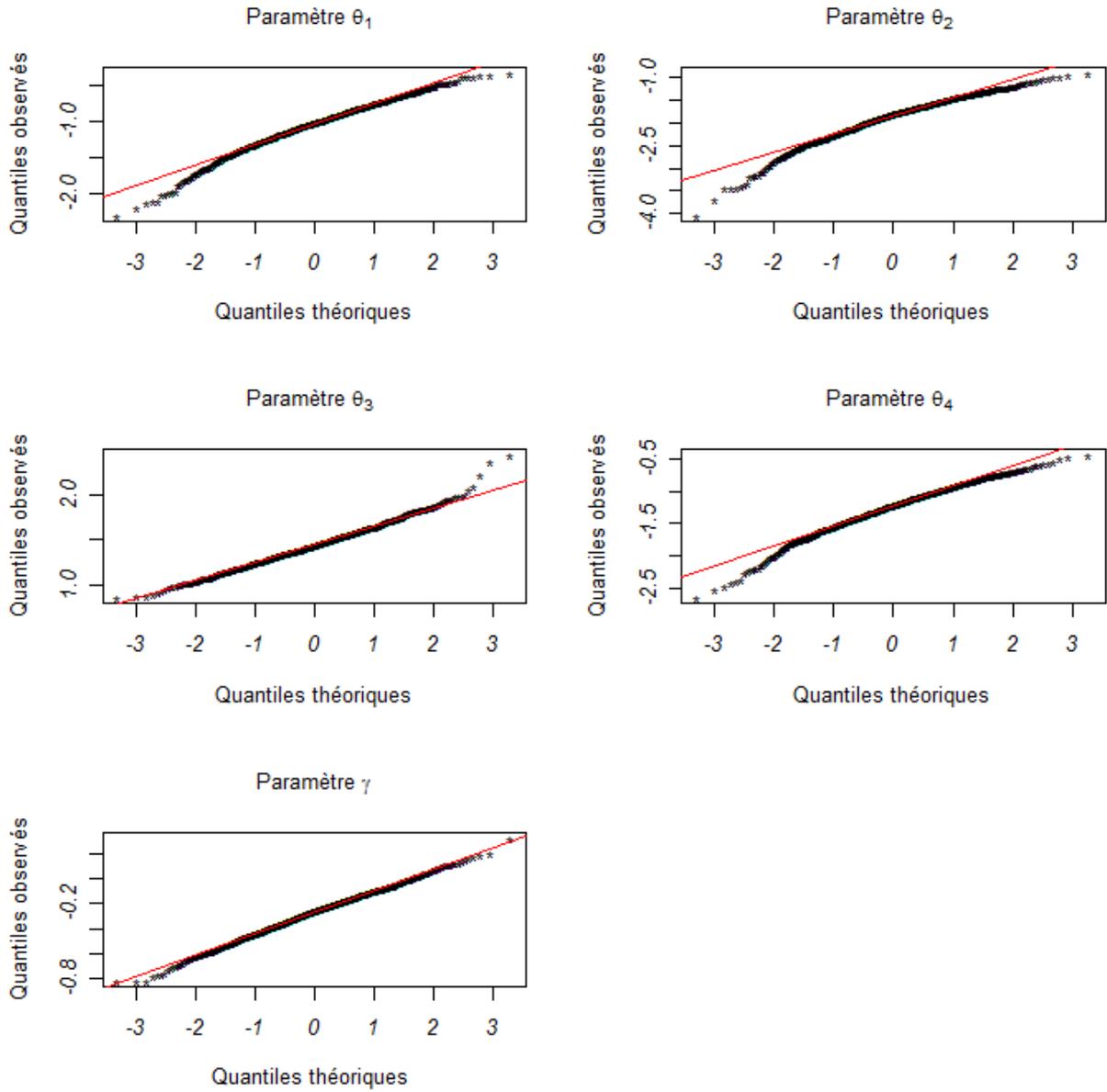


Figure 1.17 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 200 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

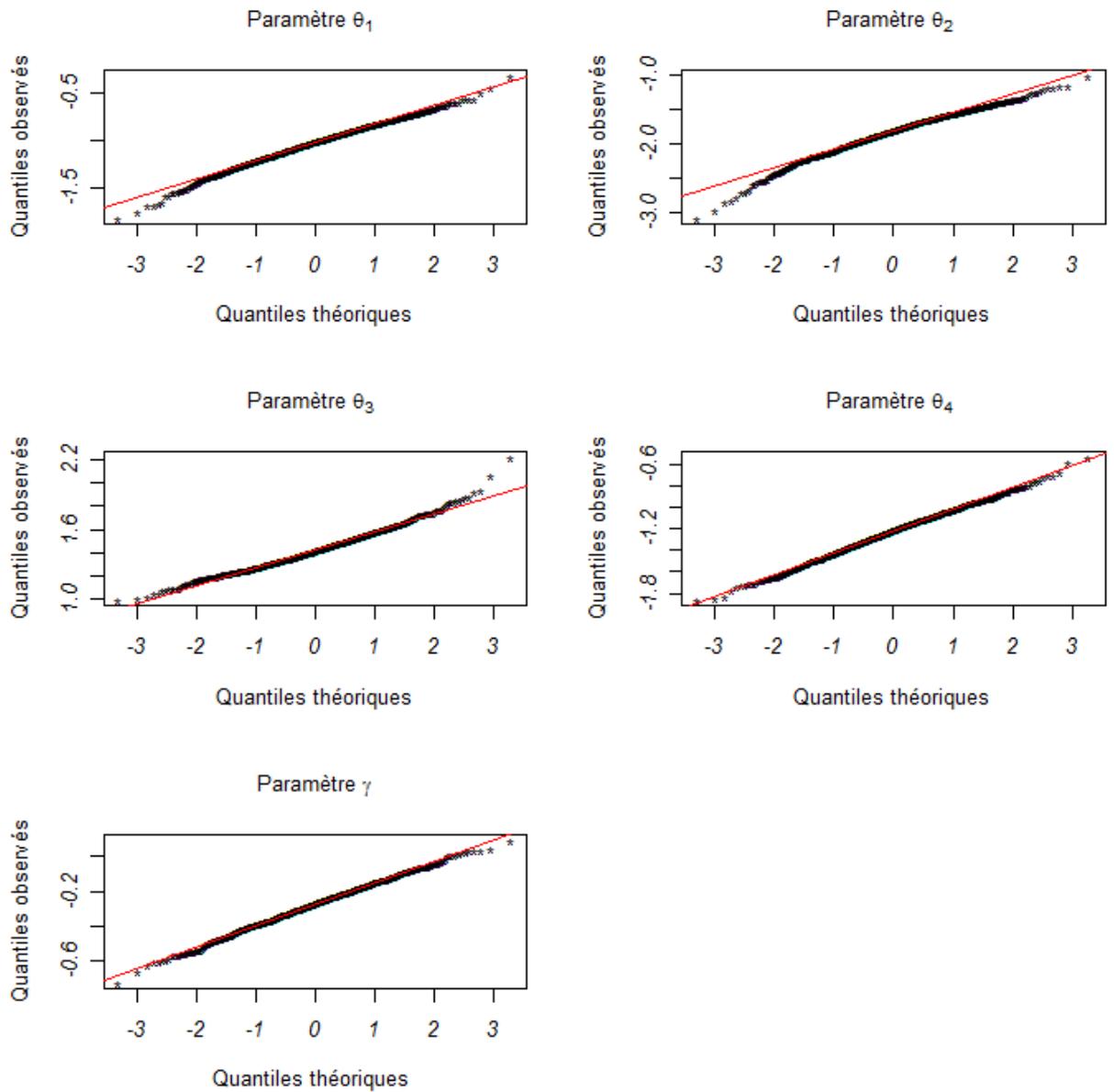


Figure 1.18 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 500 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

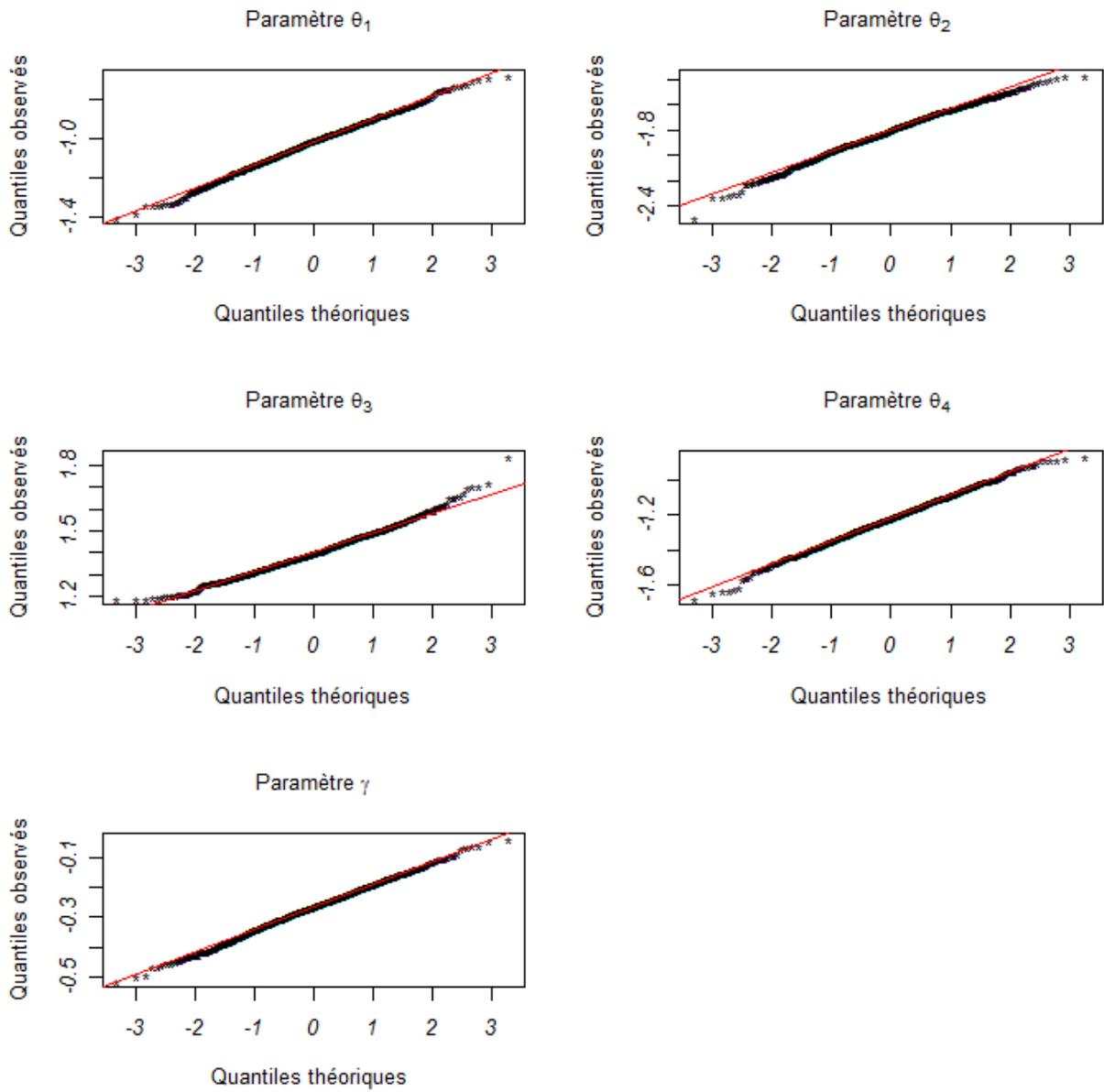


Figure 1.19 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 800 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.

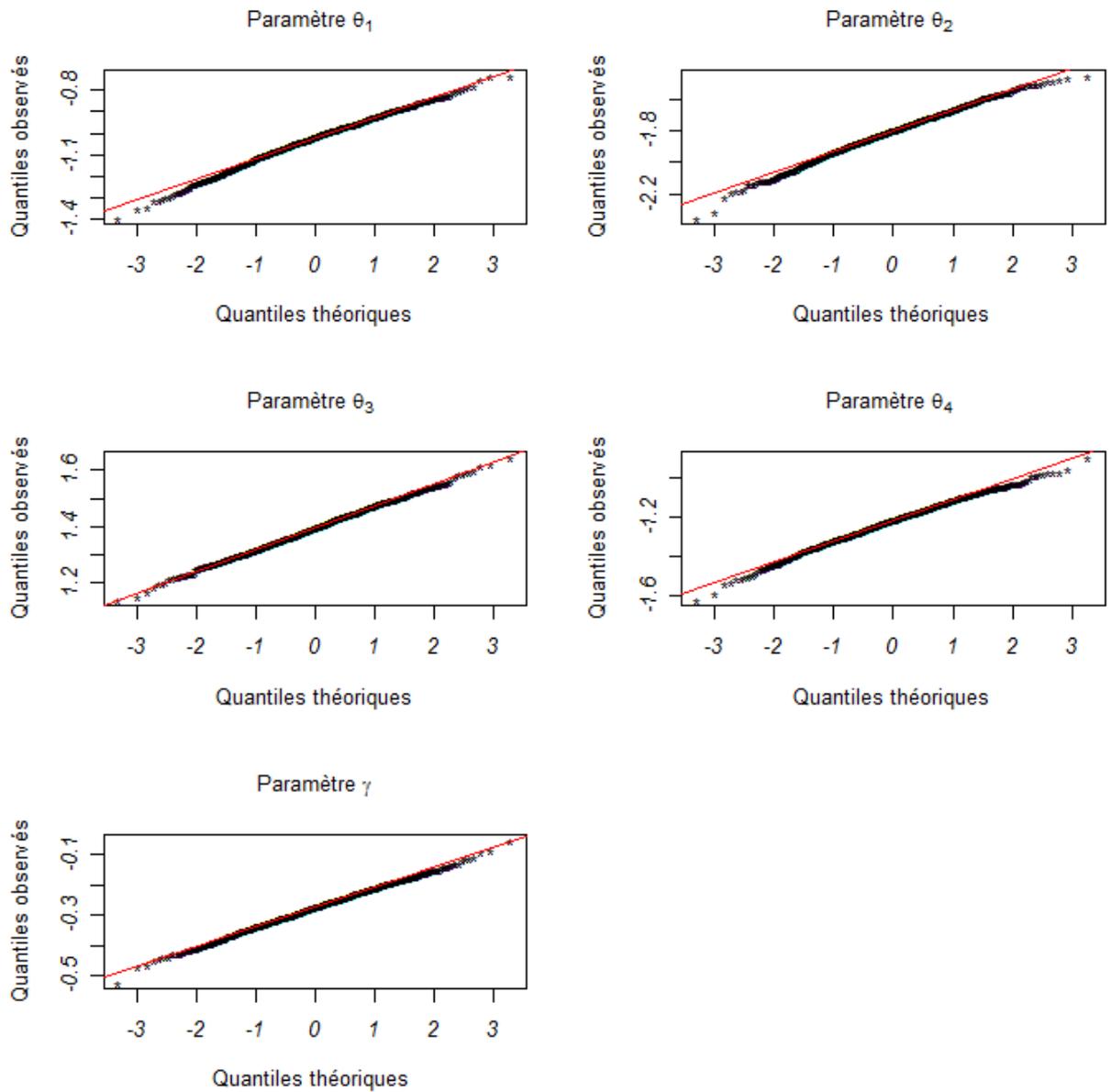
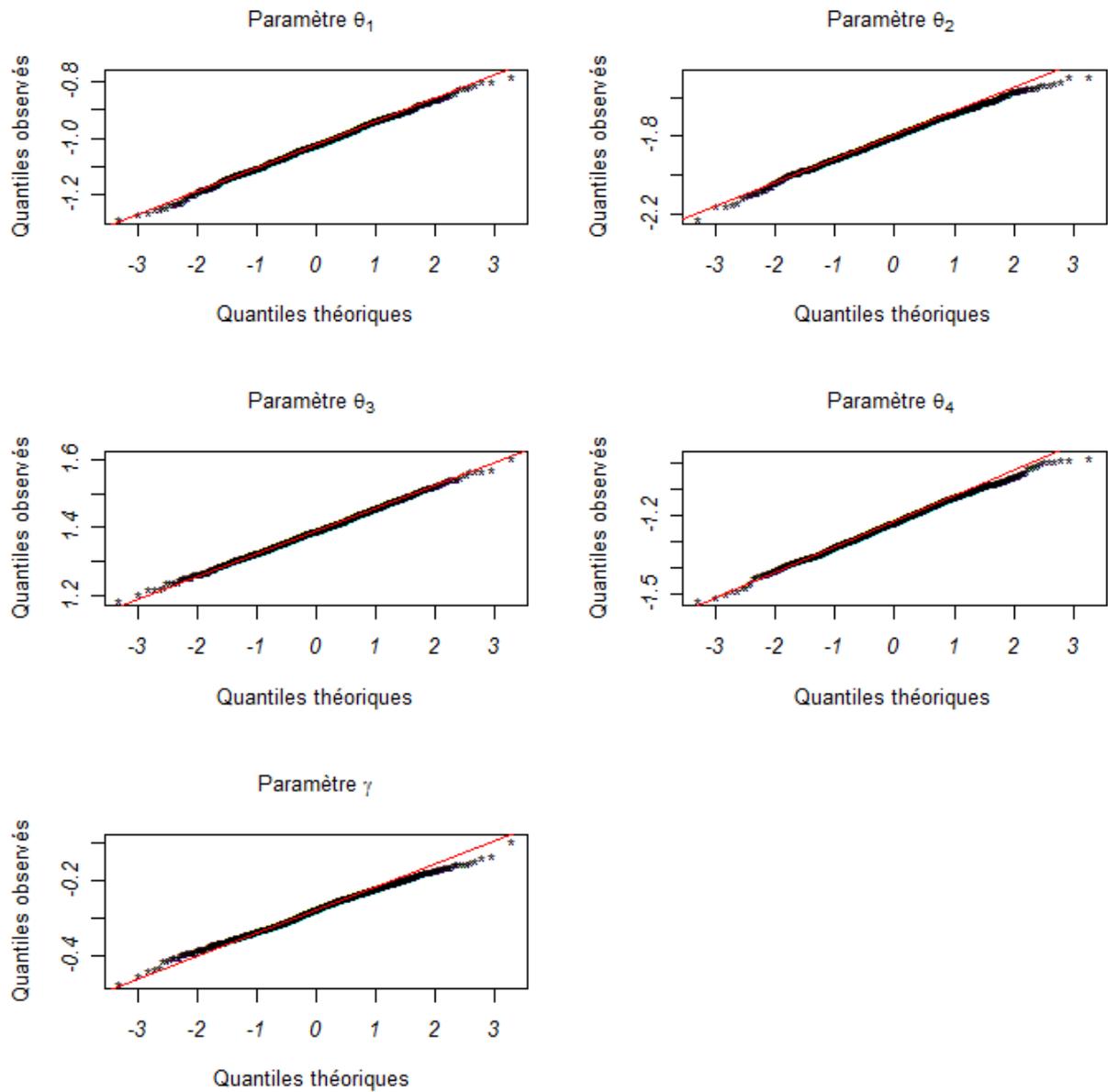


Figure 1.20 Graphes des quantiles pour 1000 échantillons simulés de taille commune 1100 en fonction des quantiles théoriques de la loi normale centrée réduite.



1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu le modèle de Mallows-Bradley-Terry pour des classements sans ex-aequo au cas des classements avec ex-aequo en vue d'analyser les données de classement avec ex-aequo issues des expériences psy-

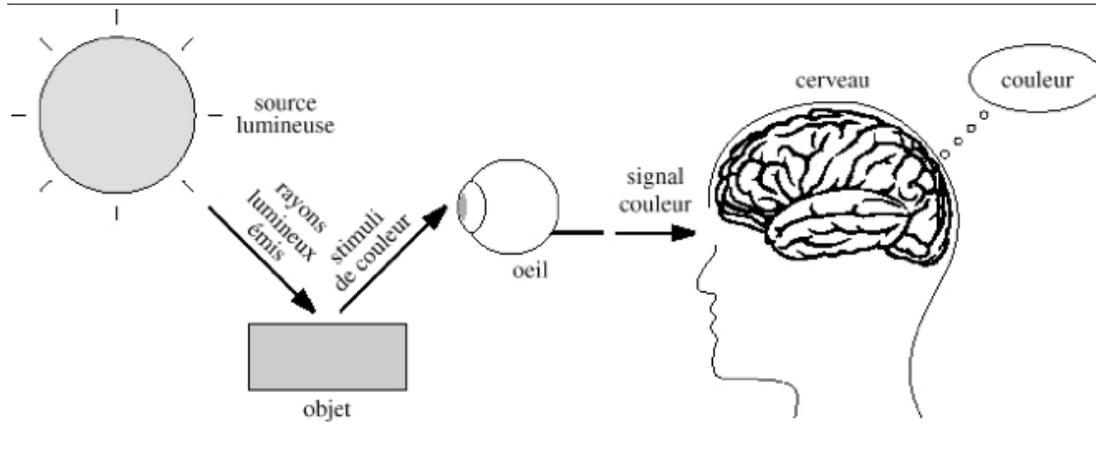
chovisuelles relatives à la problématique qui a motivé cette thèse. La question de l'estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour l'analyse des données de classements sans ex-aequo est restée ouverte jusqu'à récemment. Nous avons proposé un algorithme simple pour le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque le nombre d'objets à classer est inférieur à 10. En effet, dans ce cas, l'évaluation numérique de l'espérance mathématique de la distribution ne pose pas de problèmes parce que la taille de la matrice des permutations est gérable. Par contre lorsque le nombre d'objets à classer est supérieur à 10 l'évaluation du vecteur des espérances mathématiques est obtenu en recourant à la simulation d'un échantillon de Monte Carlo par chaîne de Markov. Ceci nous a amené à proposer un algorithme de type Gibbs pour cette simulation. Nous avons également proposé un algorithme simple pour le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classement avec ex-aequo lorsque le nombre d'objets à classer est peu élevé (inférieur à 6). Dans la situation où le nombre d'objets à classer dépasse 6, l'évaluation des espérances mathématiques qui interviennent dans l'équation de vraisemblance est obtenue en faisant recours à la simulation d'un échantillon de Monte Carlo par chaîne de Markov. Pour réaliser cette tâche nous avons proposé un algorithme de Métropolis-Hastings à sauts réversibles.

Chapitre 2

Le système visuel humain (SVH) : du stimulus à la perception

Depuis très longtemps, l'Homme a tenté de comprendre les phénomènes complexes liés à la perception de la couleur [135]. Ce n'est qu'à la fin du XVII^{ème} siècle (précisément en 1672), grâce notamment aux travaux de Newton et à son expérience sur la décomposition de la lumière par un prisme, que le concept de couleur a commencé à prendre forme. La complexité de la perception de la couleur réside dans le fait que la sensation visuelle couleur résulte d'interactions complexes. Tout d'abord, il n'y aurait pas de couleur sans lumière. D'un point de vue physique, la couleur est un attribut qui permet de rendre compte d'un ensemble de propriétés physiques du signal électromagnétique de longueur d'onde comprise entre $380nm - 780nm$. Les matériaux sont composés d'objets qui ont la propriété de réfléchir ou transmettre tout ou partie des rayons lumineux émis par une source. Les rayons lumineux issus de l'interaction entre la lumière et la surface de l'objet forment le stimulus qui va venir exciter les cellules réceptrices de l'œil. En fait, un matériau n'a pas de couleur intrinsèque : il a la propriété de transformer la lumière en fonction d'une part de sa nature chimique et d'autre part de son état physique (état de surface en particulier). L'œil, à son tour, convertit le stimulus reçu en un signal nerveux qu'il transmet au cerveau. Ce dernier identifie ainsi l'objet observé et, entre autres sa couleur perçue. La perception humaine de la couleur est donc la réponse consciente que nous donnons au stimulus reçu par l'intermédiaire de notre récepteur, l'œil et de notre système d'interprétation, le cerveau. Ce processus peut être illustré par la figure 2.1.

Figure 2.1 Perception humaine de la couleur [135]



Ainsi la couleur est liée à des notions d'ordre physique, physiologique et psychologique. La perception de la couleur est le résultat de l'interaction entre trois composantes [50] :

- la source lumineuse ;
- l'ensemble des objets de notre univers physique ;
- enfin, l'observateur humain et plus particulièrement son système visuel.

Présentons maintenant le rôle de chacun de ces trois composantes.

2.1 Le stimulus

2.1.1 Caractéristiques et rôle des sources de lumières

La lumière visible peut être considérée comme un flux de particules énergétiques (photons) dénuées de masse qui se propagent sous forme d'ondes électromagnétiques, dont les radiations se situent dans le domaine $380nm - 780nm$ (domaine de stimulation de notre sens de la vue) [132]. Une radiation électromagnétique est caractérisée par sa longueur d'onde λ exprimée en mètres (m).

Le domaine $380nm - 780nm$ est appelé le domaine du visible. L'énergie de telles radiations est généralement exprimée en joules (J), la puissance correspondante en watts (W) et la quantité d'énergie transmise à une surface en watt par mètre carré ($W.m^{-2}$). Une lumière peut être décrite par sa répartition spectrale d'énergie notée (dans le domaine du visible) $I(\lambda)$, la quantité d'énergie émise par intervalle de longueurs d'onde (l'amplitude des intervalles est en général fixé à $1nm$) [135].

Pour qu'un objet soit perçu par l'œil dans un environnement donné, il faut une source lumineuse qui rayonne de l'énergie dans le spectre visible, *i.e.* des radiations dont la longueur d'onde λ est comprise entre 380 et $780nm$ [50]. La lumière émise a des caractéristiques spectrales variables selon qu'elle provient d'une source naturelle (soleil) ou artificielle comme les lampes à filament de tungstène

(rayonnement d'un corps incandescent) ou les lampes à décharge et tubes fluorescents (rayonnement de luminescence) [50].

Les caractéristiques du rayonnement émis par interaction entre lumière et matière résultent non seulement des propriétés de la matière mais également des caractéristiques du rayonnement incident : éclairé par une lampe à incandescence, un objet coloré aura un aspect qui pourra se rapprocher de celui donné par l'éclairage du jour, avec néanmoins quelques différences. La couleur perçue d'un visage n'est pas la même pour ces deux types de sources (lumière solaire et lampe à incandescence), émettant pourtant toutes deux de la lumière dite blanche¹ mais selon des modalités spectrales différentes. Les surfaces qui, en lumière blanche, renvoient un stimulus de couleur donnée, produisent une impression colorée très différente lorsqu'elles sont éclairées, par exemple, par une lampe à vapeur de mercure ou en lumière jaune type sodium [50].

Certaines sources lumineuses correspondant à des conditions d'observations courantes ont été normalisées par la CIE² sous le nom d'*illuminants*³ : le but était d'harmoniser les techniques d'observation et de mesure des couleurs. Les travaux de la CIE constituent la base de la colorimétrie, science qui permet de définir, de cataloguer et de mesurer les couleurs [135].

Selon cette recommandation, un illuminant normalisé est caractérisé par sa répartition spectrale relative d'énergie. Il s'agit d'une normalisation à 1 ou à 100 de la répartition spectrale d'énergie. Cette normalisation s'effectue en général par rapport à la longueur d'onde $\lambda = 560nm$. Notons que la répartition spectrale relative d'énergie est sans unité. Donnons ici quelques uns des illuminants normalisés par la CIE [135] (cf. Figure 2.2) :

- illuminant A : lumière émise par un corps noir porté à la température de $2856K$ (kelvin). il correspond à une source de lumière équivalente à une lampe à filament de tungstène de $500W$;
- illuminant B : correspond à une source de lumière équivalente à la lumière du soleil à midi (cet illuminant n'est plus utilisé depuis 1986 [135]) ;
- illuminant C : correspond à une source de lumière dont le niveau d'illumination est équivalent à celui du soleil ;
- illuminant D65 : appartient à la famille des illuminants D de type lumière du jour. Il correspond à la moyenne des lumières durant la journée, sa

1. L'œil considère comme blanche, toute lumière pas trop colorée, au bout d'un certain temps d'adaptation à cette lumière [50].

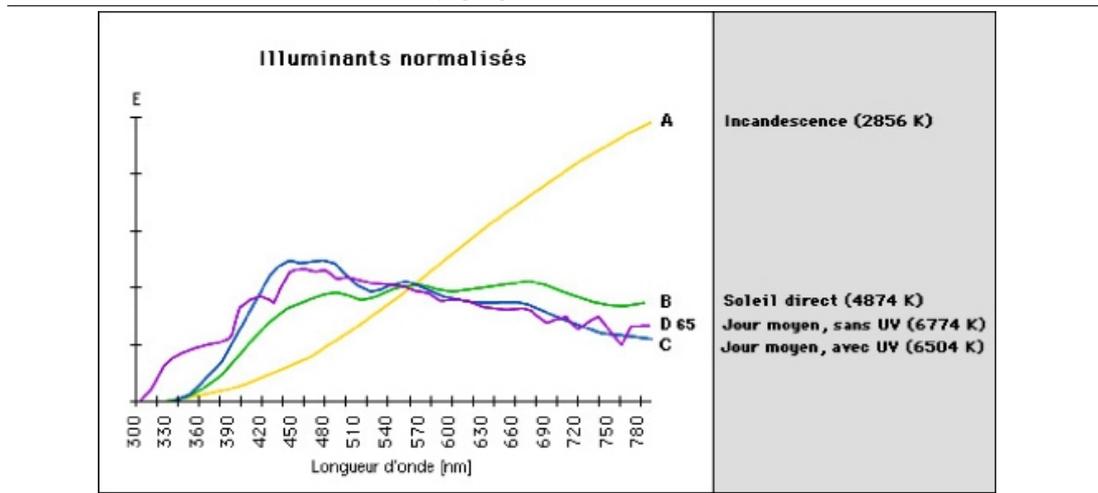
2. Commission internationale de l'éclairage fondée en 1913. Son but, selon un extrait : la commission a pour objet d'étudier toutes les questions ayant trait à l'industrie de l'éclairage et aux sciences qui s'y rapportent etc

3. La CIE fait une distinction entre illuminant et source [135] : « le terme « source » se réfère à un objet physique qui émet de la lumière, tel une lampe ou le soleil et le ciel. Le terme « illuminant » se réfère à une répartition spectrale d'énergie particulière, non nécessairement fournie directement par une source ni obligatoirement réalisable à l'aide d'une source. La recommandation actuelle définit en priorité des illuminants par une répartition spectrale relative d'énergie puis elle définit les sources. »

- température de couleur⁴ est de 6500K ;
- Illuminant E : lumière d'énergie constante (ou d'égale énergie). Il est aussi appelé source équi-énergétique mais ne correspond à aucune source réelle et ne présente qu'un intérêt théorique.

Notons que cette liste est loin d'être exhaustive.

Figure 2.2 Principaux illuminants standards de la CIE (E désignant la répartition spectrale relative d'énergie) [54].



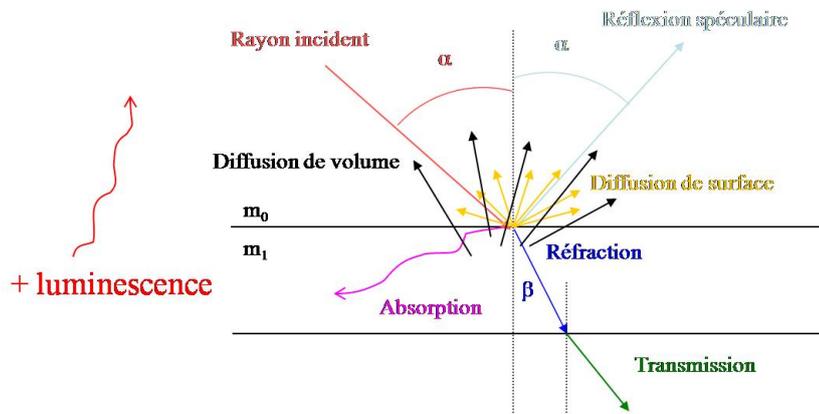
2.1.2 Interaction lumière-matière

Pour une surface, l'apparence colorée résulte de l'interaction entre la lumière incidente et la surface exposée de l'objet. Lors de l'interaction lumière-matière, différents phénomènes liés à un changement des caractéristiques optiques de la lumière sont mis en jeu :

- phénomènes de transfert non dissipatifs (diffusion et interférence) ;
- phénomènes induisant des échanges d'énergie entre lumière et matière (absorption).

4. Autre caractéristique d'un illuminant ou d'une source lumineuse. C'est la température à laquelle il faudrait porter un corps noir pour obtenir une répartition spectrale d'énergie identique à celle de la source [135].

Figure 2.3 Interaction entre une lumière incidente et la matière.



On a (cf. Figure 2.3) :

- le **rayonnement incident** éclaire l’objet. Il provient d’une source lumineuse dont une caractéristique principale est sa répartition spectrale d’énergie ;
- le **rayonnement transmis** : c’est la part du rayonnement lumineux passant à travers l’objet. Dans le cas d’un objet totalement opaque, il n’y a pas de transmission ;
- le **rayonnement absorbé** : c’est la part d’énergie absorbée par l’objet et généralement transformée en chaleur ;
- le **rayonnement réémis** par l’objet qui peut se décomposer en deux composantes [51] :
 - la composante diffuse : elle correspond à la réflexion de type lambertien , l’énergie est réémise également dans toutes les directions. Cette réflexion contient l’information liée à la couleur de l’objet ;
 - la composante spéculaire : cette composante est principalement renvoyée symétriquement par rapport à la normale à la surface.

Comme c’est le cas en colorimétrie de surface, on ne s’intéressera qu’au rayonnement réfléchi par les surfaces, en supposant, généralement que l’objet est opaque [51]. Ainsi, il est donc caractérisé par sa réflectance spectrale $R(\lambda)$ ⁵. Soit $I(\lambda)$ la répartition spectrale de la source lumineuse.

On appelle stimulus $S(\lambda)$, le signal résultant du produit du spectre de la source lumineuse $I(\lambda)$ avec la réflectance spectrale $R(\lambda)$ du matériau : c’est lui qui vient interagir avec les photorécepteurs du système visuel ou tout autre capteur [132].

On a donc :

$$S(\lambda) = I(\lambda) \times R(\lambda) \quad (2.1.1)$$

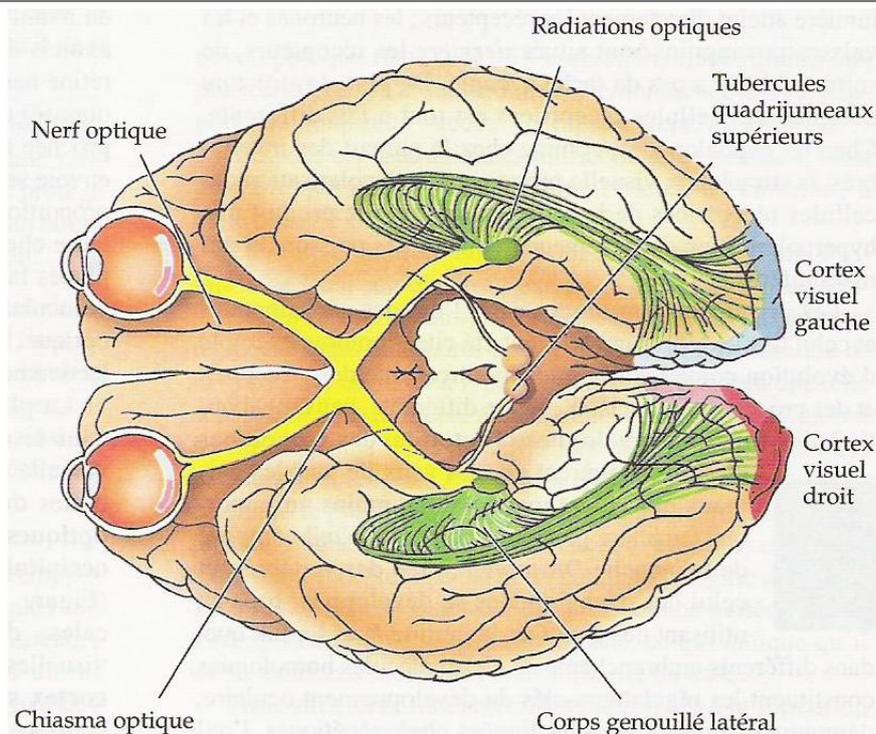
Il est important de noter que la couleur perçue dépend non seulement des caractéristiques intrinsèques du matériau mais aussi de la géométrie d’éclairage et

5. Rapport en pourcentage des intensités de lumière réfléchié et incidente. Il ne dépend ni de la source ni de l’observateur.

d'observation [132].

2.2 Traitement de l'information : anatomie et physiologie du système visuel humain

Figure 2.4 Système visuel humain [143].

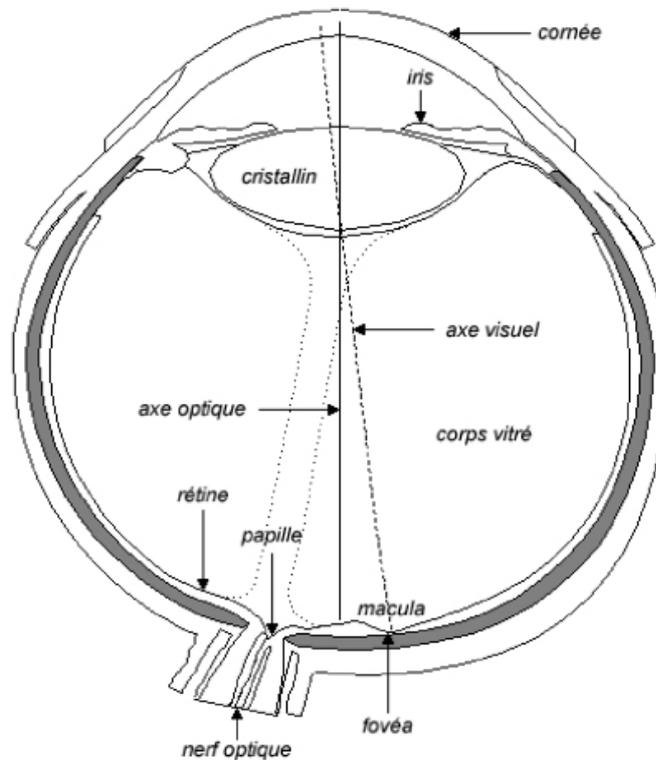


2.2.1 L'œil humain

L'œil humain (cf. Figure 2.5) est un système optique qui focalise un stimulus lumineux sur une zone photosensible, la rétine. Les principaux éléments en jeu dans cette opération sont les suivants [135, 139, 94] :

- la cornée : couche translucide située sur la face avant de l'œil dont le but est de protéger l'avant du globe oculaire ; elle est chargée de concentrer les rayons lumineux : c'est une première lentille sur le trajet de la lumière. La réfraction oculaire résulte de l'action de la cornée et du cristallin ;
- l'iris : membrane colorée qui fonctionne comme un diaphragme en contrôlant la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil. Son ouverture centrale, la pupille est plus ou moins importante pour laisser passer plus ou moins de lumière ;

Figure 2.5 Coupe de l'œil humain [135].

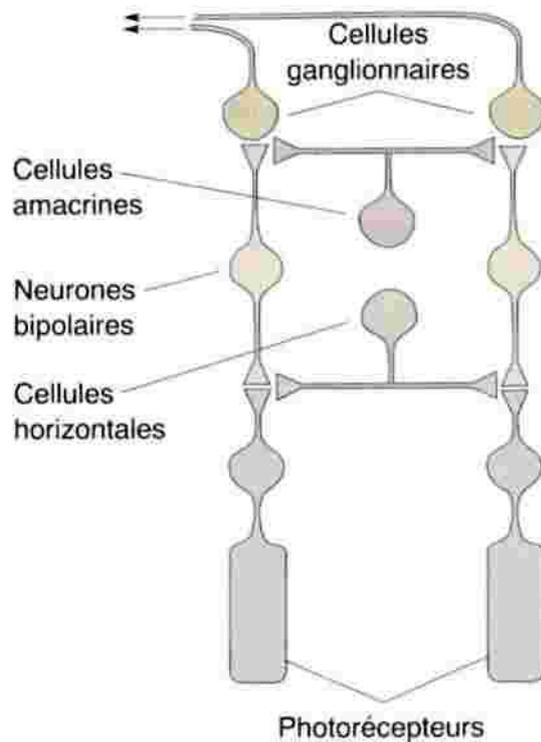


- le cristallin : est une seconde lentille biconvexe molle qui permet de focaliser le stimulus. Grâce à sa capacité à modifier sa courbure. Il nous permet d'avoir une vision nette de ce que nous observons de près : ce phénomène est appelé accommodation par modulation de la forme du cristallin ;
- le corps vitré est un liquide continuellement sécrété et absorbé, dont le rôle est d'assurer la structure autonome de l'œil.

La lumière pénètre dans l'œil au niveau de la cornée. En fonction de l'intensité lumineuse reçue, l'iris réduit ou agrandit la pupille, agissant comme un diaphragme. Le cristallin, seconde lentille rencontrée, est chargé de la mise au point de l'image sur la rétine. Après avoir traversé, le corps vitré, la lumière arrive sur la rétine et la traverse jusqu'aux neurones photorecepteurs qui convertissent l'énergie lumineuse en un signal neurochimique (absorption de l'énergie lumineuse par des photopigments situés dans ces cellules) : c'est la transduction. Les informations sont ensuite transmises sous forme de signal nerveux par le nerf optique au cerveau. Cette transmission s'accompagne d'un traitement de l'information. Le cerveau ne reçoit pas l'information sous la forme d'une simple cartographie résultant du travail des neurones photorecepteurs.

2.2.2 Le rôle de la rétine

Figure 2.6 La rétine [143].



On rappelle que le premier traitement de l'information lumineuse a lieu au niveau de la rétine : on parle de pré-traitement de l'information lumineuse. Dans la rétine, le pré-traitement de l'information lumineuse est effectué par différentes couches de cellules (cf. Figure 2.6). Sur une épaisseur de 120 à 500 μm , on trouve successivement [94] :

- différentes cellules photo-réceptrices : les cônes et les bâtonnets ;
- les cellules bipolaires : reliées à un ou plusieurs récepteurs ;
- les cellules ganglionnaires : reliées à une ou plusieurs cellules bipolaires.

À ces connexions radiales se superpose une organisation tangentielle constituée :

- de cellules horizontales établissant la connexion entre plusieurs photorécepteurs et plusieurs cellules bipolaires ;
- de cellules amacriennes établissant la connexion entre cellules bipolaires et cellules ganglionnaires.

La lumière doit passer à travers les vaisseaux sanguins et plusieurs couches de cellules nerveuses avant d'atteindre la couche des photorécepteurs. L'information est alors traitée et transmise selon un parcours vertical (cellules bipolaires et cellules ganglionnaires). Les axones des cellules ganglionnaires constituent les fibres du nerf optique. Ce circuit direct est complété par un circuit indirect al-

ternatif *via* les cellules horizontales ou les cellules amacrines. Le nerf optique est constitué des axones des cellules ganglionnaires et permet la transmission des informations visuelles, après pré-traitement par la rétine, vers le cortex visuel. Ces axones convergent tous vers le même point de la rétine d'où part le nerf optique. Ce point est appelé " tâche aveugle". Cette région ne comporte pas de photorécepteurs et est donc aveugle : ainsi, l'image formée au niveau de la rétine est incomplète. Mais pourquoi ne voit -on pas ce trou même lorsqu'on ferme un oeil ?

Sans que nous en soyons conscients, notre oeil effectue des microsaccades et parcourt ainsi le champ visuel (partie de l'environnement visuel perçue par les deux yeux), sans même que nous en ayons conscience. L'intégration temporelle du signal visuel nous permet de ne pas percevoir cette tâche aveugle. La transmission du signal nerveux dans le système visuel humain se fait de façon à préserver la correspondance entre l'image rétinienne initiale et ses projections sur le cortex cérébral. Le signal lumineux capturé est transmis à travers les différentes couches cellulaires de la rétine selon un mode convergent : alors que l'on dénombre plus de 120 millions de cellules photoréceptrices, le nerf optique ne contient que 8.5 millions d'axones.

Essayons maintenant de regarder de façon plus précise le mode de fonctionnement de la rétine en détaillant la fonction de chaque type de cellules nerveuses.

Les récepteurs ou cellules photoreceptrices

Figure 2.7 Cellules photo-réceptrices : cônes et bâtonnets [143].

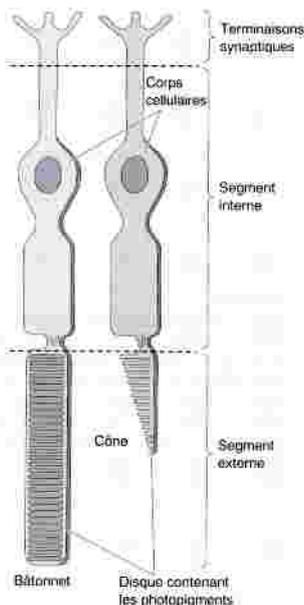


Figure 2.8 Répartition des cônes et des bâtonnets sur la rétine. L'axe horizontal représente le degré d'excentricité rétinienne par rapport à la fovéa [143].

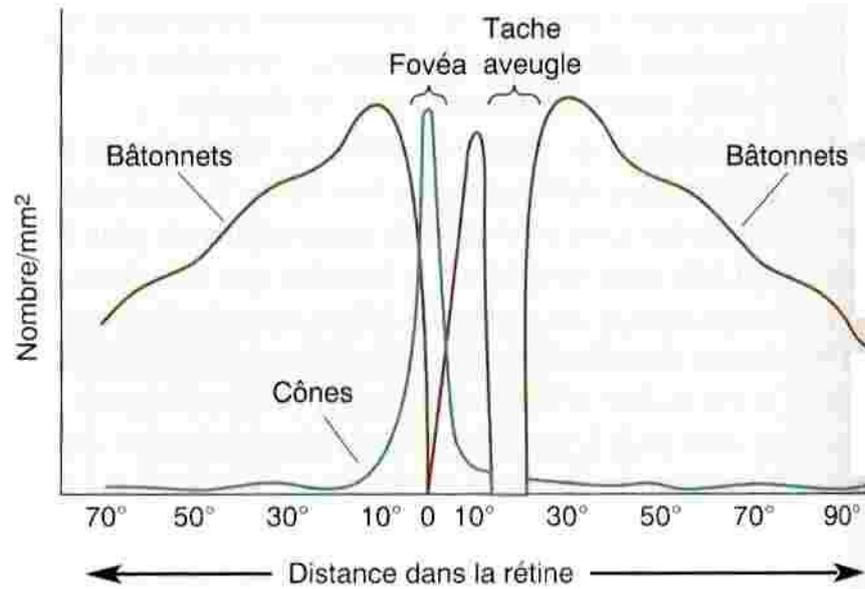
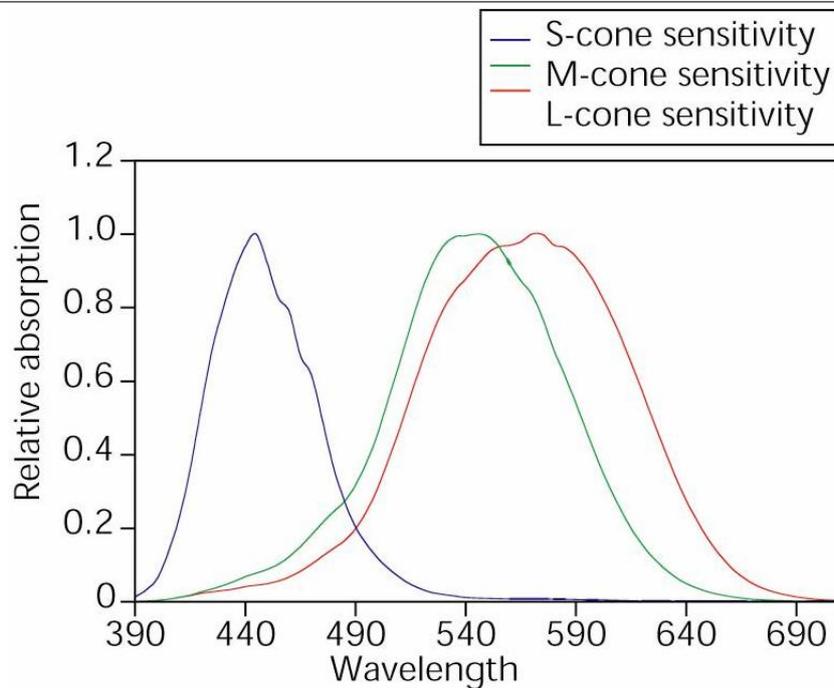


Figure 2.9 Courbes de sensibilité spectrale des trois types de cônes [83].



Dans tous les photorécepteurs, on distingue [7] :

- un segment externe, de forme cylindrique ou conique selon le type de récepteurs. Il contient les pigments photosensibles qui réagissent à la lumière ;
- un segment interne qui prolonge le segment externe dont il est séparé par un léger étranglement ;
- un noyau cellulaire, plus ou moins distinct du segment interne ;
- Un prolongement de type axonal se terminant par un élargissement en forme de pied pour les cônes et de sphérule pour les bâtonnets. C'est là que s'établissent les contacts synaptiques avec les cellules bipolaires et horizontales.

Il existe deux types de récepteurs rétiniens : les bâtonnets et les cônes (cf. Figure 2.7). Les cônes fovéaux sont fins et allongés (diagramme $1 \mu m$ pour $75 \mu m$ de long). Ils deviennent de plus en plus trapus et courts vers la périphérie de la rétine. Les bâtonnets ont une forme relativement constante sur toute la rétine (diagramme $1 \mu m$ pour $60 \mu m$ de long). Ces cellules nerveuses se différencient non seulement par leur forme et également par la présence de photopigments différents localisés dans leur segment externe. On distingue deux types de pigments :

- la rhodopsine : présente dans les bâtonnets (donnant la couleur pourpre de la rétine) ;
- l'iodopsine : présente dans les cônes selon trois catégories différentes : cyanolabe 420 nm (sensible au bleu) ; chlorolabe 535 nm (sensible au vert) ; et érythrolabe 570 nm (sensible au jaune-rouge).

Les cônes, au nombre de 5 millions, sont principalement situés dans la fovéa (région au centre de la rétine proche de l'axe visuel et où l'acuité visuelle est à son maximum) à une densité de l'ordre de 200000 mm^2 (cf. Figure 2.8). C'est la présence de trois formes différentes d'opsines qui permet la vision couleur. Ils sont activés à partir d'une centaine de photons incidents : ils répondent donc en situation diurne, à une luminosité intense. Reliés à une seule cellule bipolaire et une seule cellule ganglionnaire, ils assurent une précision optique maximale et une capacité à distinguer les détails. C'est pourquoi, lorsque l'on cherche une bonne précision, on regarde un objet devant nous et non pas sur les côtés. Il existe trois types de cônes sensibles au rouge, au vert et au bleu. D'un point de vue perceptuelle, le vert est perçu plus fortement que le rouge, lui-même plus fortement que le bleu [94]. Ainsi, les cônes sont les photo-récepteurs spécialisés impliqués dans la perception des couleurs et assurant une forte acuité visuelle. Les bâtonnets, plus nombreux que les cônes (120 millions) sont principalement situés en périphérie de la rétine. Leur répartition n'est pas homogène. Ils ne possèdent qu'un seul type de pigment ; *ils sont donc incapables de différencier plusieurs teintes*. Par contre, ils sont activés dès la réception d'un photon : *ils sont donc plus sensibles en lumière faible. Ils servent principalement à la vision nocturne*. Ils sont généralement reliés à plusieurs cellules bipolaires. Le fait que les cellules « collectent » les réponses de plusieurs photorécepteurs permet d'accroître la sensibilité à la lumière ; par contre cela entraîne une diminution de l'acuité. Les cônes et les bâtonnets sont donc complémentaires : les premiers permettent une vision diurne couleur et précise. Les seconds permettent une vision en niveaux

de gris moins précise dans des conditions d'éclairage faible.

Les cellules bipolaires

Les cellules bipolaires (ou « deux pôles ») tiennent leur nom de leur forme ; elles sont l'intermédiaire obligé entre les photorécepteurs et les cellules ganglionnaires. Ces cellules sont reliées à un seul récepteur (dans la fovéa) ou à un groupe de récepteurs (en périphérie de la rétine) [94].

Les cellules horizontales

Ces cellules assurent une connexion indirecte entre photorécepteurs et cellules bipolaires. Elles permettent une modulation du signal transmis directement depuis les photorécepteurs. Elles connectent plusieurs photorécepteurs et sont connectées entre elles par l'intermédiaire de synapses électriques, de ce fait, leur champ récepteur est bien plus large que celui des photorécepteurs ; cela répond à la notion d'économie, un principe souvent rencontré dans les systèmes biologiques [69]. Cette architecture permet un lissage de l'information transmise par les cônes. Ainsi les cellules horizontales porteraient une information de luminance locale moyenne qui rentrerait en jeu dans l'adaptation du photorécepteur à la luminance.

Les cellules amacrines

Ces cellules sont en contact avec les cellules bipolaires et les cellules ganglionnaires. Les amacrines, dont plus de vingt-cinq types différents ont été recensés chez l'homme [69], sont impliquées dans les mécanismes de modulation de gain de la réponse des bipolaires et des ganglionnaires ; elles sont également impliquées dans l'adaptation des champs récepteurs des cellules ganglionnaires en fonction de l'intensité moyenne et par conséquent du rapport signal sur bruit et enfin, certaines jouent un rôle dans la détection du mouvement de points lumineux [94, 69].

Les cellules ganglionnaires : inhibition latérale

La dernière couche nerveuse de la rétine, « l'étage de sortie » vers les centres de traitements corticaux, est composée d'environ 1.5 millions de cellules ganglionnaires [69], à peu près 85 fois moins nombreuses que les photorécepteurs. Ces neurones sont reliés directement aux cellules bipolaires et leurs axones se rejoignent pour former le nerf optique. Elles sont reliées à une seule cellule bipolaire dans la fovéa et à plusieurs cellules bipolaires en périphérie de la rétine. La notion de champ récepteur permet d'expliquer les modalités de la convergence des informations transmises : le champ récepteur d'un neurone donné correspond à la surface sensible par laquelle un stimulus va affecter son activité. Ainsi, les champs récepteurs des cellules bipolaires et ganglionnaires de la rétine correspondent à

la portion du champ visuel pour laquelle des photorécepteurs sont en liaison (*via* les cellules horizontales et amacrines) directe ou indirecte avec ces cellules.

Il y a opposition entre les effets des liaisons qu'un neurone a avec ses récepteurs sensoriels directs ou indirects :

- si les liaisons directes sont excitatrices alors les liaisons indirectes sont inhibitrices ;
- si les liaisons directes sont inhibitrices alors les liaisons indirectes sont excitatrices.

Les cellules bipolaires et ganglionnaires ont des champs récepteurs circulaires comprenant deux zones concentriques à activités antagonistes :

- il existe des cellules à centre "ON" : le centre (liaisons directes) est excitateur et la périphérie (liaisons indirectes) est inhibitrice ;
- il existe des cellules à centre "OFF" : le centre est inhibiteur et la périphérie excitatrice.

Lorsque le champ récepteur d'un neurone est stimulé sur toute sa surface, il y a inhibition latérale et le neurone ne répond pas. Dans le cas d'un champ récepteur à centre "ON", l'application d'un stimulus localisé en son centre produira une réponse neuronale. Si le champ récepteur est à centre "OFF" c'est un localisé dans sa périphérie qui provoquera une réponse. Ce sont donc des informations sur les contrastes qui sont transmises.

Les cellules ganglionnaires se répartissent aussi en deux grandes catégories [94, 41] ⁶ : les cellules ganglionnaires de type M (magno) ou Y et les cellules ganglionnaires de type P (parvo) ou X. Comparativement aux cellules P, [94]les cellules M que l'on trouve en périphérie de la rétine, présentent un corps cellulaire et un axone plus gros, comportent des champs récepteurs plus grands, ont une plus grande rapidité de conduction nerveuse et manifestent une plus grande sensibilité aux contrastes lumineux [41].

Les cellules P que l'on trouve dans la fovéa [94, 41], forment quant à elles près du quart du nerf optique. Elles se distinguent aussi des cellules M par le fait que certaines d'entre elles réagissent à des régions restreintes du spectre chromatique, se distinguant des cônes, qui ne sont sensibles qu'à des régions plus larges. Chaque cellule P répond à deux couleurs, mais ses réactions sont de type antagoniste [41]. Elle reçoit d'un type de cône des connexions excitatrices qu'on indique par le signe (+) et d'un autre type, des connexions inhibitrices indiquées par le signe (-). Les quatre catégories d'antagonisme qu'elles présentent sont celles de type (rouge+,vert-), (vert+,rouge-), (bleu+,jaune-), (jaune+,bleu-) [41]. Nous verrons plus tard, que l'interaction entre les trois catégories de cônes et les quatre catégories de réponses antagonistes aux couleurs constitue la seconde étape du traitement de l'information chromatique par le système visuel.

La capacité de résolution spatiale du système visuel humain est déterminée par

6. Une troisième catégorie, appelée « konio », a été distinguée chez le singe marmoset. ses caractéristiques étant mal connues chez l'humain, nous ne considérons ici que deux [41].

le diamètre des champs récepteurs et non pas par celui des photorécepteurs [41]. Malgré leur situation en troisième ligne, les cellules ganglionnaires sont véritablement les unités réceptrices de la rétine [41]. Les champs récepteurs de la fovéa ont environ 0.01 mm de diamètre. En périphérie de la rétine, les champs peuvent être 50 fois plus larges, atteignant 0.5 mm.

Les cellules ganglionnaires utilisent les champs récepteurs pour accentuer les contrastes et créer ainsi des contours soulignant les différences de luminosité. Comme nous l'avons dit plus haut, les champs récepteurs des cellules ganglionnaires de la rétine varient en grandeur. Les cellules ayant des champs de même grandeur se regroupent pour créer une représentation à une échelle donnée. Plusieurs échelles de représentation coexistent.

2.2.3 La transmission : de la rétine au cerveau

De la rétine au cortex visuel (les voies visuelles)

Nous avons dit précédemment que le nerf optique est chargé de diffuser les informations visuelles, après prétraitement par la rétine vers le cortex visuel. Le nerf optique comporte deux branches principales :

- Une première branche qui rejoint le corps genouillé latéral (de l'hémisphère droit ou gauche selon qu'il s'agit respectivement de l'oeil droit ou gauche). Les axones des cellules conio aboutissent quant à eux sur la partie ventrale de chaque couche du corps genouillé latéral. Les axones des cellules ganglionnaires de types M et P aboutissent dans des couches distinctes du corps genouillé latéral (organisé en six couches) :
 - les couches magnocellulaires pour les cellules de types M (couches 1 et 2) ;
 - les couches parvocellulaires pour les cellules de type P (couche 3, 4 et 5).
- Une seconde branche qui rejoint le colliculus supérieur ou tectum de l'hémisphère droit s'il s'agit de l'oeil gauche ou l'hémisphère gauche s'il s'agit de l'oeil droit.

Du corps genouillé latéral (hémisphère gauche ou droit) partent des fibres qui se projettent sur le cortex occipital *i.e.* sur le lobe occipital du cortex. Ainsi, le système constitué par les projections de la rétine sur le corps genouillé latéral du thalamus passant par le cortex strié puis sur le cortex visuel est appelé système géniculostrié et celui constitué par les projections de la rétine sur le colliculus supérieur passant par le pulvinar, puis sur le cortex visuel est appelé système tectopulvinarien.

Anatomie du cerveau

Le cerveau est constitué de deux hémisphères : hémisphère gauche et hémisphère droit. Il se situe dans la tête et baigne dans le liquide céphalo-rachidien

(LCR), dans la boîte crânienne. Le cerveau est composé d'une partie centrale de matière blanche (ce sont les fibres ou autoroutes de transmission) ainsi que d'une écorce cérébrale (cortex), composée de matière grise en périphérie où sont situés les neurones responsables des traitements de l'information. Des sillons principaux délimitent des parties du cortex en lobes : le lobe frontal, le lobe pariétal, le lobe temporal, le lobe occipital. Le lobe occipital est celui qui se situe le plus loin des yeux, et pourtant, c'est dans ce lobe que se situe le cortex visuel et ses 538 millions de cellules chargées des traitements de l'information visuelle.

Le cortex visuel

Le cortex visuel est situé dans le lobe occipital du cortex. Il est divisé en plusieurs aires visuelles auxquelles sont associées différentes tâches de vision. Différentes nomenclatures existent, on peut néanmoins citer la dénomination *V1*, *V3*, *V4* et *V5* ou *MT*. L'aire *V1* est l'aire primaire, organisée en colonnes perpendiculaires à la surface. Les aires supérieures sont moins bien connues. On peut dire cependant que l'aire *V3* est dédiée à la reconnaissance de formes, l'aire *V4* à la couleur et l'aire *V5* au mouvement.

2.3 Conclusion

Comme nous venons de le voir, le signal lumineux subit un traitement complexe selon plusieurs voies parallèles dans le système visuel humain. La rétine est la première structure impliquée dans le traitement de l'information visuelle. Elle se compose de capteurs qui transforment l'intensité et la chrominance de la lumière incidente en un ensemble de signaux nerveux. Elle effectue les premiers traitements de l'information visuelle. La dernière couche de cellules de la rétine, les cellules ganglionnaires véhiculent par le nerf optique l'information au cortex visuel primaire, *via* les corps genouillés latéraux. Arrivée dans le cortex visuel, l'information est transmise à différents centres de traitement corticaux en plusieurs étapes (confère, organisation en couches du cortex visuel). De plus, à mesure que l'on progresse dans la « hiérarchie » des aires visuelles, on observe une augmentation de la taille des champs récepteurs et les cellules deviennent sensibles à des stimuli de complexité croissante.

Il est important de noter que l'œil de chaque être humain peut présenter des anomalies différentes (anomalies acquises ou congénitales), ce qui engendre des différences de perception de la couleur entre individus.

Le *cerveau* constitue le système d'interprétation de l'information visuelle chez l'homme. Ainsi la perception humaine de la couleur de chaque être humain dépend, d'une part des modalités de transmission nerveuse de l'information couleur contenue dans le stimulus perçu (aspect physique et physiologique) et, d'autre part de la façon dont ce signal nerveux va être interprété. Les mécanismes neu-

rophysiologiques liés à cette interprétation sont relativement complexes et encore mal connus. Cependant, nous savons que notre interprétation d'un signal couleur dépend aussi d'aspects psychologiques et plus précisément de notre connaissance a priori de notre environnement ainsi que de l'apprentissage que nous avons reçu des couleurs que nous percevons. En effet, dès notre plus jeune âge, nous percevons et apprenons les couleurs en les nommant. Cet apprentissage peut être différent selon les individus et les cultures. Par exemple, ce qui est violet pour l'un sera mauve pour l'autre. De même nous pouvons parfaitement identifier la couleur d'un objet quelques soient les conditions d'éclairage si nous connaissons a priori sa couleur. Dans les deux cas, le cerveau interprète et corrige les informations qu'il reçoit de l'œil en fonction de la connaissance qu'il a acquise antérieurement. Ce phénomène d'adaptation est appelé *adaptation du système visuel humain à un changement d'illuminant*. Plus généralement, la perception résulte d'une interprétation du signal capturé dépendant à la fois des capacités physiologiques du système visuel humain et des capacités cognitives du sujet. Nos connaissances sur le système visuel sont donc considérables mais ne suffisent pas à expliquer complètement les mécanismes intimes de la perception visuelle. Les travaux sur la rétine et sur le cortex visuel se poursuivent et apportent chaque jour des nouveautés qu'il faut ensuite tenter d'intégrer dans des hypothèses de fonctionnement.

Nous avons vu que notre perception de la couleur est subjective c'est à dire dépendante non seulement des propriétés physiques du stimulus mais aussi du fonctionnement du système visuel humain. Pourtant dans de nombreux domaines d'applications, il est nécessaire de l'évaluer de manière reproductible. C'est dans cette problématique que s'inscrit la colorimétrie, science de la mesure de la couleur.

2.4 Mesure de la couleur

Comme toute science, la colorimétrie obéit à des lois que de nombreux chercheurs ont contribué et continuent encore à établir et qui sont normalisées par la CIE. Son objectif est de modéliser le comportement d'un observateur standard soumis à un stimulus lumineux produit dans des conditions standard.

2.4.1 Principe de Trichromie

La perception humaine de la couleur (approche subjective) est caractérisée par son aspect tridimensionnel. Face à un stimulus uniforme (non texturé), un observateur humain décrira la sensation produite à l'aide de trois attributs :

- la luminance ;
- la tonalité (nom donné à la couleur) ;
- la saturation.

Tonalité et saturation sont deux attributs liés permettant d'exprimer les caractéristiques chromatiques du stimulus.

La luminance exprimée en $cd.m^2$ permet de quantifier la luminosité.

Les travaux de Young du tout début du XIX^{ème} siècle (vers 1866), repris par Helmholtz, mettent en évidence que tout stimulus de couleur peut être reproduit par le mélange de trois autres stimuli : le Rouge, le Vert et le Bleu, appelés primaires. Ce principe de trivariance visuelle s'énonce de la façon suivante dans la norme NFX08.00 : « Un rayonnement de couleur quelconque mais réel, . . . , peut être reproduit visuellement à l'identique, dans des conditions d'observation déterminées, par le mélange algébrique en proportions définies de manière unique, des flux lumineux de trois rayonnements de couleur réelle qui peuvent être choisis arbitrairement, sous la seule réserve qu'aucun d'eux ne puisse être reproduit par un mélange approprié des deux autres ». Trois primaires sont donc nécessaires et suffisantes pour reproduire toute couleur et la colorimétrie est basée sur cette théorie. Selon que l'on s'intéresse à la lumière ou à la matière, on distingue deux types de synthèse : la *synthèse additive* et la *synthèse soustractive*.

La synthèse additive résulte de la combinaison de lumières colorées : les écrans fonctionnent sur ce principe. Le noir correspond à l'absence de couleur. Le blanc correspond à la combinaison en proportions égales de trois lumières rouge, verte et bleue.

Lorsque l'on mélange des matières colorées c'est le phénomène d'absorption qui est à l'origine de la couleur des mélanges. On parle alors de synthèse soustractive, chacun des éléments du mélange absorbant une part du rayonnement reçu.

En synthèse additive, les primaires couramment utilisées sont : le Rouge, le Vert et le Bleu tandis qu'en synthèse soustractive, ce sont le Magenta, le Cyan et le Jaune.

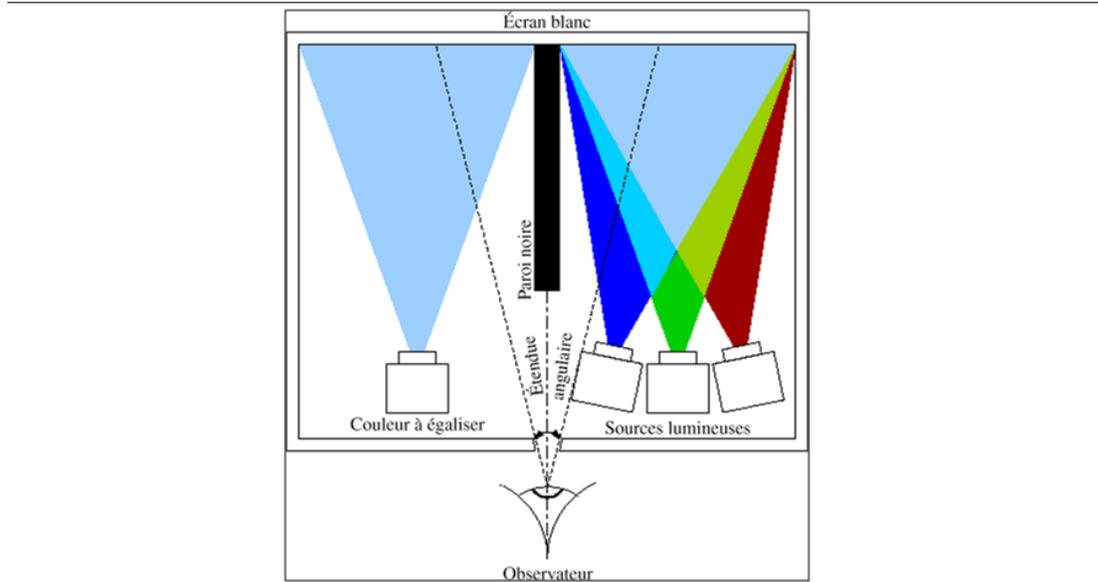
2.4.2 Les expériences d'égalisation : la base de la colorimétrie classique

La colorimétrie classique (premiers travaux du 19^{ième} siècle) s'est développée alors que le fonctionnement de l'œil humain n'était absolument pas élucidé. Son objectif étant d'établir une relation entre les propriétés objectives (physiques) d'un stimulus et l'appréciation visuelle que l'humain en avait, elle ne disposait que de méthodes expérimentales de mesures visuelles (méthodes objectives d'évaluation des couleurs) pour arriver à ses fins. Les travaux qui visaient à établir une modélisation « mathématique » de l'observateur humain se sont basés sur l'hypothèse de Young énoncée au paragraphe précédent. Le principe de trichromie énoncée précédemment a servi de base aux expériences d'égalisation de couleurs à l'origine de la colorimétrie classique. Le principe de base de ces expériences est celui de l'égalisation de couleurs qui consiste, pour un observateur lambda, à comparer deux stimuli. Les stimuli présentés sont obtenus par éclairage d'un écran.

Ils sont placés dans un champ visuel uniforme entouré d'un fond achromatique. L'un des deux stimuli sert de référence. L'autre est produit par la juxtaposition de trois lumières primaires dont on peut faire varier les quantités respectives. L'expérience d'égalisation consiste à régler ce dispositif de façon à ce que les deux stimuli soient visuellement identiques.

Expérience de Guild (1926 à 1928 ; sept observateurs) Dans l'expérience de Guild (cf. Figure 2.10), le champ visuel est carré sous-tendant un angle de 2° , vu sur un fond noir, et les primaires utilisées proviennent d'une source à incandescence, filtrée pour donner des lumières quasi monochromatiques, de longueur d'onde dominante à 630 nm , 543 nm et 460 nm .

Figure 2.10 Expérience d'égalisation entre un tri-stimulus de référence et le stimulus de test.



Wright a repris les travaux de Guild en améliorant le dispositif expérimental (primaires monochromatiques à 650 nm , 530 nm et 460 nm) avec 10 observateurs.

2.4.3 Les lois de Grassmann et les hypothèses d'une colorimétrie trichromatique

L'objectif des expériences d'égalisation était d'évaluer à l'aide de trois grandeurs les caractéristiques perçues pour un stimulus uniforme. Les cinq hypothèses suivantes soutiennent l'approche colorimétrique. Soient A , B , C et D quatre stimuli de couleur. Ces quatre stimuli vérifient les propriétés suivantes :

- réflexivité $A \equiv A$;
- symétrie si $A \equiv B$ alors $B \equiv A$;

- transitivité si $A \equiv B$ et $B \equiv C$ alors $A \equiv C$;
- additivité si $A \equiv B$ alors $A + C \equiv B + C$;
- dilatation si $A \equiv B$ alors $kA \equiv kB$ avec $k > 0$.

Le symbole \equiv signifie l'égalisation visuelle des deux stimuli. Les deux premières conditions sont uniquement relatives à des exigences sur le dispositif d'égalisation visuelle. Les trois conditions suivantes dépendent du comportement du système visuel.

Les études sur le comportement du système visuel humain menées par Grassmann au XIX^{ème} siècle l'ont conduit à énoncer trois lois expérimentales qui trouvent leur expression dans les hypothèses de transitivité, d'additivité, et de dilatation.

2.4.4 Système de représentation

Selon que la couleur est considérée suivant des aspects physiques, physiologiques et psychologiques, plusieurs solutions ont été proposées pour tenter de modéliser cette information aussi riche que complexe. Qu'il s'agisse du modèle de Young-Helmholtz, de celui de Hering ou d'un modèle plus proche de la perception humaine de la couleur, exprimé en termes de luminosité-teinte-saturation, trois composantes semblent être nécessaires et suffisantes pour définir la couleur.

Afin d'exprimer la mesure d'un stimulus, il est donc nécessaire de définir un système de représentation de la couleur. Si l'on admet que toute couleur peut être égalisée à partir de trois primaires R, G et B, il apparaît naturel de la représenter par un point dans un espace tridimensionnel.

Ainsi, un système de représentation de la couleur est donc caractérisé par trois primaires et définit un espace tridimensionnel d'origine O dans lequel les trois primaires deviennent les vecteurs directeurs unitaires de cet espace. Cependant, d'autres systèmes de représentation de la couleur ont été conçus sans définir de nouvelles primaires.

2.5 Conclusion

La compréhension du système visuel humain n'aboutit pas à une modélisation mathématique de la perception. Pour l'instant, des tentatives de modélisation du fonctionnement de la rétine ont été menées (*e.g.* Thèse d'Alleyson, D., etc) [2]

Comme nous venons de voir, la colorimétrie classique repose sur le principe de trichromie et sur les lois de Grassmann. De plus, elle est basée sur l'exploitation des résultats d'un seul type de mesures visuelles (expérience d'égalisation) avec des conditions expérimentales très particulières.

Quoi qu'il en soit de la formulation des lois de Grassmann, la généralisation trichrome possède un domaine de validité limité [125] : les propriétés d'additivité et de dilatation se trouvent en défaut si on passe du domaine photopique au domaine mésopique (k petit), ou au domaine des très fortes luminances (k grand).

De plus, les propriétés de transitivité ne sont pas vérifiées quand intervient les phénomènes de seuils différentiels [125].

En ce sens, la colorimétrie classique est très restrictive. En particulier, la colorimétrie ne fait pas appel aux résultats expérimentaux obtenus lors d'expériences de classement de stimuli en séries ordonnées.

Chapitre 3

Le système de stimulation

L'objectif des expériences de mesure visuelle que nous avons entreprises était d'élucider en partie la question des relations entre caractéristiques physiques de stimuli texturés colorés et évaluation visuelle. Nous basant sur l'expérience de la colorimétrie, nous avons cherché à maîtriser le dispositif expérimental en garantissant la stabilité des signaux physiques affichés sur un écran ainsi que la reproductibilité des conditions d'observation.

Ce chapitre présente les concepts qui nous ont permis d'une part, de choisir la représentation couleur adaptée à notre problématique et d'autre part, de pouvoir contrôler les propriétés physiques des stimulations lumineuses texturées colorées qui seront par la suite produites au chapitre 4. Souhaitant utiliser les images numériques comme représentation chiffrée des stimuli, nous nous sommes intéressés aux différents systèmes de représentation/codage de la couleur. La trivariance visuelle étant considérée comme une réalité, les espaces de couleur utilisés sont très généralement des espaces de dimension trois : le repérage des couleurs se fait ainsi selon un système trichromatique. L'étude des propriétés de différents espaces couleur doit nous permettre de choisir une représentation apte à produire des variations physiques cohérentes du stimulus (dans notre cas variation de luminance). En outre, Il faut s'assurer que les couleurs affichées par le moniteur, décrites dans l'espace couleur adapté par leurs attributs physiques, correspondent aux valeurs attendues. Pour cela, il est nécessaire de calibrer précisément le système de restitution. Ainsi, dans ce qui suit, après la présentation des systèmes de représentation de la couleur, nous présentons de façon précise les conditions expérimentales et le calibrage du système d'acquisition.

3.1 Espaces de représentation de la couleur

Il existe un grand nombre de systèmes de représentation de la couleur. Aucun de ces systèmes ne peut prétendre rendre compte de l'ensemble des caractéristiques de la « couleur perçue ». En référence au système visuel humain on considère, de

manière générale, que la couleur se définit selon trois composantes répondant à des préoccupations différentes. Il existe quatre familles de systèmes de représentation [132] :

- les systèmes de primaires ;
- les systèmes luminance-chrominance ;
- les systèmes perceptuels ;
- les systèmes d'axes indépendants.

La couleur est un jeu de trois valeurs numériques à rentrer dans l'ordinateur pour que l'écran produise en sortie un stimulus lumineux dont on aura maîtrisé les propriétés au sens de la colorimétrie. L'analyse des limites de chaque système de représentation couleur est indispensable car elle permet de choisir une représentation adaptée à la problématique. Nous nous limiterons à la description des deux premières familles de systèmes : primaires et luminance-chrominance ou plus précisément le système $L^*a^*b^*$ qui sont en accord avec notre cahier des charges à savoir :

- contrôle physique de l'affichage sur écran,
- modulation des stimuli en fonction de critères visuels liés aux propriétés colorimétriques.

Pour des informations sur les systèmes perceptuels et les systèmes d'axes indépendants, on peut se reporter aux références suivantes [132, 125].

3.1.1 Les systèmes de primaires

Il existe de nombreux systèmes de primaires RVB (Rouge, Vert et Bleu). Le système de primaires RVB de référence est celui défini par la CIE en 1931 [54]. C'est à partir de ces primaires que la CIE a défini le système de référence colorimétrique XYZ [135]. Les expériences qui ont conduit au système RVB CIE 1931 sont basées sur un certain nombre d'expériences dans des conditions expérimentales précises, notamment celles de Guild et de Wright [132]. Elles ont permis de montrer que n'importe quel stimulus monochromatique S_λ peut être décrit comme la résultante de trois lumières monochromatiques selon la relation :

$$S_\lambda \equiv r_\lambda.R + v_\lambda.V + b_\lambda.B, \quad \lambda = 380 \text{ nm}, \dots, 780 \text{ nm},$$

où la relation $A \equiv B$ signifie que les deux stimuli de couleurs sont visuellement non distincts. Il s'agit de déterminer le seul triplet de valeurs $(r_\lambda, v_\lambda, b_\lambda)$ qui permet d'obtenir l'égalité visuelle entre le stimulus monochromatique S_λ de référence et la couleur issue de cette combinaison de primaires R, V et B et ce pour tous les stimuli du domaine du visible $\lambda = 380 \text{ nm}, \dots, 780 \text{ nm}$. Ainsi, on obtient :

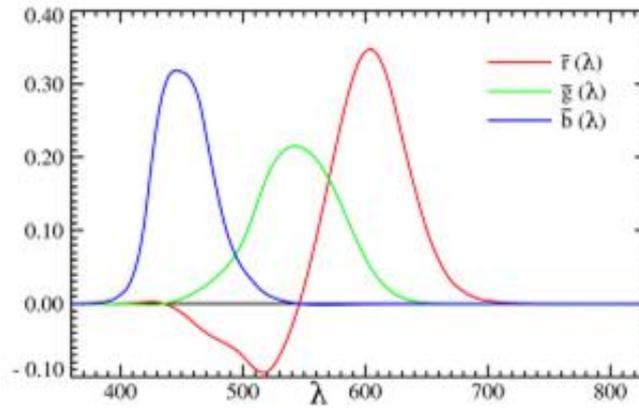
$$S(\lambda) = r(\lambda).R + v(\lambda).V + b(\lambda).B, \quad \lambda = 380 \text{ nm}, \dots, 780 \text{ nm}.$$

$r(\lambda)$, $v(\lambda)$ et $b(\lambda)$ représentent les proportions respectives de R, V et B à mélanger pour obtenir l'égalisation avec la couleur test.

Le système RVB CIE 1931

Le système de primaire RVB CIE 1931 est défini à partir de trois primaires monochromatiques de longueurs d'ondes 700.0 nm (Rouge), 546.1 nm (Vert) et 435.8 nm (Bleu) et de luminance 1 pour le rouge, 4.591 pour le vert et 0.06 pour le bleu . Il traduit le comportement de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° d'angle visuel. Ayant déterminé expérimentalement (cf. Chapitre 2) les valeurs r_λ, v_λ et b_λ pour chacune des longueurs d'onde $\lambda = 380\text{ nm}, \dots, 780\text{ nm}$, on construit trois fonctions $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{v}(\lambda)$ et $\bar{b}(\lambda)$ appelées fonctions colorimétriques associées respectivement à la primaire Rouge, Verte et Bleue (cf. Figure 3.1).

Figure 3.1 Les fonctions colorimétriques du système de primaires RVB de longueurs d'onde respectives 700.0 nm (Rouge), 546.1 nm (Vert) et 435.8 nm (Bleu) de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° d'angle visuel.



Les primaires Rouge, Vert et Bleu considérées ci-dessus ont été établies à partir de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° d'angle visuel ; elles présentent plusieurs particularités dont celles d'être normalisées sur le domaine du visible¹ :

$$\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{r}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{v}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{b}(\lambda) d\lambda.$$

De même, les quantités unitaires ont été normalisées de façon à ce que leur mélange unitaire soit équivalent à un stimulus équi-énergétique, en l'occurrence l'illuminant E, autrement dit :

$$E(\lambda) = 1 = \bar{r}(\lambda)R = \bar{v}(\lambda)V = \bar{b}(\lambda)B,$$

où $E(\lambda)$ désigne la répartition spectrale relative d'énergie de l'illuminant E (défini au chapitre 2). Ces quantités unitaires ont été fixées à 1.0000 pour la primaire Rouge, 4.5907 pour la primaire Verte et à 0.0601 pour la primaire Bleue.

1. L'intervalle $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ désigne l'intervalle spectral du domaine du visible.

Aux trois primaires R, V et B, on associe respectivement trois vecteurs directeurs normés et deux à deux orthogonaux \vec{R} , \vec{V} et \vec{B} . On obtient ainsi un repère $(O, \vec{R}, \vec{V}, \vec{B})$ orthonormé direct d'origine O . Dans l'hypothèse de la synthèse additive², toute couleur C peut être décrite par un vecteur de coordonnées R , V et B dans la base $(\vec{R}, \vec{V}, \vec{B})$. Ce qui se traduit sous forme vectorielle par la relation suivante :

$$\vec{OC} = R\vec{R} + V\vec{V} + B\vec{B}.$$

Les coordonnées R , V et B sont appelées composantes trichromatiques de la couleur et elles évaluent les quantités des trois rayonnements primaires ayant permis l'égalisation. Soit $S(\lambda)$ le stimulus de couleur associé à la couleur C .

Les composantes trichromatiques de la couleur C s'obtiennent par les relations [132] :

$$R = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{r}(\lambda) d\lambda, \quad (3.1.1)$$

$$V = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{v}(\lambda) d\lambda, \quad (3.1.2)$$

$$B = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{b}(\lambda) d\lambda. \quad (3.1.3)$$

Ces fonctions se vérifient pour 90% des observateurs. Elles caractérisent ce que l'on appelle l'observateur standard CIE 1931 [132]. Elles nous permettent de déterminer les proportions nécessaires à l'obtention d'une couleur de longueur d'onde choisie dans le domaine du visible. On constate sur la figure 3.1 que les fonctions colorimétriques peuvent prendre des valeurs négatives. Ceci est considéré comme un défaut du système. Un compromis consiste à ajouter suffisamment de blanc (mélange de Rouge, de Vert et de Bleu) afin de rendre toutes les composantes trichromatiques positives. L'inconvénient est que la couleur obtenue sera diluée : il est donc impossible d'exprimer toutes les couleurs saturées (couleurs monochromatiques) en utilisant le système RVB CIE 1931.

Le système XYZ de la CIE 1931

Le système RVB CIE 1931 présente plusieurs inconvénients [135, 132]. Les coordonnées trichromatiques peuvent prendre des valeurs négatives ; ce qui entraîne donc que certaines couleurs ne sont pas reproductibles par synthèse additive des trois primaires : Rouge, Vert et Bleu. En d'autres termes, aucun triplet de primaires physiquement réalisables ne permet de reproduire la totalité des sensations colorées possibles.

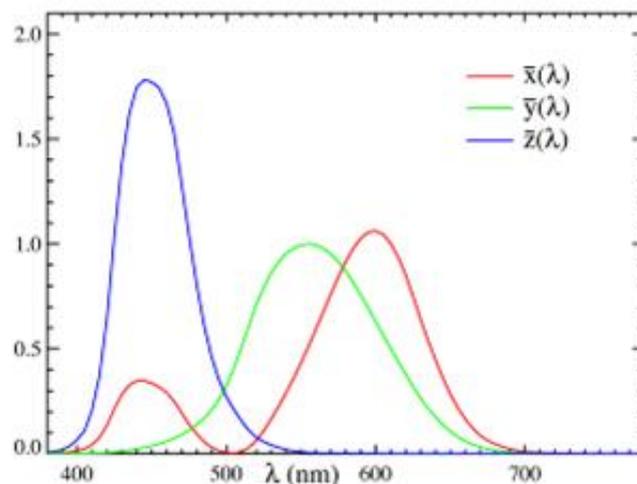
Pour pallier ces inconvénients, la CIE a établi dans le même temps c'est-à-dire en 1931 le système XYZ que nous noterons XYZ CIE 1931 (Travaux de Judd). Les primaires X, Y et Z de ce système sont virtuelles (imaginaires, non réalisables physiquement). Elles ont été créées de telle sorte que :

2. Juxtaposition de lumières colorées, correspondant chacune à une des trois primaires [135].

- les composantes trichromatiques de toute couleur sont positives. En effet, les fonctions colorimétriques $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ et $\bar{z}(\lambda)$ sont toutes positives (cf. Figure 3.2) ;
- toute couleur s'exprime comme mélange de X , Y et Z en proportions positives ;
- l'intégrale de chaque fonction colorimétrique sur le spectre visible est égale aux deux autres, *i.e.* :

$$\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{x}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{y}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \bar{z}(\lambda) d\lambda.$$

Figure 3.2 Les fonctions colorimétriques du système de primaire XYZ de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° degré d'angle visuel.



Dans la figure 3.2, page 113 :

- $\bar{x}(\lambda)$ désigne la fonction colorimétrique associée à la primaire X ;
- $\bar{y}(\lambda)$ désigne la fonction colorimétrique associée à la primaire Y ;
- $\bar{z}(\lambda)$ désigne la fonction colorimétrique associée à la primaire Z .

Dans ce système, la composante trichromatique Y est proportionnelle à la luminance du stimulus. Comme précédemment, aux trois primaires X , Y et Z , on associe respectivement trois vecteurs directeurs normés et deux à deux orthogonaux \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} . On obtient ainsi un repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ orthonormé direct d'origine O . Du fait de la synthèse additive, toute couleur C peut être décrite par un vecteur de coordonnées X , Y et Z dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Ce qui se traduit sous forme vectorielle par la relation suivante : $\vec{OC} = X\vec{X} + Y\vec{Y} + Z\vec{Z}$. Les coordonnées X , Y et Z sont encore appelées composantes trichromatiques de la couleur C dans ce système. Les expressions des composantes trichromatiques d'une couleur C en fonction des fonctions colorimétriques sont obtenues par les

relations suivantes [132] :

$$X = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{x}(\lambda) d\lambda, \quad (3.1.4)$$

$$Y = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{y}(\lambda) d\lambda, \quad (3.1.5)$$

$$Z = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda) \cdot \bar{z}(\lambda) d\lambda, \quad (3.1.6)$$

où $S(\lambda)$ désigne toujours le stimulus de couleur associé à la couleur C. La manipulation des vecteurs de données 3D (dans l'espace) occasionne des difficultés notamment pour les calculs et à la visualisation. Pour pallier cet inconvénient, il est d'usage de projeter les points couleur sur un plan où la somme des composantes vaut 1. Ainsi, on effectue la transformation suivante définissant des coordonnées trichromatiques à partir des composantes définies ci-dessus [50] :

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad (3.1.7)$$

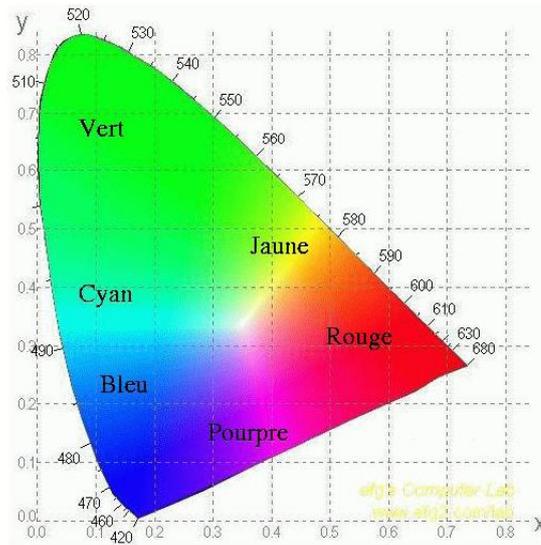
$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad (3.1.8)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z}. \quad (3.1.9)$$

On obtient ainsi un triplet (x, y, z) appelé coordonnées normalisées du point couleur C. Les coordonnées trichromatiques représentent la proportion de chacune des composantes X, Y et Z dans la somme $X + Y + Z$. Le point de coordonnées (x, y, z) est la projection du point C sur le plan d'équation $X + Y + Z = 1$.

Il devient alors possible de représenter les points couleur en utilisant deux coordonnées normalisées. En effet, les valeurs de la troisième coordonnée peuvent être calculées en utilisant les valeurs connues des deux autres coordonnées normalisées. Les coordonnées normalisées x et y (nombres sans dimension, compris entre 0 et 1) sont en général utilisées.

Le diagramme (x, y) résultant de la représentation des couleurs à partir de leurs coordonnées normalisées x et y est appelé *diagramme de chromaticité* (cf. Figure 3.3).

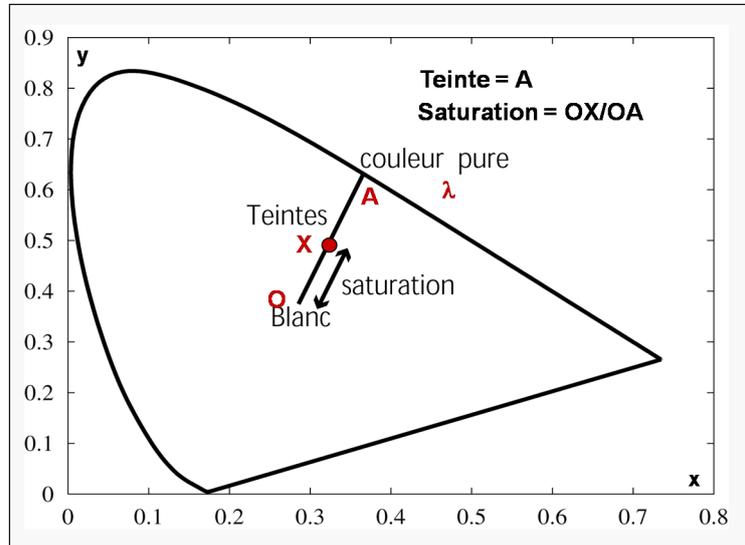
Figure 3.3 Diagramme de chromaticité (x, y) de l'espace XYZ CIE 1931 [83].

Le diagramme de chromaticité placé sur le plan d'équation $X + Y + Z = 1$ de l'espace colorimétrique XYZ CIE 1931 permet, pour une couleur C donnée, de déterminer sa longueur d'onde dominante (teinte) ainsi que sa saturation (son degré de dilution).

La teinte d'une couleur (on dit aussi « tonalité ») est l'attribut de la sensation visuelle décrit par des mots tels que rouge, vert, bleu, jaune, etc, exprimant la capacité à différencier les couleurs indépendamment de leur luminosité ou de leur saturation. Cet attribut perceptif est en relation avec la longueur d'onde dominante du stimulus [7].

La saturation correspond à l'attribut de la sensation visuelle évaluant la proportion de couleur (chromatique) pure dans la sensation totale.

Dans un diagramme de chromaticité, le blanc est situé à l'intérieur du diagramme (cf. Figure 3.4). Par exemple, dans ce diagramme l'illuminant E a pour coordonnées $(x, y) = (1/3, 1/3)$. Sur la périphérie ou (*lieu spectral* en français et *spectrum locus* en anglais) se trouvent les couleurs saturées (couleurs pures ou couleurs monochromatiques) repérées par leur longueur d'onde. La ligne droite fermant le diagramme (donc le spectre visible) s'appelle la *droite des pourpres*. Toutes les couleurs possibles (couleurs visibles) sont contenues dans l'aire délimitée par le lieu du spectre et la droite des pourpres. Pour déterminer la teinte d'un point dans ce diagramme, il suffit de tracer la droite reliant le blanc à ce point : cette droite coupe le bord au point de teinte correspondante. Si on prolonge la droite du côté du point blanc, on obtient la couleur complémentaire de ce point couleur qui est le point symétrique du point couleur par rapport au point blanc. La saturation est obtenue en faisant le rapport de la distance entre le point et sa couleur saturée par la distance entre le blanc et la couleur saturée.

Figure 3.4 Diagramme de chromaticité (x, y) de l'espace XYZ CIE 1931.

Il est important de noter que les conditions d'utilisation du système XYZ CIE 1931 sont relatives à un champ visuel de 2° , pour lequel la vision des couleurs est due aux cônes seulement, et qui au plus peut être étendu jusqu'à 4° si l'on veut avoir des prédictions acceptables. Pour des champs visuels plus larges, typiquement de 10° , il a été démontré que le système de XYZ CIE 1931 n'est pas satisfaisant [132]. Il est donc conseillé d'utiliser le système XYZ CIE 1964 que nous ne développerons pas. Pratiquement, la couleur est spécifiée soit par ses composantes trichromatiques X, Y, Z , soit par sa chromaticité (x, y) et Y représentant la luminance. La matrice de passage \mathbf{P} du système XYZ CIE 1931 au système RVB CIE 1931 [132] est définie par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2.7690 & 1.7518 & 1.1300 \\ 1.0000 & 4.5907 & 0.0601 \\ 0.0000 & 0.0565 & 5.5943 \end{pmatrix},$$

où $(2.7690, 1.0000, 0.0000)$, $(1.7518, 4.5907, 0.0565)$ et $(1.1300, 0.0601, 5.5943)$ sont respectivement les coordonnées (X, Y, Z) dans le système XYZ CIE 1931 des primaires Rouge, Verte et Bleue.

Le système XYZ CIE 1931 constitue depuis 1931 la base de la colorimétrie [135, 50]. Tous les autres systèmes de primaires, tous les espaces colorimétriques, sont reliés d'une façon ou d'une autre à ce système de primaires.

3.1.2 Espaces approximativement uniformes

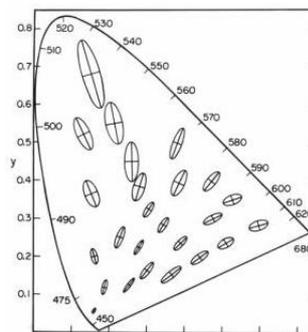
En préambule, il est important de rappeler que l'apparence visuelle ne se résume pas à une simple appréciation des couleurs. Ainsi lorsque l'on compare deux surfaces on va englober dans notre analyse visuelle des éléments tels que le

brillant, la texturation, la transparence . . .

La notion de différence de couleur n'a donc de sens que pour des surfaces suffisamment similaires. On ne peut imaginer facilement analyser des différences de couleur entre un tissu et une planche en bois.

Dans notre thèse, nous avons donc fait le choix de produire des stimuli lumineux non pas par éclairage de surface de matériaux (difficultés à fabriquer des gammes de surface en maîtrisant la totalité des propriétés influençant l'apparence mais par production d'un signal lumineux *via* un système d'affichage). Les espaces colorimétriques de base sont basés sur une approche principalement physique ainsi les composantes trichromatiques obtenues sont en lien direct avec les grandeurs physiques représentant les stimuli. Les règles ayant présidé à la définition de ces espaces ne se réfèrent pas à la notion de seuil différentiel de discernabilité entre deux stimulations. Ors il n'existe pas de règle de proportionnalité entre les différences physiques entre stimuli et les différences visuellement perçues. Ainsi, la perception des écarts de couleur n'est pas uniforme sur l'ensemble du diagramme de chromaticité (x, y) . En effet, si on établit expérimentalement l'enveloppe des couleurs justes discernables autour de chaque point, on constate que l'on obtient des ellipses de formes et d'orientations variables (cf. Figure 3.5).

Figure 3.5 Les ellipses de Mac Adam dans le diagramme de chromaticité (x, y) [36].



Dans la figure 3.5, chaque ellipse représente un ensemble de couleurs perceptivement indifférentiables *i.e.* chaque ellipse représente la plus petite différence perceptible entre deux couleurs proches. Les couleurs à l'intérieur d'une ellipse sont jugées identiques. Une couleur à l'extérieur d'une ellipse est jugée différente de celle du centre de l'ellipse. On constate que ces ellipses sont très petites dans le bleu, petites dans le rouge, et grandes dans le vert. Ce qui signifie que le système visuel humain est *a priori* plus sensible aux différences de couleur dans le Bleu que dans le Vert par exemple, du moins pour une petite variation de chromaticité. L'espace de codage utilisé rendra compte ou non de cette discernabilité s'il y a correspondance entre une distance et la propriété de « discernabilité ». Le système XYZ CIE 1931 n'est pas perceptuellement uniforme [135].

Pour pallier cet inconvénient, de nombreux travaux ont été menés pour établir des systèmes dits *perceptuellement uniformes* (pour lesquels tout critère de discernabilité serait ramené à une métrique basée sur une approche psychophysique). Ainsi, on distingue entre autre le système $L^*a^*b^*$ qui a été normalisé par la CIE en 1976. Ce système a été établi (via statistique) par expérimentation sur la discernabilité d'un groupe d'observateurs.

Système $L^*a^*b^*$ (ou CIELAB 76)

La transformation qui permet de passer du système XYZ CIE 1931 au système $L^*a^*b^*$ est une transformation non linéaire. Soit C une couleur donnée. Soient (X, Y, Z) et (L^*, a^*, b^*) ses coordonnées dans les systèmes XYZ CIE 1931 et $L^*a^*b^*$ respectivement. Les coordonnées trichromatiques X_n, Y_n et Z_n sont les coordonnées trichromatiques dans le système de primaires XYZ CIE 1931 d'un stimulus achromatique spécifié de couleur blanche.

Il a été établi que cette transformation peut être décrite par les équations suivantes [132] :

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_n} \right)^{1/3} - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_n} > 0.008856, \\ 903.3 \left(\frac{Y}{Y_n} \right) & \text{si } \frac{Y}{Y_n} \leq 0.008856, \end{cases} \quad (3.1.10)$$

$$a^* = 500 \left\{ f \left(\frac{X}{X_n} \right) - f \left(\frac{Y}{Y_n} \right) \right\}, \quad (3.1.11)$$

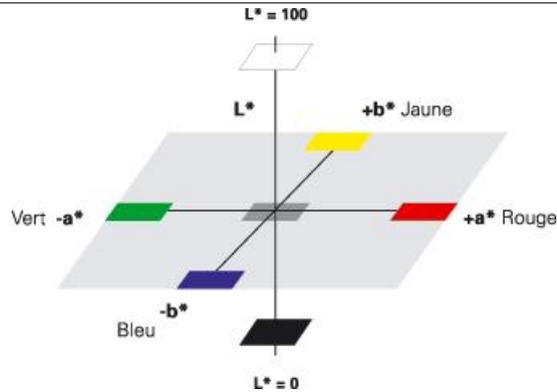
$$b^* = 200 \left\{ f \left(\frac{Y}{Y_n} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_n} \right) \right\}, \quad (3.1.12)$$

avec :

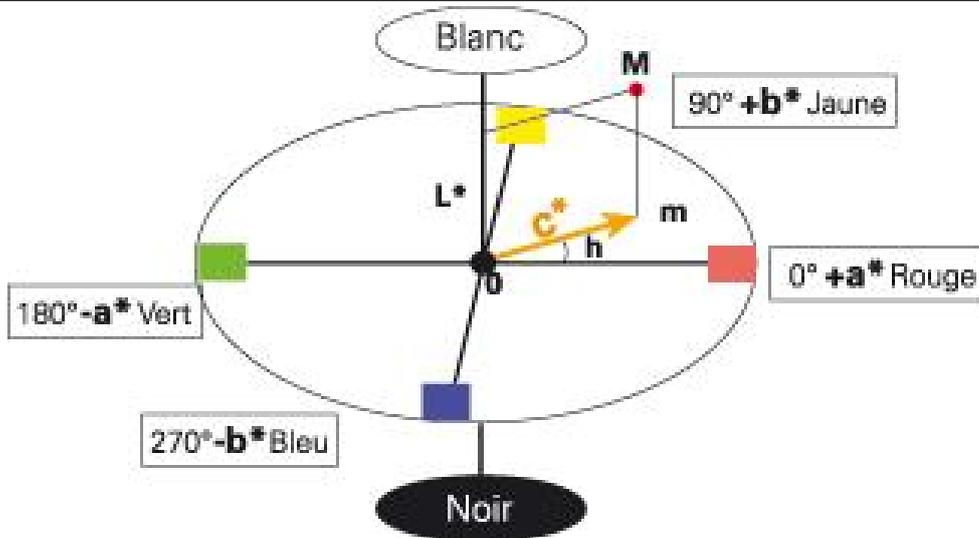
$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{si } x > 0.008856, \\ 7.787 \times x + \frac{16}{116} & \text{si } x \leq 0.008856. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Dans le système $L^*a^*b^*$, on désigne par [132, 135] :

- (L^*) l'axe des clartés (désigné également comme l'axe achromatique, l'axe des niveaux de gris ou axe neutre) porté par le vecteur unitaire \vec{L}^* . Les valeurs de L^* varient de 0 pour le noir à 100 pour le blanc absolu ;
- (a^*) et (b^*) les axes de chrominance portés respectivement par les vecteurs unitaires \vec{a}^* et \vec{b}^* , et sont construits respectivement sur deux oppositions de couleur : Vert-Rouge, Bleu-Jaune. Le plan $(0, \vec{a}^*, \vec{b}^*)$ défini par les vecteurs \vec{a}^* et \vec{b}^* est un plan à luminance constante.

Figure 3.6 Modèle CIELAB : coordonnées triangulaires.

Ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires. On obtient ainsi un repère orthonormé direct $(O, \vec{L}^*, \vec{a}^*, \vec{b}^*)$ d'origine O (cf. Figure 3.6). Notons que l'origine O du repère est toujours associée à la couleur Noir. Dans cet espace, une couleur C donnée peut être aussi décrite par ses coordonnées cylindriques (L^*, C^*, h) (cf. Figure 3.7).

Figure 3.7 Modèle CIELAB : coordonnées cylindriques.

La coordonnée C^* désigne la chroma (entre 0 et 100). Elle décrit la distance de la couleur C à l'axe neutre. L'angle h désigne l'angle de teinte de la couleur. Elle décrit l'angle entre le vecteur déterminé par la couleur et l'origine du repère, et le vecteur directeur de l'axe des abscisses. Cet angle est exprimé en degrés (entre 0° et 360°). Le calcul se fait suivant : $C^* = \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}$ et $h = \arctan(\frac{b^*}{a^*})$. Enfin, notons que ce système [51] est actuellement le plus utilisé pour la représentation des couleurs de surface d'objets.

Dans le système $L^*a^*b^*$, la discernabilité entre deux couleurs est supposée pré-

dictible grâce à une évaluation de la distance euclidienne. Soient deux couleurs de coordonnées trichromatiques respectives (L_T^*, a_T^*, b_T^*) , $(L_{CT}^*, a_{CT}^*, b_{CT}^*)$ dans ce système. La distance entre les deux couleurs appelée écart de couleur et notée ΔE_{ab}^* est définie par [132] :

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{\Delta L^{*2} + \Delta a^{*2} + \Delta b^{*2}}, \quad (3.1.14)$$

où :

- $\Delta L^* = L_{CT}^* - L_T^*$ est la différence de clarté ;
- $\Delta a^* = a_{CT}^* - a_T^*$ est l'écart chromatique vert-rouge ;
- $\Delta b^* = b_{CT}^* - b_T^*$ est l'écart chromatique bleu-jaune.

Les indices T et CT font référence à la couleur de référence ou couleur type (c'est-à-dire la couleur à reproduire) et la couleur reproduite (ou couleur contretypé), respectivement.

Il est également possible d'établir une distance couleur à partir des coordonnées cylindriques de l'espace $L^*a^*b^*$. Pour cela, on définit les écarts suivants $\Delta C_{a^*b^*}^*$ (écart de saturation), Δh_{ab} et $\Delta H_{a^*b^*}^*$ (écart de teinte) par : $\Delta C_{a^*b^*}^* = C_{CT}^* - C_T^*$, $\Delta H_{a^*b^*}^* = 2\sqrt{C_{CT}^* C_T^*} \cdot \sin(\frac{\Delta h_{ab}}{2})$ avec $\Delta h_{ab} = h_{CT} - h_T$. L'écart couleur ΔE_{ab}^* peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{\Delta L^{*2} + \Delta C_{a^*b^*}^{*2} + \Delta H_{a^*b^*}^{*2}}. \quad (3.1.15)$$

Dans cette équation, on n'utilise pas directement l'écart Δh car celui-ci représente un angle, alors que ΔE^* représente une distance. Notons que l'écart de couleur ΔE_{ab}^* reste la recommandation courante de la CIE [141] dans le cadre de l'évaluation de grands écarts colorimétriques. Il est courant de prendre $\Delta E_{ab}^* = 5$ comme valeur seuil.

Bien que l'espace colorimétrique $L^*a^*b^*$ soit réputé uniforme, il ne rend pas compte complètement de l'évaluation perceptive des écarts de couleur. En effet, le système visuel est plus sensible à un écart de chromaticité qu'à un écart de clarté. L'écart de teinte est le paramètre le plus significatif. Plus les échantillons sont ternes plus l'observateur est exigeant. Ainsi, un écart donné n'a pas la même importance suivant la couleur considérée. Nombreuses études ont montré les limites et les erreurs d'appréciation de la formule de calcul de l'écart couleur ΔE_{ab}^* [132, 141] ; il est ainsi nécessaire de définir des systèmes de calcul de tolérance indépendant de la couleur du type. C'est l'objectif des systèmes d'équations d'acceptabilité. Parmi ces formules, on distingue l'équation de différence de couleur CMC(1:c) (Colour Measurement Committee) utilisée dans l'industrie textile, l'équation de différence de couleur CIE 1994, l'équation de différence de couleur S-CIELAB et l'équation de différence de couleurs CIECAM97s.

Dans ce travail, nous ne traiterons que de l'équation de différence de couleur CIE 1994. Pour une bibliographie plus complète sur les systèmes d'équations d'acceptabilité le lecteur pourra se reporter aux références [132, 51, 141].

L'équation de différence de couleur CIE 1994 se définit de façon suivante :

$$\Delta E_{ab94}^* = \sqrt{\left(\frac{\Delta L^*}{k_L S_L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_{a^*b^*}^*}{k_C S_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_{a^*b^*}^*}{k_H S_H}\right)^2}, \quad (3.1.16)$$

où :

$$\begin{aligned} S_L &= 1, \\ S_H &= 1 + 0.045 C_{a^*b^*,T}^*, \\ S_C &= 1 + 0.015 C_{a^*b^*,T}^*. \end{aligned}$$

Les paramètres k_L , k_H et k_C pondèrent la formule de différence couleur en fonction des conditions d'observation, et plus particulièrement de la clarté de la couleur de fond environnant les deux couleurs spécifiées. Suivant les conditions de référence, les paramètres k_L , k_H et k_C prennent différentes valeurs. Par exemple, pour l'industrie textile, il est courant de prendre les valeurs $k_L = 2$, $k_H = 1$ et $k_C = 1$. D'une manière générale, on fixe $k_L = k_H = k_C = 1$. Les fonctions S_L , S_H et S_C modulent la différence de couleur proportionnellement aux valeurs de chroma $C_{a^*b^*}^*$ des couleurs considérées, et en fonction des conditions d'observation (plus particulièrement de la clarté de la couleur de fond environnant les deux couleurs considérées). Elles se calculent en fonction de la saturation $C_{a^*b^*,T}^*$ de la couleur référence. Quand ni l'une ni l'autre des deux couleurs ne peut être utilisée comme couleur de référence, il est conseillé d'utiliser la moyenne géométrique des saturations des deux couleurs. Notons également que l'on estime en général qu'un écart de 3 unités CIE 94 représente le seuil différentiel de perceptibilité [132].

Il est important de noter que ces formules d'écart de couleur n'ont de sens d'un point de vue psychovisuel que dans la mesure où l'on compare des couleurs perceptuellement proches (la notion de différence de couleur n'a de sens que pour des couleurs proches).

3.2 Caractérisation et calibrage du moniteur

Figure 3.8 Diagramme de calibrage d'un moniteur.

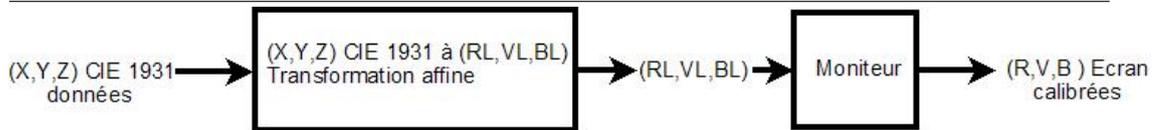


Figure 3.9 Dispositif expérimental pour le calibrage.



Nous voulons générer un stimulus lumineux coloré aux propriétés physiques et géométriques maîtrisées (caractérisé par des grandeurs mesurables) par affichage d'images numériques couleur, de caractéristiques colorimétriques complètement maîtrisées sur un moniteur convenablement choisi. Les attributs couleur des pixels des images numériques couleur doivent donc être décrits dans l'espace couleur XYZ CIE 1931. Ce système de couleur est indépendant du moniteur. L'affichage des images sur le moniteur est basé sur des valeurs dites valeurs d'entrée ou valeurs d'adressage $(R, V, B) \in \{0, 1, \dots, 255\}^3$ (des triplets d'entiers) : c'est le système RVB Ecran codé sur 3×8 bits. Ce système de codage de la couleur est

dépendant du moniteur.

En effet, les couleurs sont produites par le mélange de trois lumières primaires qui ne sont pas les primaires CIE. Nous voulons décrire le stimulus lumineux sous forme numérique par les composantes trichromatiques de l'espace couleur XYZ CIE 1931. Il est nécessaire d'établir la correspondance entre le triplet (X, Y, Z) attendu et le triplet (R, V, B) à entrer dans l'écran. Nous devons procéder au calibrage d'un moniteur. Une étape préalable au calibrage d'un moniteur est sa caractérisation. La caractérisation d'un moniteur consiste à déterminer ses paramètres caractéristiques à partir de la modélisation de son comportement. Après avoir caractérisé le moniteur, on le calibre en utilisant les résultats obtenus à l'étape de caractérisation. Le calibrage est l'opération inverse de la caractérisation. Comme le montre la figure 3.8, il s'agira de pouvoir déterminer le triplet (R, V, B) Ecran à partir des composantes trichromatiques (X, Y, Z) souhaitées pour un pixel quelconque spécifiées dans le système XYZ CIE 1931.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, notre objectif est de produire des stimuli texturés colorés tels que, dans les conditions expérimentales des tests de classement, les valeurs (X, Y, Z) du signal impactant l'œil soient bien celles que l'on souhaite. Aussi, avant de passer à la caractérisation du moniteur, est il nécessaire de définir l'environnement dans lequel les différentes expériences psychophysiques ont lieu. Les différentes expériences psychophysiques concernent des stimuli colorés. Il est donc nécessaire que l'on se place dans le domaine photopique. Nous avons donc éclairé la salle d'évaluation par des tubes fluorescents JUST Color Control Daylight 5000 qui produisent un éclairage de $2000 \text{ lux} \pm 500$ répondant aux recommandations de la norme ISO 3664 : 2000. Les murs de la salle d'évaluation sont peints en gris neutre afin de minimiser l'impact chromatique des rayons lumineux secondaires réémis par ces surfaces et ainsi rester dans un environnement achromatique (cf. Figure 3.9). Les différents juges ou observateurs ont fait face à l'écran en étant assis à une distance d'environ 50 cm (la position des observateurs est illustrée au chapitre suivant à travers une image) lors des épreuves psychophysiques. Les différentes mesures effectuées pour la caractérisation du moniteur ont eu lieu dans les conditions spécifiées ci-dessus.

3.2.1 Choix du moniteur

Le choix du type de moniteur le plus adapté, lorsque l'on souhaite effectuer des expériences psychophysiques est une étape indispensable. Il existe des différences notoires d'un point de vue technologique entre les écrans CRT et LCD³. Les écrans LCD sont connus pour avoir une luminosité plus élevée que celle des écrans CRT. Ce type de technologie (LCD) est plus adapté pour des applications où il est

3. CRT signifie en anglais, cathode ray tube et en français, tube à rayonnement cathodique. LCD signifie en anglais, liquid cristal display et en français, affichage à cristaux liquides.

nécessaire d'avoir une forte luminosité. Ceci pourrait être important dans notre cas où l'environnement dans lequel les différentes expériences ont lieu doit être éclairé et présente une forte luminosité. Cependant, les écrans CRT présentent des avantages par rapport aux écrans LCD : la qualité d'affichage des images en l'occurrence des images couleur est meilleure. Lorsque l'on regarde l'écran LCD selon un axe oblique par rapport à sa perpendiculaire l'image observée peut être très altérée. Aussi, Les écrans LCD constitués d'une mosaïque de cristaux liquides ne possèdent qu'une seule résolution, tandis que les écrans CRT offrent plusieurs choix de résolutions. En outre, les écrans CRT ont un meilleur rendu couleur : la gamme des couleurs est plus riche et plus précisément décrite. La luminosité est bonne et les images sont sans distorsion sous de larges angles de vue. Pour une comparaison des écrans CRT et LCD en fonction de la précision du calibrage et du gamut⁴ se référer à la référence suivante [5].

Outre, le choix du type de technologie d'affichage, il existe d'autres critères de choix pour un moniteur, notamment le pas de masque, la fréquence de rafraîchissement, la résolution spatiale, la stabilité temporelle et l'uniformité spatiale de l'écran [5].

On définit par pas de masque (en anglais, pitch) la distance qui sépare deux pixels de l'écran ; plus cette valeur est faible, plus l'image est nette. Il est conseillé d'éviter les écrans dotés d'un pas de masque de 0.28 mm ou plus. La fréquence de rafraîchissement correspond au nombre d'images affichées par seconde sur l'écran. Elle est exprimée en Hertz. Plus cette valeur est élevée, meilleur est le confort visuel. Lorsque cette valeur est inférieure à 75 Hz , on voit l'écran scintiller ce qui est désagréable pour l'observateur.

Le moniteur utilisé pour les évaluations est un écran CRT de marque Philips de taille⁵ 19 pouces avec un pas de masque de 0.26 mm et une fréquence de rafraîchissement de 85 Hz .

Étude de la stabilité temporelle du signal lumineux émis par le moniteur

La stabilité temporelle du moniteur CRT est un critère de choix qui affecte la précision du calibrage des moniteurs [5] : le calibrage doit rester valable dans le temps.

En effet, il est important que les tests psychophysiques soient réalisés sur un moniteur délivrant un signal stable dans le temps. Ainsi, nous avons étudié la stabilité temporelle de notre moniteur pendant une semaine par mesure dans le système colorimétrique XYZ CIE 1931 des couleurs Rouge, Vert et Bleu affichées pour des valeurs d'entrée $(R, V, B) = (255, 0, 0)$, $(R, V, B) = (0, 255, 0)$ et $(R, V, B) = (0, 0, 255)$. Ce suivi a été réalisé à l'aide d'un spectroradiomètre

4. On désigne par gamut de l'écran, l'ensemble des couleurs affichées par l'écran.

5. La taille se calcule en mesurant la diagonale de l'écran et est exprimée en pouces. Un pouce représente environ 2.54 cm .

(PR650) placé directement en contact avec l'écran. Nous avons ensuite étudié les différentes variations dans les mesures : ces variations sont très faibles. Le tableau 3.10 donne les valeurs obtenues à partir des mesures effectuées.

Figure 3.10 Mesures effectuées pour l'étude de la stabilité temporelle du moniteur.

Couleurs (X,Y,Z)	Rouge			Vert			Bleu		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
Jour1	49.15	28.80	9.57	41.13	80.30	20.40	25.93	14.70	116.00
Jour2	49.12	28.78	9.59	41.10	80.32	20.43	25.92	14.69	116.02
Jour3	49.11	28.77	9.54	41.11	80.33	20.40	25.91	14.67	116.00
Jour4	49.13	28.78	9.53	41.12	80.29	20.39	25.89	14.73	116.02
Jour5	49.11	28.79	9.58	41.09	80.31	20.42	25.90	14.71	116.01
Jour6	49.90	28.82	9.55	41.11	80.30	20.41	25.92	14.69	116.02
Jour7	49.10	28.80	9.57	41.10	80.30	20.40	25.90	14.70	116.00

Étude de l'homogénéité spatiale du moniteur

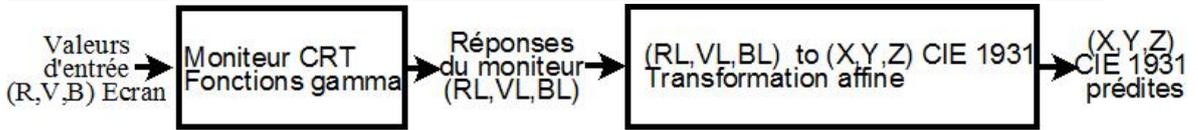
Dans les expériences psychovisuelles réalisées, l'observateur était face à plusieurs images qu'il pouvait déplacer à sa guise sur toute la surface de l'écran. Il était donc important de vérifier l'homogénéité spatiale de la réponse lumineuse délivrée par le moniteur. Nous avons étudié l'homogénéité spatiale de notre moniteur CRT en étudiant neuf zones. Les mesures spectroradiométriques ont été réalisées directement en sortie d'écran grâce à un accessoire permettant les mesures de contact. Chaque mesure réalisée en périphérie a été comparée à la mesure centrale prise comme référence. Les variations constatées n'exèdent pas 10% (cf. Figure 3.11) et nous ont paru acceptables dans le cadre de nos expérimentations.

Figure 3.11 Variation spatiale de la luminance maximale du moniteur par rapport à son centre.

-1%	8%	5%
-6.1%	0%	-0.5%
-8%	1%	-2.6%

3.2.2 Modèles de caractérisation du moniteur

Figure 3.12 Diagramme de caractérisation d'un moniteur CRT.



Notre objectif est de pouvoir déterminer les relations de passage du système XYZ CIE 1931 au système RVB Ecran. Nous voulons en effet maîtriser les propriétés des stimuli texturés colorés produits par l'écran. La modélisation mathématique de ces stimuli doit en effet se faire dans un espace pertinent au sens de la colorimétrie. Nous devons pouvoir moduler à la fois des critères de distribution spatiale et des critères de luminosité. L'écran est lui un système conçu pour flatter l'œil et pas pour fournir une réponse basée sur une évaluation colorimétrique. Nous devons donc évaluer les caractéristiques de l'écran supposé réglé pour un fonctionnement optimal. Cette étape de caractérisation nous permet ensuite de déterminer les fonctions de transfert entre le système RVB Ecran et le système XYZ CIE 1931. La figure 3.12 illustre le modèle complet de caractérisation d'un moniteur. Dans cette figure, le triplet de valeurs $(R, V, B) \in \{0, 1, \dots, 255\}^3$ est adressé au moniteur ; à la sortie, l'écran produit un stimulus couleur que l'on peut exprimer par le triplet (R_L, V_L, B_L) ; finalement une fonction de transfert permet de faire correspondre à ce triplet de valeurs, les composantes trichromatiques (X, Y, Z) voulues dans le système XYZ CIE 1931 indépendamment du système d'affichage.

Un moniteur CRT est caractérisé par la modélisation du comportement de chaque type de phosphore participant à la formation d'un pixel écran (Rouge, Vert et Bleu) [5]. On désigne par courbe gamma (en anglais, Gamma Curve) d'un phosphore donné la courbe représentant les valeurs (en anglais, Output Value) de la variable réponse du phosphore en fonction des valeurs d'adressage ou valeurs d'entrées (en anglais, Input Digital Values) de la variable d'entrée. La caractéristique gamma est une relation selon une loi de puissance approchant la relation liant la luminance d'un système avec la brillance perçue réellement. La fonction dite gamma d'un écran permet de définir le lien entre adressage entrée et signal de sortie. On la définit pour chacun des types de phosphores. La caractérisation du moniteur se fera donc en deux étapes : une première étape qui consistera à déterminer la transformation affine et une deuxième étape qui consis-

tera à modéliser la réponse du moniteur. La transformation affine du schéma de caractérisation (cf. Figure 3.12) est en général de la forme :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} R_L \\ V_L \\ B_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence}}, \quad (3.2.1)$$

où le triplet de valeurs (X, Y, Z) désigne la correspondance dans le système de couleur XYZ CIE 1931 du triplet de (R_L, V_L, B_L) affichées par le moniteur correspondant aux valeurs d'adressage (R, V, B) . La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 à déterminer. Le vecteur $(X, Y, Z)_{\text{remanence}}$ correspond aux composantes trichromatiques dans le système XYZ CIE 1931 du triplet d'adressage $(R, V, B) = (0, 0, 0)$ (noir écran). Il est obtenu par mesure au spectroradiomètre. Ce terme peut être décomposé en deux termes [14] suivant la formule ci-après :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence externe}} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence interne}}, \quad (3.2.2)$$

où :

- $(X, Y, Z)_{\text{remanence externe}}$ est la contribution de la lumière ambiante si l'environnement dans lequel les mesures sont faites est éclairé ;
- $(X, Y, Z)_{\text{remanence interne}}$ est la contribution des inter-réflexions à l'intérieur du moniteur.

Le modèle de caractérisation utilisé (cf. Figure 3.12) est basé sur un certain nombre d'hypothèses [5, 20] qui sont : la constance de phosphore, l'indépendance des phosphores, l'indépendance spatiale, l'uniformité spatiale et la stabilité temporelle. L'hypothèse de constance des phosphores repose sur deux suppositions. La première stipule que le stimulus émis par le moniteur est uniquement constitué par le mélange des lumières émises par les trois phosphores. La deuxième est que la répartition spectrale relative d'énergie d'un phosphore ne varie pas. L'hypothèse d'indépendance des phosphores signifie que l'intensité de stimulation d'un phosphore donné est déterminé par la valeur à l'entrée de ce phosphore et est indépendante des valeurs à l'entrée des deux voisins. Pour plus de détails sur ces questions, le lecteur pourra consulter [20, 14]. Il peut arriver que certaines hypothèses ne soient pas vérifiées notamment l'hypothèse d'indépendance spatiale et celle d'indépendance des phosphores résultant d'interactions entre les phosphores et d'une insuffisance en approvisionnement d'énergie. Dans ce cas, la détermina-

tion de la matrice M peut se faire à l'aide de l'équation (3.2.3) suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} R_L \\ V_L \\ B_L \\ R_L^2 \\ V_L^2 \\ B_L^2 \\ R_L G_L \\ V_L B_L \\ R_L B_L \\ R_L G_L B_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence}}, \quad (3.2.3)$$

où M est une matrice de format (3,10).

Matrice de transformation linéaire

Plusieurs méthodes de détermination de la matrice M ont été proposées dans la littérature. L'une d'elles appelée méthode directe [60, 5, 15] consiste à considérer la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X_{R,max} & X_{V,max} & X_{B,max} \\ Y_{R,max} & Y_{V,max} & Y_{B,max} \\ Z_{R,max} & Z_{V,max} & Z_{B,max} \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

où $(X_{R,max}, Y_{R,max}, Z_{R,max})$, $(X_{V,max}, Y_{V,max}, Z_{V,max})$ et $(X_{B,max}, Y_{B,max}, Z_{B,max})$ sont les coordonnées trichromatiques respectives dans le système XYZ CIE 1931 des triplets de valeurs d'adressage (255, 0, 0), (0, 255, 0) et (0, 0, 255).

Modélisation de la réponse du moniteur

Une variété de modèles ont été proposés pour modéliser le comportement des différents canaux des moniteurs CRT. Parmi ces modèles, les plus couramment utilisés sont [5, 141, 94, 15] :

- le modèle simple (en anglais, Simple Model) :

$$\psi = (\xi)^\gamma + \epsilon, \quad (3.2.5)$$

- le modèle GGO (en anglais, Gain-gamma-offset Model) :

$$\psi = (a\xi)^\gamma + b + \epsilon, \quad (3.2.6)$$

- le modèle GOG (en anglais Gain-offset-gamma Model) :

$$\psi = (a\xi + b)^\gamma + \epsilon \quad (3.2.7)$$

avec $a + b = 1$.

Dans les modèles (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) de régressions non linéaires, ξ et ψ désignent pour un phosphore donné, la variable d'entrée et la variable réponse respectivement. En l'occurrence, ξ et ψ désignent respectivement R et R_L pour le phosphore rouge, V et V_L pour le phosphore vert et, B et B_L pour le phosphore bleu. Ces deux variables sont normalisées et prennent donc des valeurs comprises entre 0 et 1. Les différents paramètres a , b , et γ , à spécifier, désignent respectivement le gain, l'offset et le paramètre gamma du canal considéré. ϵ désigne les variations aléatoires non contrôlées.

3.2.3 Méthodes et résultats de la caractérisation du moniteur

Réglage du moniteur

La caractérisation de tout moniteur commence par le réglage des paramètres suivants : la résolution spatiale, le blanc ou point blanc, le contraste et la luminosité. Il faut maintenir ces réglages constants tout au long de notre étude aussi bien pendant la procédure de calibrage que pour les expériences psychophysiques de façon à garantir la validité des opérations de caractérisation et de calibrage ainsi que la reproductibilité des expériences.

La zone d'affichage de l'écran choisi a une diagonale de $D = 17.9$ pouces. Le mode d'affichage utilisé est caractérisé par une résolution spatiale de $1600 * 1200$ pixels. Elle correspond à une qualité d'affichage optimale. Il est important pour nous de spécifier la densité de résolution c'est-à-dire le nombre de pixels par unité de longueur exprimée en dpi (nombre de points par pouces) du moniteur utilisé après les différents réglages. En effet, les pixels de l'écran doivent correspondre point par point aux pixels des images numériques affichées : aucune opération de réduction ou de grossissement à l'affichage ne doit modifier les éléments de la représentation numérique du stimulus.

Dans ce qui suit, on désigne par L La largeur du moniteur et H sa hauteur qui correspondent à la taille visible du moniteur. Le moniteur utilisé est un moniteur « 4/3 » c'est-à-dire que l'on a $L = 4/3H$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$D^2 = L^2 + H^2. \quad (3.2.8)$$

Il en résulte que : $L = 4/5 D$ et $H = 3/5 D$. On obtient donc : $L = 14.32$ pouces et $H = 10.74$ pouces.

On désigne par :

- d_R la densité de résolution du moniteur ;
- $Rh = 1600$ pixels la résolution horizontale c'est-à-dire le nombre de pixels sur une ligne du moniteur ;

- $Rv = 1200$ pixels la résolution verticale c'est-à-dire le nombre de pixels sur une largeur du moniteur ;
- $Rs = 1600 * 1200$ la résolution spatiale c'est-à-dire le nombre total de pixels que compte le moniteur.

Par définition, on a :

$$d_R = \frac{Rh}{L} = \frac{Rv}{H}. \quad (3.2.9)$$

Le réglage du moniteur aboutit à une densité de résolution de $d_R = 112$ dpi. Le point blanc (white point) d'un système d'affichage est la couleur que celui-ci affiche lorsque tous ses trois canaux sont portés à leur valeur maximale [60]. Celui-ci est couramment exprimé par sa température de couleur en Kelvin et par ses coordonnées trichromatiques dans le système CIE XYZ 1931. Le point blanc du moniteur doit être réglé à une valeur précise dépendante de l'application [5]. Généralement, la température de couleur du blanc du moniteur peut être réglée à partir du menu du moniteur, mais ce réglage est insuffisant et imprécis. Ajuster le blanc du moniteur en utilisant des logiciels conduit à des pertes de niveaux digitaux. Il faut donc ajuster le blanc du moniteur de façon manuelle. Un temps d'attente avant utilisation doit être permis au moniteur pour qu'il chauffe [141]. Le temps de chauffage requis pour que le signal produit par le moniteur se stabilise après son allumage varie selon les moniteurs. Dans notre cas, le temps de chauffage a été fixé à 3 heures.

Méthodes

Nous avons laissé le moniteur chauffer pendant au moins 3 heures avant de commencer les différentes mesures et réglages. Le point blanc du moniteur a été fixé à l'illuminant standard D_{65} . Cet illuminant correspond à la moyenne des lumières durant la journée, sa température de couleur est de 6500 K. Cet illuminant est proche de l'illuminant normalisé E qui est défini comme étant l'illuminant équi-énergétique irréalisable physiquement [132]. Les coordonnées trichromatiques théoriques de l'illuminant D_{65} sont, selon la recommandation de la CIE 15.2004, $(X_n, Y_n, Z_n) = (95.047, 100.00, 108.883)$ ou $(x_n, y_n, Y_n) = (0.31272, 0.32903, 100)$ dans le système colorimétrique XYZ CIE 1931. Dans notre cas, le réglage manuel du blanc a consisté à :

- fixer la température de couleur du moniteur à la valeur 6500 K ;
- régler le contraste et la luminosité du moniteur de façon à avoir une luminance maximum d'environ 80 cd.m^{-2} en affichant un pavé blanc, soit les valeurs d'adressage R=G=B=255.

Les mesures ont eu lieu dans les conditions décrites dans la section 3.2. Pour une vision de près, la distance recommandée varie de 30 à 60 cm. Le spectroradiomètre a donc été placé à une distance d'environ 50 cm du moniteur en visant le centre de l'écran. Enfin, les mesures ont été effectuées dans le système XYZ CIE 1931 qui utilise l'observateur standard 2°.

Chaque phosphore a été caractérisé par un ensemble de 33 mesures dans le système XYZ CIE 1931 avec les valeurs d'adressage allant de 0 à 255 par pas de 8. La détermination des caractéristiques de chaque phosphore a été obtenue par ajustement des modèles définis par les équations (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) en utilisant l'environnement de calcul scientifique R [130]. Un ensemble de 3 mesures a été utilisé pour la détermination de la matrice de transformation M . Pour tester la performance de la caractérisation, nous avons produit quinze stimuli de couleurs par mélange additif Rouge, Vert et Bleu.

Détermination de la matrice de la transformation linéaire

Dans notre approche, nous avons considéré la méthode directe de détermination de la matrice M . Les coordonnées trichromatiques $(X_{R,max}, Y_{R,max}, Z_{R,max})$, $(X_{V,max}, Y_{V,max}, Z_{V,max})$ et $(X_{B,max}, Y_{B,max}, Z_{B,max})$ dans le système XYZ CIE 1931 sont obtenues par mesure au spectroradiomètre des couleurs Rouge, Vert et Bleu affichées au moniteur en rentrant les valeurs d'adressage respectives $(255, 0, 0)$, $(0, 255, 0)$ et $(0, 0, 255)$. Le tableau 3.1 donne les différentes coordonnées trichromatiques mesurées dans le système XYZ CIE 1931.

Table 3.1 Mesures effectuées dans le système XYZ CIE 1931 pour la détermination de la matrice de la transformation M .

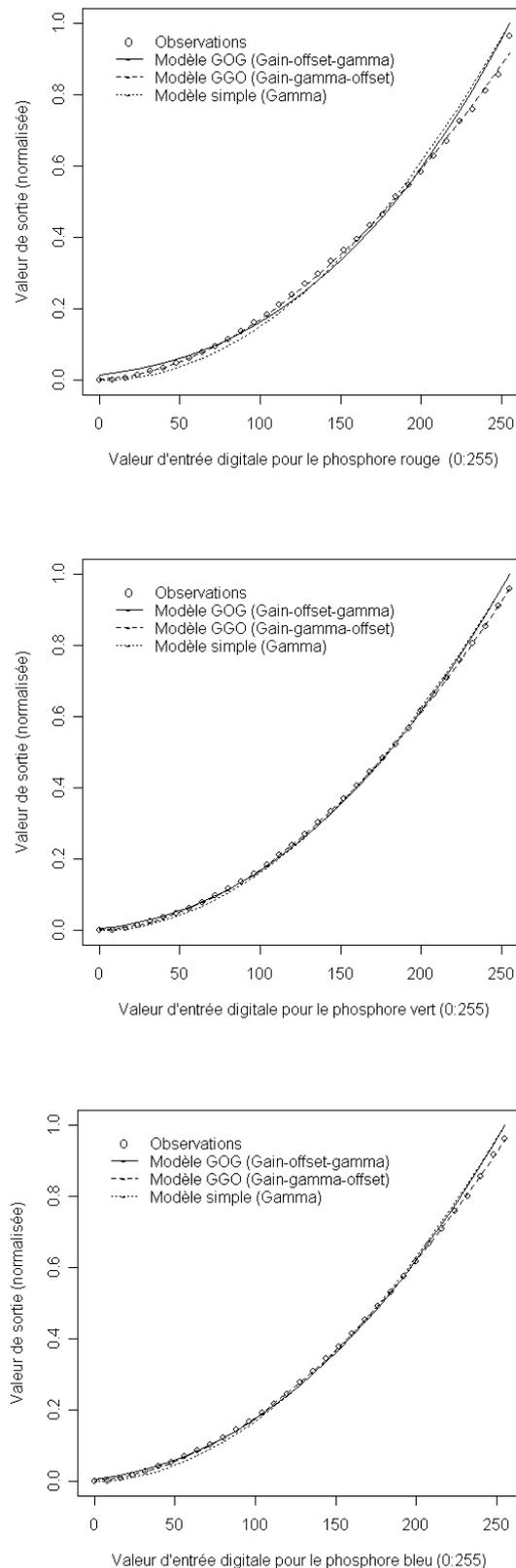
	R	V	B	X	Y	Z
1	0	0	0	4.72	5.09	6.82
2	255	0	0	49.10	28.80	9.57
3	0	255	0	41.10	80.3	20.4
4	0	0	255	25.9	14.7	116

La matrice de la transformation linéaire permettant le passage des coordonnées (R_L, V_L, B_L) aux composantes trichromatiques (X, Y, Z) du système colorimétrique XYZ CIE 1931 est donc la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 49.10 & 41.1 & 25.9 \\ 28.80 & 80.3 & 14.7 \\ 9.57 & 20.4 & 116.0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Ajustements des modèles de réponses du moniteur

Figure 3.13 Courbe gamma : caractérisation des phosphores Rouge, Vert et Bleu.



La détermination des valeurs numériques des paramètres est obtenue par un ajustement des modèles aux données expérimentales par la méthode des moindres carrés ordinaires en utilisant l'environnement de calcul scientifique R. L'algorithme utilisé est celui de Gauss-Newton.

Les données utilisées pour la caractérisation de ces phosphores sont consignées dans les tableaux (B.1), (B.2) et (B.3) (voir, Annexe B). Ces données ont été utilisées pour spécifier complètement chaque modèle. Les tableaux (3.2), (3.3), (3.4) présentent les estimations des différents paramètres et les différentes erreurs standards associées pour chaque modèle et pour chaque type de phosphore. Pour chaque phosphore, nous avons tracé les différentes courbes gamma correspondant à chacun des modèles définis par les équations (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7). La figure 3.13 résume les différentes courbes gamma associées à chaque phosphore Rouge, Vert et Bleu du moniteur. Comme le montre cette figure, le modèle GGO (gain-gamma-offset) est celui qui ajuste au mieux les données. C'est ce modèle que nous avons retenu pour l'étude de la performance de la méthode de caractérisation.

Table 3.2 Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle simple.

Paramètres	γ (Gamma)		
	R	V	B
Estimations	2.0800	1.9400	1.9000
Erreurs standards	0.0400	0.0200	0.0200

Table 3.3 Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle GGO.

Paramètres	a (Gain)			b (Offset)			γ (Gamma)		
	R	V	B	R	V	B	R	V	B
Estimations	0.9510	0.9750	0.9730	0.0040	0.0030	0.0050	1.8180	1.8460	1.8110
Erreurs standards	0.0030	0.0010	0.0010	0.0040	0.0010	0.0010	0.0290	0.0050	0.0080

Table 3.4 Estimations des paramètres des trois types de phosphore : Modèle GOG.

Paramètres	$a(\text{Gain})$			$\gamma(\text{Gamma})$		
	R	V	B	R	V	B
Phosphores						
Estimations	0.7800	0.9000	0.8900	2.8100	2.2300	2.2300
Erreurs standards	0.0700	0.0300	0.0300	0.3400	0.1000	0.1000

Etude de la performance du modèle de caractérisation

Pour la validation de nos modèles, nous avons produit quinze stimuli de couleur sur l'écran définis par leur triplet d'adressage (R,V,B), puis mesurés au spectroradiomètre dans le système XYZ CIE 1931 2° d'angle visuel selon le protocole défini au paragraphe 3.2.3. Le tableau 3.5 donne les triplets d'adressage utilisés, les composantes trichromatiques (X, Y, Z) mesurées au spectroradiomètre indexées par l'indice T (couleurs à réaliser ou couleurs types) et celles obtenues *via* les modèles de caractérisation indexées par l'indice CT (couleurs réalisées ou couleurs calculées). Dans cette partie, il s'agit de comparer les couleurs obtenues par application des modèles de caractérisation (couleurs réalisées ou calculées) et celles affichées au moniteur (les types ou les couleurs à reproduire). Pour l'étude des écarts entre couleurs de référence T et couleurs réalisées CT , on se place dans l'espace colorimétrique $L^*a^*b^*$. Les tableaux 3.6 et 3.7 donne les coordonnées trichromatiques des couleurs de référence T et des couleurs reproduites CT dans le système $L^*a^*b^*$ (cf. Équations (3.1.10), (3.1.11) et (3.1.12) de la sous-section 3.1.2). Les composantes trichromatiques (X_n, Y_n, Z_n) utilisées pour passer dans l'espace $L^*a^*b^*$ sont, comme nous l'avons mentionné, celles de l'illuminant D_{65} à savoir (95.047, 100.00, 108.883) dans le système colorimétrique XYZ CIE 1931. Dans le but de comparer les couleurs type T et les couleurs contre-type CT , nous avons calculé les distances correspondantes ΔE_{ab}^* (cf. Formule (3.1.15), sous-section 3.1.2). Pour les raisons mentionnées à la sous-section 3.1.2 à savoir que l'espace colorimétrique $L^*a^*b^*$ ne rend pas compte complètement de la différence perceptuelle, la formule d'acceptation ΔE_{ab94}^* (cf. Formule (3.1.16), page 121) a également été calculée. Le tableau 3.8 donne les valeurs des écarts de couleur calculées entre couleurs types T et couleurs contre-types CT . Les différents écarts calculés entre couleurs types T (obtenues par mesure au spectroradiomètre) et couleurs contre-types CT (couleurs obtenues par les modèles de caractérisation) permettent la validation de la caractérisation du moniteur. En effet, ces écarts de couleur sont tous inférieurs aux seuils de différentiabilité 5 et 3 pris respectivement pour les écarts de couleur ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^* . Hormis, la paire numéro 13 qui, pour l'écart couleur ΔE_{ab94}^* est légèrement supérieur à la valeur seuil 3.

Table 3.5 Données de validation des modèles de caractérisation : valeurs d'adressage (R,V,B), coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) dans le système CIE1931 des types et des contretypes.

Paire	R	V	B	X_T	Y_T	Z_T	X_{CT}	Y_{CT}	Z_{CT}
1	0	0	0	4.72	5.09	6.82	4.72	5.09	6.82
2	0	96	96	14.70	19.50	28.10	15.40	20.16	28.78
3	0	96	160	20.00	21.90	56.10	21.76	23.77	57.27
4	0	160	96	24.10	38.90	31.50	25.62	40.12	33.85
5	0	160	160	29.40	41.20	59.50	31.98	43.73	62.34
6	0	160	224	36.90	44.60	98.40	40.82	48.75	101.94
7	96	96	96	22.20	23.50	28.60	22.96	24.59	30.25
8	96	96	160	27.60	25.90	56.40	29.32	28.20	58.74
9	96	160	96	31.60	42.80	31.90	33.18	44.56	35.32
10	96	160	160	37.00	45.30	59.80	39.54	48.17	63.81
11	96	160	224	44.40	48.60	98.70	48.38	53.18	103.41
12	96	224	224	57.70	76.20	104.00	62.81	81.39	110.58
13	160	160	160	48.90	51.70	60.70	51.13	54.96	66.07
14	160	224	160	61.50	78.50	65.10	65.56	83.17	73.23
15	160	224	224	69.70	82.70	105.00	74.40	88.19	112.84

Table 3.6 Coordonnées trichromatiques (L^*, a^*, b^*) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$.

Paire	L_T^*	a_T^*	b_T^*	L_{CT}^*	a_{CT}^*	b_{CT}^*
1	26.99	-1.52	-5.31	26.99	-1.52	-5.31
2	51.27	-21.56	-11.36	52.01	-20.59	-11.08
3	53.92	-3.99	-39.78	55.85	-3.84	-37.55
4	68.68	-48.53	13.72	69.56	-45.80	12.03
5	70.32	-33.90	-14.69	72.05	-31.76	-14.26
6	72.63	-17.26	-40.56	75.30	-16.28	-38.25
7	55.58	-0.63	-4.66	56.67	-1.87	-5.20
8	57.94	12.39	-33.14	60.07	9.95	-31.66
9	71.42	-30.43	17.89	72.60	-29.85	15.33
10	73.09	-18.92	-10.18	74.93	-18.70	-10.59
11	75.20	-5.15	-36.32	77.98	-5.89	-34.55
12	89.95	-33.32	-14.29	92.30	-31.31	-14.30
13	77.10	-0.65	-4.08	79.02	-2.93	-5.49
14	91.01	-28.78	16.01	93.09	-28.42	12.85
15	92.88	-18.44	-9.86	95.24	-18.67	-10.60

Table 3.7 Coordonnées cylindriques (L^*, C^*, h) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$

Paire	L_T^*	C_T^*	h_T	L_{CT}^*	C_{CT}^*	h_{CT}
1	26.99	5.52	254.04	26.99	5.52	254.04
2	51.27	24.37	207.78	52.01	23.38	208.29
3	53.92	39.98	264.28	55.85	37.75	264.16
4	68.68	50.43	164.21	69.56	47.35	165.29
5	70.32	36.95	203.43	72.05	34.82	204.18
6	72.63	44.08	246.94	75.30	41.57	246.94
7	55.58	4.71	262.34	56.67	5.53	250.25
8	57.94	35.37	290.49	60.07	33.18	287.44
9	71.42	35.30	149.55	72.60	33.55	152.81
10	73.09	21.49	208.29	74.93	21.49	209.54
11	75.20	36.68	261.92	77.98	35.05	260.33
12	89.95	36.26	203.21	92.30	34.42	204.55
13	77.10	4.14	260.92	79.02	6.23	241.88
14	91.01	32.93	150.91	93.09	31.19	155.67
15	92.88	20.91	208.15	95.24	21.47	209.59

Table 3.8 Valeurs d'écart de couleur entre couleurs T et couleurs contre-types CT calculées pour les équations ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^* .

Paire	ΔE_{ab}^*	ΔE_{ab94}^*
1	0.00	0.00
2	1.25	0.90
3	2.96	2.09
4	3.33	1.39
5	2.79	1.93
6	3.66	2.80
7	1.74	1.63
8	3.56	2.58
9	2.87	1.87
10	1.90	1.87
11	3.38	2.92
12	3.10	2.51
13	3.30	3.05
14	3.80	2.83
15	2.48	2.41

L'utilisation des deux écarts calculés entre couleurs type T et couleurs contre-type CT a été considérée comme une première estimation. Elle est cohérente avec

les jugements visuels d'observateurs.

3.2.4 Calibrage du moniteur CRT

Comme nous l'avons dit dans la section 3.2, le calibrage d'un moniteur consiste à calculer le triplet d'adressage (R, V, B) à envoyer au moniteur pour afficher des couleurs prédéterminées ciblées (reproduire à l'écran des couleurs désirées) exprimées dans le système XYZ CIE 1931. Après la caractérisation du moniteur c'est-à-dire la détermination des gains, des offsets et des paramètres gamma de chaque phosphore Rouge, Vert et Bleu, nous pouvons donc passer au calibrage du moniteur : il s'agira de déterminer les valeurs des triplets $(R, V, B) \in \{0, 1, \dots, 255\}^3$ correspondant à des couleurs exprimées par leurs coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) dans le système XYZ CIE 1931. Compte tenu des modèles (modèles définis par les équations 3.2.1 et 3.2.6) que nous avons utilisés pour la caractérisation de notre moniteur CRT, le calcul du triplet (R, V, B) correspondant à une couleur exprimée par ses coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) dans le système XYZ CIE 1931 s'obtient par les formules inverses des formules de caractérisation utilisées ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} R_L \\ V_L \\ B_L \end{pmatrix} = M^{-1} \times \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{remanence}} \right\}, \quad (3.2.11)$$

et

$$\xi = \frac{1}{a}(\psi - b)^{1/\gamma} + \epsilon, \quad (3.2.12)$$

où ξ et ψ désignent pour un phosphore donné, la variable d'entrée et la variable réponse respectivement du moniteur. En l'occurrence, ξ et ψ désignent respectivement R et R_L pour le phosphore rouge, V et V_L pour le phosphore vert et, B et B_L pour le phosphore bleu.

Etude de la performance du modèle de calibrage

Afin d'étudier la performance de notre calibrage, nous nous sommes donnés un ensemble de 11 couleurs définies par leurs composantes trichromatiques (X, Y, Z) dans le système XYZ CIE 1931, puis nous avons déterminé les valeurs d'adressage $(R_{cal}, V_{cal}, B_{cal}) \in \{0, 1, \dots, 255\}$ correspondantes *via* les équations décrites ci-dessus. Ces dernières ont ensuite été affichées sur le moniteur puis mesurées au spectroradiomètre donnant les coordonnées trichromatiques $(X_{mes}, Y_{mes}, Z_{mes})$. Le tableau 3.9 donne les coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) des couleurs cibles utilisées, les valeurs $(R_{cal}, V_{cal}, B_{cal})$ obtenues *via* les modèles de calibrage décrits ci-dessus et les coordonnées trichromatiques $(X_{mes}, Y_{mes}, Z_{mes})$ obtenues par mesure des $(R_{cal}, V_{cal}, B_{cal})$ au spectroradiomètre. Dans le but de comparer, les couleurs cibles et les couleurs obtenues *via* les équations de calibrage, nous avons

converti les coordonnées trichromatiques des couleurs dans l'espace $L^*a^*b^*$: les tableaux 3.10 et 3.11 donnent les coordonnées trichromatiques des couleurs dans cet espace. Les différents écarts calculés entre couleurs cibles et couleurs calibrées (couleurs obtenues par les modèles de calibrage) permettent la validation du calibrage du moniteur. En effet, ces écarts de couleur sont tous inférieurs aux seuils de différentiabilité 5 et 3 pris respectivement pour les écarts de couleur ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^* .

Table 3.9 Coordonnées trichromatiques (X, Y, Z) utilisées pour le calibrage, valeurs ($R_{cal}, G_{cal}, B_{cal}$) obtenues et ($X_{mes}, Y_{mes}, Z_{mes}$) obtenues par mesure au spectroradiomètre des couleurs définies par ($R_{cal}, G_{cal}, B_{cal}$)

	X	Y	Z	R_{cal}	V_{cal}	B_{cal}	X_{mes}	Y_{mes}	Z_{mes}
1	1.91	1.34	7.07	0	0	21	2.11	1.61	7.05
2	2.75	4.75	2.10	0	22	0	2.92	4.84	2.59
3	3.81	5.23	7.69	0	22	21	4.03	5.42	7.90
4	7.69	6.95	27.90	0	0	102	8.40	7.71	28.79
5	6.82	11.40	8.68	0	71	0	7.20	11.71	9.30
6	8.37	12.10	16.80	0	71	60	8.93	12.62	17.59
7	10.70	13.10	28.80	0	66	102	11.57	14.00	30.20
8	10.30	20.20	4.74	0	112	0	10.96	20.79	6.15
9	12.90	21.40	18.40	0	112	60	13.80	22.28	19.75
10	15.20	22.40	30.50	0	109	99	16.44	23.66	32.35
11	3.09	2.05	1.59	31	0	0	3.28	2.30	2.08

Table 3.10 Coordonnées trichromatiques (L^*, a^*, b^*) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$ des couleurs utilisées pour l'étude de la performance du calibrage.

	L^*	a^*	b^*	L_{cal}^*	a_{cal}^*	b_{cal}^*
1	11.55	17.18	-32.88	13.29	14.27	-29.81
2	26.01	-27.58	18.80	26.27	-25.62	15.37
3	27.38	-15.86	-7.88	27.90	-14.87	-7.73
4	31.69	10.68	-44.80	33.37	9.91	-43.24
5	40.25	-34.67	10.90	40.75	-33.06	9.77
6	41.37	-24.85	-8.35	42.19	-23.49	-8.61
7	42.91	-12.51	-26.81	44.23	-11.82	-26.58
8	52.06	-54.99	46.99	52.72	-52.84	41.74
9	53.38	-42.12	9.06	54.32	-40.32	8.03
10	54.45	-32.26	-9.40	55.75	-30.66	-9.76
11	15.75	22.74	5.85	16.99	20.59	3.41

Table 3.11 Coordonnées cylindriques (L^* , C^* , h) dans le système colorimétrique $L^*a^*b^*$ des couleurs utilisées pour l'étude de la performance du calibrage.

	L^*	C^*	h	L_{cal}^*	C_{cal}^*	h_{cal}
1	11.55	37.10	297.58	13.29	33.05	295.58
2	26.01	33.38	145.73	26.27	29.87	149.04
3	27.38	17.71	206.41	27.90	16.76	207.46
4	31.69	46.06	283.41	33.37	44.37	282.90
5	40.25	36.34	162.55	40.75	34.47	163.54
6	41.37	26.22	198.57	42.19	25.02	200.12
7	42.91	29.58	244.98	44.23	29.09	246.02
8	52.06	72.34	139.49	52.72	67.34	141.69
9	53.38	43.08	167.87	54.32	41.11	168.73
10	54.45	33.60	196.24	55.75	32.18	197.65
11	15.75	23.48	14.43	16.99	20.87	9.41

Table 3.12 Valeurs d'écart de couleur entre couleurs cibles et couleurs calibrées calculées pour les équations ΔE_{ab}^* et ΔE_{ab94}^*

Paire	ΔE_{ab}^*	ΔE_{ab94}^*
1	4.57	2.44
2	3.96	1.87
3	1.13	0.78
4	2.42	1.78
5	2.03	0.95
6	1.61	1.11
7	1.51	1.39
8	5.71	1.86
9	2.28	1.22
10	2.09	1.52
11	3.48	2.28

3.3 Conclusion

Lorsque l'on désire réaliser des expériences psychovisuelles, on doit contrôler très précisément les conditions expérimentales et choisir le moniteur adéquat. Nous avons discuté des différents critères de choix des moniteurs. Dans notre démarche de caractérisation du moniteur, nous avons supposé les hypothèses notamment d'indépendance spatiale et l'indépendance entre les phosphores du moniteur CRT choisi. Ainsi, la détermination de la matrice de la transformation

affine a été faite de façon directe. Cette méthode a l'avantage de gagner en temps et en nombre de mesures. L'étude de la performance de la caractérisation et du calibrage montrent bien que ces différentes opérations ont été bien menées et que l'on peut effectivement contrôler les propriétés physiques des stimulations lumineuses considérées qui seront à produire dans le chapitre suivant. L'inconvénient de cette méthode est qu'il peut arriver que les hypothèses mentionnées ci-dessus ne soient pas vérifiées. Pour la vérification de ces hypothèses, le lecteur pourra consulter [14]. Dans le cas où ces hypothèses ne sont pas vérifiées, la caractérisation du moniteur peut se faire en utilisant l'équation (3.2.3) décrite dans ce chapitre. Un des inconvénients de cette équation est qu'elle introduit des complexités mathématiques dans le calibrage du moniteur.

Chapitre 4

Approche expérimentale de la discernabilité perceptive de textures colorées

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la génération des différentes stimulations lumineuses colorées étudiées et de la maîtrise de leurs caractéristiques physiques. Nous décrivons les expériences psychophysiques qui ont permis la collecte des données. Les différentes stimulations lumineuses colorées sont produites sous forme d'images texturées colorées. Dans le cadre de notre étude, les images considérées sont des images visuelles planes. La définition considérée est celle proposée dans [27] : *une image est une représentation planaire d'une scène ou d'un objet situé en général dans un espace tridimensionnel. Son élaboration résulte de la volonté de proposer une entité observable par l'œil humain. Ceci explique d'une part son aspect planaire et d'autre part le fait que l'information élémentaire associée à chaque point de l'image soit transcrite en niveau de gris ou en couleur.*

Les expériences psychophysiques réalisées visent à répondre à la question suivante : peut-on construire une échelle sensorielle en relation avec une échelle physique de variation du contraste au sens de Michelson ?

Le contraste visuel est une propriété qui permet d'évaluer la différence d'aspect de deux ou plusieurs parties adjacentes du champs visuel. Les stimuli colorés texturés produits se composent de deux phases colorées réparties selon diverses modalités sur la surface considérée. La variabilité introduite porte sur des changements de luminosité de l'une des deux phases. Dans le cadre de notre étude, le contraste visuel sera évalué grâce à l'appréciation visuelle de la discernabilité de la texture produite par variation de la luminance d'une des deux phases à partir d'une situation initiale d'égalité entre les phases.

On distinguera deux domaines : le domaine physique et le domaine sensoriel. Le domaine physique nous permettra de décrire et générer les différents signaux utilisés pour produire nos stimuli et caractériser leur variabilité. Quant au do-

maine sensoriel, il servira à la description des sensations. Dans le domaine physique, le continuum physique représente l'ensemble de toutes les valeurs possibles que peuvent prendre les attributs physiques qui définissent les stimulations lumineuses. Les différentes stimulations lumineuses considérées sont définies dans un espace multidimensionnel, c'est-à-dire qu'elles sont décrites par plusieurs attributs physiques. Nous avons réduit le cadre de notre étude à l'analyse d'une dimension particulière du continuum physique global : à savoir le contraste de Michelson représenté par un axe ayant pour origine la valeur 0 et orienté vers les valeurs croissantes. Ce contraste est obtenu par variation de l'attribut physique de luminance dans les différentes stimulations lumineuses tout en maintenant constantes les valeurs des autres attributs physiques (attributs spatiaux et chromatiques).

Pour répondre à la question posée, nous réalisons une épreuve psychophysique de classement avec, pour modalité sensorielle de classement, le contraste visuel sur les différentes stimulations lumineuses obtenues par variation du paramètre de luminance.

4.1 Images texturées colorées et textures visuelles

Il n'existe pas de définition générale de la texture visuelle : nous sommes capables de décomposer une scène visuelle en régions puis de construire une représentation de cette scène en identifiant un ensemble d'objets par rapport à un fond. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 le traitement de l'information visuelle débute par un ensemble d'opérations menées en parallèle dans les premiers stades : il y a codage d'attributs primitifs grâce à une série d'analyses des antagonismes spatiaux, spectraux, et temporels détectables dans le signal lumineux reçu. On a codage en parallèle d'informations sur l'orientation, les couleurs, les contrastes, les reliefs etc.

L'étape de traitement suivante consiste en une exploitation des différentes cartographies ainsi perçues dans le but d'extraire des formes par rapport à un fond. On suppose que c'est durant cette étape qu'intervient l'appréciation des textures visuelles (c'est à dire de ce qui "remplit" les formes) : cette opération fait intervenir des mécanismes aboutissant à la détermination dans la configuration générale de zones uniformes perceptivement.

La théorie du Gestalt [41] a mis l'accent sur l'importance primordiale de la configuration des éléments perçus dans les processus perceptifs. Ce qui permet de discerner deux textures visuelles relève plus de l'impression générale que de l'analyse individuelle des constituants : les seuls critères de clarté ou de chromaticité ne suffisent pas à décrire une texture visuelle ; c'est dans la structuration de l'information qu'il faut également chercher une cause à la construction d'unités perceptives. Les différentes définitions de la texture rencontrées dans la littérature se basent sur ces connaissances. La définition littéraire de la texture est la suivante :

« répétition spatiale d'un même motif dans différentes directions de l'espace ». Cette définition est limitative car elle caractérise l'objet indépendamment d'un observateur humain. La notion de texture est également utilisée pour traduire un aspect homogène de la surface d'un objet dans une scène. L'information visuelle qui en découle permet de la décrire qualitativement à l'aide des attributs sensoriels suivants [82, 8] : contraste visuel, couleur, grossière, fine, lisse, tachetée, granuleuse, marbrée, netteté régulière ou irrégulière, uniformité, densité, linéarité, phase, direction, etc. La dernière définition est élargie en décrivant une texture comme un phénomène à deux dimensions [8] : la première dimension concerne la description d'éléments de base ou *primitives* à partir desquels est formée la texture ; la deuxième dimension est relative à la description de l'*organisation spatiale* de ces primitives. Une autre approche [8] est encore de définir la texture à partir de deux types d'informations essentielles que comporte l'image :

1. les *contours*, de type unidimensionnel, qui marquent les frontières entre régions homogènes ;
2. l'*aspect de surface*, de type bidimensionnel, qui définit les régions homogènes.

Cependant la description d'une texture visuelle peut s'avérer erronée à une autre échelle d'observation, c'est-à-dire en changeant de résolution. En pratique, on définit deux grandes classes de textures, censées correspondre à deux niveaux de perception [27] :

1. les *macrotextures* qui présentent un aspect régulier, sous formes de motifs répétitifs spatialement placés selon une règle précise (par exemple : peau de lézard, mur de brique) donc une approche structurelle déterministe ;
2. les *microtextures* présentant des primitives « microscopiques » distribuées de manière aléatoire (par exemple : sable, laine tissée, herbe) d'où une approche probabiliste cherchant à caractériser l'aspect anarchique et homogène.

Une synthèse [27] des deux approches consiste à considérer la texture comme « une structure spatiale constituée de l'organisation de primitives ayant chacune un aspect aléatoire, donc une structure hiérarchique à deux niveaux ».

Toutes ces définitions montrent qu'il n'existe pas de définition fonctionnelle précise de la texture. Les unes sont perceptuellement motivées et les autres sont conduites par l'application dans laquelle sera utilisée cette définition. Malgré cela, il existe un certain nombre de propriétés de la texture qui sont en général supposées vraies [82, 107] et applicables à l'analyse d'images numériques :

- la texture est une propriété de surface ; la texture d'un point (pixel dans le cas d'une image numérique) n'est pas définie. La texture est une propriété contextuelle et sa définition doit impliquer les valeurs (ou catégories) des pixels dans un voisinage spatial. La taille de ce voisinage dépend du type de texture ou de la taille des primitives constituant la texture ;

- la texture implique la distribution spatiale des valeurs des pixels ;
- une texture peut apparaître différente selon la distance d’observation ;
- une texture peut apparaître différente selon la géométrie d’observation.

Dans notre approche, *la texture physique est considérée comme l’interaction spatiale entre les valeurs des pixels d’une image numérique couleur* utilisée comme stimulus. Les attributs sensoriels (visuels) identifiés comme jouant un rôle important dans la description de la texture sont ceux définis précédemment, à savoir contraste visuel, couleur, netteté, régularité ou irrégularité, uniformité, densité, grossièreté/finesse, rugosité, granularité, présence de marbrures ou taches etc. Chaque classe de texture colorée est obtenue d’une part par la gestion du mode de distribution spatiale et d’autre part par la gestion du contenu couleur de chaque pixel ou point de l’image. Les différentes textures générées dans notre étude sont spatialement organisées selon les modalités décrites soit pour les macrotextures (méthodes déterministes de génération du « pattern » spatial), soit pour les microtextures (méthodes probabilistes de génération du « pattern » spatial). Nous avons appliqué les contraintes suivantes sur les différents stimuli soumis aux tests psychovisuels :

- ils sont modulables selon des critères simples reconnus comme psychovisuellement pertinents (*e.g.* plus clair, plus sombre) ;
- ils sont parfaitement contrôlés en termes de propriétés physiques.

Dans la classe des microtextures, les textures considérées sont de deux types à savoir les textures de points aléatoires et les textures isotropes. Elles ont été obtenues via la modélisation par la méthode des champs markoviens, plus précisément en utilisant le modèle connu sous le nom du modèle d’Ising généralisé. En ce qui concerne la classe des macrotextures, nous avons considéré deux types de réseaux à savoir les réseaux à orientation horizontale et les réseaux à orientation verticale. Les différents réseaux ont été obtenus par programmation de façon déterministe et n’a pas nécessité de modélisation particulière.

Nous présentons dans la sous-section suivante les caractéristiques physiques et géométriques des différentes images texturées étudiées.

4.1.1 Caractéristiques physiques des stimulations visuelles

Les différentes images texturées colorées générées pour notre étude sont physiquement caractérisées, selon leur appartenance à un type de texture (textures aléatoires, textures isotropes et réseaux), par :

- la taille des stimuli exprimée en degré d’angle visuel ;
- la chrominance et la luminance des couleurs des stimuli, exprimées par leurs coordonnées trichromatiques dans le système XYZ CIE 1931 ;
- le contraste physique ;
- la proportion des pixels appartenant à une couleur donnée.

Lorsque nous regardons une surface texturée colorée, celle-ci possède une certaine taille (dans le monde physique), mesurable en mètre par exemple. Mais nous pouvons considérer la projection optique de cet objet sur la rétine, puisqu'elle représente la taille véritable du stimulus en interaction avec le système visuel. Pour distinguer ces deux notions, on utilise parfois le terme de stimulus distal pour l'objet et de stimulus proximal pour son image optique correspondante sur la rétine (taille en *mm*). La taille de l'image rétinienne, pour un objet donné dépend de la distance d'observation. En effet, plus l'objet est éloigné, plus l'image optique de cet objet sur la rétine est petite. On préfère donner sa taille en évaluant l'angle sous-tendu par l'objet et dont le sommet est au centre optique de l'œil ou angle visuel. Cette valeur permet de calculer la taille d'un objet vu à différentes distances.

Un objet de 1 *cm* mesure 1° d'angle visuel [7] s'il se trouve placé à une distance de 57.3 *cm* de l'œil. Ainsi, en désignant par :

- α la taille angulaire de l'objet perçu, exprimé en degrés d'angle visuel ;
- T la taille réelle de l'objet en *cm* ;
- d la distance entre l'objet et les yeux de l'observateur, exprimée en *cm*.

Nous avons la relation :

$$\alpha = \frac{T \times 57.3}{d}. \quad (4.1.1)$$

La taille des images a été choisie de façon à solliciter la zone centrale de la rétine c'est à dire principalement les cônes (vision photopique). Dans le cadre de tests psychophysiques sur images numériques, il est d'usage de considérer une taille angulaire $\alpha > 4$ degrés d'angle visuel. La distance d séparant l'écran des sujets étant connue (environ 50 *cm*), il en résulte une résolution spatiale de 220×220 pixels pour toutes les images texturées colorées de l'étude. La densité de résolution de l'écran égale à $d_R = 112$ dpi étant celle des images numériques (cf. Chapitre 3, sous-section 3.2.3). Les images numériques affichées sont des carrés de 5 *cm* de côté vus sous un angle visuel de 5°.

Il est important dans le cadre de notre étude de produire des stimuli dans lesquels les éléments constitutifs des images texturées colorées soient discernables. La résolution de cette contrainte s'appuie sur la notion de pouvoir séparateur de l'œil qui se définit comme étant l'angle limite a sous lequel deux points lumineux peuvent être vus séparés. Il est de l'ordre d'une minute d'angle¹. On désigne par h la distance entre deux points lumineux sur l'écran, d la distance d'observation. On a,

$$\tan(a) = \frac{h}{d}.$$

Le pouvoir séparateur de l'œil a est égal à $a = 1/60^\circ$ et dans les conditions d'observation de nos tests $d = 50$ *cm* : on pourra donc séparer visuellement 2 pixels

1. 1° vaut 60 minutes.

s'ils sont distants d'au moins $hs = d \times \tan(a)$, soit $hs = 0.15 \text{ mm}$. Connaissant la hauteur $H = 10.74$ pouces de l'écran et sa résolution verticale $Rv = 1200$ pixels, on en déduit que l'espacement entre chaque ligne de notre moniteur vaut $he = H/Rv$, soit $he = 0.227 \text{ mm}$. Nous avons donc considéré dans la synthèse de nos stimuli un espacement de $he = 0.227 \text{ mm}$ entre les différents pixels, aussi bien dans la direction de la hauteur de l'écran que celle de sa largeur.

La couleur de chaque pixel des images texturées colorées est caractérisée par des valeurs de chrominance et de luminance dans l'espace XYZ CIE 1931. La chrominance est représentée par les deux coordonnées chromatiques normalisées x et y (cf. Chapitre 3, section 3.1.1). La luminance est caractérisée par la composante Y exprimée en $cd.m^{-2}$. Chaque couleur a été d'abord définie par sa chrominance à l'aide du diagramme de chromaticité (cf. Figure 3.3, chapitre 3). Le blanc utilisé dans la caractérisation des chrominances est l'illuminant D_{65} de composantes trichromatiques $(X_n, Y_n, Z_n) = (95.047, 100.00, 108.883)$ ou $(x_n, y_n, Y_n) = (0.31272, 0.32903, 100)$ dans le système colorimétrique XYZ CIE 1931 et une température de couleur égale à 6500 K (selon la recommandation de la CIE 15.2004), (cf. Paragraphe 3.2.3, Chapitre 3). Le choix des luminances s'est fait de façon à solliciter la vision photopique des observateurs. Pour la spécification des luminances, nous nous sommes placés dans le domaine photopique. Cette vision est notamment caractérisée par :

- la sensation de couleur ;
- une activité visuelle élevée dans la zone centrale de la rétine ;
- une adaptation relativement rapide (quelques secondes).

Elle est définie par des luminances supérieures à $10 (cd.m^{-2})$ [132, 7, 125]. L'écran utilisé, comme tous les écrans, n'est pas capable de reproduire toutes les couleurs possibles. Il possède un « gamut » dans lequel nous avons dû choisir les couleurs utilisées dans nos textures : ses dernières devaient bien entendu être affichées. Le tableau 4.1 donne les coordonnées trichromatiques dans le système XYZ CIE 1931 et les longueurs d'onde λ (appelée « longueur d'onde dominante »), exprimées en nm , des couleurs choisies pour l'étude à savoir : Rouge, Vert, Bleu et Jaune.

Table 4.1 Les coordonnées trichromatiques des différentes gammes de couleurs dans le système colorimétrique XYZ de la CIE 1931.

Coordonnées trichromatiques	Rouge	Vert	Bleu	Jaune
x_0	0.51	0.29	0.18	0.39
y_0	0.33	0.54	0.12	0.49
$Y_0 (cd.m^{-2})$	15.56	20.28	14.05	84.83
$\lambda (nm)$	675	550	475	570

Dans chacun des stimuli texturés colorés testés, nous avons utilisé deux couleurs isochromes : la première est l'une des couleurs définies dans le tableau 4.1

et la seconde est obtenue en faisant varier la composante de luminance Y_0 de la première couleur. Donc, les deux couleurs formant l'image texturée colorée ont une chrominance égale et une luminance différente. Notre problème était de produire une variation régulière de la sensation liée aux changements de luminances. C'est pourquoi nous avons établi notre échelle de variation physique à partir d'une incrémentation régulière des clartés dans l'espace $L^*a^*b^*$ considéré comme perceptuellement uniforme avec un axe de clarté L^* partant d'une information strictement achromatique.

On rappelle la formule de passage du système XYZ CIE 1931 au système $L^*a^*b^*$:

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_n} \right)^{1/3} - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_n} > 0.008856, \\ 903.3 \left(\frac{Y}{Y_n} \right) & \text{si } \frac{Y}{Y_n} \leq 0.008856, \end{cases}$$

$$a^* = 500 \left\{ f \left(\frac{X}{X_n} \right) - f \left(\frac{Y}{Y_n} \right) \right\},$$

$$b^* = 200 \left\{ f \left(\frac{Y}{Y_n} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_n} \right) \right\},$$

avec :

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{si } x > 0.008856, \\ 7.787 \times x + \frac{16}{116} & \text{si } x \leq 0.008856. \end{cases}$$

Les coordonnées trichromatiques X_n , Y_n et Z_n sont les coordonnées trichromatiques dans le système de primaires XYZ CIE 1931 d'un stimulus achromatique spécifié de couleur blanche. Dans le cas qui nous concerne, les valeurs X_n , Y_n et Z_n sont les coordonnées trichromatiques du point blanc du moniteur mesurées à l'aide du spectroradiomètre en utilisant les valeurs d'adressage $R = 255$, $V = 255$ et $B = 255$. On obtient $X_n = 90.9$, $Y_n = 98.4 \text{ cd.m}^{-2}$ et $Z_n = 117$. L_0 étant la composante de clarté d'une couleur donnée, nous générons les termes de deux suites arithmétiques de premier terme commun égal à L_0 et de raison r et $-r$. En plaçant l'image à contraste nul « au milieu » de l'ensemble à étudier nous souhaitons étudier l'influence du sens de l'évolution des luminances sur la perception de la discernabilité globale des contrastes. L'épreuve psychophysique étant une épreuve de classement, les différentes images texturées colorées à classer doivent être affichées simultanément à l'écran. Compte tenu des limitations liées à la taille de l'écran, nous avons simulé 20 images texturées colorées dans chaque type de texture pour une couleur donnée de coordonnées trichromatiques (x_0, y_0, Y_0) . Ainsi, Pour chaque suite arithmétique de premier terme L_0 , nous avons généré 10 termes. La valeur de r est choisie de telle sorte que les valeurs entières d'adressage correspondantes (R, V, B) soient différentes. Les

valeurs respectives de r pour les couleurs utilisées Rouge, Vert, Bleu et Jaune sont respectivement $r = 0.52$, $r = 1.10$, $r = 0.31$ et $r = 0.43$. La différence entre les valeurs de r pour les couleurs Rouge, Vert, Bleu et Jaune s'explique par le fait que les différents phosphores Rouge, Vert et Bleu de l'écran considéré ont des comportements différents. Ce fait a été remarqué pendant la procédure de calibrage et de caractérisation détaillée au chapitre 3 dans la section 3.2. Nous avons calculé pour chaque image texturée colorée, l'écart de luminance ΔY et le contraste physique ainsi généré entre les deux couleurs composant le stimulus texturé coloré.

Il existe différentes définitions mathématiques du contraste en luminance. Ici, seule celle proposée par Michelson [7, 55] dite contraste de Michelson sera utilisée. Ce contraste est défini par : $M = \frac{|\Delta Y|}{Y_0 + 2 \times |\Delta Y|}$. Ce dernier est, par définition, une grandeur sans unité, comprise entre 0 et 1, et souvent exprimée en pourcentage. Enfin, dans toutes les images texturées colorées qui sont, comme nous l'avons dit, isochromes, les proportions des pixels dans les deux couleurs sont égales.

Table 4.2 Les coordonnées trichromatiques des couleurs dans la teinte Rouge, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.51, 0.33, 15.56)$ et $r = 0.52$.

	Y	M	ΔY
1	12.00	0.13	-3.56
2	12.33	0.12	-3.23
3	12.66	0.10	-2.90
4	13.00	0.09	-2.56
5	13.35	0.08	-2.21
6	13.70	0.06	-1.86
7	14.06	0.05	-1.50
8	14.43	0.04	-1.13
9	14.80	0.03	-0.76
10	15.17	0.01	-0.39
11	15.56	0.00	0.00
12	15.95	0.01	0.39
13	16.34	0.02	0.78
14	16.75	0.04	1.19
15	17.16	0.05	1.60
16	17.57	0.06	2.01
17	18.00	0.07	2.44
18	18.43	0.08	2.87
19	18.86	0.10	3.30
20	19.31	0.11	3.75

Table 4.3 Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Verte, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.29, 0.54, 20.28)$ et $r = 1.10$.

	Y	M	ΔY
1	12.00	0.26	-8.28
2	12.70	0.23	-7.58
3	13.43	0.20	-6.85
4	14.19	0.18	-6.09
5	14.97	0.15	-5.31
6	15.78	0.12	-4.50
7	16.62	0.10	-3.66
8	17.49	0.07	-2.79
9	18.39	0.05	-1.89
10	19.32	0.02	-0.96
11	20.28	0.00	0.00
12	21.28	0.02	1.00
13	22.30	0.05	2.02
14	23.36	0.07	3.08
15	24.45	0.09	4.17
16	25.57	0.12	5.29
17	26.73	0.14	6.45
18	27.92	0.16	7.64
19	29.15	0.18	8.87
20	30.41	0.20	10.13

Table 4.4 Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Bleue, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.18, 0.12, 14.05)$ et $r = 0.31$.

	Y	M	ΔY
1	12.00	0.08	-2.05
2	12.20	0.07	-1.85
3	12.39	0.06	-1.66
4	12.59	0.05	-1.46
5	12.79	0.05	-1.26
6	13.00	0.04	-1.05
7	13.20	0.03	-0.85
8	13.41	0.02	-0.64
9	13.62	0.02	-0.43
10	13.83	0.01	-0.22
11	14.05	0.00	0.00
12	14.26	0.01	0.21
13	14.48	0.02	0.43
14	14.70	0.02	0.65
15	14.93	0.03	0.88
16	15.15	0.04	1.10
17	15.38	0.05	1.33
18	15.61	0.05	1.56
19	15.84	0.06	1.79
20	16.08	0.07	2.03

Table 4.5 Les coordonnées trichromatiques des couleurs appartenant dans la teinte Jaune, les valeurs correspondantes des contrastes de Michelson (M) et l'écart de luminance (ΔY) avec $(x_0, y_0, Y_0) = (0.39, 0.49, 84.83)$ et $r = 0.43$.

	Y	M	ΔY
1	75.30	0.06	-9.53
2	76.22	0.05	-8.61
3	77.15	0.05	-7.68
4	78.08	0.04	-6.75
5	79.02	0.04	-5.81
6	79.97	0.03	-4.86
7	80.93	0.02	-3.90
8	81.89	0.02	-2.94
9	82.86	0.01	-1.97
10	83.84	0.01	-0.99
11	84.83	0.01	1.00
13	86.83	0.01	2.00
14	87.84	0.02	3.01
15	88.86	0.02	4.03
16	89.88	0.03	5.05
17	90.92	0.03	6.09
18	91.96	0.04	7.13
19	93.01	0.05	8.18
20	94.07	0.05	9.24

Après avoir spécifié les caractéristiques physiques des différents composants des stimulations lumineuses colorées, nous allons passer à la génération des différentes distributions spatiales des deux couleurs. Avant de présenter le modèle d'Ising généralisé et l'algorithme de simulation utilisé, les définitions de système de voisinage et de cliques associées et le théorème de Hammersley-Clifford sont présentés.

4.1.2 Modèle d'Ising généralisé et algorithme

Les modèles Markoviens [24] permettent de quantifier les interactions spatiales d'observations aux sommets d'une grille S en donnant une probabilité pour toute configuration x sur S . Dans toute la suite, l'image numérique est considérée comme une grille $S = \{s = (i, j), i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M\}$ finie de points s appelés sites². A chaque site $s \in S$, on associe une variable aléatoire X_s à valeurs dans un ensemble fini Q appelé espace des états contenant l'ensemble des valeurs possibles x_s du site $s \in S$. Par exemple, $Q = \{0, 1, \dots, 255\}$

2. Dans notre cas, pixel.

pour une image à niveaux de gris codée sur 8 bits, $Q = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ pour une image numérique couleur codée sur 3×8 bits. On obtient ainsi une famille $X = \{X_s, s \in S\}$ de variables aléatoires indexées par l'ensemble fini $S \subset N^2$ des sites que l'on dénomme champ aléatoire. L'espace des configurations, que nous noterons E dans toute la suite, pour le champ aléatoire $X = \{X_s, s \in S\}$ est l'ensemble de toutes les images possibles $x = (x_1, \dots, x_{|S|})$, où

$$x \in E = Q^{|S|} = Q^{N \times M}, \quad (4.1.2)$$

avec $|S|$ désignant le cardinal de S l'ensemble fini des sites ou pixels. Dans toute la suite, nous supposons que les variables aléatoires X_s sont définies sur un certain espace de probabilité (F, \mathcal{A}, p) .

Définition 3 (Système de voisinage et cliques). *Désignons par S (l'ensemble des pixels contenus dans l'image). Les pixels de S sont reliés entre eux via un système de voisinage.*

Un système de voisinage pour S est défini par :

$$\mathcal{N} = \{N_i; i \in S\}, \quad (4.1.3)$$

où N_i désigne l'ensemble des pixels voisins du pixel i . La relation de voisinage possède les propriétés suivantes :

1. Un pixel donné n'appartient pas à l'ensemble de ses voisins : $i \notin N_i$;
2. La relation de voisinage est mutuelle : $i \in N_j \iff j \in N_i$.

Pour une grille régulière (image numérique), l'ensemble des pixels voisins d'un pixel i est défini comme l'ensemble des pixels proches de ce pixel à l'intérieur d'une boule de centre i et de rayon r

$$N_i = \{j \in S; [\text{dist}(i, j)] \leq r\},$$

où $\text{dist}(A, B)$ désigne la distance euclidienne entre A et B et r est un entier naturel. Notons que les pixels aux bords ou proches du bord ont moins de voisins.

Dans le système de voisinage d'ordre 1, encore appelé système de 4-voisinage, chaque pixel intérieur à l'image a quatre voisins. Dans le système de voisinage d'ordre 2, encore appelé système de 8-voisinage, chaque pixel intérieur à l'image a huit voisins.

Le couple (S, \mathcal{N}) constitue un graphe dans le sens usuel où S contient les noeuds et \mathcal{N} détermine les liens entre les noeuds selon le système de voisinage considéré. Une clique c pour (S, \mathcal{N}) est définie comme un sous-ensemble de l'ensemble des pixels S . Elle contient un seul pixel $c = \{i\}$, ou une paire de pixels $c = \{i, j\}$, ou un triplet de pixels $c = \{i, j, k\}$ et ainsi de suite. Les ensembles de cliques constitués d'un élément, de deux éléments, de trois éléments seront désignés respectivement

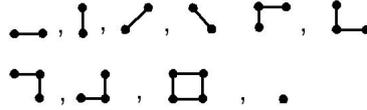
par \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et, \mathcal{C}_3 où

$$\mathcal{C}_1 = \{\{s\}; s \in S\}, \quad (4.1.4)$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{i, j\}; j \in N_i, i \in S\}, \quad (4.1.5)$$

$$\mathcal{C}_3 = \{\{i, j, k\}; i, j, k \in S, \text{ sont voisins entre eux}\}. \quad (4.1.6)$$

Figure 4.1 Types de cliques dans un système de voisinage d'ordre 2



Notons que les pixels dans une clique sont ordonnés, et la clique $\{i, j\}$ n'est pas la même que la clique $\{j, i\}$, et de suite.
L'ensemble de toutes les cliques pour (S, \mathcal{N}) est

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cdots \quad (4.1.7)$$

où \cdots désigne des cliques possibles d'ordre supérieur à 3. Le type d'une clique pour (S, \mathcal{N}) d'une grille régulière est déterminé par sa dimension, sa forme et son orientation.

Définition 4 (Champ de Markov). *Un champ aléatoire X est dit champ markovien sur S relativement au système de voisinage \mathcal{N} si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $p(X = x) > 0, \forall x \in E$;
2. $p(X_s = x_s | \{X_t = x_t, t \neq s\}) = p(X_s = x_s | \{X_t = x_t, t \in N_s\})$.

En d'autres termes, un champ markovien est un champ aléatoire qui possède la propriété de Markov : la valeur x_s d'un pixel s ne dépend directement et uniquement que des valeurs des pixels voisins de ce pixel s . Les probabilités $p(X_s = x_s | \{X_t = x_t, t \in N_s\})$ sont appelées probabilités conditionnelles locales.

Définition 5 (Distribution de Gibbs). *Un champ aléatoire X est dit champ de Gibbs sur S relativement à un système de voisinage \mathcal{N} ssi sa distribution de probabilité est régie par*

$$p(X = x) = Z^{-1} e^{-\frac{1}{T} U(x)}, \quad (4.1.8)$$

où

$$Z = \sum_{x \in E} e^{-\frac{1}{T} U(x)}, \quad (4.1.9)$$

est la constante de normalisation appelée fonction de partition, T est une constante appelée la température qui devra être supposée égale à 1 sauf mention explicite du contraire, et $U(x)$ la fonction énergie.

Elle a pour expression

$$U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x), \quad (4.1.10)$$

où \mathcal{C} est l'ensemble de toutes les cliques associées au système de voisinage \mathcal{N} considéré. La fonction $V_c(x)$ est appelée fonction potentiel associée à la clique c . La valeur de $V_c(x)$ dépend de la configuration locale de la clique c *i.e.* $V_c(x)$ dépend de l'ensemble $\{x_s, s \in c\}$ (valeurs des pixels appartenant à la clique c), du type de la clique (son ordre, sa forme et son orientation) et des pixels s appartenant à la clique c .

Un champ aléatoire de Gibbs (GRF) est dit homogène ssi $V_c(x)$ est indépendant de la position relative de la clique c . Il est dit inhomogène dans le cas contraire. Ainsi pour un champ de Gibbs homogène, l'énergie $U(x)$, pour le système de voisinage considéré, s'écrit de façon générale :

$$U(x) = \sum_{\{s\} \in \mathcal{C}_1} V_1(x_s) + \sum_{\{s,t\} \in \mathcal{C}_2} V_2(x_s, x_t) + \sum_{\{s,t,u\} \in \mathcal{C}_3} V_3(x_s, x_t, x_u) + \dots \quad (4.1.11)$$

De la même façon, cette énergie s'écrit pour un champ de Gibbs inhomogène par la formule ci-après :

$$U(x) = \sum_{\{s\} \in \mathcal{C}_1} V_1(x_s, s) + \sum_{\{s,t\} \in \mathcal{C}_2} V_2(x_s, x_t, s, t) + \sum_{\{s,t,u\} \in \mathcal{C}_3} V_3(x_s, x_t, x_u, s, t, u) + \dots \quad (4.1.12)$$

Un champ aléatoire de Gibbs (GRF) est dit isotrope ssi $V_c(x)$ est indépendant du type de la clique c (son ordre, sa forme et son orientation). Il est dit anisotrope dans le cas contraire. Nous supposons que le champ X est homogène *i.e.* le potentiel $V_c(x)$ est indépendant de la position relative de la clique c . En effet, le modèle d'Ising généralisé est un champ de Gibbs homogène.

Un champ markovien est caractérisé par sa propriété locale alors qu'un champ de Gibbs est caractérisé par sa propriété globale. Le théorème de Hammersley-Clifford établit l'équivalence de ces deux propriétés [126].

Théorème 4.1.1 (Équivalence Markov-Gibbs). *Un champ aléatoire X est un champ markovien sur S relativement à un système de voisinage \mathcal{N} si et seulement si X est un champ de Gibbs sur S relativement à \mathcal{N} [100].*

Ici, nous donnons la démonstration qu'un champ de Gibbs X sur S relativement à \mathcal{N} est un champ markovien sur S relativement à \mathcal{N} . Pour la démonstration de la réciproque, le lecteur pourra consulter la référence suivante [100].

Preuve. *En effet,*

Soit X un champ de Gibbs sur S relativement à \mathcal{N} . Par définition :

$$p(X = x) = \frac{1}{Z} e^{-U(x)},$$

où Z est la constante de normalisation et $U(x)$ l'énergie :

$$Z = \sum_{x \in E} e^{-U(x)}, \quad (4.1.13)$$

$$U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x), \quad (4.1.14)$$

$$(4.1.15)$$

où E désigne l'espace des configurations (i.e. l'ensemble de toutes les réalisations possibles du champ aléatoire). Il s'agit de montrer que la probabilité $P(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s)$ dépend de l'ensemble $\{x_t, t \in N_s\}$. On a :

$$\begin{aligned} p(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s) &= \frac{p(X_s = x_s, X_t = x_t, t \neq s)}{p(X_t = x_t, t \neq s)}, \\ &= \frac{p(X = x)}{\sum_{x'_s \in Q} p(X = x')}, \end{aligned}$$

où $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x'_s, x_s, \dots, x_m)$ (m étant le nombre total de pixels de l'image) est une configuration quelconque qui coïncident avec la configuration x sauf probablement en s . Par hypothèse, $p(X = x) = \frac{1}{Z} e^{-U(x)}$ d'où :

$$\begin{aligned} p(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s) &= \frac{e^{-U(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-U(x')}} \\ &= \frac{e^{-\sum_{c \in C} V_c(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-\sum_{c \in C} V_c(x')}}. \end{aligned}$$

C étant l'ensemble de toutes les cliques associées au système de voisinage \mathcal{N} . On fait une partition de C en deux sous-ensembles C_s et \mathcal{B} désignant respectivement l'ensemble des cliques contenant s et l'ensemble des cliques ne contenant pas s .

L'expression mathématique ci-dessus s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
p(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s) &= \frac{e^{-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x')}} \\
&= \frac{e^{-(\sum_{C_s} V_c(x) + \sum_{\mathcal{B}} V_c(x))}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-(\sum_{C_s} V_c(x') + \sum_{\mathcal{B}} V_c(x'))}}, \\
&= \frac{e^{-\sum_{C_s} V_c(x)} \cdot e^{-\sum_{\mathcal{B}} V_c(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} \left\{ e^{-\sum_{C_s} V_c(x')} \cdot e^{-\sum_{\mathcal{B}} V_c(x')} \right\}}, \\
&= \frac{e^{-\sum_{C_s} V_c(x)} \cdot e^{-\sum_{\mathcal{B}} V_c(x)}}{e^{-\sum_{\mathcal{B}} V_c(x')} \sum_{x'_s \in Q} \left\{ e^{-\sum_{C_s} V_c(x')} \right\}}, \\
&= \frac{e^{-\sum_{C_s} V_c(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-\sum_{C_s} V_c(x')}}.
\end{aligned}$$

L'avant dernière ligne résulte du fait que, \mathcal{B} étant l'ensemble des cliques ne contenant pas le pixel s , chaque $V_c(x')$ est indépendante de x'_s , $\forall c \in \mathcal{B}$ et donc la sommation $e^{-\sum_{\mathcal{B}} V_c(x')}$ est indépendante x'_s .

Soit c une clique appartenant à \mathcal{B} . Il résulte de la définition de \mathcal{B} : $s \notin c$. Par suite, les fonctions $V_c(x)$ et $V_c(x')$ sont respectivement indépendantes de x_s et x'_s . De plus, $x_t = x'_t, \forall t \neq s$, d'où $V_c(x) = V_c(x')$. Il en résulte la dernière ligne. Ainsi, $p(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s)$ dépend uniquement des potentiels associés aux cliques contenant le pixel s , donc dépend des valeurs (ou catégories) des pixels voisins du pixel s . Ceci prouve qu'un champ de Gibbs est un champ markovien.

Par la preuve ci-dessus, le calcul des probabilités conditionnelles à partir des potentiels est donné par,

$$p(X_s = x_s \mid X_t = x_t, t \neq s) = \frac{e^{-\sum_{C_s} V_c(x)}}{\sum_{x'_s \in Q} e^{-\sum_{C_s} V_c(x')}},$$

où C_s désigne l'ensemble des cliques qui contiennent le pixel s i.e., $C_s = \{c \in \mathcal{C}; s \in c\}$

Modèle d'Ising généralisé et algorithme de recuit simulé

Ce modèle est un cas particulier de modèles connus sous le nom d'auto-modèles. Il constitue une généralisation du modèle connu sous le nom de modèle

d'Ising que nous ne présenterons pas ici. Nous nous contenterons de présenter le modèle dans sa généralité, puis nous l'appliquerons à notre cas. Pour plus de détails sur les auto-modèles, le lecteur pourra consulter les références suivantes [126, 70, 100].

Modèle d'Ising généralisé [70] L'espace des états Q du processus est l'ensemble fini discret $Q = \{1, 2, \dots, M\}$ de cardinal M (avec $M > 2$). Dans ce modèle, le potentiel associé à une clique dépend du type de la clique (ordre, sa forme et son orientation) et des valeurs des pixels appartenant à la clique, *i.e.* $\{x_s \mid s \in c\}$: pour une clique d'ordre 1, le potentiel est défini par,

$$V_c(x) = \sum_{k=1}^M \alpha_k \delta_k(x_s), \quad (4.1.16)$$

où $\alpha_k = P(X_s = k)$ et $\delta_k(x_s)$ désigne la notation de Kronecker. Pour les cliques d'ordre strictement supérieur à 2, on associe des paramètres ξ_c à chaque type de clique c et on définit les potentiels $V_c(x)$ de la façon suivante :

$$V_c(x) = \begin{cases} \xi_c & \text{si } \exists! k \in Q \text{ tel que } x_s = k, \quad \forall s \in S, \\ -\xi_c & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Ce qui s'écrit sous forme condensée :

$$V_c(x) = -\xi_c \sum_{k=1}^M \prod_{s \in c} \delta_k(x_s) + \xi_c \left\{ 1 - \sum_{k=1}^M \prod_{s \in c} \delta_k(x_s) \right\}. \quad (4.1.18)$$

Les paramètres α_k , $k = 1, 2, \dots, M$ traduisent les proportions des niveaux utilisés dans la texture, alors que les paramètres ξ_c contrôlent la taille et la direction des primitives de texture. Ces paramètres sont souvent appelés paramètres de Markov.

Pour calculer la distribution de Gibbs associée, il faut spécifier le système de voisinage, les cliques c associées et les potentiels $V_c(x)$ associés aux cliques. Ici, nous supposons que le champ aléatoire X est homogène, et donc le potentiel associé à une clique donnée dépend uniquement du type de clique et des valeurs des pixels contenus dans la clique, mais ne dépend pas de la position de la clique (cas d'un champ de Gibbs inhomogène). Pour la simulation des images texturées colorées, le système de voisinage utilisé est celui d'ordre 2 (les voisins d'un pixel sont les pixels qui lui sont proches horizontalement, verticalement et diagonalement). Ainsi, un pixel donné, admet huit pixels voisins s'il est intérieur à l'image numérique et moins de huit dans le cas contraire. Aussi, nous nous sommes limités aux cliques d'ordre 2. Le choix de ce système de voisinage est justifié par le fait que les systèmes de voisinage d'ordres plus petits, *e.g.* d'ordre 1 et d'ordre 2, sont très flexibles et puissants [70]. Le système de voisinage étant choisi, les paramètres associés à chaque type de clique d'ordre 2 sont définis par le vecteur $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Ces paramètres jouent les rôles suivants :

- β_1 traduit l'interaction de deux pixels voisins sur la direction horizontale ;
- β_2 traduit l'interaction de deux pixels voisins sur la direction verticale ;
- β_3 et β_4 traduisent respectivement l'interaction de deux pixels voisins sur la première et la seconde diagonale.

On synthétise une texture à partir d'un modèle markovien par échantillonnage de la distribution de probabilité conjointe $p(X = x)$, $x \in E$ où E désigne l'espace des configurations du champ markovien X . Plusieurs raisons expliquent le fait que la distribution de probabilité conjointe $p(X = x)$ soit difficile à simuler. Une raison est que l'espace des configurations E du champ aléatoire markovien est en général intraitable. Par conséquent, les algorithmes de synthèse utilisent le fait que la distribution conjointe $p(X = x)$ est caractérisée par les probabilités conditionnelles locales $p(X_s = x_s | \{x_t, t \in N_s\})$ [100]. Ces algorithmes opèrent par génération d'une chaîne de Markov d'images $\{X(0), X(1), \dots, X(n)\}$ qui converge vers une image $x \in E$ telle que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(X(n) = x | X(0) = x(0)) = p(X = x), \quad \forall x \in E, \quad (4.1.19)$$

indépendamment de l'image initiale $X(0) = x(0)$ de la chaîne de markov [100].

Le calcul des probabilités conditionnelles locales se fait à l'aide de la formule suivante,

$$p(X_s = x_s | X_t = x_t, t \neq s) = \frac{e^{-\sum_C V_c(x)}}{\sum_{x_s' \in Q} e^{-\sum_C V_c(x')}}.$$

où C_s désigne l'ensemble des cliques associées au système de voisinage qui contiennent le pixel s et Q l'ensemble des états du champ aléatoire X (l'ensemble où X_s prend ses valeurs pour tout $s \in S$). s désigne un pixel quelconque fixé intérieur à l'image et $(U_{1,s}, U_{2,s}, U_{3,s}, U_{4,s}, V_{1,s}, V_{2,s}, V_{3,s}, V_{4,s})$ les valeurs des pixels voisins du pixel s (cf. Figure 4.2). On désigne par \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 l'ensemble des cliques d'ordre 1 et 2 respectivement, contenant le pixel s .

Figure 4.2 Système de voisinage d'ordre 2 : huit pixels voisins du pixel s .

v1,s	u1,s	v2,s
u4,s	s	u2,s
v4,s	u3,s	v3,s

On a :

$$\mathcal{C}_1 = \{\{s\}\}.$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{s, u1\}, \{s, u2\}, \{s, u3\}, \{s, u4\}, \{s, v1\}, \{s, v2\}, \{s, v3\}, \{s, v4\}\}.$$

Par suite,

$$\sum_{c \in \mathcal{A}} V_c(x) = V_{\{s\}}(x) + V_{c|c \in C_2}(x). \quad (4.1.20)$$

En utilisant la définition des potentiels ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C_s} V_c(x) = & \sum_{k=1}^M \alpha_k \delta_k(x_s) + \beta_1 \{I(S, U1) + I(S, U3)\} + \beta_2 \{I(S, U2) + I(S, U4)\} \\ & + \beta_3 \{I(S, V2) + I(S, V4)\} + \beta_4 \{I(S, V1) + I(S, V3)\}, \end{aligned}$$

où les fonctions $I(m, n)$ sont définies par :

$$I(m, n) = \begin{cases} -1 & \text{si } m = n, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.21)$$

Il en résulte :

$$\sum_{c \in C_s} V_c(x; \theta) = \theta^t \cdot J(x_s, N_s(x)),$$

avec :

$$\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_M, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^t, \quad (4.1.22)$$

et

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_s, \mathbf{N}_s(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}(x_s) \\ \delta_{\{2\}}(x_s) \\ \dots \\ \dots \\ \delta_{\{M\}}(x_s) \\ I(x_s, U_{1,s}) + I(x_s, U_{3,s}) \\ I(x_s, U_{2,s}) + I(x_s, U_{4,s}) \\ I(x_s, V_{2,s}) + I(x_s, V_{4,s}) \\ I(x_s, V_{1,s}) + I(x_s, V_{3,s}) \end{pmatrix}.$$

Les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 sont des paramètres associés aux cliques d'ordre 2 et $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, M$ sont des paramètres associés respectivement aux catégories de couleurs $1, 2, \dots, M$. Pour la simulation des images texturées colorées (textures aléatoires et textures isotropes) à l'aide du modèle d'Ising généralisé, nous avons utilisé l'algorithme du recuit simulé [107]. Un tel algorithme a pour avantage entre autres de conserver les proportions initiales des pixels appartenant à une gamme de couleur donnée, spécifiées dans l'initialisation de l'algorithme par l'image initiale $X(0) = x(0)$.

Algorithme du recuit simulé [107]

- 1: Set counters $m = 0$, $c = 0$ and $l = 0$.
 Set $T_o = 1$ or another value of similar order of magnitude.
 Set $\alpha = 0.99$ or a similar number smaller than 1, but close to 1.
 Set N equal to the total number of pixels in the image you wish to create.
 Set M equal to the maximum number of iterations you wish to allow.
- 2: Start from configuration of pixel values x , choosen at random, or in any other way.
 Set $x_{old} = x$.
- 3: Set $m = m + 1$.
- 4: **if** $m \geq M$ **then**
- 5: exit the algorithm, producing as output x_{old}
- 6: **end if**
- 7: **if** $m < M$ **then**
- 8: , set $T_m = \alpha.T_{m-1}$ and proceed to
- 9: **end if**
- 10: Set $c = c + 1$.
- 11: **if** $c \geq N$ **then**
- 12: exit the algorithm, producing as output x_{old}
- 13: **end if**
- 14: **if** $c < N$ **then**
- 15: , pick at random two pixels and proceed to
- 16: **end if**
- 17: **if** If the two pixels have the same grey value **then**
- 18: , go
- 19: **end if**
- 20: **if** If the two pixels do not have the same grey value **then**
- 21: proceed to
- 22: **end if**
- 23: Exchange the values of the two pixels, thus creating a new configuration y .
- 24: Compute the relative probability $p = p(y)/p(x)$ of the two configurations.
- 25: **if** $p \geq 1$ **then**
- 26: Accept the exchange.
 Set $x = y$, $l = 0$, $x_{old} = y$ and go to
- 27: **end if**
- 28: **if** $p < 1$ **then**
- 29: proceed to
- 30: **end if**
- 31: Set $l = l + 1$.
- 32: **if** $l \geq L$ **then**
- 33: terminate and exit the algorithm producing as output x_{old} .
- 34: **end if**

```

35: if  $l < L$  then
36:   draw a random number  $q$  in the range $[0, 1]$  and proceed to
37: end if
38: if  $q < p^{1/T_m}$  then
39:   accept the exchange.
      Set  $x = y$  and go to
40: end if
41: if  $q \geq p^{1/T_m}$  then
42:   keep the old configuration  $x$  intact and go to
43: end if

```

La mise en œuvre de cet algorithme est basée sur le calcul du rapport des probabilités conjointes $p(X = x')/p(X = x)$ tel que $x'_j = x_j, \forall j \neq i$. i étant un pixel fixé.

On montre que si x et y sont deux réalisations d'un champ aléatoire $X = \{X_s, s \in S\}$, défini sur un ensemble fini de sites S de cardinal N , on a le résultat suivant [100] :

$$\frac{p(X = x)}{p(X = y)} = \prod_{j=1}^N \frac{p(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}{p(y_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}, \quad (4.1.23)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

Pour une démonstration de ce résultat, on pourra consulter les références suivantes [100, 107].

Considérons donc deux configurations de textures $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_j)_{j=1,2,\dots,N}$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) = (y_j)_{j=1,2,\dots,N}$ de probabilités respectives $p(X = x)$ et $p(X = y)$. N désignant leur nombre commun de pixels. L'équation (4.1.23), permet d'écrire,

$$\frac{p(X = x)}{p(X = y)} = \prod_{j=1}^N \frac{p(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}{p(y_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}. \quad (4.1.24)$$

Considérons deux entiers k et l tels que $1 \leq k < l \leq N$ et supposons que $y_j = x_j, \forall j \notin \{k, l\}$ et $y_k = x_l, y_l = x_k$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\frac{p(x = x)}{p(X = y)} &= \prod_{j=1}^N \frac{p(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}{p(y_j | x_1, \dots, x_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N)}, \\
&= \frac{p(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_l, \dots, y_N)}{p(y_k | x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_l, \dots, y_N)} \\
&\times \frac{p(x_l | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_N)}{p(y_l | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_N)}, \\
&= \frac{p(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_l, \dots, y_N)}{p(x_l | x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_l, \dots, y_N)} \\
&\times \frac{p(x_l | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_N)}{p(x_k | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_N)}, \\
&= \frac{p(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_k, \dots, x_N)}{p(x_l | x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_k, \dots, x_N)} \\
&\times \frac{p(x_l | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_N)}{p(x_k | x_1, \dots, x_k, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_N)}, \\
\frac{p(X = x)}{p(X = y)} &= \frac{p(X_k = x_k | N_k(y))}{p(X_k = x_l | N_k(y))} \times \frac{p(X_l = x_l | N_l(x))}{p(X_l = x_k | N_l(x))},
\end{aligned}$$

où $N_k(y)$ et $N_l(x)$ désignent respectivement les pixels voisins des pixels k et l dans les configurations respectives y et x .

Les paramètres de Markov utilisés dans l'algorithme pour la simulation des textures isotropes et aléatoires sont résumés dans le tableau 4.6, page 161. Pour les textures isotropes c'est-à-dire sans directions privilégiées, le champ aléatoire est isotrope. Par définition, le potentiel $V_c(x)$ est indépendant du type de la clique ; ce qui est équivalent à dire que tous les paramètres $\beta_i, i = 1 : 4$ sont tous égaux et tous non nuls. Pour les textures aléatoires, il n'y a pas d'interaction entre les pixels de l'image donc tous les paramètres $\beta_i, i = 1 : 4$ sont tous nuls.

Table 4.6 Paramètres de Markov associés aux textures isotropes et aléatoires.

Paramètres de Markov	Textures isotropes	Textures aléatoires
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$	(2, 2, 2, 2)	(0, 0, 0, 0)

Toutes les images considérées sont de format BMP (Bitmap) et ont été obtenues à l'aide de codes développés dans l'environnement d'analyse statistique R en utilisant les packages [128, 133, 16]. Les figures 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6 représentent quelques exemples des images texturées colorées étudiées. Chaque type de

texture est constitué de deux couleurs, identiques en chromaticité et différentes en luminance. Pour la liste complète des images texturées colorées soumises aux expériences psychophysiques, le lecteur pourra se reporter à l'annexe D en fin du document.

Figure 4.3 Textures aléatoires constituées de deux couleurs de teinte rouge, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes .

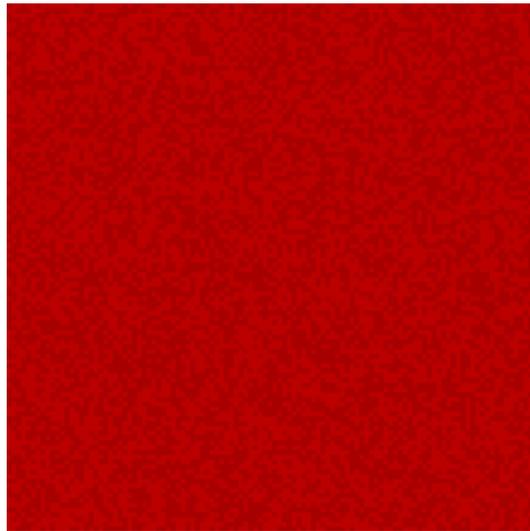


Figure 4.4 Réseau à orientation horizontale constitué de deux couleurs de teinte verte, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.

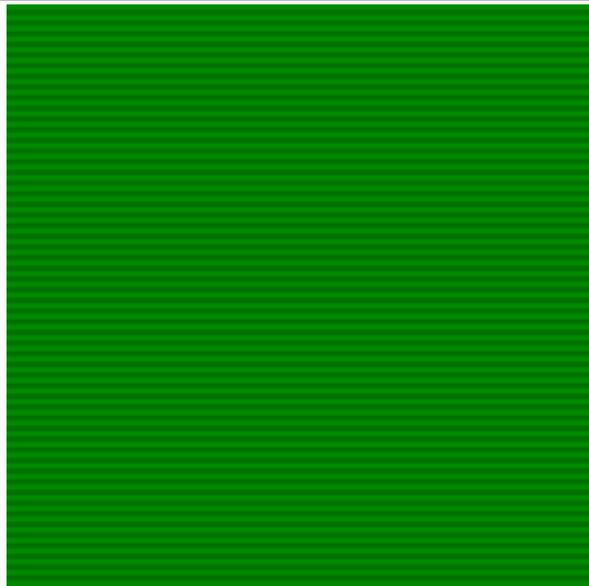


Figure 4.5 Textures isotropes constituées de deux couleurs de teinte bleue, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.

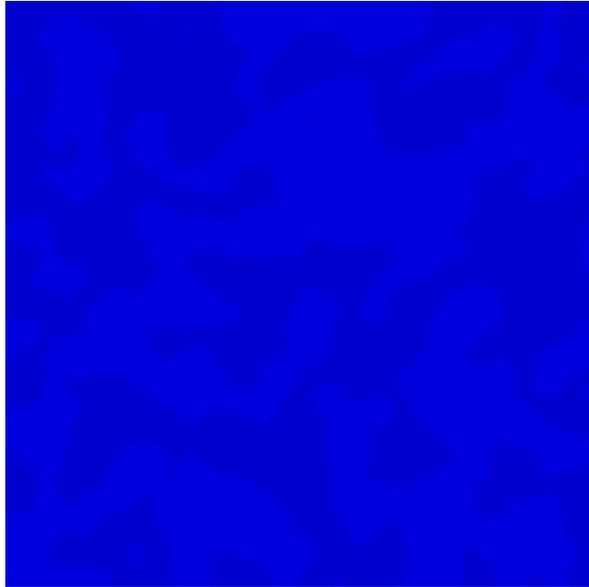
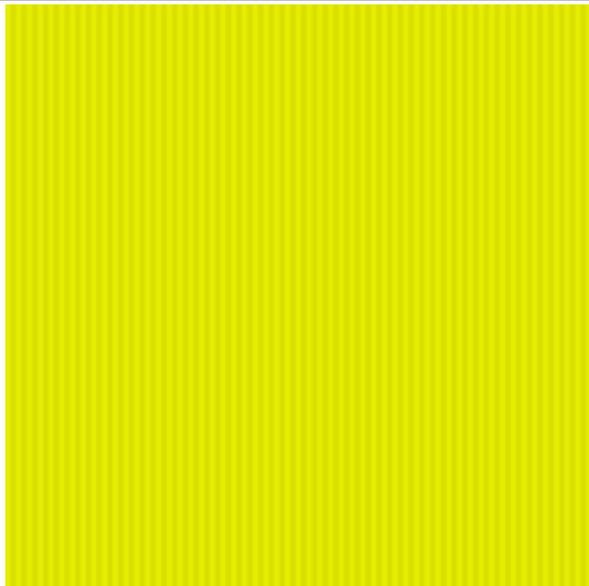


Figure 4.6 Réseau à orientation verticale constitué de deux couleurs de teinte jaune, ayant des coordonnées de chrominances (x, y) égales mais des coordonnées de luminance Y différentes.

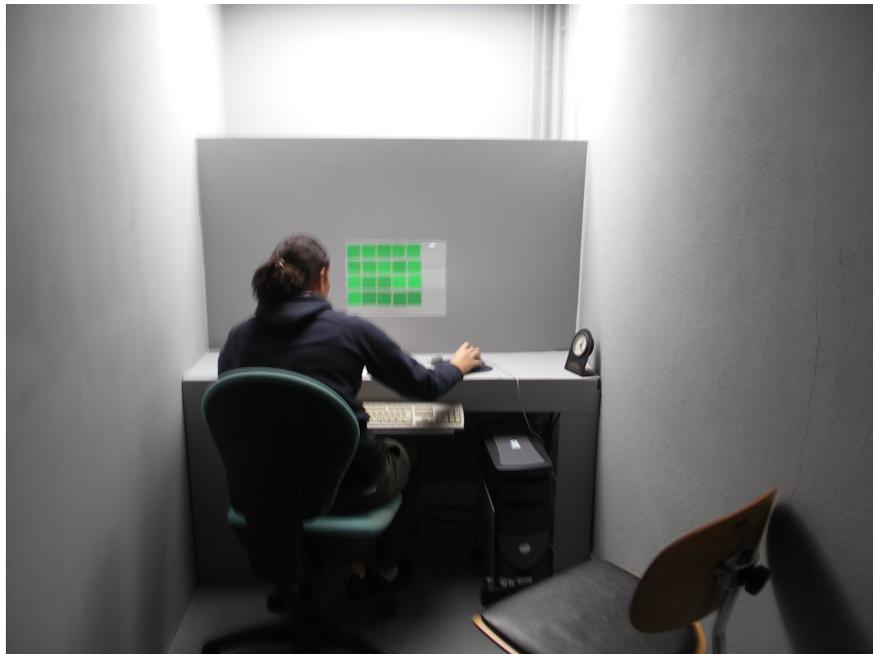


4.2 Description de l'expérience psychophysique

Dans cette partie, Nous décrivons de façon complète l'environnement dans lequel les différentes expériences ont eu lieu, les juges ou observateurs retenus pour ces expériences psychophysiques et les expériences psychovisuelles en question.

4.2.1 Cadre environnemental

Figure 4.7 Environnement mis en place pour les épreuves psychophysiques.



Nous avons mis en place un environnement normalisé pour pouvoir effectuer les différentes évaluations psychophysiques (cf. Figure 4.2.1). La salle d'évaluation est une pièce de $2m \times 4m$ sans fenêtre et éclairée par des tubes fluorescents JUST Color Control Daylight 5000 (éclairage blanc de $2000\text{lux} \pm 500 \text{ lux}$ répondant aux recommandations de la norme ISO 3664 : 2000). Les murs de la salle d'évaluation sont peints en gris neutre uniforme achromatique afin de minimiser les réflexions de lumière colorée parasite sur l'écran et pour rester dans un environnement achromatique. Le moniteur CRT utilisé pour les expériences psychophysiques a été caractérisé puis calibré (cf. Section 3.2, Chapitre 3) afin de délivrer un signal lumineux colorimétriquement contrôlé. Le fonde de l'écran a été réglé de façon à afficher un gris uniforme (achromatique au sens colorimétrique plutôt que d'après les palettes proposées par le système d'exploitation) : la clarté délivrée est égale à $L^* = 62.51$.

4.2.2 Juges ou observateurs

L'ensemble des juges ou observateurs retenu est constitué de quarante individus de sexe féminin ou masculin, recrutés au volontariat et de nationalités différentes. Leur âge varie entre dix neuf et quarante cinq ans. Ces observateurs ont une acuité visuelle normale ou corrigée et une bonne vision des couleurs. Chaque juge ou observateur a été entraîné à l'aide d'une série d'images texturées colorées différentes de celles soumises aux différentes épreuves afin de leur permettre de comprendre la modalité sensorielle de classement qu'est le contraste visuel. Le contraste visuel est une propriété visuelle qui permet d'évaluer la différence d'aspect de deux ou plusieurs parties du champs observé, juxtaposées dans l'espace ou dans le temps. Dans le cadre de notre étude, il se définit comme étant une propriété visuelle qui définit s'il est possible ou non de distinguer, dans une image, deux régions distinctes. Nous avons vérifié que les juges perçoivent bien les contrastes visuels dans les différents stimuli assujettis aux épreuves psychovisuelles.

4.2.3 Épreuve de classement

Les épreuves psychophysiques consistent en une épreuve de classement. L'observateur doit ranger, suivant le contraste visuel, les textures présentées simultanément, par ordre croissant de contraste visuel (niveau de contraste moins élevé à niveau de contraste plus élevé). Nous avons développé une interface de test à l'aide du langage de programmation orienté objet Delphi [105] pour la mise en œuvre cette épreuve de classement. Un temps d'adaptation d'une minute est accordé à chaque juge avant qu'il ne commence l'épreuve de classement. Ensuite, l'expérience commence en cliquant sur un bouton de l'application, et un ensemble de vingt stimuli de même distribution spatiale et appartenant à une même teinte s'affichent de façon aléatoire à l'écran. Cet affichage diffère selon les sujets. Le juge peut alors déplacer ou superposer à sa guise à l'aide de la souris les différents stimuli affichés à l'écran. Après chaque classement, le juge relève le résultat obtenu sur une fiche et clique pour poursuivre. Une série de vingt stimuli différents de ceux qu'il vient de classer s'affichent aléatoirement à l'écran, et ainsi de suite. Les ex-aequo sont permis dans les classements c'est-à-dire que le juge est libre d'attribuer le même rang à des stimuli différents s'il juge qu'ils ont le même niveau de contraste visuel. L'épreuve de classement se fait sans contrainte sur le temps passé. Nous avons constaté que pendant la séance d'évaluation chaque juge met en moyenne trois minutes pour un classement donné. Un temps d'adaptation de trente secondes leur a été accordé entre deux classements consécutifs. Le nombre total d'essais est de 16 pour chaque juge. Après seize essais l'épreuve s'arrête.

Chapitre 5

Approches statistiques de l'analyse de la discernabilité visuelle des textures colorées

Ce dernier chapitre traite de l'analyse des données de classement avec ex-aequo recueillies lors des épreuves psychophysiques en vue d'étudier l'impact de la luminance dans l'appréciation des contrastes pour des textures de couleur et de diverses distributions spatiales.

Les questions posées initialement étaient les suivantes :

- Est ce qu'une relation d'ordre entre textures basée sur le calcul du contraste de Michelson pouvait correspondre à la mise en ordre obtenue lors des expériences psychophysiques ?
- Si oui, est ce que l'on pouvait construire une échelle de discernabilité ? Cette échelle dépend-t-elle de la chrominance des phases colorées et/ou des distributions spatiales ?

Nous avons considéré deux approches. La première considère l'ajustement d'un modèle factoriel à effets fixes aux statistiques des rangs moyens (au sens de Kendall [95]) et permet d'établir l'existence d'une échelle sensorielle. La seconde approche est basée sur l'ajustement aux classements avec ex-aequo de l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry présentée au chapitre 1 et sur un test du rapport de vraisemblance de l'hypothèse nulle de non discernabilité perceptive contre l'hypothèse alternative de discernabilité perceptive. Le rejet de l'hypothèse nulle et l'interprétation des paramètres de Bradley-Terry-Luce permettent alors de conclure à l'existence d'une échelle sensorielle.

5.1 Mise en évidence d'une échelle sensorielle par ajustement d'un modèle factoriel à effets fixes aux rangs moyens de classement

5.1.1 Modèle factoriel à effets fixes pour l'analyse des classements sans ex-aequo

Soit $r(t, j)$ le rang attribué à la texture t , $t \in \{1, 2, \dots, q\}$ appartenant à un type de texture donné par le juge j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. S'il n'y a pas d'ex-aequo dans les classements, les rangs sont soumis aux contraintes suivantes : $(1/q) \sum_{t=1}^q r(t, j) = (1+q)/2 = \mu_0$ et $(1/q) \sum_{t=1}^q \{r(t, j) - \mu_0\}^2 = (q^2 - 1)/12 = \sigma_0^2$. Chaque rang $r(t, j)$ peut être vu comme une réalisation d'une variable aléatoire dont la distribution de probabilité admet pour espérance mathématique μ_{tj} . L'analyse statistique des données de classement reposera sur le modèle suivant :

$$\mu_{tj} = \mu_0 + \sum_{k=1}^K \theta_k(j) \phi_k(t) \quad \text{avec} \quad \mu_0 = \mu_{0j} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.1.1)$$

où le couple $(\theta_k(j), \phi_k(t))$ se rapporte à un descripteur sensoriel latent qu'on qualifiera de dimension sensorielle. Le paramètre $\theta_k(j)$ peut alors s'interpréter comme une mesure de l'accord du classement du juge j par rapport au k -ième descripteur sensoriel tandis que $\phi_k(t)$ est le score de la texture t par rapport au k -ième descripteur sensoriel. Le modèle n'étant pas identifiable, il est nécessaire de poser des contraintes d'identifiabilité pour les vecteurs $\phi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, K$ lesquelles garantissent l'identifiabilité du modèle à une rotation d'angle 180° près dans \mathbb{R}^q . Les contraintes classiques pour un tel modèle sont : $(1/q) \sum_{t=1}^q \phi_k(t) = 0$ et $\sum_{t=1}^q \phi_k(t) \phi_l(t) = q \delta_{kl}$ pour tout $k, l \in \{1, 2, \dots, K\}$, lesquelles garantissent l'identifiabilité du modèle.

5.1.2 Ajustement du modèle à effets fixes à une suite de classement avec ex-aequo

Soit $r_j = \{r(t, j)\}_{t=1,2,\dots,q}$ le vecteur des rangs issu du classement de q images texturées colorées attribué par un juge quelconque j . Les ex-aequo étant permis dans les classements des images texturées colorées (cf. Chapitre 4), chaque classement observé r_j est un vecteur d'entiers naturels compris entre 1 et une valeur $r_{j,+} \leq q$ telle que chaque rang $r(t, j)$ apparaît au moins une fois dans le classement r_j .

Dans toute la suite, nous adoptons les définitions [95] ci-après.

Définition 6. Soit $r_j = \{r(t, j)\}_{t=1,2,\dots,q}$ un classement avec ex-aequo. On appelle distribution d'ex-aequo associée au classement avec ex-aequo r_j , la suite $\lambda_{r_j} =$

$\{\lambda_{r_j}(l)\}_{l=1,2,\dots,r_{j,+}}$ où $\lambda_{r_j}(l)$ désigne le nombre d'objets ayant pour rang l dans le classement r_j avec $r_{j,+} = \max_{t=1,2,\dots,q} r(t, j)$.

Définition 7. On dira qu'un classement sans ex-aequo r' est compatible avec le classement avec ex-aequo r si pour toute paire d'objets $\{l, m\}$, on a

$$r'(l) < r'(m) \implies r(l) \leq r(m).$$

Définition 8. On appelle classement incomplet associé à un classement avec ex-aequo r , l'ensemble des classements sans ex-aequo compatibles avec r .

Définition 9. Soit $r_j = \{r(t, j)\}_{t=1,2,\dots,q}$ un classement avec ex-aequo. On appelle classement des rangs moyens associé à r_j , le classement $r_j^* = \{r^*(t, j)\}_{t=1,2,\dots,q}$ dont les rangs $r^*(t, j)$ sont définis par

$$r^*(t, j) = \frac{1}{N_j} \sum_{s \in v_j} s(t)$$

où v_j désigne le sous-ensemble des classements sans ex-aequo compatibles avec le classement avec ex-aequo r_j et N_j le cardinal de v_j .

En suivant l'approche des "rangs moyens" considérée dans [95], l'ajustement du modèle aux données se fera en utilisant le critère des moindres carrés :

$$\sum_{j,t} \frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} \left\{ r(t) - \sum_{k=1}^K \theta_k(j) \phi_k(t) \right\}^2$$

Le critère des moindres carrés ci-dessus considère que le juge a implicitement en mémoire un classement sans ex-aequo mais compte tenu des indications de l'expérience, il reporte un classement avec ex-aequo. Posons $\bar{r}(t, j) = \frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} r(t) - \mu_0$ et $s_j^2 = (1/q) \sum_{t=1}^q \{\bar{r}(t, j)\}^2$. On a,

$$\frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} \{r(t) - \mu_0 - \bar{r}(t, j)\}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} \{r(t) - \mu_0\}^2 - \{\bar{r}(t, j)\}^2,$$

et il s'en suit que

$$\sum_{t=1}^q \frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} \{r(t) - \mu_0 - \bar{r}(t, j)\}^2 = q(\sigma_0^2 - s_j^2),$$

et $s_j^2 \leq \sigma_0^2$.

On peut conclure que $(1/q) \sum_{t=1}^q \{\bar{r}(t, j)\}^2 = \sigma_0^2$ si et seulement si on a un classement sans ex-aequo. La quantité $\sigma_0^2 - s_j^2$ peut s'interpréter comme une mesure

de la distance entre le classement d'un juge j et un classement sans ex-aequo. Il vient que

$$\sum_{j,t} \frac{1}{N_j} \sum_{r \in v_j} \left\{ r(t) - \sum_{k=1}^K \theta_k(j) \phi_k(t) \right\}^2 = \sum_{j,t} \left\{ r(t,j) - \bar{r}(t,j) \right\}^2 + \sum_{j,t} \left\{ \bar{r}(t,j) - \sum_{k=1}^K \theta_k(j) \phi_k(t) \right\}^2.$$

Ainsi, la minimisation du critère des moindres carrés ci-dessus se ramène à la minimisation du critère suivant :

$$\sum_{j,t} \left\{ \bar{r}(j,t) - \sum_{k=1}^K \theta_k(j) \phi_k(t) \right\}^2.$$

Sous les contraintes d'identifiabilité spécifiées ci-dessus, la minimisation du critère des moindres carrés résulte en une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\bar{r} = \{\bar{r}(t,j)\}_{t=1,2,\dots,q} \quad j=1,2,\dots,n$. Soit $\rho_k, k = 1, 2, \dots, K$ les valeurs singulières de la matrice \bar{r} , rangées par ordre décroissant. Le minimum du critère des moindres carrés est atteint aux valeurs $\hat{\phi}_k(t)$ telles que $\hat{\phi}_k = \{\hat{\phi}_k(t)\}_{t=1,2,\dots,q}$ soit un vecteur singulier à droite unitaire associé à la k -ième valeur singulière ρ_k et $\hat{\theta}_k(j) = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^q \bar{r}(j,t) \hat{\phi}_k(t)$. Sachant que les vecteurs $(\bar{r}(t,j), t = 1, 2, \dots, q)$ et $(\phi_k(t), t = 1, 2, \dots, q)$ sont centrés alors $\{\hat{\theta}_k(j)\}^2 / s_j^2$ s'interprète comme le carré du coefficient de corrélation linéaire entre le vecteur des rangs moyens associés au classement d'un juge j et le descripteur sensoriel k que représente le vecteur des scores $(\phi_k(t), t = 1, 2, \dots, q)$. Cela suggère de nous intéresser à la statistique $(\hat{\theta}_k(j))^2$ comme un indicateur d'évaluation de la cohérence entre le classement d'un juge j et le descripteur sensoriel k . De même la valeur cumulée $\{\hat{\theta}_k(j)\}^2 + \{\hat{\theta}_l(j)\}^2$ comme un indicateur d'évaluation de la cohérence du classement du juge j avec les descripteurs sensoriels k et l . De plus, l'égalité $\sum_{j=1}^n \{\hat{\theta}_k(j)\}^2 = (1/q) \rho_k^2$, permet d'interpréter la statistique $(1/nq) \rho_k^2$ comme une évaluation de la cohérence moyenne des classements de tous les juges avec le descripteur sensoriel k .

5.1.3 Résultats de l'ajustement du modèle

Dans toute la suite de ce chapitre, les différentes images texturées colorées sont identifiées selon la teinte et le type de texture auxquels elles appartiennent par deux lettres. La première désignera la teinte et la deuxième désignera le type de texture. Les teintes rouge, vert, bleu et jaune sont respectivement identifiées par les lettres suivantes R, G, B et J. Les types de textures considérés à savoir texture aléatoire, texture isotrope, réseau à orientation horizontale et réseau à orientation verticale sont respectivement identifiés par les R, I, H et V. Ainsi

l'indicateur RR désigne l'ensemble des images texturées colorées dans la teinte Rouge et appartenant au type de texture aléatoire.

Lorsque nous traitons une procédure basée sur la minimisation du critère des moindres carrés et impliquant la décomposition en valeurs singulières, le ratio des coefficients de corrélation multiples par la variance peut être utilisée comme un critère d'adéquation du modèle aux données. Ainsi, on observe que ce ratio est supérieur à 75% pour tous les stimuli sauf pour les réseaux à orientation verticale dans la teinte bleue. Ainsi, nous avons considéré que le modèle avec 2 dimensions sensorielles ajuste bien les données observées et peut permettre une restitution.

Table 5.1 Pourcentage de variation expliquée pour les types de textures dans les teintes rouge et verte en fonction du nombre de dimensions sensorielles.

Nombre de dimensions sensorielles	Stimuli							
	RR	RI	RH	RV	GR	GI	GH	GV
première	82.28	82.02	70.87	72.62	85.55	87.06	76.16	76.38
2 premières	92.37	92.54	85.73	91.26	94.29	95.51	92.16	92.81
3 premières	94.40	95.16	88.09	92.78	96.48	96.78	93.64	94.21
4 premières	95.44	96.24	90.10	93.89	97.13	97.53	94.80	95.38

Table 5.2 Pourcentage de variation expliquée pour les types de textures dans les teintes bleue et jaune en fonction du nombre de dimensions sensorielles.

Nombre de dimensions sensorielles	Stimuli							
	BR	BI	BH	BV	YR	YI	YH	YV
première	72.31	82.79	60.31	42.34	85.99	90.83	78.92	67.58
2 premières	80.34	90.81	78.38	66.84	90.00	93.47	85.15	76.82
3 premières	85.62	93.06	83.46	74.10	93.00	95.22	89.07	82.19
4 premières	88.66	94.72	86.88	78.44	94.70	96.38	91.34	85.81

Analyse de la discernabilité perceptive des textures

Figure 5.1 Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte rouge.

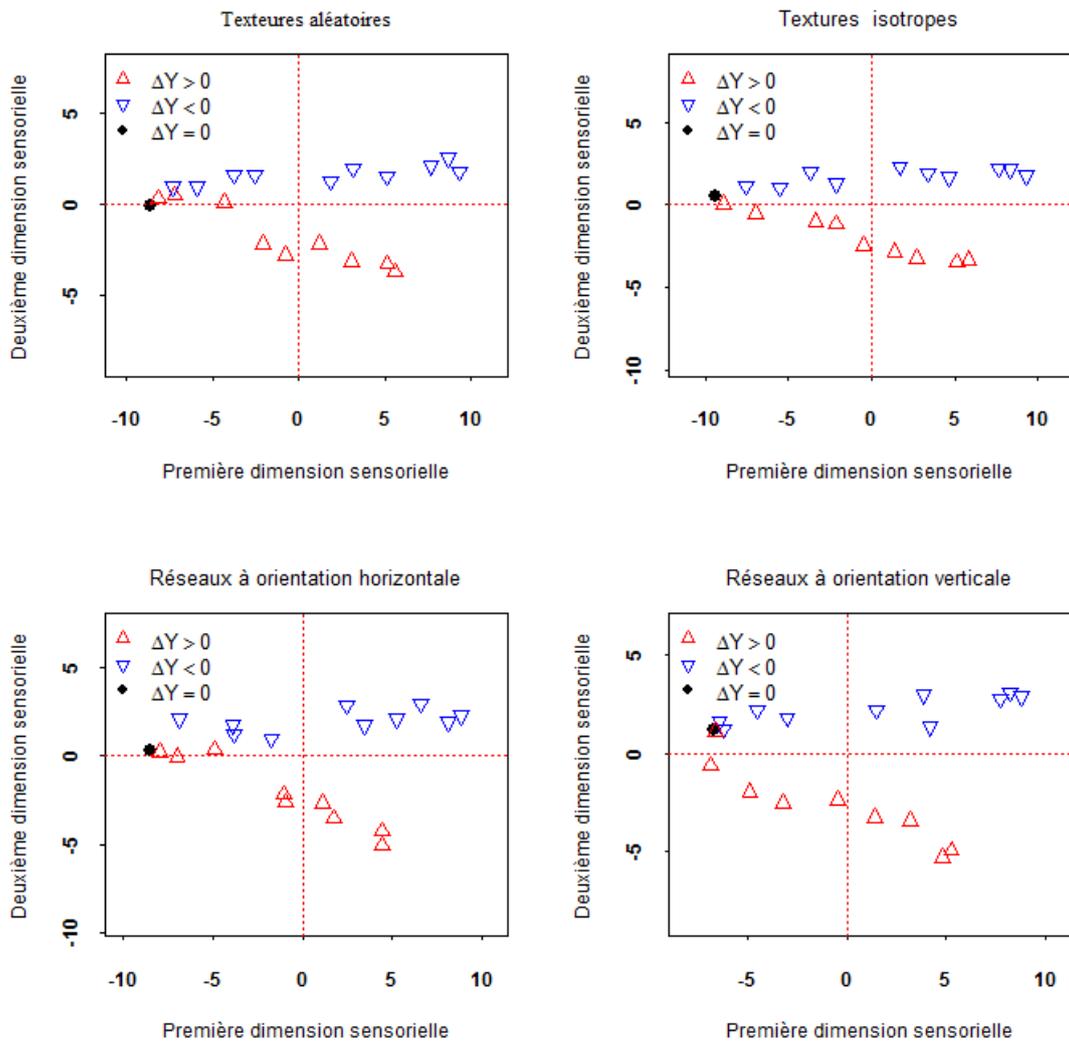


Figure 5.2 Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte verte.

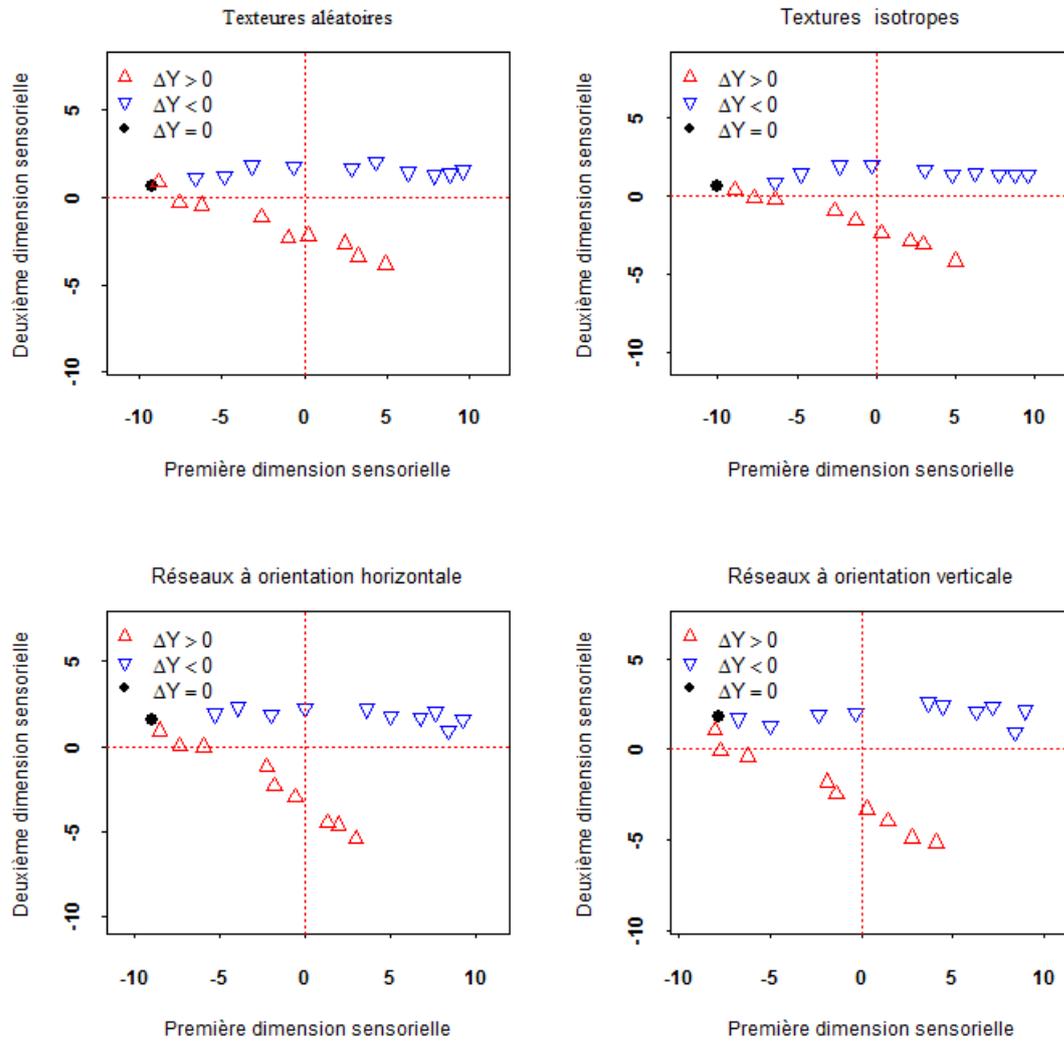


Figure 5.3 Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte bleue.

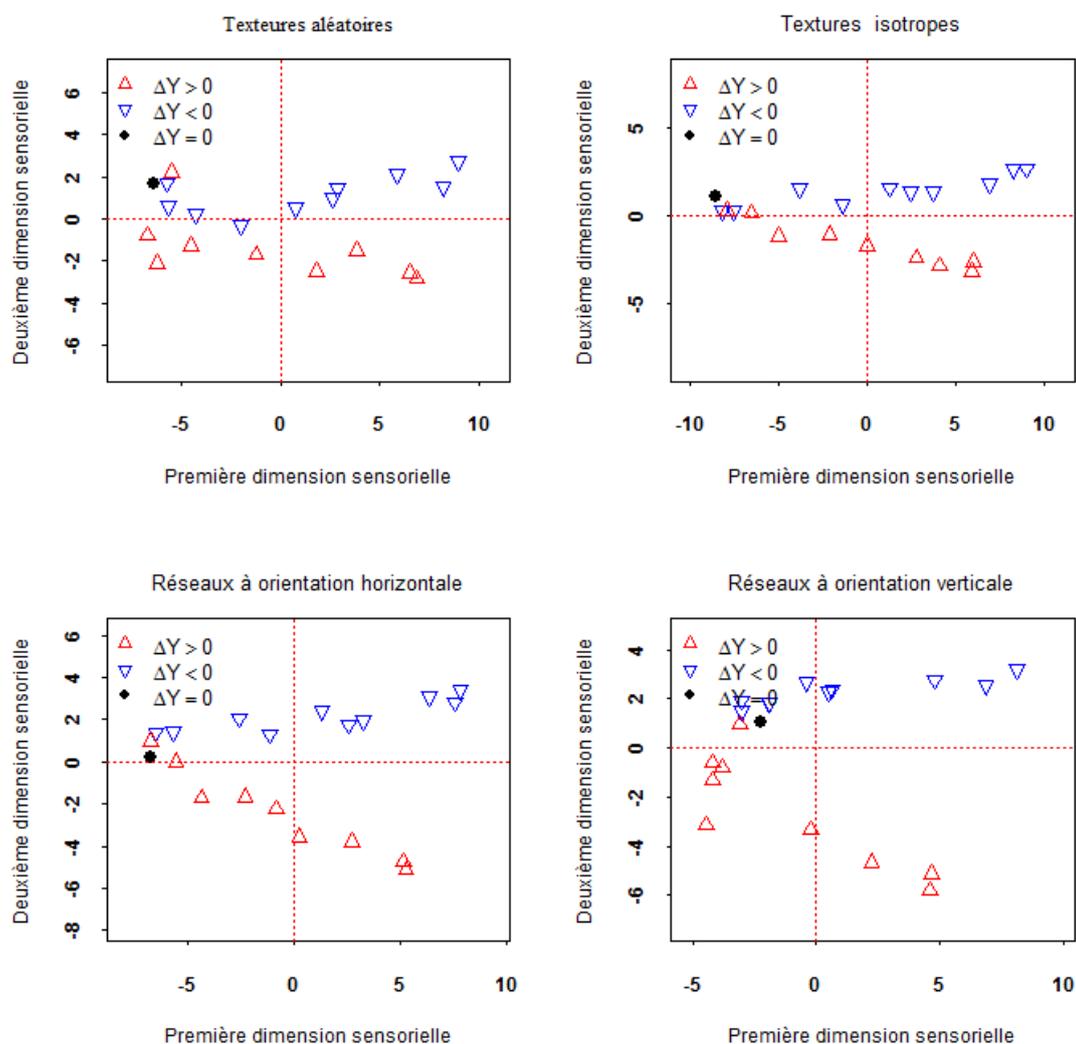
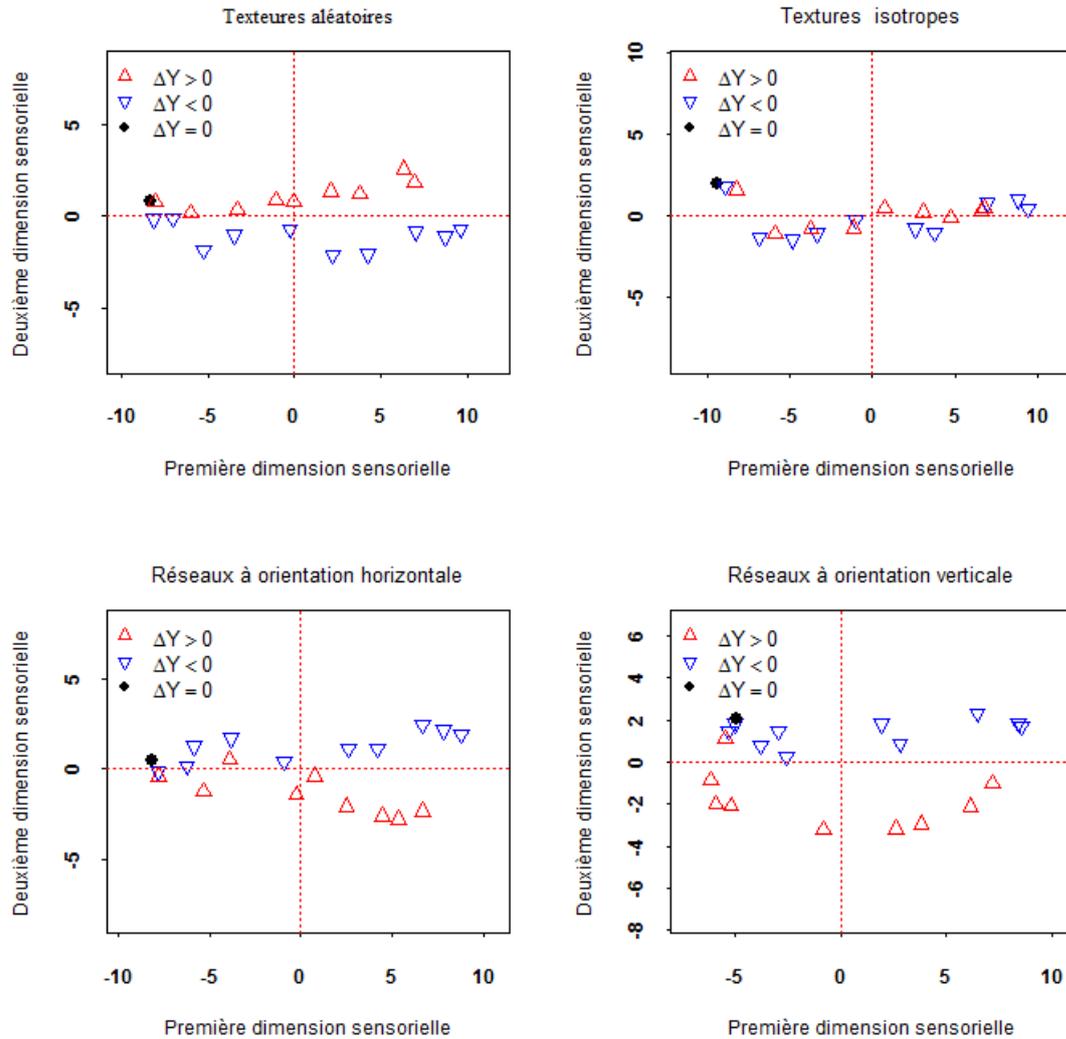


Figure 5.4 Position relative dans le plan factoriel (1,2) des différents types de textures dans la teinte jaune.



Les contraintes d'identifiabilité considérées pour le modèle factoriel à effets fixes ainsi que l'utilisation du critère des moindres carrés pour l'ajustement permettent une visualisation des textures étudiées à travers des graphiques comme dans le cas de l'analyse en composantes principales. Les différents graphiques (cf. Figure 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4) montrent les positions relatives des textures étudiées selon le type de texture et le niveau de teinte dans le plan défini par les deux premières dimensions sensorielles considérées ci-dessus. Pour chaque type de texture, on obtient un nuage de points en forme de fer à cheval. Cela suggère que l'axe horizontal qui correspond à la première dimension sensorielle constitue

une échelle de classement de texture. On observe que l'axe vertical oppose les textures dont la phase couleur modulable est plus claire que la référence à celles dont la phase couleur modulable est plus sombre que la référence. Cela met en évidence deux groupes de stimuli dans chaque type de stimuli. Néanmoins, cette discrimination n'est pas effective pour des images texturées colorées dans la teinte jaune appartenant au type de textures isotropes (cf. Figure 5.4).

5.1.4 Dimensions sensorielles

Corrélation entre les classements des juges et les scores sensoriels

La première dimension sensorielle a une corrélation positive avec tous les classements des juges quelque soit la texture. En outre, cette dimension sensorielle est fortement corrélée avec la plupart des classements. La deuxième dimension sensorielle a généralement de faibles corrélations avec la plupart des classements. Elle rend compte principalement de l'identification des juges ayant des classements non corrélés avec la première dimension sensorielle.

Comme la première dimension sensorielle est positivement corrélée avec les classements et que le carré du coefficient de corrélation est grand, l'on peut dire qu'il exprime une cohérence entre les classements. Ce qui suggère de considérer la première dimension sensorielle comme une échelle sensorielle quelque soit le type de texture considéré. Il faut noter que les classements de certains juges ne sont pas significativement corrélés avec cette échelle sensorielle. De plus, l'on peut remarquer que la distribution des carrés des coefficients de corrélation entre les classements des textures et les scores des stimuli associés à cette première dimension sensorielle diffèrent d'une teinte à une autre et d'un type de texture à un autre (cf. Tableau 5.5 et 5.8). Les carrés des coefficients de corrélation des classements avec les scores des stimuli sur cette dimension sensorielle dans les teintes rouge et vert excèdent 0.75 pour 3 juges sur 4 à l'exception des réseaux à orientation horizontale. Pour les textures de teinte jaune les carrés des coefficients de corrélation des classements avec les scores des stimuli sur cette dimension sensorielle excèdent 0.80 pour 3 juges sur 4 à l'exception des images texturées colorées appartenant aux réseaux à orientation verticale. La corrélation entre les classements des juges et les scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle est généralement faible pour les réseaux à orientation horizontale et verticale, puisque le carré des coefficients de corrélation n'excèdent pas 0.23 et 0.04 pour au moins un classement sur quatre. La plupart des classements des textures aléatoires et isotropes sont significativement corrélés avec les scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle quelque soit la teinte. Les classements des réseaux à orientation verticale sont faiblement corrélés avec les scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle pour les teintes bleue et jaune. Les classements des réseaux à orientation horizontale dans la teinte rouge sont aussi très faiblement corrélés avec les scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle.

Table 5.3 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la première dimension sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.

Teinte	Rouge				Vert			
Stimuli	RR	RI	RH	RV	GR	GI	GH	GV
Quantile 25%	0.87	0.85	0.69	0.78	0.88	0.84	0.71	0.76
Quantile 50%	0.94	0.95	0.80	0.89	0.96	0.95	0.89	0.93
Quantile 75%	0.96	0.98	0.87	0.93	0.97	0.97	0.94	0.95
Quantile 95%	0.98	0.99	0.93	0.94	0.99	0.99	0.96	0.97

Table 5.4 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la deuxième dimension sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.

Teinte	Rouge				Vert			
Stimuli	RR	RI	RH	RV	GR	GI	GH	GV
Quantile 25%	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
Quantile 50%	0.01	0.01	0.03	0.02	0.00	0.02	0.04	0.02
Quantile 75%	0.03	0.06	0.10	0.08	0.03	0.08	0.13	0.10
Quantile 95%	0.76	0.82	0.80	0.86	0.72	0.28	0.72	0.77

Table 5.5 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et les deux premières dimensions sensorielle dans les niveaux de teinte rouge et vert.

Teinte	Rouge				Vert			
Stimuli	RR	RI	RH	RV	GR	GI	GH	GV
Quantile 25%	0.91	0.92	0.81	0.89	0.95	0.95	0.90	0.92
Quantile 50%	0.96	0.96	0.86	0.93	0.97	0.97	0.94	0.95
Quantile 75%	0.98	0.98	0.92	0.95	0.98	0.98	0.96	0.97
Quantile 95%	0.99	0.99	0.95	0.96	0.99	0.99	0.98	0.98

Table 5.6 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la première dimension sensorielle dans les niveaux de teinte bleu et jaune.

Teinte	Bleu				Jaune			
Stimuli	BR	BI	BH	BV	YR	YI	YH	YV
Quantile 25%	0.58	0.88	0.23	0.03	0.88	0.88	0.80	0.57
Quantile 50%	0.86	0.93	0.78	0.37	0.93	0.93	0.89	0.80
Quantile 75%	0.91	0.97	0.89	0.71	0.97	0.97	0.92	0.90
Quantile 95%	0.94	0.98	0.96	0.86	0.98	0.98	0.97	0.94

Table 5.7 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et la deuxième dimension sensorielle dans les niveaux de teinte bleu et jaune.

Teinte	Bleu				Jaune			
Stimuli	BR	BI	BH	BV	YR	YI	YH	YV
Quantile 25%	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Quantile 50%	0.01	0.01	0.02	0.08	0.01	0.00	0.01	0.02
Quantile 75%	0.03	0.03	0.25	0.40	0.02	0.00	0.03	0.10
Quantile 95%	0.41	0.58	0.80	0.76	0.13	0.00	0.24	0.37

Table 5.8 Quantiles des carrés des coefficients de corrélations entre les scores des stimuli et les deux premières dimensions sensorielles dans les niveaux de teinte bleu et jaune.

Teinte	Bleu				Jaune			
Stimuli	BR	BI	BH	BV	YR	YI	YH	YV
Quantile 25%	0.73	0.91	0.75	0.45	0.91	0.95	0.85	0.73
Quantile 50%	0.88	0.95	0.85	0.71	0.94	0.96	0.90	0.83
Quantile 75%	0.92	0.97	0.91	0.84	0.97	0.98	0.94	0.91
Quantile 95%	0.95	0.98	0.96	0.90	0.98	0.99	0.97	0.95

Relation entre première dimension sensorielle et contraste de Michelson

Les graphiques ci-dessous (cf. Figure 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9) présentent les variations des différents scores sensoriels des images texturées colorées, relatifs à la première dimension sensorielle des textures en fonction des contrastes de Michelson qui leur sont associés. La principale remarque que l'on peut faire est que les

différents scores des stimuli relatifs à la première dimension sensorielle exhibent une relation fonctionnelle monotone avec les contrastes de Michelson quelque soit le signe de l'écart de luminance dans ces stimuli. De plus, Il apparait que dans la plupart des ensembles de stimuli les formes de la relation fonctionnelle ne sont pas significativement distinctes selon que l'écart de luminance est négatif ou positif sauf dans la teinte verte (cf. Figure 5.7) : les taux de variation des scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle sont presque constants lorsque l'écart de luminance est positif et que les stimuli sont les textures aléatoires ou les textures isotropes. En outre, les scores sensoriels relatifs à la première dimension sensorielle sont plus élevés lorsque les écarts de luminance sont négatifs. Ces remarques valent pour les types de textures dans la teinte verte. Les réseaux à orientation verticale exhibent de faibles variations dans les premiers scores sensoriels pour de faibles niveaux de contrastes pour presque toutes les teintes considérées. On observe pour les textures aléatoires et isotropes dans les teintes jaune et bleue que les courbes décrivant les relations fonctionnelles entre scores sensoriels sur la première dimension sensorielle et les niveaux de contraste ne se distinguent pas de manière significatives. Ce qui suggère que les juges n'ont peut-être pas toujours été capables de discriminer les textures.

Toutes ces remarques concernant la discrimination dans les niveaux de teinte sont cohérentes avec une étude statistique réalisée par la CIE. Cette étude a permis de déterminer la courbe de sensibilité spectrale moyenne de l'œil humain en fonction des longueurs d'onde (cf. Figure 5.5) [131]. Les études ont été réalisées dans deux domaines de la vision : la vision scotopique et la vision photopique. Ici, seule nous intéresse la courbe obtenue par la fonction $V(\lambda)$ correspondant à la vision photopique, également appelé *fonction d'efficacité lumineuse normalisée* [131]. Le maximum de la courbe normalisée est atteinte à la longueur d'onde 555 nm , ce qui indique que l'efficacité lumineuse est maximale dans la teinte verte.

Figure 5.5 Sensibilités spectrales de l'observateur standard. Fonctions d'efficacité lumineuse normalisée en vision photopique ou scotopique [131]

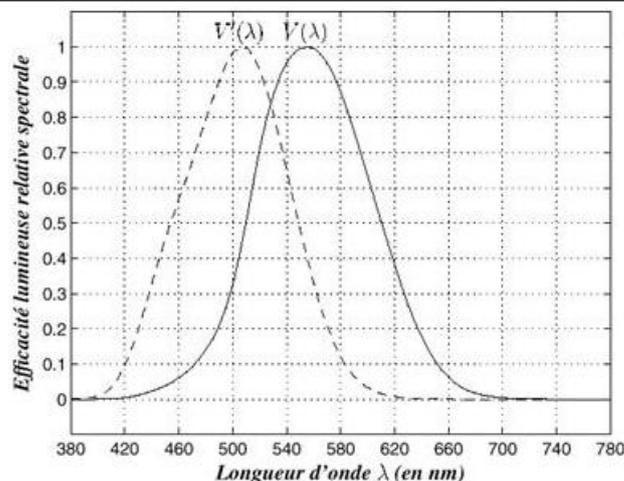


Figure 5.6 Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte rouge.

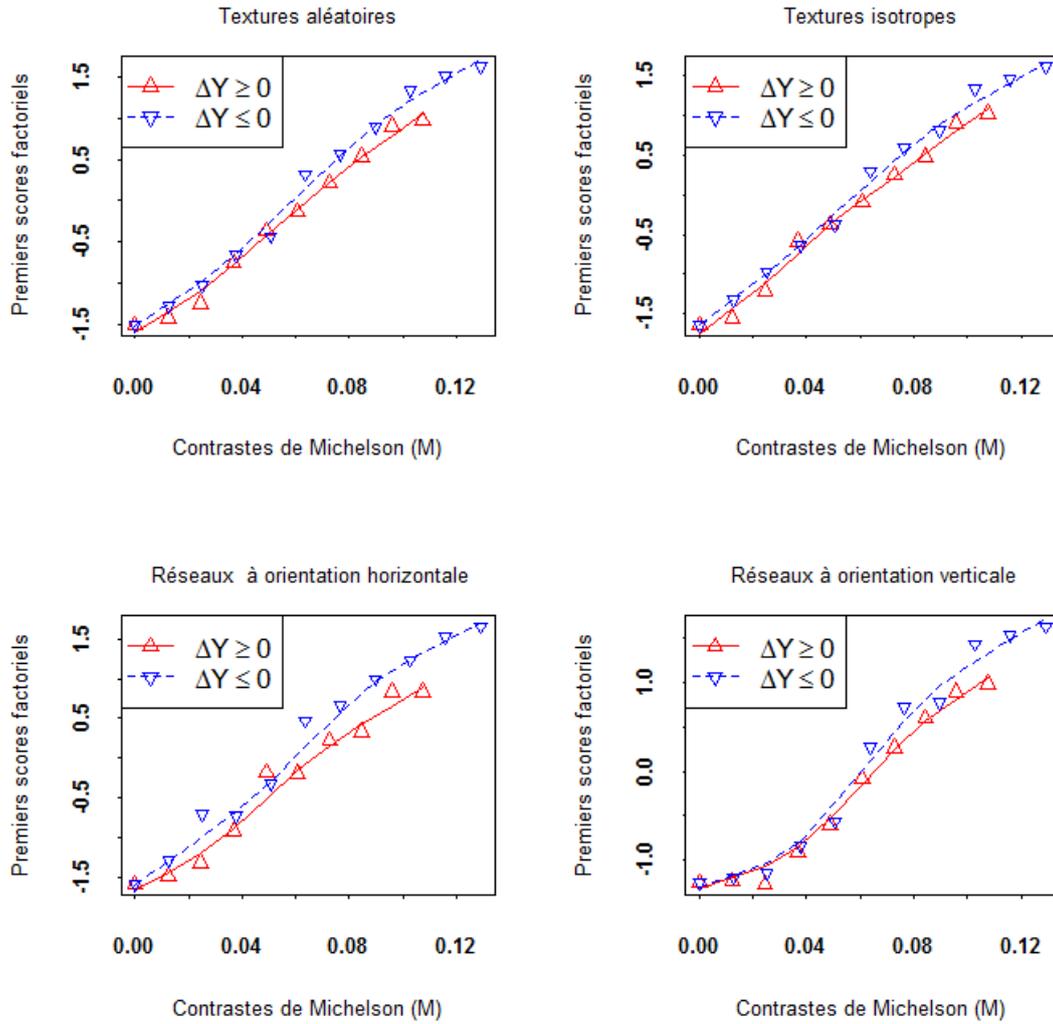


Figure 5.7 Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte verte.

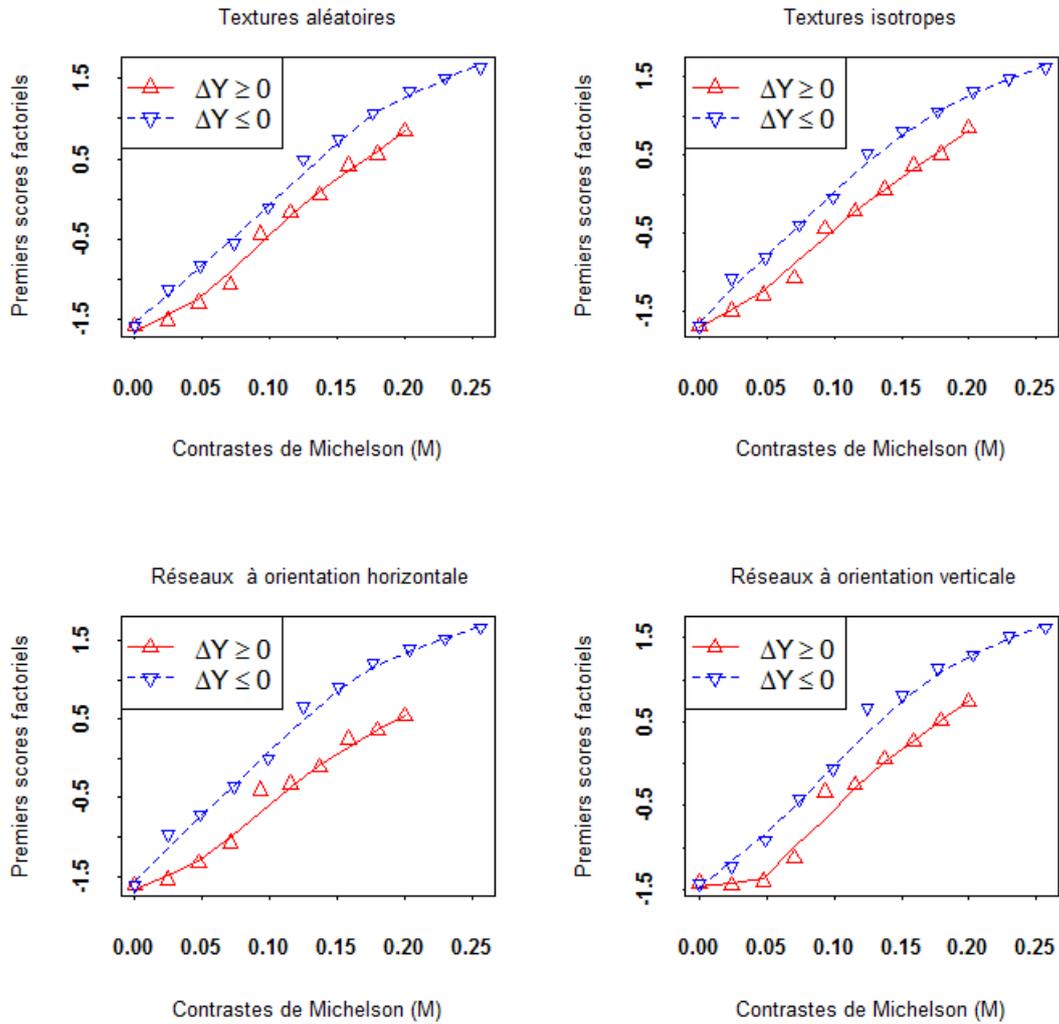


Figure 5.8 Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte bleue.

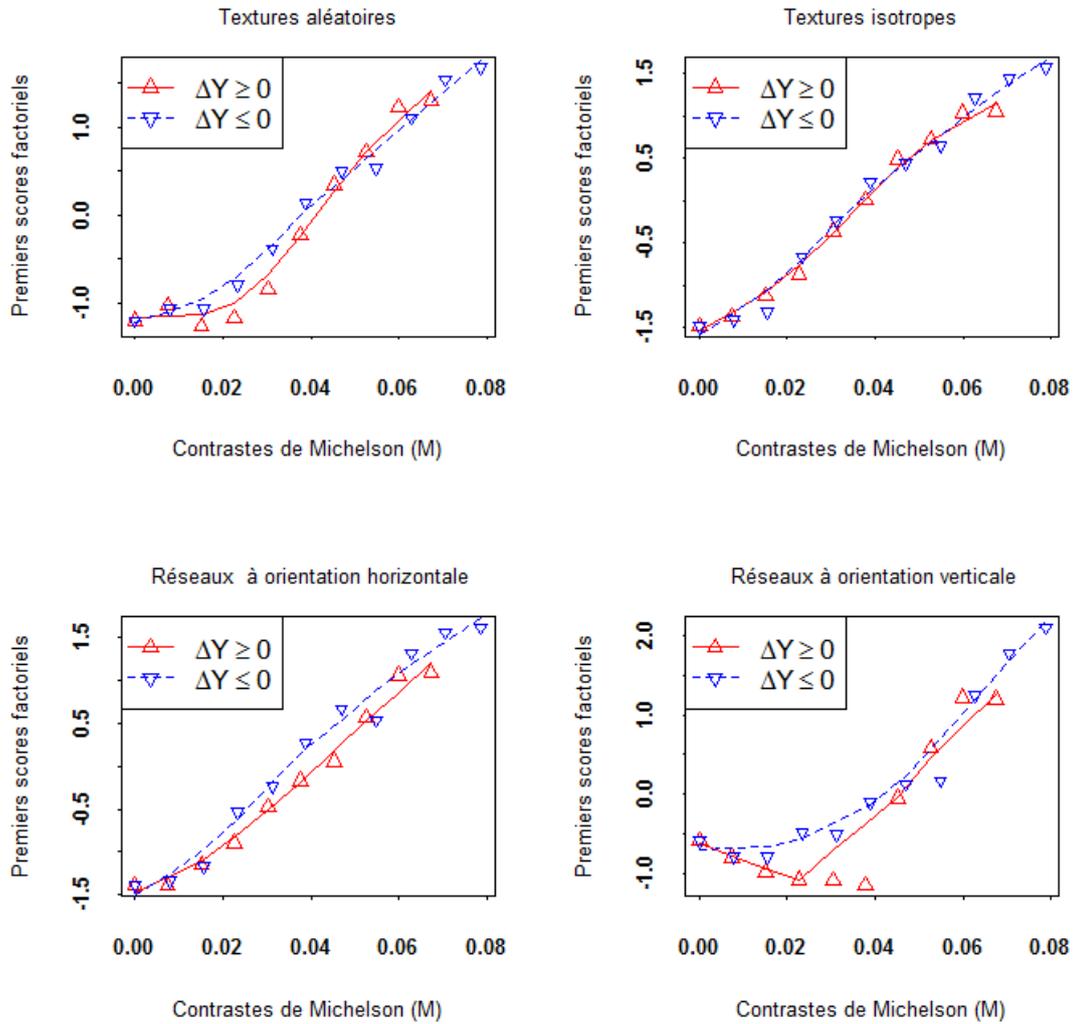
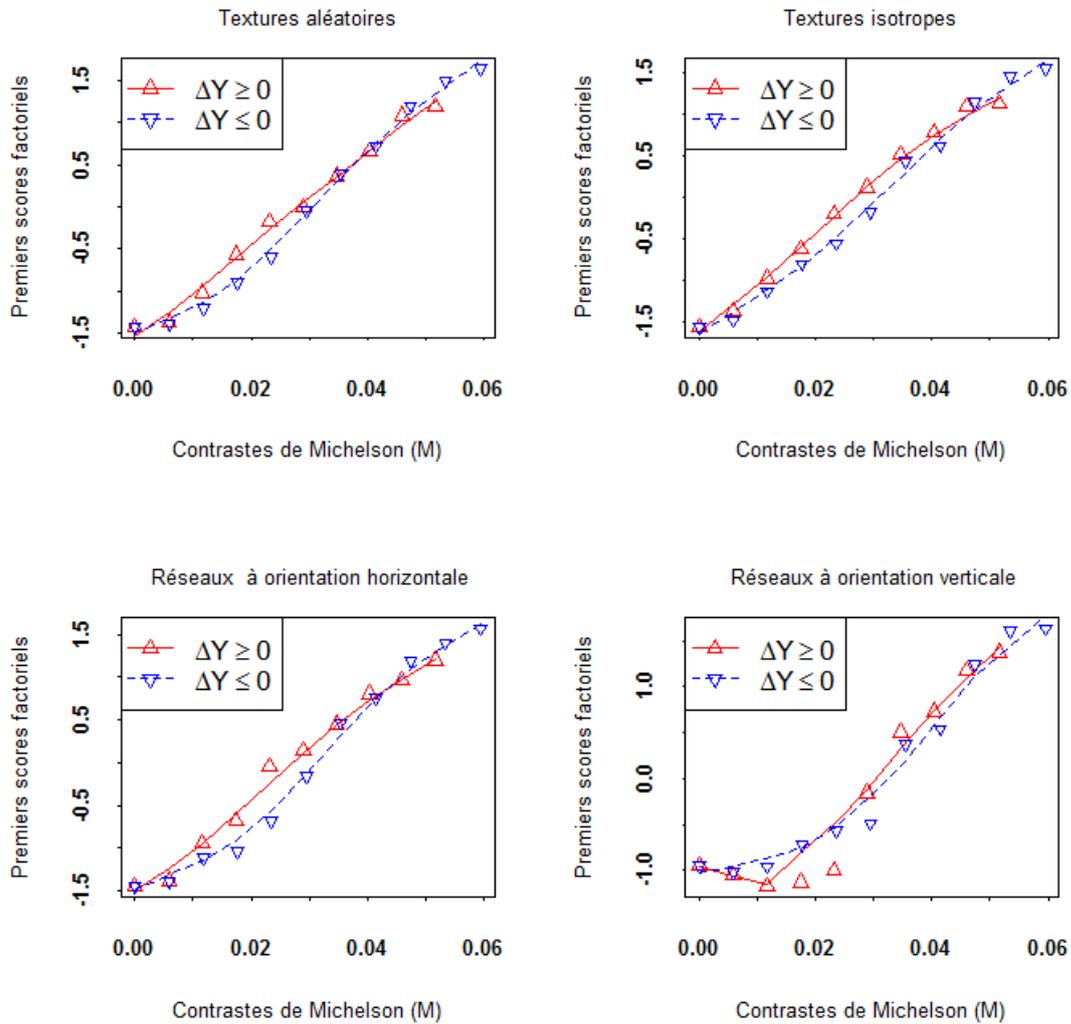


Figure 5.9 Variations des premiers scores factoriels des textures en fonction des valeurs de contraste de Michelson des textures appartenant aux types de texture considérés dans la teinte jaune.



5.1.5 Conclusion

En résumé, le traitement statistique des données basé sur le modèle factoriel à effets fixes montre que la capacité des juges à discriminer les textures sur la base du critère de contraste visuel varie en fonction du niveau de teinte et du type de texture. En outre, le classement des images texturées colorées suivant le contraste visuel est cohérent avec le continuum physique caractérisé par le contraste de Michelson quelque soit le type de texture et le niveau de teinte. On peut donc

conclure qu'une relation d'ordre basée sur le calcul du contraste de Michelson correspond à la mise en ordre obtenue lors des expériences psychophysiques. De plus, l'attribut sensoriel de contraste visuel se présente bien comme un continuum sensoriel que l'on peut quantifier en construisant perceptivement une échelle de discernabilité. Le fait que les relations fonctionnelles mises en évidence diffèrent d'un type de texture à un autre pour une teinte donnée et d'une teinte à une autre pour un type de texture donné implique que cette échelle sensorielle dépend de la chrominance des phases colorées et/ou du type de texture.

5.2 Analyse de la discernabilité perceptive des textures colorées à l'aide d'un test de rapport de vraisemblance dans le cadre du modèle de Mallows-Bradley-Terry

Dans cette section, il s'agit d'analyser les données de classement avec ex-aequo issues des épreuves psychovisuelles à l'aide du modèle de Mallows-Bradley-Terry étendu aux classements avec ex-aequo développé au chapitre 1. Il s'agira de déterminer les paramètres de Bradley-Terry-Luce associés à q images texturées colorées d'une teinte donnée appartenant à un type de texture donné sur un continuum sensoriel qui n'est pas directement observable. Ensuite, l'inférence sur les paramètres (θ, γ) de l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour l'analyse des données de classements avec ex-aequo permettra de répondre à la question de la discernabilité perceptive.

On considère une épreuve de comparaison par paires avec possibilité de ne pas pouvoir choisir entre les deux objets soumis à comparaison. Il en résulte que l'épreuve a trois alternatives possibles dont les probabilités sont données par le modèle de Davidson (cf. Chapitre 1) : choisir l'un des deux objets i ou j avec probabilités respectives $\theta_{ij} = \pi_i / (\pi_i + \pi_j + \nu \sqrt{\pi_i \pi_j})$, $\theta_{ji} = \pi_j / (\pi_i + \pi_j + \nu \sqrt{\pi_i \pi_j})$ et ne pas choisir avec probabilité $\theta_{ij2} = \nu \sqrt{\pi_i \pi_j} / (\pi_i + \pi_j + \nu \sqrt{\pi_i \pi_j})$ avec $\nu \geq 0$ et $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$ ($\pi_i > 0$).

Les paramètres π_j , $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, appelés paramètres de Bradley-Terry-Luce, s'interprètent selon l'axiome de choix de Luce comme les probabilités de préférence respectives des objets $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ lorsque les q objets sont soumis ensemble à l'appréciation d'un juge. Le paramètre ν s'interprète comme une mesure de la difficulté à discriminer entre les objets. La probabilité de ne pas choisir tend vers 1 lorsque ν tend vers l'infini. Le paramètre $\nu = 0$ correspond à une discrimination certaine. L'indiscernabilité s'exprime ici aussi par le fait que lorsqu'il y a choix il y a une égale probabilité de choisir l'un ou l'autre des deux items, et ce quelque soit les items concernés, ce qui aboutit à l'hypothèse nulle $\nu > 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}, \pi_j = 1/q$. Ainsi, pour répondre à la discernabilité perceptive

$$H_0 : \pi_i = \frac{1}{q}, \forall i \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad \nu > 0$$

contre l'hypothèse alternative de discernabilité perceptive

$$H_1 : \exists i ; \pi_i \neq \frac{1}{q}, \quad \nu > 0.$$

Dans les expériences psychovisuelles, chaque juge a classé un ensemble de q images texturées colorées par rapport au contraste visuel (l'attribut sensoriel de classement) par ordre croissant c'est à dire du contraste le moins élevé au contraste le plus élevé. Le rang 1 est attribué à l'image texturée la moins contrastée visuellement. Il en résulte que dans notre cas, la préférence s'exprime par la sensibilité au contraste visuel. Compte tenu, des indications sur le sens de classement de l'attribut sensoriel, l'image texturée colorée la moins discernable est celle qui a le plus faible contraste visuel et donc le paramètre Bradley-Terry-Luce est le plus élevé. L'indice de discrimination ν est un indicateur global de la capacité de discrimination des juges.

5.2.1 Estimation du paramètre ν sous l'hypothèse nulle

Soient r_1, r_2, \dots, r_n un échantillon de classements avec ex-aequo de taille n supposés indépendants et identiquement distribués suivant le modèle (extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry) défini par

$$p(r; \theta, \gamma) = \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j - \log \{c(\theta, \gamma)\} \right] \quad (5.2.1)$$

$$\text{où } c(\theta, \gamma) = \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\} \theta_j \right] \right).$$

On désigne par $L(\theta, \gamma)$ la vraisemblance du modèle (5.2.2) au point (θ, γ) pour un échantillon indépendant et identiquement distribué $r = r_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ de classement avec ex-aequo de taille n . Sous l'hypothèse nulle H_0 , compte tenu de la réparamétrisation : $\theta_j = \log(\pi_j/\pi_q)$ pour $j = 1, 2, \dots, q$ et $\gamma = \log(\nu)$ avec $\nu > 0$, on a $\theta_0 = 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

On désigne par $\hat{\gamma}_0$ la valeur de γ qui maximise la vraisemblance L sous l'hypothèse nulle H_0 . Sous l'hypothèse nulle H_0 , $\hat{\gamma}_0 = \max_{\gamma} L(0, \gamma)$, où $L(0, \gamma)$ désigne la vraisemblance du modèle $p(r, \theta, \gamma)$ au point $(0, \gamma)$. Soit $l(0, \gamma)$ la log vraisemblance du modèle $p(r, \theta, \gamma)$ au point $(0, \gamma)$, que nous noterons $l(\gamma)$. Il s'agit donc de déterminer $\hat{\gamma}_0 = \max_{\gamma} l(\gamma)$, avec

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} \gamma - n \log \left\{ \sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma \right] \right\}.$$

La maximisation de la log vraisemblance $l(\gamma)$ est faite grâce à l'algorithme MM (cf. Extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry), de fonction auxiliaire $S(\gamma, \gamma^{(m)})$ donnée par la formule ci-après

$$S(\gamma; \gamma^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} \gamma \right] - n \log \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma^{(m)} \right] \right) \\ - \frac{n}{2q(q-1)} \left[\mathbf{E}_{\gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \exp \left\{ q(q-1)(\gamma - \gamma^{(m)}) \right\} \\ - \frac{n}{q(q-1)} \sum_{j=1}^q \left[q - \mathbf{E}_{\gamma^{(m)}}(j) \right] + \frac{n}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{q(q-1)} \left[\mathbf{E}_{\gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\}.$$

La règle de mise à jour s'en déduit par,

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} - q \right] - \log \left[\mathbf{E}_{\gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\},$$

où,

$$\mathbf{E}_{\gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} = \sum_s \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} p(s; 0, \gamma),$$

où $p(r; 0, \gamma)$ que nous noterons $p(r; \gamma)$ dans la suite, est égale $p(r; \theta, \gamma)$ pour le vecteur des paramètres $(0, \gamma)$.

Nous rappelons dans ce qui suit, le théorème d'ergodicité et le théorème central limite donnés dans le cas des classements sans ex-aequo.

Proposition 5.2.1. *Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur l'ensemble fini E . Il existe une unique mesure stationnaire $p(\theta) = (p(s, \theta))$, $s \in E$. Elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Quelle que soit la loi marginale de s_0 , loi de s_N converge vers $p(\theta)$ quand N tend vers $+\infty$.*
2. *$\mathbf{E}_{N, \theta}$ converge presque sûrement vers \mathbf{E}_{θ} quand N tend vers $+\infty$. De plus, d'après le théorème centrale limite $\sqrt{N}(\mathbf{E}_{N, \theta} - \mathbf{E}_{\theta})$ est asymptotiquement gaussien $N(0, \sigma^2)$ d'espérance mathématique 0 et variance σ^2 .*

L'algorithme MM avec procédure de Monte Carlo par chaîne de Markov est défini par,

- i. Simuler une trajectoire s_1, s_2, \dots, s_N d'une chaîne de Markov de loi stationnaire $p(s, \gamma)$, $s \in E$ pour les valeurs courantes du vecteur des paramètres $\gamma^{(m)}$.
- ii. Calculer l'estimation $\mathbf{E}_{N, \gamma^{(m)}}$ de $\mathbf{E}_{\gamma^{(m)}}$.
- iii. Mettre à jour le paramètre, $\gamma^{(m)}$

$$\gamma^{(m+1)} = \gamma^{(m)} + \frac{1}{q(q-1)} \left\{ \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) \right\} - q \right] - \log \left[\mathbf{E}_{N, \theta^{(m)}, \gamma^{(m)}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \right\},$$

En raison du bruit induit par l'échantillonnage de Monte Carlo, il n'est pas raisonnable d'admettre que le gradient $\nabla_{N,\gamma^{(m)}} l(\gamma)$ convergera exactement vers 0 comme dans le cas usuel. Ainsi, le critère d'arrêt utilisé doit tenir compte de l'existence de ce bruit d'échantillonnage. En suivant l'idée de Flegal, Haran *et al.* [57], un critère d'arrêt basé sur une statistique $W(\gamma^{(m)}) = (N/\hat{\sigma})(\mathbf{E}_{N,\gamma^{(m)}} - \mathbf{E}_{\gamma^{(m)}})^2$, où $\hat{\sigma}$ est une estimation consistante de la variance de la variable aléatoire $\mathbf{E}_{N,\gamma^{(m)}}$ peut être proposée. Une estimation consistante de la variance de l'estimateur $\mathbf{E}_{N,\gamma^{(m)}}$ de la moyenne empirique peut être obtenue en faisant recours à la méthode dite *Batching* [57, 85]. Cette méthode est décrite dans le lemme [66, 64] qui suit.

Lemme 5.2.2. *Soit s_1, s_2, \dots, s_N , l'échantillon de Monte Carlo simulé, de taille N à une étape m correspondant au vecteur des paramètres $\gamma^{(m)}$. Les N observations de l'échantillon sont divisées en G sous-échantillons d'observations consécutives appelés groupes, de taille commune b . On suppose $N = G*b$, G et b désignent respectivement le nombre de groupes et la taille commune des groupes. On désigne par $\bar{y}_g, g \in \{1, 2, \dots, G\}$ et m_N respectivement, l'estimateur de la moyenne empirique d'un groupe quelconque g et l'estimateur de la moyenne empirique sur tous les groupes.*

On a

$$\bar{y}_g = \frac{1}{b} \sum_{i=(g-1)b+1}^{gb} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_{i,+}} \lambda_{s_i}^2(\alpha) \right\}, g \in \{1, 2, \dots, G\},$$

$$m_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_{i,+}} \lambda_{s_i}^2(\alpha) \right\} = \sum_{g=1}^G \bar{y}_g.$$

On suppose b suffisamment grand pour que les $\bar{y}_g, g \in \{1, 2, \dots, G\}$ soient indépendants et approximativement $N(m, \sigma^2/b)$. Alors σ^2 peut être approximée par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{b}{G-1} \sum_{g=1}^G (\bar{y}_g - m_N)^2.$$

Une estimation consistante de l'erreur de Monte Carlo commise sur l'estimation de m , soit m_N , par la méthode *Batching* est donnée par $\hat{\sigma}/\sqrt{N}$ lorsque $b = \lfloor N^v \rfloor$ et $G = \lfloor N/b \rfloor$ avec $v \in \mathbb{Q}$.

Proposition 5.2.3. *Soit $m = \mathbf{E}_{\gamma}$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire de loi $p(s, \gamma)$, $s \in E$ et m_N l'estimateur de la moyenne empirique sur tous les groupes par la méthode *Batching*. La statistique*

$$\mathcal{T}_{G-1} = \frac{\sqrt{G}(m_N - m)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/b}} = \frac{\sqrt{N}(m_N - m)}{\hat{\sigma}},$$

est asymptotiquement distribuée suivant la loi de student à $G-1$ degrés de liberté.

Preuve. *En effet,*

les $\bar{y}_g, g \in \{1, 2, \dots, G\}$ sont indépendants et identiquement distribués suivant $N(m, \sigma^2/b)$ et $\hat{\sigma}^2/b$ est une estimation de σ^2/b . Par suite, la statistique

$$\mathcal{T}_{G-1} = \frac{\sqrt{G}(m_N - m)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/b}} = \frac{\sqrt{N}(m_N - m)}{\hat{\sigma}},$$

est asymptotiquement distribuée suivant la loi de student à $G - 1$ degrés de liberté [34].

Proposition 5.2.4. *En utilisant la méthode Batching décrite par lemme ci-dessus, on peut proposer le critère d'arrêt suivant, dans l'algorithme MM : on désigne par $t_{G-1;1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ pour la loi de Student à $G-1$ degrés de liberté. Le critère d'arrêt proposé dans l'algorithme est $|\mathcal{T}_{G-1}| \leq t_{G-1;1-\alpha/2}$.*

Dans la méthode de Batching, l'estimation $\hat{\sigma}$ de σ est consistante lorsque G et b sont choisis tels que $b = [N^v]$ et $G = [N/b]$ [57] avec $v \in \mathbb{Q}$.

5.2.2 Test du rapport de vraisemblance pour tester l'hypothèse de discernabilité perceptive

Dans cette partie, nous analysons les données de classement issues des épreuves psychovisuelles des différents juges à l'aide d'un test de rapport de vraisemblance. Les classements r_1, r_2, \dots, r_n de l'échantillon observé de taille n sont supposés indépendants et identiquement distribués suivant le modèle (extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry) défini par

$$p(r, \theta, \gamma) = \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r^+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j - \log \{c(\theta, \gamma)\} \right] \quad (5.2.2)$$

où $c(\theta, \gamma) = \left(\sum_s \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s^+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\} \theta_j \right] \right)$.

On désigne par $L(\theta, \gamma)$ la vraisemblance du modèle (5.2.2) au point (θ, γ) pour un échantillon indépendant et identiquement distribué $r = r_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ de classement avec ex-aequo de taille n .

Statistique de test

Le test du rapport de vraisemblance généralisé sur les paramètres (θ, γ) est défini à l'aide de la statistique

$$\Lambda_n = \frac{\max_{\gamma} L(\theta_0, \gamma)}{L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}.$$

Alors, sous l'hypothèse nulle H_0 , la statistique du rapport de vraisemblance généralisé Λ_n est telle que :

$$-2 \log \Lambda_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(q-1) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

où $\chi^2(k)$ désigne la loi du chi-deux à k degrés de liberté et $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ correspond à la convergence en loi. Pour une démonstration de ce résultat, le lecteur pourra se reporter à la référence suivante [91].

On rejette l'hypothèse nulle H_0 si $-2 \log \lambda_n > \chi_{1-\alpha}^2(q-1)$. Les valeurs λ_n et $\chi_{1-\alpha}^2(q-1)$ désignent respectivement la valeur prise par la statistique Λ_n et le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi du chi-deux à $q-1$ degrés de liberté.

On a,

$$\log \Lambda_n = \log \left\{ \frac{L(\theta_0, \hat{\gamma}_0)}{L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})} \right\}$$

où,

$$L(\theta, \gamma) = \prod_i^n p(r_i, \theta, \gamma).$$

On obtient sans difficultés,

$$\log \Lambda_n = n \log \left\{ \frac{c(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{c(\theta_0, \hat{\gamma}_0)} \right\} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} (\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}) + \sum_{j=1}^q \{q - r_i^*(j)\} (\hat{\theta}_{0,j} - \hat{\theta}_j) \right].$$

Comme $\theta_0 = 0$, soit $\theta_{0,j} = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$ il vient que,

$$\log \Lambda_n = n \log \left\{ \frac{c(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{c(\theta_0, \hat{\gamma}_0)} \right\} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_{i,+}} \lambda_{r_i}^2(\alpha) - q \right\} (\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}) - \sum_{j=1}^q \{q - r_i^*(j)\} \hat{\theta}_j \right].$$

On voit bien que le calcul de la statistique de test $-2 \log \Lambda_n$ fait intervenir le calcul du quotient $\frac{c(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{c(\theta_0, \hat{\gamma}_0)}$ des constantes de normalisation.

Méthode de Monte Carlo pour le calcul du quotient des constantes de normalisation

La technique que nous utilisons pour calculer ce quotient est appelée *path sampling* (Hunter et Handcock, 2005) [72]. Cette technique est un cas particulier d'une méthode de Monte Carlo appelée *bridge sampling*. L'idée de base de la méthode *path sampling* est donnée par le lemme suivant.

Lemme 5.2.5. *On définit une application suffisamment régulière $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^q$ (q étant la dimension de l'espace des paramètres) qui associe à $u \in [0, 1]$ le vecteur $\varphi(u) = (\theta(u), \gamma(u))$ de \mathbb{R}^q telle que $\varphi(0) = (\theta_0, \hat{\gamma}_0)$ et $\varphi(1) = (\hat{\theta}, \hat{\gamma})$.*

On a,

$$E_{\varphi(u)} \left\{ \frac{d}{du} \log p(r, \varphi(u)) \right\} = \frac{d}{du} \sum_r p(r, \varphi(u)) = 0. \quad (5.2.3)$$

Preuve. *En effet,*

$$\begin{aligned} E_{\varphi(u)} \left\{ \frac{d}{du} \log p(r, \varphi(u)) \right\} &= \sum_r \frac{d}{du} \log \{p(r, \varphi(u))\} p(r, \varphi(u)) \\ &= \sum_r \frac{d}{du} p(r, \varphi(u)) \\ &= \frac{d}{du} \sum_r p(r, \varphi(u)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 5.2.6. *Soit*

$$p(r, \varphi(u)) = \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma(u) + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j(u) - \log \{c(\varphi(u))\} \right], \quad (5.2.4)$$

la probabilité associée au classement avec ex-aequo r .

Soit Z , la statistique exhaustive du modèle $p(r, \varphi(u))$ pour une observation r , définie par

$${}^tZ(r) = \left[\left\{ q - r^*(j) \right\}_{j \in \{1, 2, \dots, q-1\}}, \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{r+} \lambda_r^2(k) - q \right\} \right].$$

On a,

$$\log \left\{ \frac{c(\varphi(1))}{c(\varphi(0))} \right\} = \mathbf{E} \left\{ {}^tZ \left(\frac{d\varphi}{du} \circ U \right) \right\}. \quad (5.2.5)$$

L'opérateur espérance mathématique \mathbf{E} est pris par rapport à la loi conjointe du couple du vecteur aléatoire (U, r) , où U est distribuée suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} et $r \mid U = u$ suivant $p(r, \varphi)$ de paramètre $\varphi(U)$.

Preuve. *En effet, le modèle défini par l'équation (5.2.4) se réécrit*

$$p(r, \varphi(u)) = \exp \left[{}^tZ(r) \cdot \varphi(u) - \log \{c(\varphi(u))\} \right]. \quad (5.2.6)$$

On a,

$$\frac{d}{du} p(r, \varphi(u)) = {}^t\nabla_{\varphi} p(r, \varphi(u)) \cdot \frac{d\varphi(u)}{du},$$

et,

$${}^t\nabla_{\varphi} p(r, \varphi(u)) = \left[{}^tZ(r) - \frac{1}{c(\varphi(u))} {}^t\nabla_{\varphi} c(\varphi(u)) \right] \cdot p(r, \varphi(u)).$$

$$\frac{d}{du}p(r, \varphi(u)) = \left[{}^tZ(r) - \frac{1}{c(\varphi(u))} {}^t\nabla_{\varphi}c(\varphi(u)) \right] \frac{d\varphi(u)}{du} \cdot p(r, \varphi(u)).$$

Il en résulte donc que, compte tenu de l'équation (5.2.3),

$$\sum_r \frac{d}{du}p(r, \varphi(u)) = 0$$

équivalent à,

$$\frac{1}{c(\varphi(u))} {}^t\nabla_{\varphi}c(\varphi(u)) \frac{d\varphi(u)}{du} = \mathbf{E}_{\varphi(u)} \left\{ {}^tZ \frac{d\varphi(u)}{du} \right\}.$$

En intégrant cette dernière égalité sur le segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} , on obtient,

$$\log \left\{ \frac{c(\varphi(1))}{c(\varphi(0))} \right\} = \int_0^1 \mathbf{E}_{\varphi(u)} \left\{ {}^tZ \frac{d\varphi(u)}{du} \right\} du. \quad (5.2.7)$$

On a,

$$\mathbf{E}_{\varphi(u)} \left\{ {}^tZ \frac{d\varphi(u)}{du} \right\} = \mathbf{E} \left\{ {}^tZ \left(\frac{d\varphi}{du} \circ U \right) \mid U = u \right\}$$

par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{E}_{\varphi(u)} \left\{ {}^tZ \frac{d\varphi(u)}{du} \right\} du &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left\{ {}^tZ \left(\frac{d\varphi}{du} \circ U \right) \mid U = u \right\} \right] \\ &= \mathbf{E} \left\{ {}^tZ \left(\frac{d\varphi}{du} \circ U \right) \right\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\log \left\{ \frac{c(\varphi(1))}{c(\varphi(0))} \right\} = \mathbf{E} \left\{ {}^tZ \left(\frac{d\varphi}{du} \circ U \right) \right\}. \quad (5.2.8)$$

L'opérateur espérance mathématique \mathbf{E} est pris par rapport à la loi conjointe du couple du vecteur aléatoire (U, r) , où U est distribuée suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} et $r \mid U = u$ suivant $p(r, \varphi)$ de paramètre $\varphi(U)$.

Corollaire 5.2.7. La quantité $\log \left\{ \frac{c(\varphi(1))}{c(\varphi(0))} \right\}$ peut donc être estimée en simulant un échantillon $(u_1, r_1), \dots, (u_N, r_N)$ de taille N de la conjointe du vecteur aléatoire (U, r) , puis en calculant la moyenne empirique

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N {}^tZ(r_k) \frac{d\varphi}{du} \left(U_k \right).$$

Dans notre implémentation de la technique "path sampling", nous avons considéré la fonction φ définie dans Hunter et Handcock [72] par $\varphi(u) = (\theta_0, \hat{\gamma}_0) + u \cdot (\hat{\theta}, \hat{\gamma})$; ce qui correspond à un chemin linéaire de $(\theta_0, \hat{\gamma}_0)$ vers $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$.

5.2.3 Analyse de la discernabilité perceptive

Les 16 échantillons observés de classement avec ex-aequo sont tous de taille $n = 40$. Dans l'estimation du vecteur des paramètres (θ, γ) du modèle, la taille de l'échantillon de Monte Carlo simulée à chaque étape de l'algorithme MM est fixée à $N = 1500$. La période de préchauffage dans la simulation des échantillons de Monte Carlo est considérée comme fonction du nombre ($q = 20$) d'images texturées colorées à classer dans chaque type de textures et vaut $q^{3.5} \log(q) = 107178$. Le paramètre de puissance v intervenant dans le calcul du nombre de groupes G et de la taille commune b des groupes dans la méthode Batching (cf. Chapitre 1) est fixé à $v = 0.5$. On en déduit que $G = 100$ et $b = 100$. Pour le critère d'arrêt dans l'estimation des paramètres, nous avons considéré le quantile supérieur $f_{q, G-q}$ d'ordre $\alpha = 0.05$ de la loi de Fisher $F_{q, G-q}$ à q et $G - q$ degrés de liberté. On obtient ainsi $f_{q, G-q} = 1.71$.

Ces valeurs restent les mêmes dans l'estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance présenté ci-dessus. Pour le critère d'arrêt correspondant, nous avons considéré le quantile $t_{G-1; 1-\alpha/2}$ d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $G - 1$ degrés de liberté : $t_{G-1; 1-\alpha/2} = 2.02$, pour $\alpha = 0.05$. Il est important de mentionner que le code d'estimation des paramètres (θ, γ) du modèle, initialement écrit dans le langage R met environ huit jours pour l'obtention des résultats. Pour pallier ce problème, nous avons été conduit à écrire ce code en Fortran 90 qui nous a permis dorénavant d'avoir les résultats pendant huit heures en moyenne pour un échantillon observé de classement avec ex-aequo. On fait remarquer que l'algorithme d'estimation des paramètres n'a pas converger pour tous les types de textures dans la teinte bleue.

Les tableaux 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.15, 5.16 et 5.17 résument les estimations obtenues du vecteur des paramètres (θ, γ) du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour classements avec ex-aequo, du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance et les valeurs des statistiques de test correspondantes, pour chaque échantillon de classements avec ex-aequo observé, résultant du classement avec ex-aequo de $q = 20$ images texturées colorées appartenant à une teinte et un type de textures donnés. Nous avons associé aux différentes statistiques de test calculées pour chaque échantillon, les p-valeurs (ou degré de signification des tests) correspondantes afin de permettre d'avoir une réponse indépendante du niveau α et de conclure simplement en comparant le niveau du test α à la p-valeur et donc de pouvoir répondre pour diverses valeurs du niveau α . La p-valeur d'un test est la plus petite des valeurs du niveau α pour lesquelles la valeur observée de la statistique de test conduit au rejet de l'hypothèse nulle H_0 . On sait que la statistique de test du rapport de vraisemblance suit asymptotiquement une loi du chi-deux $\chi^2(q - 1)$ à $q - 1$ degré de liberté sous l'hypothèse nulle. Nous avons considéré que cette propriété demeure vraie pour les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance combinée avec une méthode de Monte Carlo pour l'évaluation des espérances mathématiques.

5.2. ANALYSE DE LA DISCERNABILITÉ PERCEPTIVE DES TEXTURES
 COLORÉES À L'AIDE D'UN TEST DE RAPPORT DE VRAISEMBLANCE DANS LE
 CADRE DU MODÈLE DE MALLOWS-BRADLEY-TERRY 193

Les tests du rapport de vraisemblance de l'hypothèse nulle H_0 de non discernabilité contre l'hypothèse alternative H_1 de discernabilité conduisent au rejet de l'hypothèse nulle H_0 au niveau $\alpha = 0.05$ pour tous les échantillons observés car les p-valeurs sont toutes inférieures à $\alpha = 0.05$. Ainsi, les juges sont en mesure de ne pas confondre toutes les images texturées par rapport au contraste visuel.

Table 5.9 Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte rouge.

RR		RI		RH		RV		Contraste
$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.13$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = -0.04$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.27$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.26$	M
-2.19		-0.70		-0.61		-8.79		0.12
0.95		0.63		0.36		0.79		0.03
0.14		0.12		0.020		0.03		0.06
1.39		1.06		0.75		0.85		0.00
0.76		0.47		0.37		0.60		0.04
1.22		0.78		0.62		0.93		0.02
-3.51		-0.98		-0.84		-10.48		0.13
0.59		0.36		0.27		0.49		0.05
-0.22		-0.09		-0.06		-0.10		0.10
0.08		0.06		0.11		0.05		0.08
1.17		0.81		0.57		0.82		0.01
0.86		0.46		0.44		0.76		0.04
-1.29		-0.54		-0.37		-6.70		0.10
0.64		0.39		0.24		0.65		0.05
-0.27		-0.17		-0.05		-0.22		0.11
-0.36		-0.12		-0.17		-0.48		0.09
-0.03		-0.01		-0.02		-0.54		0.08
0.51		0.27		0.25		0.40		0.06
1.36		0.97		0.67		0.84		0.01
0		0		0		0		0.07

Table 5.10 Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte rouge.

Textures	RR	RI	RH	RV
$\hat{\gamma}_0$	0.10	-0.03	0.26	0.25

Table 5.11 Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte rouge.

Textures	Statistiques de test	P-valeurs
RR	1361.17	0.00
RI	1000.77	0.00
RH	822.04	0.00
RV	1534.80	0.00

Table 5.12 Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte verte.

GR		GI		GH		GV		Contraste
$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = -0.37$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = -0.50$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.10$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.19$	M
-4.58		-3.13		-1.54		-1.49		0.23
0.83		0.59		0.39		0.51		0.05
-0.41		-0.56		-0.26		-0.24		0.12
2.30		3.47		1.10		0.80		0.00
0.56		0.23		0.22		0.29		0.07
1.45		1.22		0.72		0.82		0.05
-6.52		-4.48		-2.25		-1.54		0.26
0.18		-0.04		0.07		0.17		0.10
-0.37		-0.44		-0.02		-0.02		0.18
-0.23		-0.33		0.01		0.07		0.16
1.16		0.89		0.50		0.67		0.02
1.17		0.91		0.59		0.64		0.07
-3.17		-2.28		-1.18		-0.88		0.20
0.52		0.31		0.27		0.29		0.09
-0.80		-0.85		-0.10		-0.16		0.20
-1.64		-1.42		-0.88		-0.64		0.18
-0.73		-0.94		-0.46		-0.31		0.15
0.28		0.13		0.26		0.29		0.12
1.94		1.61		0.95		0.83		0.02
0		0		0		0		0.14

Table 5.13 Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte verte.

Textures	GR	GI	GH	GV
$\hat{\gamma}_0$	-0.16	-0.19	0.24	0.26

5.2. ANALYSE DE LA DISCERNABILITÉ PERCEPTIVE DES TEXTURES
 COLORÉES À L'AIDE D'UN TEST DE RAPPORT DE VRAISEMBLANCE DANS LE
 CADRE DU MODÈLE DE MALLOWS-BRADLEY-TERRY 195

Table 5.14 Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte verte.

Textures	Statistique	P-valeurs
GR	1748.30	0.00
GI	1767.14	0.00
GH	1203.21	0.00
GV	1158.61	0.00

Table 5.15 Estimation des paramètres θ et γ du modèle pour chaque type de textures dans la teinte jaune.

YR		YI		YH		YV		Contraste
$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.39$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = -0.10$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.36$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma} = 0.40$	M
-0.93		-3.82		-0.46		-0.46		0.05
1.14		1.81		0.64		0.49		0.01
0.51		0.43		0.33		0.40		0.03
1.35		3.20		0.84		0.49		0.00
0.97		1.20		0.63		0.44		0.02
1.08		1.49		0.65		0.64		0.01
-1.51		-4.64		-0.55		-0.70		0.06
0.80		0.90		0.50		0.42		0.02
-0.49		-2.15		-0.09		-0.07		0.05
0.06		-1.21		-0.01		0.09		0.04
1.28		2.69		0.76		0.51		0.00
0.80		0.97		0.53		0.57		0.02
-0.47		-2.38		-0.26		-0.21		0.05
0.64		0.46		0.27		0.51		0.02
-0.53		-2.27		-0.20		-0.21		0.05
0.03		-0.83		0.02		0.14		0.04
0.26		-0.43		0.11		0.18		0.04
0.49		0.03		0.19		0.33		0.03
1.31		2.31		0.85		0.52		0.01
0		0		0		0		0.03

Table 5.16 Estimation du paramètre γ_0 intervenant dans le test du rapport de vraisemblance pour chaque type de textures dans la teinte jaune.

Textures	YR	YI	YH	YV
$\hat{\gamma}_0$	0.26	0.10	0.26	0.26

Table 5.17 Valeurs des statistiques de test et P-valeurs associées pour les données observées dans chaque type de textures dans la teinte Jaune.

Textures	Statistique	P-valeurs
YR	1117.66	0.00
YI	2112.37	0.00
YH	809.57	0.00
YV	644.34	0.00

Les figures 5.10, 5.11 et 5.12 représentent les variations des paramètres de Bradley-Terry-Luce estimés en fonction des contrastes de Michelson associés aux images texturées colorées sur le continuum physique. Les paramètres de Bradley-Terry-Luce π_j , $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ sont déduits des estimations $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ des paramètres (θ, γ) , grâce à la propriété d'invariance d'un estimateur du maximum de vraisemblance à partir de la relation suivante : $\pi_j = \frac{\exp(\theta_j)}{\sum_{l=1}^q \exp(\theta_l)}$, $j = 1, 2, \dots, q$. Les différentes courbes sur les graphes sont obtenues par interpolation polynomiale à travers les nuages de points grâce à la fonction `lowess()` de l'environnement de calcul scientifique R [130]. On rappelle que les paramètres π_j , $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, de Bradley-Terry-Luce, s'interprètent comme les probabilités de sensibilité respectives des juges associées aux images texturées colorées $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ lorsque les q objets sont soumis ensemble à l'appréciation d'un juge. Comme on peut le voir sur tous les graphes, les valeurs des paramètres de Bradley-Terry-Luce augmentent lorsque les valeurs des contrastes de Michelson associées aux images texturées colorées diminuent quelque soit le signe des écarts de luminances. En d'autres termes, plus les contrastes de Michelson des textures sont faibles moins les juges sont sensibles aux contrastes. Ce qui est en accord avec les consignes données aux juges lors des épreuves de classement des images texturées colorées .

5.2. ANALYSE DE LA DISCERNABILITÉ PERCEPTIVE DES TEXTURES COLORÉES À L'AIDE D'UN TEST DE RAPPORT DE VRAISEMBLANCE DANS LE CADRE DU MODÈLE DE MALLOWS-BRADLEY-TERRY 197

Figure 5.10 Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte rouge.

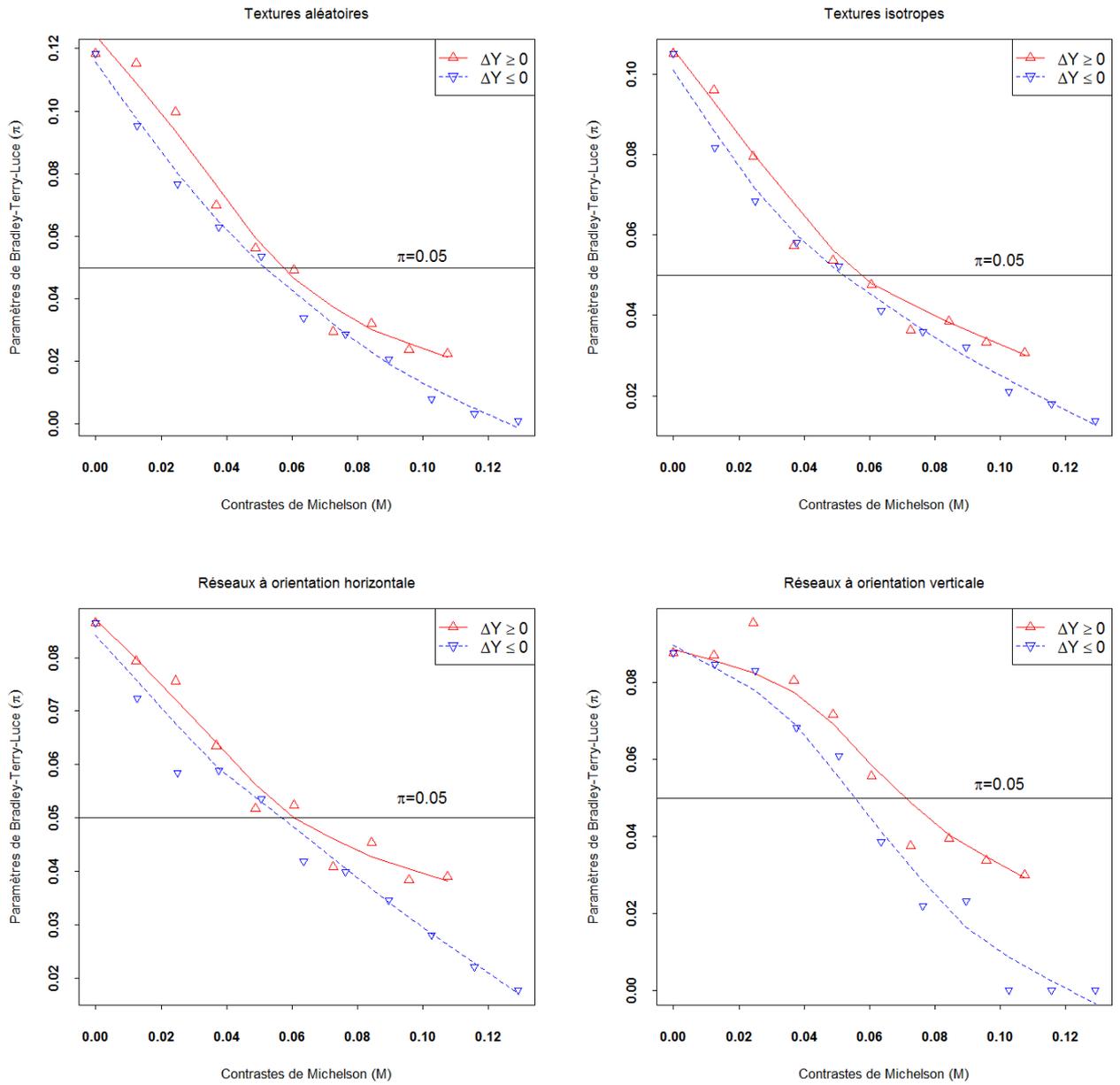


Figure 5.11 Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte verte.

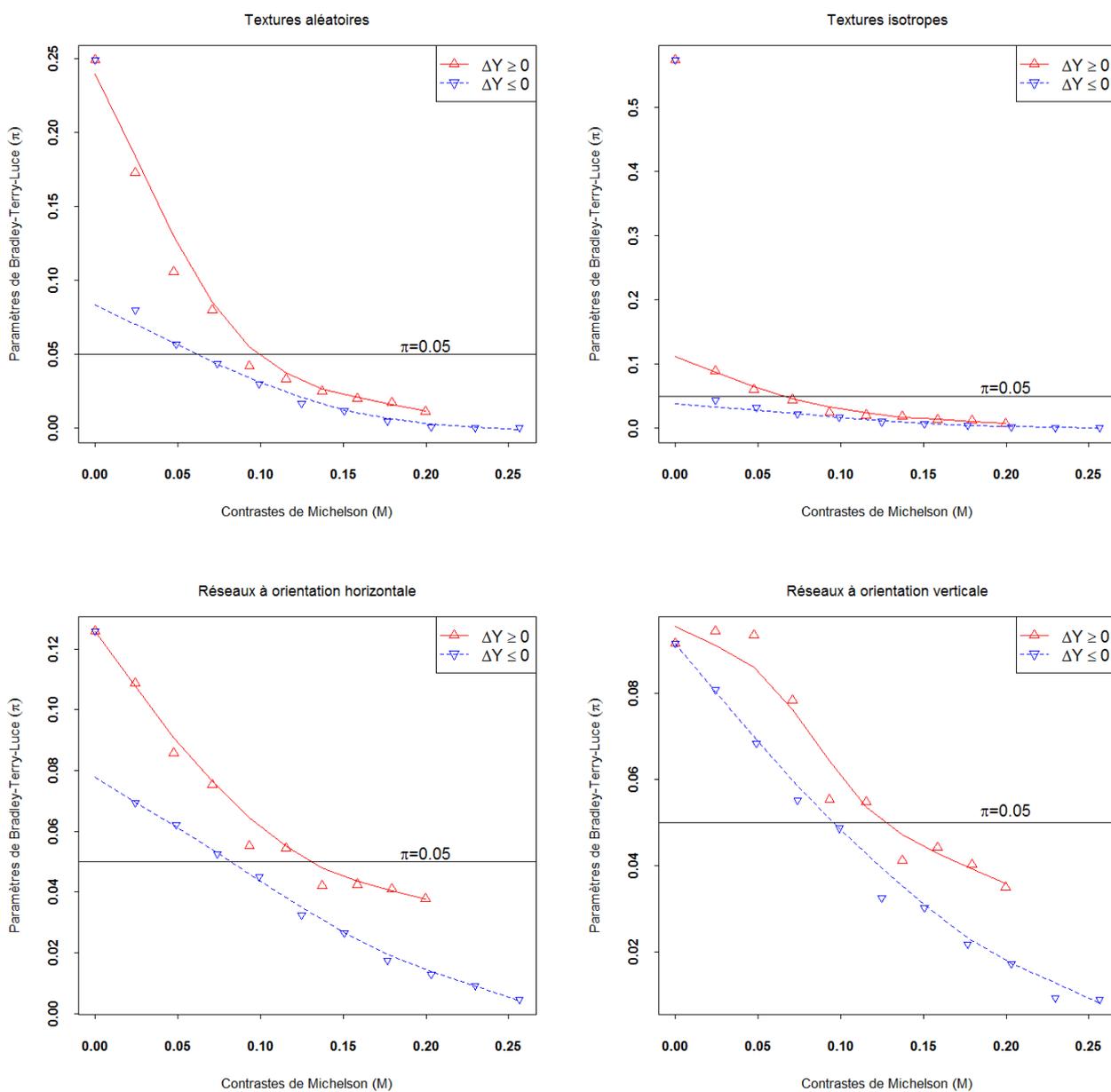
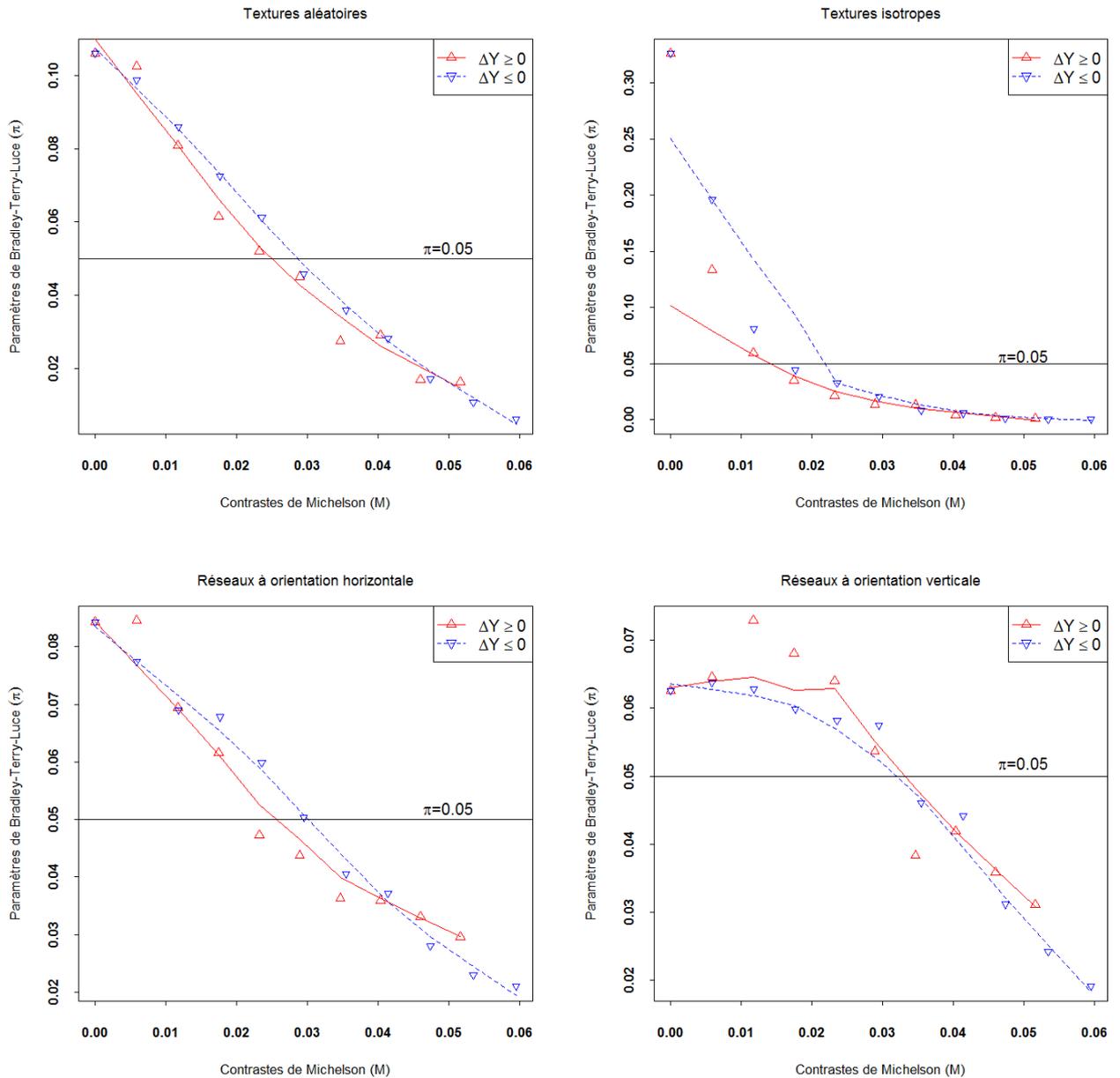


Figure 5.12 Variation des paramètres $(\pi_j)_{j=1,2,\dots,q}$ de Bradley-Terry-Luce en fonction des contrastes de Michelson M pour les différents types de textures considérés dans la teinte jaune.



5.2.4 Conclusion

Les estimations des paramètres de Bradley-Terry-Luce obtenues à partir des échantillons observés de classement avec ex-aequo montrent que les classements

des juges sont cohérents avec les consignes données lors des mesures visuelles de classement des textures quelque soit le type de texture et le niveau de teinte. En outre, l'inférence sur les paramètres de Bradley-Terry-Luce permettent de conclure que les juges ont été à mesure de ne pas confondre toutes les images. En somme, nous avons ainsi montré l'existence d'une échelle de discernabilité sensorielle pour tous les types de textures dans toutes les teintes sauf la teinte bleue.

Conclusion générale et perspectives

Notre travail a consisté à faire le lien entre une évaluation métrologique instrumentale des textures « lumineuses » produites par des surfaces texturées colorées et une évaluation basée sur des tests psychophysiques réalisés par des observateurs humains. La question ayant servi de base à notre travail de mise au point a porté sur l'évaluation de l'influence de la composante chromatique d'un signal texturé biphasé sur la perceptibilité des contrastes induits par une différence de luminosité entre phases. Quatre types de distribution spatiale de ces deux couleurs ont été retenus : des textures aléatoires, des textures isotropes, des réseaux à orientation horizontale et des réseaux à orientation verticale. Pour chaque type de distribution spatiale nous avons produit quatre groupes de $q = 20$ images test (Rouge, Vert, Bleu et Jaune) pour lesquelles partant d'une surface unie, nous avons augmenté progressivement l'écart de luminance entre les deux phases couleur.

La problématique a été étudiée à travers la combinaison de deux approches : une approche expérimentale et une approche statistique de l'analyse des données et l'inférence. L'approche expérimentale a conduit à mettre en place un environnement de test avec des conditions expérimentales fixées et maintenues sous contrôle (cf. Chapitre 3 et Chapitre 4). Les mesures visuelles ont consisté en une épreuve de classement des différents stimuli considérés, par des juges ou observateurs possédant une vue correcte ou corrigée suivant un critère de contraste visuel.

Les deux approches statistiques considérées pour l'analyse des données à savoir l'ajustement des rangs moyens par un modèle factoriel à effets fixes et l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry que nous avons développée au chapitre 1, donnent des résultats cohérents et complémentaires : les résultats obtenus montrent que la capacité des juges à discriminer les textures sur la base du critère de contraste visuel varie en fonction du niveau de teinte et du type de texture. Elle est plus élevée dans la teinte verte ce qui est cohérent avec la fonction d'efficacité lumineuse normalisée de l'œil humain en vision photopique. En outre, le classement des images texturées colorées suivant le contraste visuel est cohérent avec le continuum physique caractérisé par le contraste de Michelson quelque soit

le type de texture et le niveau de teinte. On peut donc conclure qu'une relation d'ordre basée sur le calcul du contraste de Michelson correspond à la mise en ordre obtenue lors des expériences psychophysiques. De plus, l'attribut sensoriel de contraste visuel se présente bien comme un continuum sensoriel que l'on peut quantifier en construisant perceptivement une échelle de discernabilité. Le fait que les relations fonctionnelles mises en évidence diffèrent d'un type de texture à un autre pour une teinte donnée et d'une teinte à une autre pour un type de texture donné suggère l'hypothèse que cette échelle sensorielle dépend de la chrominance des phases colorées et/ou du type de texture. Dans les épreuves de classement, il apparaît que chaque juge met en moyenne 1h30mn pour une épreuve complète, ce qui est un peu long, même avec la faculté très remarquable d'adaptation chromatique que possède le système visuel humain. En effet, la fatigue altère le jugement de l'observateur. De plus, la dimension de l'espace des paramètres du (modèle de Mallows-Bradley-Terry étendu pour classement avec ex-aequo) égale à $q = 20$ pour $q = 20$ objets à classer est élevée, faisant en sorte que le nombre d'itérations nécessaires aux convergences dans les algorithmes d'estimation des paramètres est grand. L'algorithme d'estimation des paramètres pour les types de textures dans la teinte bleue n'a pas convergé.

Nous avons pu déceler quelques pistes de réflexion à venir pour mieux valoriser ce travail, notamment :

- dans ce travail (cf. Chapitre 1), l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry proposée pour classement avec ex-aequo est basée sur l'extension du modèle de Bradley-Terry proposée pour classement avec ex-aequo par Davidson [39]. Une autre façon d'envisager cette extension pourrait considérer l'extension du modèle de Bradley-Terry pour classement avec ex-aequo proposée par Rao et Kupper [113] ;
- l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry (avec ou sans ex-aequo) combinée avec les méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov ;
- dans la description physique des images texturées colorées, le système colorimétrique que nous avons utilisé est le système XYZ CIE 1931 qui utilise l'observateur standard 2° et la formule de contraste utilisée est le contraste de Michelson. Cette description pourrait être faite en utilisant les espaces colorimétriques LMS et AC1C2 [132] ou les modèles d'apparences colorées notamment le CIECAM97s qui permettent de prendre en compte l'environnement ;
- dans la synthèse des images texturées colorées, nous nous sommes appuyés sur la notion du pouvoir séparateur de l'œil qui se définit comme l'angle limite sous lequel l'œil normal sépare deux points lumineux (pixels) de l'écran, on pourrait envisager l'étude en considérant un angle plus grand que celui défini par le pouvoir séparateur de l'œil ; cela pourrait éventuellement

- augmenter la perception du contraste visuel surtout au niveau de la teinte bleue et permettre la convergence de l'algorithme ;
- envisager l'étude des stimuli avec d'autres protocoles expérimentaux (méthodes visuelles) comme les comparaisons par paires ou les méthodes duotrio [53, 7] ;
 - les résultats obtenus montrent qu'avec les stimuli d'investigation, l'attribut sensoriel de contraste visuel se présente bien comme un continuum sensoriel que l'on peut quantifier en construisant perceptivement une échelle de discernabilité. La graduation de cette échelle sensorielle dans chaque catégorie de texture s'appuie sur les notions de seuil absolu et de seuil différentiel. Plusieurs méthodes de déterminations de ces seuils existent dans la littérature [53, 7, 80].

Bibliographie

- [1] ADLER, M., BOUTELL, T., BRUNSCHEN, C., COSTELLO, A. M., CROCKER, L., DILGER, A., FROMME, O., GAILLY, J. L., LILLEY, C., POOLE, R., ROELOFS, G., AND SCHAIK, W. V. *Portable Network Graphics (PNG) Specification (Second Edition) Information technology-Computer graphics and image processing -Portable Network Graphics (PNG) : Functional specification . ISO/IEC 15948 :2003(E)*. David Duce, Oxford Brookes University (Second Edition), November 2003.
- [2] ALLEYSON, D. *Traitement du signal chromatique dans la rétine : un modèle de base pour la perception humaine des couleurs*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1999.
- [3] ANTONIADIS, A., BERRUYER, J., AND CARMONA, R. *Regression Non Linéaire et Applications*. Economica, 1992.
- [4] ARDILLY, P. *Les techniques de Sondage*. Technip, 1994.
- [5] ARSLAN, O., PIZLO, Z., AND ALLEBACH, J. Crt calibration techniques for better accuracy including low luminance colors. *Color Imaging IX : Processing, Hardcopy, and Applications*. (Décembre 2003).
- [6] AZAIS, J., AND BARDET, J. *Le modèle Linéaire par l'Exemple : Régression, Analyse de la Variance et Plans d'Expériences Illustrées avec R, SAS et Splus*. Dunod, 2005.
- [7] BAGOT, J. *Information, Sensation et Perception*. Armand Colin, 1996.
- [8] BARRÉ, A., AND DOLLET, L. *Analyse de texture par fourier*. 2005.
- [9] BARTHELEMY, J., CLEMENT, J., DANZART, M., ISSANCHOU, S., KOSTER, E., LEOD, P. M., NICOD, H., SAUVAGEOT, F., STRIGLER, F., AND TOURAILLE, C. *Evaluation sensorielle : Manuel méthodologique*. Technique et documentation, 1998.
- [10] BARTOLI, N., AND DEL MORAL, P. *Simulation et algorithmes stochastiques : une introduction avec applications*, cépaduès ed., 2001.
- [11] BEASLEY, T., AND LEITNER, D. Nonparametric test for ordered alternatives : Extension of page s l test for two groups of unequal size.
- [12] BELLAICHE, P. *Les Secrets de l'image Vidéo*. EYROLLES, 2006.

- [13] BERNARD, G. *Modélisation Probabiliste et Statistique*. CEPADUES-EDITIONS, 2002.
- [14] BERNS, R. S. Methods for characterizing crt displays. *Munsell Color Science Laboratory* (1996).
- [15] BERNS, R. S., J.MOTTA, R., AND E.GORZYNSKY, M. Crt colorimetry. part i : Theory and practice. *Color research and application* (October 1993).
- [16] BIVAND, R., LEISCH, F., AND MACHLER, M. *Bitmap Images (Pixel Maps)*. R package version 0.4-10, Mai 2007.
- [17] BLEKAS, K., A., L., N.P., G., AND I.E, L. A spatially-constrained mixture model for image segmentation. *Neural Networks, IEEE Transactions on* (March 2005).
- [18] BÖHNING, D., AND LINDSAY, B. Monotonicity of quadratic-approximation algorithms. *Annals of the Institute of Statistics.Math 40* (1988), 641–663.
- [19] BONNANS, F. *Optimisation Continue : Cours et problèmes corrigés*. Dunod, Paris, 2006.
- [20] BRAINARD, D. Calibration of a computer controlled color monitor. *John Wiley* (1989).
- [21] BREMOND, R. Respect des niveaux de visibilité dans la restitution d’images de synthèse en unités physiques. Quinzièmes journées de l’association française d’informatique Graphique, 2002.
- [22] BROWN, P. J. *Measurement, Regression, and Calibration*. Oxford University Press Inc., New York, 1993.
- [23] CAPPÉ, O., ROBERT, C., AND RYDEN, T. Reversible jump mcmc converging to birth -and-death mcmc and more general continuous time samplers. *J.Royal Statis. Society Series B65 3* (2003), 679–700.
- [24] CHALMOND, B. *Eléments de modélisation pour l’analyse d’images*. Springer-Verlag, 2000.
- [25] CHRISMENT, A., DURCHON, P., LANTHONY, P., AND TAVERNIER, I. *Communiquer par la couleur : Mesurer, Reproduire, Observer, Vivre la couleur*. Editions 3c conseil, 1994.
- [26] CLAUSTRIAUX, J.-J. Considérations sur l’analyse statistique de données sensorielles. *Biotechnol.Agron.Soc.Environ* (Juillet 2001).
- [27] COCQUEREZ, J., AND PHILIPP, S. *Analyse d’images : filtrage et segmentation*. Masson, Paris, 1995.
- [28] COURCOUX, P., AND SÉMÉNOU, M. Preference data analysis using a paired comparison model. *Food quality and preference 8* (1997), 353–358.
- [29] COWAN, W. An inexpensive scheme for a colour monitor calibration in terms of cie coordinates. *Computer Graphics* (July 1983).

- [30] CRITCHLOW, D., AND FLIGNER, M. Ranking models with item covariates. *Probability Models and Statistical Analyses for Ranking Data. Lecture Notes in Statist. 80 1-19. Springer, New York. 80* (1993).
- [31] CRITCHLOW, D., FLIGNER, M., AND VERDUCCI, J. Probability models rankings. *Journal of mathematical psychology 35* (1991), 294–318.
- [32] CRITCHLOW, E., AND FLIGNER, A. M. Paired comparison, triple comparison, and ranking experiments as generalized linear models, and their implementation on glim. *Psychometrika 56*, 3 (September 1991), 517–533.
- [33] CROSS, R. G., AND JAIN, A. K. Markov random field textures models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 5* (1983).
- [34] DAUDIN, J. J., ROBIN, S., AND VUILLET, C. *Statistique Inférentielle : Idées, démarches, exemples*. Presses universitaires de Rennes, 1999.
- [35] DAUDIN, J.-J., ROBIN, S., AND VUILLET, C. *Statistique inférentielle : Idées, démarches, exemples*, presses universitaires de rennes ed. 1999.
- [36] DAVID. Microsoft powerpoint - perception-ecarts-couleur-tremeau-avril04 [lecture seule]. Tech. rep., 2004.
- [37] DAVID, B., AND WITH CONTRIBUTIONS FROM MANY OTHERS. *xtable : Export tables to LaTeX or HTML*. R package version 1.5-2, 2007.
- [38] DAVID, L., AND CALHOUN, S. An evaluation of methods for producing desired colors on crt monitors. *Color Research and Application* (1989).
- [39] DAVIDSON, R. R. On extending the bradley-terry model to accommodate ties in paired comparison experiments. *Journal of the American Statistical Association 65*, 329 (1970), 317–328.
- [40] D’ELIA, A. Modelling ranks using the inverse hypergeometric distribution. *Statistical Modelling 3* (2002).
- [41] DELORME, A., AND FLÜCKIGER, M. *Perception et réalité : une introduction à la psychologie des perceptions*. de boeck, 2003.
- [42] DERIN, H. *The use of Gibbs distributions in image processing*. in *Communications and Networks : A survey of Recent Advances*, I.Blake and V.Poor., 1985.
- [43] DIACONIS, P. *Group representations in probability and statistics*. 1988.
- [44] DIMITRIADOU, E., HORNİK, K., LEISCH, F., MEYER, M., , AND WEINGESSEL, A. *e1071 : Misc Functions of the Department of Statistics (e1071)*, TU Wien. R package version 1.5-18, 2008.
- [45] DITTRICH, R., KATZENBEISSER, W., AND REISINGER, H. The analysis of rank ordered preference data based on bradley-terry type models. *OR Spektrum 22*, 1 (2000), 117–134.
- [46] DOUGLAS, C., AND GREEN, E. P. Psychometric methods marketing research part conjoint analysis. *Journal of marketing research 32* (1995).

- [47] DOUGLAS, C., AND GREEN, E. P. psychometric methods marketing research part multidimensional scaling. *Journal of marketing research* 34 (1997).
- [48] DRESS, F. *Probabilités et Statistiques de A à Z*. Dunod, 2004.
- [49] DROESBEKE, J., LEJEUNE, M., AND G., S. *Modèles Statistiques pour données qualitatives*, technip, paris ed. 2005.
- [50] DUPONT, D., AND STEEN, D. Colorimétrie : Elements théoriques. *Science de l'ingénieur* (Décembre 2004).
- [51] DUPONT, D., AND STEEN, D. Colorimétrie : Mesure des couleurs de surface. *Techniques de l'ingénieur* (Décembre 2004).
- [52] FAHOOME, G. Twenty non parametric statistics and their large sample approximations. *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 1, 2 (2002).
- [53] FALMAGNE, J.-C. *Elements of Psychophysical Theory*. Oxford University Press, Inc, 1985.
- [54] FERNANDEZ-MALOIGNE, C. Traitement et analyse d'images couleur, Adresse URL : [http //www-sic.univ-poitiers.fr/action/](http://www-sic.univ-poitiers.fr/action/).
- [55] FERRAND, P. *Sensibilité au contraste Perception spatiale et temporelle*. Institut Fresnel, CNRS UMR 6133, EGIM-Domaine universitaire de Saint Jérôme, 13397 Marseille Cedex 20, e-mail : patrick.ferrand@fresnel.fr, Janvier 2004.
- [56] FIRTH, D. *BradleyTerry : Bradley-Terry models*. R package version 0.8-5, 2005.
- [57] FLEGAL, J., HARAN, M., AND JONES, G. Markov chain monte carlo : Can we trust the third significant figure? *arXiv :math 0703746v4* (2008).
- [58] FLIGNER, A. M., AND VERDUCCI, S. Multistage ranking models. *Journal of the American Statistical association* (1988).
- [59] FOATA, D., AND FUCHS, A. *Calcul des probabilités*. Dunod, 2003.
- [60] FORD, A., AND ROBERTS, A. *Colour Space Conversions*. ajoec1@wmin.ac.uk and Alan.Roberts@rd.bbc.co.uk, August 1998.
- [61] FORSYTH, A. D., AND PONSE, J. *Computer Vision : a modern approach*. Prentice Hall; US Ed edition, August 2002.
- [62] FOUDRINIER, D. *Statistique inférentielle*. Dunod, 2002.
- [63] GEYER, C. Markov chain monte carlo maximum likelihood. *Computing Science and Statistics : Proceedings of 23rd Symp. Interface* (1991), 156–163.
- [64] GEYER, C. Pratical markov chain monte carlo. *Statistical Science* 7, 4 (1992), 473–483.
- [65] GEYER, C. On the convergence of monte carlo maximum likelihood calculations. *Journal of the Royal Statistical Society, B* 56, 1 (1994).

- [66] GILKS, W., RICHARDSON, S., AND SPIEGELHALTER, D. *Markov Chain Monte Carlo In Practice*. Chapman Hall/CCRC, ?
- [67] GREEN, P. Reversible jump markov chain monte carlo computation and bayesian model determination. *Biometrika* 82 (1995), 711–732.
- [68] GREGORY, R. W., BEN, B., AND THOMAS, L. *gtools : Various R programming tools*. R package version 2.4.0, 2008.
- [69] GUYADER, N. *Scènes Visuelles : Catégorisation basée sur des modèles de perception. Approches (neuro) computationnelle et psychophysique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble I, 2004.
- [70] HALUK, D., AND HOWARD, E. Modeling segmentation noisy textured images using gibbs random fields. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9 (1987).
- [71] HENRY, J. Permutation probabilities as models for horse races. *J.R.Statist.Soc.B* (1980).
- [72] HUNTER, D., AND HANDCOCK, M. Inference in curved exponential family models for networks. ? ? (2005), 1–27.
- [73] HUNTER, D., AND HANDCOCK, M. Inference in curved exponential family models for networks. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 15, 3 (2006), 565–583.
- [74] HUNTER, D., AND LANGE, K. A tutorial on MM algorithms. *The American Statistician* 58, 1 (2004), 30–37.
- [75] HUSSON, F., AND CAUSEUR, D. Une extension bidimensionnelle du modèle de bradley-terry pour les comparaisons par paires.
- [76] HUSSON, F., LÊ, S., AND MAZET, J. *The Factor Analysis and Data Mining with R*. <http://factominer.free.fr>, <http://www.agrocampus-rennes.fr/math>, October 2006.
- [77] IHAKA, R. *colorspace : Colorspace Manipulation*. R package version 0.95, Novembre 2006.
- [78] IMBERT, M. Neuroscience et neuropsychologie de la vision des couleurs. In *Ecole de Printemps* (2005).
- [79] INC., N. S. *rimage : Image Processing Module for R*. R package version 0.5-7, 2005.
- [80] IVERSON, G., AND LUCE, D. R. *The Representational Measurement Approach to Psychophysical and Judgmental Problems*. 1998.
- [81] JAIN, A. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989.
- [82] JAIN, A. K., AND TUCERYAN, M. Texture analysis. *The Handbook of Pattern and Computer vision (2nd Edition)*, by C.H.Chen, L.F.Pau, P.S.P.Wang (eds.), World Scientific Publishing Co. (1998).

- [83] JERVIC. Cours vision 1. Tech. rep., <http://iusti.polytech.univ-mrs.fr/vicente/supportcours/vision1-2006.pdf>, 2006.
- [84] JONES, G., HARAN, M., CAFFO, B., AND NEATH, R. Fixed -width output analysis for markov chain monte carlo. *Journal of the American Statistical Association* 101 (2006), 1537–1547.
- [85] KUK, A., AND CHENG, Y. The monte carlo newton-raphson algorithm. *Journal of Statistical Computing and Simulation* 59, 2 (1997), 233–250.
- [86] KUK, A., AND CHENG, Y. Pointwise and functional approximation in monte carlo maximum likelihood estimation. *Statistics and Computing* 9 (1999), 91–99.
- [87] LANGE, K. *Numerical Analysis for Statisticians*. Springer, 2000.
- [88] LANGE, K., HUNTER, D. R., AND YANG, I. Optimization transfert using surrogate objective functions. *Computational and Graphical Statistics* (1999).
- [89] LE ROHELLEC, J. Entre forme et couleur. In *La couleur des matériaux : langage, couleur, cognition* (2005).
- [90] LECOUTRE, J., AND TASSI, P. *Statistique non paramétrique et robustesse*, economica ed. 1987.
- [91] LEJEUNE, M. *Statistique, la théorie et ses applications*. Springer, 2004.
- [92] LENOBLE, P. M. *La rédaction scientifique : conception, rédaction, présentation, signalétique*, de boeck ed. 2005.
- [93] LI, S. Z. *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*. Springer-Verlag, 1995.
- [94] LINGRAND, D. *Introduction aux traitements d'images*. Vuibert, 2004.
- [95] MARDEN, J. I. *Analysing and Modeling Rank Data*. Chapman Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK, 1995.
- [96] MAYDEU-OLIVARES, A. Thurstonian modelling of ranking data via mean and covariance structure analysis. *Psychometrika* (September 1999).
- [97] MCCULLOCH, C. Maximum likelihood algorithms for generalized linear mixed models. *Journal of American Statistical Association* 92 (1997), 162–170.
- [98] MEYNERS, M. On the number of perceivers in a triangle test with replications. *Food Quality and preference* (November 1999).
- [99] NELSEN, B. *Information and Exponential Families In Statistical Theory*. John Wiley Sons, Ltd, 1978.
- [100] PAGET, D. *Nonparametric Markov Random Field Models for Natural Texture Images*. PhD thesis, The University of Queensland, February 1999.

- [101] PAGET, R., AND LONGSTAFF, I. Texture synthesis and unsupervised recognition with nonparametric multiscale markov random field models. *IEEE Transactions on Pami* (1997).
- [102] PAGET, R., AND LONGSTAFF, I. Texture synthesis via a noncausal non-parametric multiscale markov random field. *IEEE transactions on image processing* (June 1998).
- [103] PAL, N. R., AND PAL, S. K. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition* (Mars 1993).
- [104] PALMA, A., AND THISSE, J.-F. Les modèles de choix discrets. *Annales d'Economie et de Statistique*, 9 (1987).
- [105] PELLETIER, M. *Borland Delphi 5 : De l'initiationà la maîtrise*. CampusPress France, 2000.
- [106] PETRA, K., AND BILL, V. *An introduction to R : software for statistical modelling and computing*. CSIRO (commonwealth scientific and industrial research organization, 2005).
- [107] PETROU, M., AND SEVILLA, P. G. *Image processing : dealing with texture*. John Wiley, 2004.
- [108] PIRIE, W. Page test for ordered alternatives. *Encyclopedia of Statistical Sciences 4* (1983).
- [109] POYNTON, C. *Frequently Asked Questions about Color*. poynton@poynton.com, 1997.
- [110] POYNTON, C. *Frequently Asked Questions about Gamma*. poynton@poynton.com, 1998.
- [111] PRESCOTT, P., AND SHAHLAEE, R. The analysis of ranked data in blocked factorial experiments. *Metrika* (February 1999).
- [112] RADU, I., AND JOHN, D. Colour monitor calibration based on cie standards. *IBM Press* (1993).
- [113] RAO, P., AND KUPPER, L. Ties in paired -comparison experiments : A generalization of the bradley-terry model. *Journal of the American Statistical Association 62* (1967), 194–204.
- [114] RAYMOND, S. *Le petit livre de tex*. *InterEditions 1989*.
- [115] RIBEIRO, J., AND DIGGLE, P. geor : a package for geostatistical analysis. *R-NEWS 1* (2001).
- [116] RICHARDSON, S., AND GREEN, P. On bayesian analysis of mixtures with an unknown number of components (with discussion). *J.Roy.Statist.Soc. Ser.B59* (1997), 731–792.
- [117] ROBERT, C. *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de markov*. Economica, 1996.

- [118] ROBERT, C., AND CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, 2004.
- [119] ROBERT, C.P. AND CASELLA, G. Monte carlo statistical methods. *2nd edition, Springer* (2004).
- [120] ROSS, I. Colours for presentation graphics. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing (DSC 2003)* (2003).
- [121] RUBLIK, F. On rank based multiple comparisons for the balanced samples sizes. *Measurement Science review* (2005).
- [122] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des données et statistiques*. Technip, Paris, 1990.
- [123] SAWIŁOWSKY, S., AND FAHOOME, G. Pages ordered alternatives test. *Encyclopedia of Statistics in behavioral Science 3* (2005).
- [124] SCHLICH, P., DACREMONT, C., AND BROCKHOFF, B. P. Application of replicated difference testing. *Food quality and Preference* (April 1999).
- [125] SÈVE, R. *Physique de la couleur*. Masson, Paris, 1996.
- [126] STAN Z, L. *Modeling Image Analysis Problems Using Markov Random Fields*. 2000.
- [127] STEIGER, N., AND WILSON, J. Experimental performance evaluation of the batch means procedures for simulation output analysis. In *J.A. Joines, R.R. Barton, K. Kang, and P.A. Fishwick (Eds) : Proceedings of the winter Simulation Conference* (2000), 627–636.
- [128] TAKASHINA, T. : SYSTEMS INC, N. Image processing module for r : the rimage package.
- [129] TASSI, P. *Méthodes Statistiques*, economica ed. 2004.
- [130] TEAM, R. D. C. *R : A Language and Environment for Statistical Computing*, <http://www.r-project.org> ed. R Foundation for Statistical Computing, 2008.
- [131] TRÉMAU, A. Eléments de base de la colorimétrie. Tech. rep., Laboratoire LIGIV-Université Jean Monnet, tremeau@ligiv.org.
- [132] TRÉMAU, A., FERNANDEZ-MALOIGNE, C., AND BONTON, P. *Image numérique couleur (De l'acquisition au traitement)*. Dunod, Paris, 2000.
- [133] URBANEK, S. R graphics device using cairo graphics library for creating high-quality bitmap (png, jpeg, tiff), vector (pdf, svg, postscript) and display (x11 and win32) output.
- [134] VADEBY, A. *On Gibbs Sampler and Metropolis -Hastings to Pairwise Poisson and Car Crash Data*. March 2003.

- [135] VANDENBROUCKE, N. *Segmentation d'images couleur par classification de pixels dans des espaces d'attributs colorimétriques adaptés. Application à l'analyse d'images de football*. PhD thesis, Université de Lille 1, Décembre 2000.
- [136] VASYUKOV, V., AND GOLESHCHIKHIN, D. Estimating parameters of gibbs models for image processing and analysis.
- [137] VIENOT, F. Couleur—aspects psychologiques. In *La couleur des matériaux : langage, couleur, cognition* (2005).
- [138] VOLLE, M. *Analyse des données*. Economica, 1985.
- [139] WANDELL, B. A. *Foundation of vision*. Sinauer Associates, Incorporated, 1995.
- [140] WANG, X., CHEN, R., AND LIU, J. S. Monte carlo bayesian signal processing for wireless communications. *Journal of VLSI Signal Processing* 30, 89-105 (2002).
- [141] WESTLAND, S., AND RIPAMONTI, C. *Computational Colour Science Using Matlab*. John Wiley, Sons Ltd, 2004.
- [142] WIEL DE VAN, A. M., AND BUCCHIANICO, D. A. Fast computation of the exact null distribution of Spearman's and page's l statistic for samples with and without ties. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 29 (1998), 255–269.
- [143] XAVIER, P. Neurosciences sensoriels, comportement, cognition. Tech. rep., 2008.
- [144] YCART, B. *Modèles et Algorithmes Markoviens*. Springer-Verlag, 2002.
- [145] YOUNG, I., GERBRANDS, J., AND VLIET, L. *Image Processing Fundamentals*. CRC Press LLC, 1999.
- [146] ZERMELO, E. Uber eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. In *E. W. Hobson et A.E.H. Love (eds), Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge. Cambridge University Press* (1913), 501–504.
- [147] ZHANG, Y., BRADY, M., AND SMITH, S. Segmentation of brain mr images through a hidden markov random field model and the expectation-maximization algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging* (January 2001).

Annexe A

Log-vraisemblance et matrice hessienne associée

Sommaire :

- A.1 Log-vraisemblance et matrice hessienne du modèle de Mallows-Bradley-Terry
- A.2 Log-vraisemblance, matrice hessienne du modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo et éléments de calcul du rapport de Métropolis-Hastings-Green

A.1 Log-vraisemblance et matrice hessienne du modèle de Mallows-Bradley-Terry

A.1.1 Vecteur score associé au modèle de Mallows-Bradley-Terry

Soit

$$l(\theta, r) = \sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j + \log\{c(\theta)\},$$

avec $\log\{c(\theta)\} = -\log \left[\sum_s \exp \left\{ \sum_{j=1}^q (q - s(j)) \theta_j \right\} \right]$ la log-vraisemblance associée au modèle de Mallows-Bradley-Terry pour un classement donné r .

On a $\forall l \leq l \leq q - 1$,

$$\sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_l} = q - r(l).$$

Le gradient de la fonction $\sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j$ est donc

$$\nabla_{\theta} \left[\sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j \right] = (q - r(l))_{l=1,2,\dots,q-1}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log\{c(\theta)\}}{\partial \theta_l} &= - \frac{\sum_s \left\{ \{q - s(l)\} \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \{q - s(j)\} \theta_j \right\} \right\}}{\sum_t \exp \left\{ \sum_{j=1}^q \{q - t(j)\} \theta_j \right\}}, \\ &= -q + \mathbf{E}_{\theta}(l), \end{aligned}$$

$\forall l \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$.

Le gradient de la fonction $\log\{c(\theta)\}$ par rapport à θ est

$$\nabla_{\theta} \log\{c(\theta)\} = (-q + \mathbf{E}_{\theta}(l))_{l=1,2,\dots,q-1}.$$

Il en résulte que le vecteur score associé au modèle de Mallows-Bradley-Terry est

$$\nabla_{\theta} l(\theta, r) = -\{r(l)\}_{l=1,2,\dots,q-1} + (\mathbf{E}_{\theta}(l))_{l=1,2,\dots,q-1}$$

A.1.2 Hessienne associée au modèle de Mallows-Bradley-Terry

On a,

$$\sum_{j=1}^q [q - r(j)] \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \theta_k \partial \theta_l} = 0$$

Ainsi,

$$\nabla_{\theta}^2 \left\{ \sum_{j=1}^q \{q - r(j)\} \theta_j \right\} = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log\{c(\theta)\}}{\partial \theta_k \partial \theta_l} &= \sum_s s(l) \{-s(k) + \mathbf{E}_\theta(k)\} p(s, \theta), \\ &= - \sum_s s(l) s(k) p(s, \theta) + \left\{ \sum_s s(l) p(s, \theta) \right\} \cdot \left\{ \sum_t t(k) p(t, \theta) \right\}.\end{aligned}$$

Il vient que,

$$\nabla_\theta^2 l(\theta, r) = \left[- \sum_s s(l) s(k) p(s, \theta) + \left\{ \sum_s s(l) p(s, \theta) \right\} \cdot \left\{ \sum_t t(k) p(t, \theta) \right\} \right]_{k=1,2,\dots,q-1}^{l=1,2,\dots,q-1},$$

Soit $M\{\mathcal{S}(q)\}$ la matrice à $q!$ lignes et $q - 1$ colonnes définie par $M\{\mathcal{S}(q)\} = \{s_i(j)\}_{i=1,2,\dots,q!}^{j=1,2,\dots,(q-1)}$ où $i \in \{1, 2, \dots, q!\}$, $s_i \in \mathcal{S}(q)$ et $p(\theta) = \{p(s, \theta)\}_s$ est le vecteur des probabilités associées. La matrice hessienne de la log-vraisemblance du modèle de Mallows-Bradley-Terry est

$$\nabla_\theta^2 l(\theta, r) = -{}^t U [\text{diag}\{p(\theta)\} - \{p(\theta)\}^t \{p(\theta)\}] U.$$

$-\nabla_\theta^2 l(\theta, r)$ ne depend pas du classement r et est égale à la matrice de variance covariance du modèle de Mallows-Bradley-Terry.

Dans ce qui suit, nous montrons que la matrice hessienne $\nabla_\theta^2 l(\theta, r)$ est définie négative. Comme le sous-espace vectoriel de dimension $\{\alpha.1, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est le noyau de la matrice $\text{diag}\{p(\theta)\} - \{p(\theta)\}^t \{p(\theta)\}$, alors pour tout vecteur de \mathbb{R}^{q-1} , soit $h = \{h(j), j \in \{1, 2, \dots, q-1\}\}$, ${}^t h \nabla_\theta^2 l(\theta, r) h = 0$ si et seulement si il existe un scalaire β tel que $\sum_{j=1}^{q-1} s(j) h(j) = \beta$ pour tout classement s . Ainsi pour tout classement s et tout entier naturel $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, $\sum_{l=1, l \neq j}^{q-1} s(l) h(l) + s(q) h(j) = \beta$ et il en résulte que $h(j) = 0$ et $\beta = 0$

A.2 Log-vraisemblance et matrice hessienne du modèle de Mallows-bradley-Terry avec ex-aequo

A.2.1 Vecteur score associé au modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo

Soit

$$l(\theta, \gamma, r) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - r^*(j) \right\} \theta_j + \log\{c(\theta, \gamma)\},$$

avec $\log\{c(\theta, \gamma)\} = -\log\left(\sum_s \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q\right\}\gamma + \sum_{j=1}^q \{q - s^*(j)\}\theta_j\right]\right)$, la log-vraisemblance associée à l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry pour un classement donné r .

On a, pour tout $1 \leq l \leq q - 1$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_l} \left\{ \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\}\theta_j \right\} = q - r^*(l),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \theta_l} &= -q + \sum_s s^*(l)p(s, \theta, \gamma), \\ &= -q + \mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l), \end{aligned}$$

par suite,

$$\frac{\partial l(\theta, \gamma, r)}{\partial \theta_l} = -r^*(l) + \mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l).$$

Aussi,

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma \right] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\},$$

et

$$\frac{\partial \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right],$$

il en résulte

$$\frac{\partial l(\theta, \gamma, r)}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - \mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \right].$$

On obtient donc

$$\nabla_{\theta, \gamma} l(\theta, \gamma, r) = \left([-r^*(l) + \mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l)]_{l=1,2,\dots,q-1}, \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - \mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \right] \right).$$

A.2.2 Hessienne associée au modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aquo

Posons $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1}) \in \mathbf{R}^{q-1}$.

En posant $\beta = (\theta, \gamma)$, on obtient sans coup férir les relations suivantes : $\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} \left[\sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\}\theta_j \right] &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \beta_l} \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma \right] &= 0. \end{aligned}$$

Il reste à calculer $(\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\})/(\partial\beta_k\partial\beta_l), \forall k, l \in \{1, 2, \dots, q\}$.

On a, $\forall k, l \in \{1, 2, \dots, q\}$,

$$\frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial\beta_k\partial\beta_l} = \frac{\partial}{\partial\beta_k} \begin{cases} -q + \mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) & \text{si } l \in \{1, 2, \dots, q-1\} \\ -\frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] & \text{si } l = q. \end{cases}$$

On distingue alors les quatre cas suivants :

- (i) : $k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,
- (ii) : $k = q$ et $l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,
- (iii) : $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ et $l = q$
- (iv) : $k = q$ et $l = q$.

Considérons le cas (i) c'est-à-dire le cas où $k, l \in \{1, 2, q-1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial\beta_k\partial\beta_l} &= \frac{\partial}{\partial\beta_k} \left[-q + \mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial\beta_k} \left\{ \sum_s s^*(l) p(s, \theta, \gamma) \right\} \\ &= \sum_s s^*(l) \frac{\partial}{\partial\beta_k} \left\{ p(s, \theta, \gamma) \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial\beta_k\partial\beta_l} &= \sum_s s^*(l) \frac{\partial}{\partial\beta_k} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - q \right\} \gamma \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^q \left\{ q - s^*(j) \right\} \theta_j + \log\{c(\theta, \gamma)\} \right\} p(s, \theta, \gamma). \end{aligned}$$

Comme $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial\beta_k\partial\beta_l} &= \sum_s s^*(l) \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(k) - s^*(k) \right] p(s, \theta, \gamma) \\ &= -\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(l, k). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial\beta_k\partial\beta_l} = -\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}\{l, s^*(k)\}, \quad k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

Pour $k = q$ et $l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} &= \frac{1}{2} \sum_s s^*(l) \left[\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - \mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{t+} \lambda_t^2(\alpha) \right\} \right] \cdot p(s, \theta, \gamma) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \end{aligned}$$

soit,

$$\frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \quad k = q, \quad l \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

Pour $k \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ et $l = q$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_s \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \left(\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(k) - s^*(k) \right) \cdot p(s, \theta, \gamma) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ k, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \end{aligned}$$

soit,

$$\frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ k, \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \quad k = q, \quad l \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

En fin pour $k = q$ et $l = q$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[\mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} - q \right] \\ &= -\frac{1}{4} \sum_s \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} \left(\sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) - \mathbf{E}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{t+} \lambda_t^2(\alpha) \right\} \right) \cdot p(s, \theta, \gamma) \\ &= -\frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \end{aligned}$$

soit,

$$\frac{\partial^2 \log\{c(\theta, \gamma)\}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = -\frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s+} \lambda_s^2(\alpha) \right\}, \quad k = q, \quad l = q.$$

Il en résulte que la matrice hessienne \mathbf{H} en (θ, γ) pour une observation r est définie par les termes généraux

$$\frac{\partial^2 l(\theta, \gamma, r)}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = \begin{cases} -\frac{1}{4} \mathbf{Var}_{\theta, \gamma} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = l = q \\ -\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(l, k) & \text{si } k, l \in \{1, 2, \dots, q-1\} \\ \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ k, \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, q-1\}, l = q \\ \frac{1}{2} \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma} \left\{ l, \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) \right\} & \text{si } k = q, l \in \{1, 2, \dots, q-1\} . \end{cases}$$

On a donc $\mathbf{H} = -\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$, où $S = (1, 2, \dots, q-1, -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha))$ et $\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$ d'ordre q est la matrice de variance covariance du vecteur aléatoire S . Dans ce qui suit, nous allons montrer l'existence et l'unicité d'un estimateur $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ du maximum de vraisemblance pour le vecteur des paramètres (θ, γ) . Cet estimateur vérifie les équations de vraisemblance suivantes :

$$\forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}, \quad \frac{\partial l(\theta, \gamma, r)}{\partial \theta_l} = 0,$$

et

$$\frac{\partial l(\theta, \gamma, r)}{\partial \gamma} = 0,$$

soit, $\mathbf{E}_{\theta, \gamma}(l) = r^*(l), \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ et $\mathbf{E}_{\theta, \gamma}\{\sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha)\} = \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha)$. Il reste à montrer que la matrice hessienne \mathbf{H} est une matrice définie négative en $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$.

On a, $\forall a \in \mathbf{R}^q, {}^t a \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S) a = \mathbf{Var}_{\theta, \gamma}({}^t a S)$. Comme $\mathbf{Var}_{\theta, \gamma}({}^t a S) \geq 0$, on en déduit que la matrice $\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$ est une matrice symétrique semi-définie positive. Par suite, la matrice hessienne \mathbf{H} est une matrice semi-définie négative en $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$. Montrons par l'absurde que la matrice $\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$ est définie positive. Supposons que la matrice $\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$ ne soit pas définie positive et donc qu'il existe un vecteur a non nul de \mathbf{R}^q tel que, ${}^t a \mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S) a = 0$. Alors ce qui précède montre que $\mathbf{Var}_{\theta, \gamma}({}^t a S) = 0$. Par suite, la variable aléatoire ${}^t a S$ est une constante que nous noterons ξ . Il en résulte que $\sum_{j=1}^{q-1} a_j s^*(j) - \frac{a_q}{2} \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) = \xi$ pour tout classement avec ex-aequo s , où les $a_j, j \in \{1, \dots, q\}$ désignent les composantes du vecteur a dans la base canonique de \mathbf{R}^q . Cette relation étant vraie pour tout classement avec ex-aequo s subsiste en particulier si s est un classement sans ex-aequo. Elle s'écrit $\sum_{j=1}^{q-1} a_j s(j) - \frac{q a_q}{2} = \xi$ si s est un classement sans ex-aequo. En effet, $s^*(j) = s(j), j \in \{1, 2, \dots, q\}$ et $\lambda_s(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, s_+\}$ avec $s_+ = \max_{j \in \{1, 2, \dots, q\}} s(j)$. Soit donc s un classement sans ex-aequo et s' le classement sans ex-aequo défini à partir de s par : $s'(j) = s(j), \forall j \neq l, j \neq q, s'(l) = s(q)$ et $s'(q) = s(l), l$ étant un entier fixé dans $\{1, 2, \dots, q\}$. En d'autres

termes, s' est obtenu en transposant les rangs $s(l)$ et $s(q)$ du classement s . La relation précédente s'écrit pour s et s' respectivement par (1) : $\sum_{j=1}^{q-1} a_j s(j) - \frac{qa_q}{2} = \xi$ et (2) : $\sum_{j=1, j \neq l}^{q-1} a_j s(j) + a_l s(q) - \frac{qa_q}{2} = \xi$. En soustrayant l'égalité (2) de l'égalité (1), obtient $a_l s(l) - a_l s(q) = 0$, soit donc que $a_l = 0, \forall l \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ car $s(l) \neq s(q)$, par définition d'un classement sans ex-aequo. Ainsi, $-\frac{1}{2} a_q \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) = \xi$, pour tout classement s avec ex-aequo. Prenons deux classements s et t où s est un classement sans ex-aequo et t un classement avec ex-aequo tel que $q-2$ objets ont des rangs distincts et les deux autres ex-aequo. La relation précédente devient pour s et t respectivement (3) : $qa_q = -2\xi$ et (4) : $(q+2)a_q = -2\xi$ car $\sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) = q-2+2^2 = q+2$. En soustrayant l'égalité (4) de (3), on obtient que $a_q = 0$. Il en résulte donc que le vecteur a est nul. Ce qui est absurde, puisque par hypothèse $a \neq 0$. Par suite, la matrice de variance covariance $\mathbf{Cov}_{\theta, \gamma}(S)$ est une matrice définie positive. Ce qui entraîne que la matrice hessienne H est une matrice définie négative garantissant l'existence et l'unicité d'un estimateur du maximum de vraisemblance pour le vecteur des paramètres (θ, γ) .

A.2.3 Éléments de calcul du rapport de Métropolis-Hastings-Green dans le modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo

On cherche à calculer les différentes quantités qui définissent le rapport de Métropolis-Hastings-Green dans l'algorithme MCMC c'est-à-dire les quantités $\{p(s; \theta, \gamma)q_d(s, r)\} / \{p(r; \theta, \gamma)q_f(r, s)\}$ et $\{p(s; \theta, \gamma)q_f(s, r)\} / \{p(r; \theta, \gamma)q_d(r, s)\}$ respectivement dans le cas de la fusion de deux rangs consécutifs k et $k+1$ ($k \in \{1, 2, \dots, r_+ - 1\}$) et dans le cas de la division d'un rang k ($k \in \{1, 2, \dots, r_+\}$) du classement courant r .

Un classement avec ex-aequo s de q objets peut être identifié à une suite de longueur q d'entiers naturels compris entre 1 et une valeur entière maximale $s_+ \leq q$ et telle que les entiers de 1 à s_+ apparaissent au moins une fois dans le classement s . Pour $k \in \{1, 2, \dots, s_+\}$, on désigne par $\{s = k\} = \{j \in \{1, 2, \dots, q\}; s(j) = k\}$ l'ensemble des objets de rang k et $\lambda_s(k) = \text{card}\{s = k\}$ l'effectif du rang k dans le classement avec ex-aequo s . On a, $\lambda_s(k) \geq 1$ et $\sum_{k=1}^{s_+} \lambda_s(k) = q$. L'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry aux classements avec ex-aequo (cf.équation (5.2.2)) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$p(r, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{k=1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j \right]. \quad (\text{A.2.1})$$

En effet,

L'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry s'écrit,

$$p(r, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j \right].$$

D'autre part, $r^*(j) = \sum_{\alpha=1}^{r(j)-1} \lambda_r(\alpha) + \frac{\lambda_r\{r(j)\} + 1}{2}$, il vient que

$$\begin{aligned} p(r, \theta, \gamma) &= c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \{q - r^*(j)\} \theta_j \right] \\ &= c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{j=1}^q \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{r(j)-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r\{r(j)\} + 1}{2} \right\} \theta_j \right] \\ &= c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{k=1}^{r_+} \sum_{j \in \{r=k\}} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \theta_j \right] \\ &= c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{k=1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j \right]. \end{aligned}$$

On se place tout d'abord dans le cas de la fusion. La quantité à calculer est donc $\{p(s; \theta, \gamma)q_d(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_f(r, s)\}$ que l'on peut décomposer en un produit de deux facteurs $\{p(s; \theta, \gamma)\}/\{p(r; \theta, \gamma)\}$ et $\{q_d(s, r)\}/\{q_f(r, s)\}$.

L'état initial r et l'état final s de la chaîne de Markov sont ainsi définis par $s = \{t(a, a+1)r\}_{k \vee (k+1)}$, où $t(a, a+1)r = \sigma$ désigne la transposition des rangs a et $a+1$ dans le classement avec ex-aequo r avec $a \in \{1, 2, \dots, r_+ - 1\}$.

Comme

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)} \frac{p(\sigma; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)},$$

calculons d'abord $\frac{p(\sigma; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)}$ puis $\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)}$. Les distributions de probabilités $p(\sigma; \theta, \gamma)$ et $p(r; \theta, \gamma)$ sont respectivement définies par les relations suivantes (cf. équation (A.2.1)) :

$$p(\sigma, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+} \lambda_\sigma^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{k=1}^{\sigma_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j \right],$$

$$p(r, \theta, \gamma) = c(\theta, \gamma) \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q \right\} \gamma + \sum_{k=1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j \right].$$

Posons

$$A_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+} \lambda_\sigma^2(\alpha) - q, \quad A_r = \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q,$$

$$B_\sigma = \sum_{k=1}^{\sigma_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j,$$

$$B_r = \sum_{k=1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j.$$

Calculons $A_\sigma - A_r$ et $B_\sigma - B_r$. Par définition de σ , les relations suivantes :
 $\sigma_+ = r_+$,

$$\sigma(j) = \begin{cases} a & \text{si } r(j) = a + 1 \\ a + 1 & \text{si } r(j) = a \\ r(j) & \text{si } r(j) \neq a \text{ et } r(j) \neq a + 1, \end{cases}$$

et

$$\lambda_\sigma(\alpha) = \begin{cases} \lambda_r(a) & \text{si } \alpha = a + 1 \\ \lambda_r(a + 1) & \text{si } \alpha = a \\ \lambda_r(\alpha) & \text{si } \alpha \neq a \text{ et } \alpha \neq a + 1, \end{cases}$$

sont immédiates et impliquent $A_\sigma - A_r = 0$.

Il reste à calculer $B_\sigma - B_r$. On a aussi les relations suivantes $\forall k \in \{1, 2, \dots, \sigma_+\}$

$$\{\sigma = k\} = \begin{cases} \{r = a\} & \text{si } k = a + 1 \\ \{r = a + 1\} & \text{si } k = a \\ \{r = k\} & \text{si } k \neq a \text{ et } k \neq a + 1. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r_+\}$, $k \neq a$ et $k \neq a + 1$, comme $\sigma_+ = r_+$, $\lambda_\sigma(k) = \lambda_r(k)$ et $\{\sigma = k\} = \{r = k\}$, il vient que

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a \\ k \neq a+1}}^{\sigma_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a \\ k \neq a+1}}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
B_\sigma - B_r &= \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{a-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(a) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=a\}} \theta_j \\
&\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^a \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(a+1) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=a+1\}} \theta_j \\
&\quad - \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{a-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(a) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=a\}} \theta_j \\
&\quad - \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^a \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(a+1) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=a+1\}} \theta_j.
\end{aligned}$$

Comme $\{\sigma = a\} = \{r = a + 1\}$ et $\{\sigma = a + 1\} = \{r = a\}$, on a finalement

$$B_\sigma - B_r = \lambda_r(a) \sum_{j \in \{r=a+1\}} \theta_j - \lambda_r(a+1) \sum_{j \in \{r=a\}} \theta_j,$$

d'où

$$\frac{p(\sigma; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \exp \left\{ \lambda_r(a) \sum_{j \in \{r=a+1\}} \theta_j - \lambda_r(a+1) \sum_{j \in \{r=a\}} \theta_j \right\}. \quad (\text{A.2.2})$$

Il reste à calculer $\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)}$. Les égalités $s = \{t(a, a+1)r\}_{k \vee (k+1)}$ et $\sigma = t(a, a+1)r$, entraînent $s = \sigma_{k \vee (k+1)}$. L'égalité $s = \sigma_{k \vee (k+1)}$ implique les relations suivantes $s_+ = \sigma_+ - 1$,

$$\{s = m\} = \begin{cases} \{\sigma = k\} \cup \{\sigma = k + 1\} & \text{si } m = k \\ \{\sigma = m\} & \text{si } m \leq k - 1 \\ \{\sigma = m + 1\} & \text{si } m \geq k + 1, \end{cases}$$

et

$$\lambda_s(\alpha) = \begin{cases} \lambda_\sigma(\alpha) & \text{si } \alpha \leq k - 1 \\ \lambda_\sigma(\alpha + 1) & \text{si } \alpha \geq k + 1 \\ \lambda_\sigma(k) + \lambda_\sigma(k + 1) & \text{si } \alpha = k. \end{cases}$$

En posant $A_s = \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - q$ et $A_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+} \lambda_\sigma^2(\alpha) - q$, nous avons,

$$\begin{aligned}
A_s - A_\sigma &= \sum_{\alpha=1}^{s_+} \lambda_s^2(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+} \lambda_\sigma^2(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+-1} \lambda_s^2(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{\sigma_+} \lambda_\sigma^2(\alpha) \\
&= \lambda_\sigma^2(k+1) + 2\lambda_\sigma(k)\lambda_\sigma(k+1) - \lambda_\sigma^2(k+1),
\end{aligned}$$

Soit, $A_s - A_\sigma = 2\lambda_\sigma(k)\lambda_\sigma(k+1)$.

Il reste à calculer $B_s - B_\sigma$, où $B_s = \sum_{m=1}^{s+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=m\}} \theta_j$

et $B_\sigma = \sum_{m=1}^{\sigma+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=m\}} \theta_j$.

On décompose B_s sous la forme

$$\begin{aligned} B_s &= \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=m\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(k)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=k\}} \theta_j \\ &\quad + \sum_{m=k+1}^{s+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=m\}} \theta_j . \end{aligned}$$

On décompose aussi B_σ sous la forme,

$$\begin{aligned} B_\sigma &= \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=m\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k+1)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k+1\}} \theta_j \\ &\quad + \sum_{m=k+2}^{\sigma+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=m\}} \theta_j . \end{aligned}$$

Comme,

$$\sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=m\}} \theta_j = \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=m\}} \theta_j,$$

et

$$\sum_{m=k+1}^{s+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=m\}} \theta_j = \sum_{m=k+2}^{\sigma+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(m)+1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=m\}} \theta_j,$$

on a

$$\begin{aligned} B_s - B_\sigma &= \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_s(\alpha) - \frac{\lambda_s(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{s=k\}} \theta_j \\ &\quad - \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j \\ &\quad - \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\sigma(\alpha) - \frac{\lambda_\sigma(k+1) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\sigma=k+1\}} \theta_j. \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification,

$$B_s - B_\sigma = -\frac{\lambda_\sigma(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j + \frac{\lambda_\sigma(k)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k+1\}} \theta_j.$$

Par suite,

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\sigma; \theta, \gamma)} = \exp \left[\gamma \lambda_\sigma(k) \lambda_\sigma(k+1) - \frac{\lambda_\sigma(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k\}} \theta_j + \frac{\lambda_\sigma(k)}{2} \sum_{j \in \{\sigma=k+1\}} \theta_j \right] \quad (\text{A.2.3})$$

où $s = \{t(a, a+1)r\}_{k \vee (k+1)}$ et $\sigma = t(a, a+1)r$.

On se place maintenant dans le cas de la stratégie de division et l'on cherche à calculer $\{p(s; \theta, \gamma)q_f(s, r)\}/\{p(r; \theta, \gamma)q_d(r, s)\}$ qui se décompose en un produit de deux facteurs $\{p(s; \theta, \gamma)\}/\{p(r; \theta, \gamma)\}$ et $\{q_f(s, r)\}/\{q_d(r, s)\}$. L'état initial r et l'état final s de la chaîne de Markov sont ainsi définis par $s = t(a, a+1)\delta$, ($a \in \{1, 2, \dots, \delta_+ - 1\}$) où $\delta = r_{k/l}$ désigne la division du rang k ($k \in \{1, 2, \dots, r_+\}$ et $\lambda_r(k) > 1$) du classement avec ex-aequo r .

Comme précédemment, on a

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \frac{p(s; \theta, \gamma) p(\delta; \theta, \gamma)}{p(\delta; \theta, \gamma) p(r; \theta, \gamma)}.$$

L'équation A.2.4 permet d'obtenir immédiatement que

$$\frac{p(s; \theta, \gamma)}{p(\delta; \theta, \gamma)} = \exp \left\{ \lambda_\delta(a) \sum_{j \in \{\delta=a+1\}} \theta_j - \lambda_\delta(a+1) \sum_{j \in \{\delta=a\}} \theta_j \right\}, \quad (\text{A.2.4})$$

avec $\delta = r_{k/l}$.

Il ne nous reste qu'à calculer la quantité $\{p(\delta; \theta, \gamma)\}/\{p(r; \theta, \gamma)\}$.

Par définition de $\delta = r_{k/l}$, il résulte les relations suivantes

$\delta_+ = r_+ + 1$,

$$\{\delta = m\} = \begin{cases} \{r = m\} & \text{si } m \leq k - 1 \\ \{r = m - 1\} & \text{si } m \geq k + 2, \end{cases}$$

$\{\delta = k\} \cup \{\delta = k + 1\} = \{r = k\}$ et

$$\lambda_\delta(m) = \begin{cases} \lambda_r(m) & \text{si } \alpha \leq k - 1 \\ \lambda_r(m + 1) & \text{si } \alpha \geq k + 2, \end{cases}$$

$\lambda_r(k) = \lambda_\delta(k) + \lambda_\delta(k + 1)$ avec $\lambda_\delta(k) = l$ et $\lambda_\delta(k + 1) = \lambda_r(k) - l$. Posons,

$$A_\delta = \sum_{\alpha=1}^{\delta_+} \lambda_\delta^2(\alpha) - q, \quad A_r = \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) - q,$$

$$B_\delta = \sum_{m=1}^{\delta_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=m\}} \theta_j$$

$$\text{et } B_r = \sum_{m=1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=m\}} \theta_j.$$

Evaluons $A_\delta - A_r$ et $B_\delta - B_r$.

On obtient

$$\begin{aligned} A_\delta - A_r &= \sum_{\alpha=1}^{\delta_+} \lambda_\delta^2(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r_++1} \lambda_\delta^2(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{r_+} \lambda_r^2(\alpha) \\ &= 2l^2 - 2l\lambda_r(k), \end{aligned}$$

soit $A_\delta - A_r = 2l(l - \lambda_r(k))$.

On décompose B_δ sous la forme,

$$\begin{aligned} B_\delta &= \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=m\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=k\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(k+1) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=k+1\}} \theta_j \\ &\quad + \sum_{m=k+2}^{\delta_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=m\}} \theta_j. \end{aligned}$$

De façon analogue, on a

$$\begin{aligned} B_r &= \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=m\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j \\ &\quad + \sum_{m=k+1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=m\}} \theta_j. \end{aligned}$$

Compte tenu des égalités suivantes :

$$\sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=m\}} \theta_j = \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=m\}} \theta_j,$$

$$\sum_{m=k+2}^{\delta_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=m\}} \theta_j = \sum_{m=k+1}^{r_+} \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(m) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=m\}} \theta_j,$$

il en résulte que,

$$\begin{aligned} B_\delta - B_r &= \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=k\}} \theta_j \\ &\quad + \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\delta(\alpha) - \frac{\lambda_\delta(k+1) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{\delta=k+1\}} \theta_j \\ &\quad - \left\{ q - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \lambda_r(\alpha) - \frac{\lambda_r(k) + 1}{2} \right\} \sum_{j \in \{r=k\}} \theta_j. \end{aligned}$$

Soit après simplification,

$$B_\delta - B_r = \frac{\lambda_\delta(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k\}} \theta_j - \frac{\lambda_\delta(k)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k+1\}} \theta_j.$$

Il en résulte

$$\frac{p(\delta; \theta, \gamma)}{p(r; \theta, \gamma)} = \exp \left[l\gamma \left(l - \lambda_r(k) \right) + \frac{\lambda_\delta(k+1)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k\}} \theta_j - \frac{\lambda_\delta(k)}{2} \sum_{j \in \{\delta=k+1\}} \theta_j \right], \quad (\text{A.2.5})$$

avec $\delta = r_k/l$.

Annexe B

Mesures effectuées pour la caractérisation du moniteur CRT

Table B.1 Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Rouge.

	R	G	B	X	Y	Z
1	0	0	0	4.72	5.09	6.82
2	8	0	0	4.69	5.01	6.64
3	16	0	0	4.98	5.16	6.64
4	24	0	0	5.35	5.36	6.70
5	32	0	0	5.79	5.60	6.71
6	40	0	0	6.25	5.84	6.71
7	48	0	0	6.83	6.14	6.76
8	56	0	0	7.46	6.46	6.79
9	64	0	0	8.23	6.89	6.86
10	72	0	0	9.04	7.33	6.92
11	80	0	0	9.90	7.78	6.96
12	88	0	0	10.90	8.30	7.02
13	96	0	0	12.00	8.88	7.10
14	104	0	0	13.10	9.46	7.17
15	112	0	0	14.30	10.10	7.20
16	120	0	0	15.60	10.80	7.35
17	128	0	0	17.00	11.50	7.40
18	136	0	0	18.30	12.20	7.46
19	144	0	0	19.90	13.10	7.56
20	152	0	0	21.40	13.90	7.67
21	160	0	0	22.80	14.70	7.80
22	168	0	0	24.60	15.60	7.89
23	176	0	0	26.00	16.40	7.98
24	184	0	0	28.20	17.50	8.10
25	192	0	0	29.80	18.40	8.26
26	200	0	0	31.50	19.30	8.32
27	208	0	0	33.60	20.50	8.57
28	216	0	0	35.50	21.50	8.64
29	224	0	0	38.00	22.80	8.75
30	232	0	0	39.50	23.60	8.92
31	240	0	0	42.00	25.00	9.01
32	248	0	0	44.00	26.00	9.21
33	255	0	0	49.10	28.80	9.57

Table B.2 Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Vert.

	R	G	B	X	Y	Z
1	0	0	0	4.72	5.09	6.82
2	0	8	0	4.70	5.12	6.69
3	0	16	0	4.94	5.63	6.77
4	0	24	0	5.21	6.22	6.82
5	0	32	0	5.60	7.00	6.95
6	0	40	0	6.08	7.94	7.14
7	0	48	0	6.56	8.93	7.31
8	0	56	0	7.10	10.00	7.48
9	0	64	0	7.71	11.30	7.65
10	0	72	0	8.38	12.70	7.89
11	0	80	0	9.16	14.30	8.19
12	0	88	0	9.96	15.90	8.47
13	0	96	0	10.80	17.60	8.75
14	0	104	0	11.80	19.60	9.12
15	0	112	0	12.80	21.70	9.48
16	0	120	0	13.80	23.90	9.85
17	0	128	0	15.00	26.30	10.30
18	0	136	0	16.20	28.80	10.80
19	0	144	0	17.50	31.40	11.20
20	0	152	0	18.80	34.10	11.70
21	0	160	0	20.20	37.00	12.20
22	0	168	0	21.70	40.00	12.70
23	0	176	0	23.10	43.00	13.30
24	0	184	0	24.70	46.20	13.80
25	0	192	0	26.30	49.60	14.50
26	0	200	0	28.10	53.40	15.10
27	0	208	0	29.80	56.90	15.80
28	0	216	0	31.60	60.70	16.50
29	0	224	0	33.70	64.70	17.20
30	0	232	0	35.30	68.30	17.90
31	0	240	0	37.20	72.10	18.60
32	0	248	0	39.30	76.50	19.40
33	0	255	0	41.10	80.30	20.40

Table B.3 Mesures effectuées en vue de la caractérisation du phosphore Bleu.

	R	G	B	X	Y	Z
1	0	0	0	4.72	5.09	6.82
2	0	0	8	4.81	5.10	7.04
3	0	0	16	4.93	5.11	7.86
4	0	0	24	5.09	5.17	8.89
5	0	0	32	5.34	5.30	10.10
6	0	0	40	5.54	5.35	11.50
7	0	0	48	5.89	5.54	13.00
8	0	0	56	6.17	5.64	14.70
9	0	0	64	6.45	5.71	16.60
10	0	0	72	6.91	5.97	18.70
11	0	0	80	7.33	6.14	20.90
12	0	0	88	7.84	6.40	23.40
13	0	0	96	8.35	6.63	26.00
14	0	0	104	8.88	6.87	28.80
15	0	0	112	9.45	7.13	31.80
16	0	0	120	10.10	7.39	35.00
17	0	0	128	10.80	7.76	38.80
18	0	0	136	11.50	8.04	42.30
19	0	0	144	12.30	8.46	46.20
20	0	0	152	13.00	8.77	50.10
21	0	0	160	13.80	9.10	54.30
22	0	0	168	14.60	9.47	58.60
23	0	0	176	15.50	9.88	63.10
24	0	0	184	16.40	10.20	67.70
25	0	0	192	17.30	10.70	72.70
26	0	0	200	18.30	11.20	77.60
27	0	0	208	19.40	11.60	83.10
28	0	0	216	20.30	12.00	87.90
29	0	0	224	21.40	12.50	93.60
30	0	0	232	22.40	13.00	98.60
31	0	0	240	23	13.60	105.00
32	0	0	248	24.90	14.10	112.00
33	0	0	255	25.90	14.70	117.00

Annexe C

Programme sous R

Programme d'estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo

Nous présentons quelques programmes mis en place pour l'estimation des paramètres du modèle de Mallows-Bradley-Terry avec ex-aequo.

Estimation des paramètres : calcul analytique des espérances mathématiques

Programme de simulation par la méthode d'acceptation-rejet

```
Sple.rkties.fn=function(size,q,theta,gama,nbech)
{
#But : Simuler plusieurs échantillons d'une taille
# donnée de la loi objective
#size : Taille commune des échantillons à simuler
#q: Le nombre d'objets confrontés au juge
# theta : vecteurs des paramètres des paramètres
#associés aux q objets ( $\theta_q=0$ )
#gama : paramètre du modèle (le log de l'index de discrimination)
# nbech : le nombre d'échantillons à simuler

# Création d'une list vide
splerkties=list()
for(i in 1:nbech)
{
splerkties[[i]]=Sim.rkties.fn(size=size,q=q,theta=theta,gama=gama)
}
```

```

splerkties
}
#####
Sim.rkties.fn=function(size,q,theta,gama)
{
#But : Cette fonction simule un échantillon de
#classement avec ex-aequo de taille donnée
# q : le nombre d'objets à classer avec ex-aequo
#theta : vecteur des paramètres associés aux
#q objets avec theta_{q}=0
#gama : log de l'index de discriminantion
#Ppi : vecteur des probabiliés de Bradley-Terry associées aux q objets
#Nu : l'index de discriminantion
#Sple.mean: moyenne empirique de l'échantillon simulé
#Rkties: échantillon simulé de classement avec ex-aequo

rkties=t(replicate(size,Accept.reject.fn(q=q,teta=theta,gma=gama)$Rking))
# Calcul de la moyenne empirique de l'échantillon
#des rangs moyens associés à l'échantillon simulé
rkties.star =t(apply(rkties,1,rank,ties.method="average"))
sple.mean=apply(rkties.star,2,mean)
# Restitution des résultats
list(Rkties=rkties,Sple.mean=sple.mean,Theta=theta,Gama=gama,
Ppi=exp(theta)/sum(exp(theta)),Nu=exp(gama))
}
#####
Accept.reject.fn=function(q,teta=,gma)
{
#But : Simulation de la loi objective par la méthode
#d'acceptation rejet d'un classement avec ex-aequo
#q : nombre d'objets à classer avec ex-aequo
# teta : vecteur des paramètres associés aux q objets
#avec theta_{q}=0
#gma : paramètre (le log de l'index de discrimination)
#pii : vecteur des probabiliés associées aux q objets
# nnu : paramètre positif (index de discrimination)
#Rking : classement simulé

# Calcul du vecteur des probabilités associées
#aux objets et de l'index de discrimination
pii=exp(teta)/sum(exp(teta)) ; nnu=exp(gma)
ratio=0 ; iter=0
# Calcul du premier terme du ratio d'acceptation

```

```

alpha1=(q/2)/sum(exp(((q^2-q)/2)*log(pii)))
while(runif(1,0,1)>ratio)
{
#Simulation d'un classement suivant la loi uniforme
#sur l'ensemble des classements avec ex-aequos
r=Udist.rktie.fn(q)
#Calcul du deuxième terme du ratio d'acceptation
alpha2=exp(sum((q-rank(r,ties.method="average"))*log(pii)))
#Calcul du troisième terme du ratio d'acceptation selon
#que nnu soit supérieur à 1 ou inférieur à 1
if((0<nnu)&(nnu<1)) alpha3=exp(0.5*log(nnu)*(sum((as.vector(table(r)))^2)-1))
else alpha3=exp(0.5*log(nnu)*(sum((as.vector(table(r)))^2)-q^2))

# Calcul du ratio d'acceptation
ratio=alpha1*alpha2*alpha3
iter=iter+1
}
list(Rking=r,Teta=teta,Gma=gma,Pii=pii,Nnu=nnu
,Ratio=ratio)
}
#####
Udist.rktie.fn=function(q)
{
#But :Simulation d'un classement avec ex-aquo
# en utilisant la loi instrumentale
#(loi uniforme discrète sur l'ensemble de tous
#lesclassementspossibles)
# q : nombre d'objets à classer avec ex-aequos
# r : le classement avec ex-aequo simulé

#1. sélection d'un entier k entre 1 et q
#(k désigne le rang maximal du classement à former)
# L'instruction ci-dessous est valable pour 4 objets
# à classer avec ex-aequo
k=sample(q,size=1,replace=F,prob=c(1,14,36,24))
# L'instruction ci-dessous est valable pour 5 objets
# à classer avec ex-aequo
k=sample(q,size=1,replace=F,prob=c(1,30,150,240,120))
# cas pour 6 objets
# k=sample(q,size=1,replace=F,prob=c(1,62,540,1560,1800,720))
# 2. simulation du rang
if(k==q) r=sample(q) # permutation de l'ensemble {1,2,...,q}
else

```

```

    {
r=numeric(q) # a) Initialisation du vecteur des rangs
u=sample(q,size=k)#b) affecter les rangs 1:k à k entiers distincts
#sélectionnés entre 1 et q

r[u]=1:k
r[-u]=sample(k,q-k, replace=T)
    }
#3.renvoi du vecteur r des rangs obtenus
    r
}

```

Programme d'estimation des paramètres

```

totestim.fn=function(echs,Omega,tol,nb.ech)
{
#But : estimation des paramètres sur la liste des échantillons
#iid simulés
# echs : la liste des échantillons simulés
# Omega : espace des états possibles
#tol : la tolérance dans l'estimation des paramètres
# nb.ech : nombre d'échantillons
#j : nombre d'échantillons dont les paramètres sont estimés
# Création d'une liste vide
result=list()
# Estimation des paramètres de chaque échantillon de la liste
for (i in 1:nb.ech)
{
result[[i]]=MaxMin.fn(rob=echs[[i]][[1]],omega=Omega,eps.max=tol)
}
result
}
MaxMin.fn=function(rob,omega,eps.max=10^(-4))
{
#rob : échantillon observé des classements avec ex-aequo
#teta : vecteur theta des paramètres initiaux
#gama : log de l'index de discrimination
#q : nombres d'objets classés avec ex-aequo
#omega : l'espace des états de tous les classements
#avec ex-aequo possibles
#eps.max : la tolérance sur le critère d'arrêt
#tolerance: la tolérance sur le critère d'arrêt
#Nombre d'objets classés avec ex-aequo et nombre

```

```

#d'observations
q=ncol(rob) ; n.obs=nrow(rob)
#Calcul du vecteur des moyennes observées
SS.eff.fn=function(s)
{
  smax=max(s)
  eff=numeric(smax)
  for(i in 1:smax) eff[i]=sum(s==i)
  sum(eff*eff)
}
robstar=apply(rob,1,SS.eff.fn)
robstar=cbind(robstar,t(apply(rob,1,rank,ties.method="average")))
rbar=apply(robstar,2,mean)
# Initialisation des paramètres
theta.start.fn=function(rdat,rmeans,nitems,nobs)
{
  p=apply(rdat,2,function(u)sum((u==1)))/nobs
  u=sort(runif(sum((p==0)),0,1/nobs),decreasing=T)
  ordre=order(rmeans[p==0])
  p[p==0]=u[ordre]
  log(p/p[nitems])
}
gama.start.fn=function(rdat)
{
  log(mean(apply(rdat,1,function(u)sum((u==1)))))
}
#####
teta.init=theta.start.fn(rdat=rob,rmeans=rbar[2:(q+1)],
nitems=q,nobs=n.obs)
gama.init=gama.start.fn(rdat=rob)
  teta.old=teta.init
  gama.old=gama.init
  eps.iter=1e+06
  M.iter=0
  slope=1/(q*(q-1))
  while(eps.iter>eps.max){
    M.iter=M.iter+1
  # Calcul des expérances mathématiques
  expected.mean=expted.value.fn(space=omega,tta=teta.old,
gma=gama.old)
  #Mise à jours des paramètres
  teta.new=teta.old+slope*(log(q-rbar[2:(q+1)])-
log(q-expected.mean[2:(q+1)]))

```

```

gama.new=gama.old+slope*(log(rbar[1]-q)-
log(expected.mean[1]-q))
  teta.new[q]=0
  eps.iter=sqrt(sum((c(teta.new,gama.new)-c(teta.old,gama.old))^2))
  teta.old=teta.new
  gama.old=gama.new
}

#Restitution des résultats
list(Teta=teta.new,Gama=gama.new,
Pi=exp(teta.new)/sum(exp(teta.new)),nu=exp(gama.new)
,nbiteration=M.iter,tolerance=eps.max)
}

#####
expted.value.fn=function(space,tta=c(rep(2,3),0), gma=0.5)
{
#But : Calcul du vecteur des espérances mathématiques
#associées à la distribution de
# l'extension du modèle de Mallows-Bradley-Terry
#space : l'espace des états de tous les classements possibles
#avec ex-aequo
#tta : vecteur des paramètres associés aux probabilités de
# Bradley-Terry
#gma : log de l'index de discrimination

# Calcul du vecteur des espérances mathématiques
SS.eff.fn=function(s)
{
smax=max(s)
eff=numeric(smax)
for(i in 1:smax) eff[i]=sum(s==i)
sum(eff*eff)
}

space.star=apply(space,1,SS.eff.fn)
space.star=rbind(space.star,apply(space,1,rank,
ties.method="average"))
# Vecteur des probabilités associées à chaque classement
#avec ex-aequo
probnum =apply(space,1,Model.num.fn,thta=tta,gaa=gma)
space.star%*%(probnum/sum(probnum))
}

#####
Model.num.fn=function(s=rep(1,4), thta=c(rep(2,3),0), gaa=0.5)
{

```

```

# But : calcul du numérateur de l'extension du modèle
#de mallows-Bradley-Terry pour une observation s
#(classement avec ex-aequo)
#s : classement avec ex-aequo (vecteur de rangs)
#thta : vecteur des paramètres associés aux probabilités
# de Bradley-Terry
#gaa : le log de l'index de discrimination

SS.eff.fn=function(s)
  {
    smax=max(s)
    eff=numeric(smax)
    for(i in 1:smax) eff[i]=sum(s==i)
    sum(eff*eff)
  }

q=length(s)
exp(0.5*gaa*(SS.eff.fn(s)-q)+sum((q-rank(s))*thta))
}
#####
tranking.fn=function(q)
  {
#But : détermination la matrice de tous les classements avec
# ex-aequo pour un nombre donné d'objets à classer avec
#ex-aequos : le package utilisé est gtools
    require(gtools)
    suppress.fn=function(u){
      k=length(unique(u))
      (max(u)==k)*(min(u)==1)
    }
    x=permutations(q,q,repeats.allowed=T)
    y=apply(x,1, suppress.fn)
    detach("package:gtools")
    subset(x,y==1)
  }

```


Annexe D

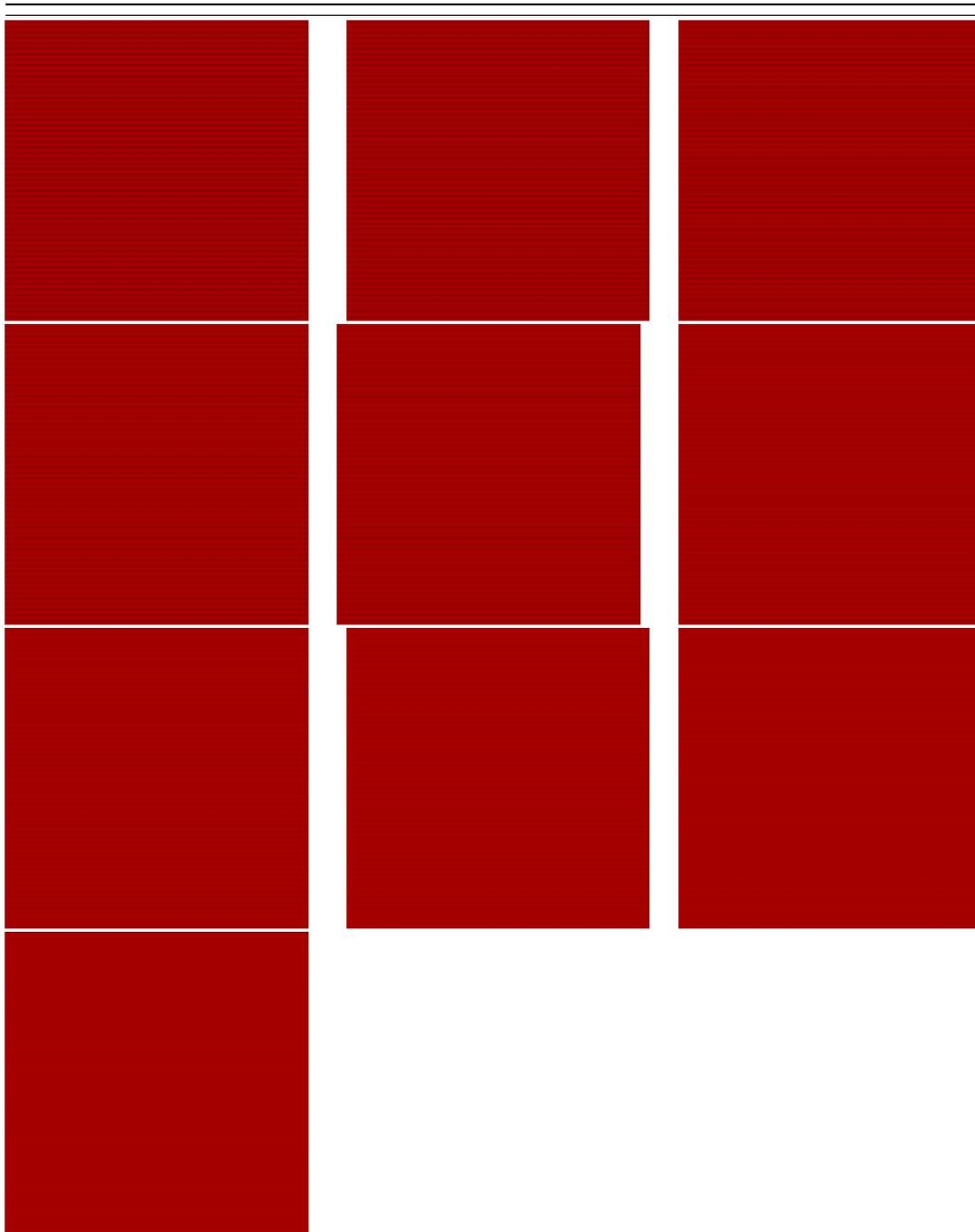
Liste complète des images texturées colorées soumises aux mesures visuelles de classement

Sommaire :

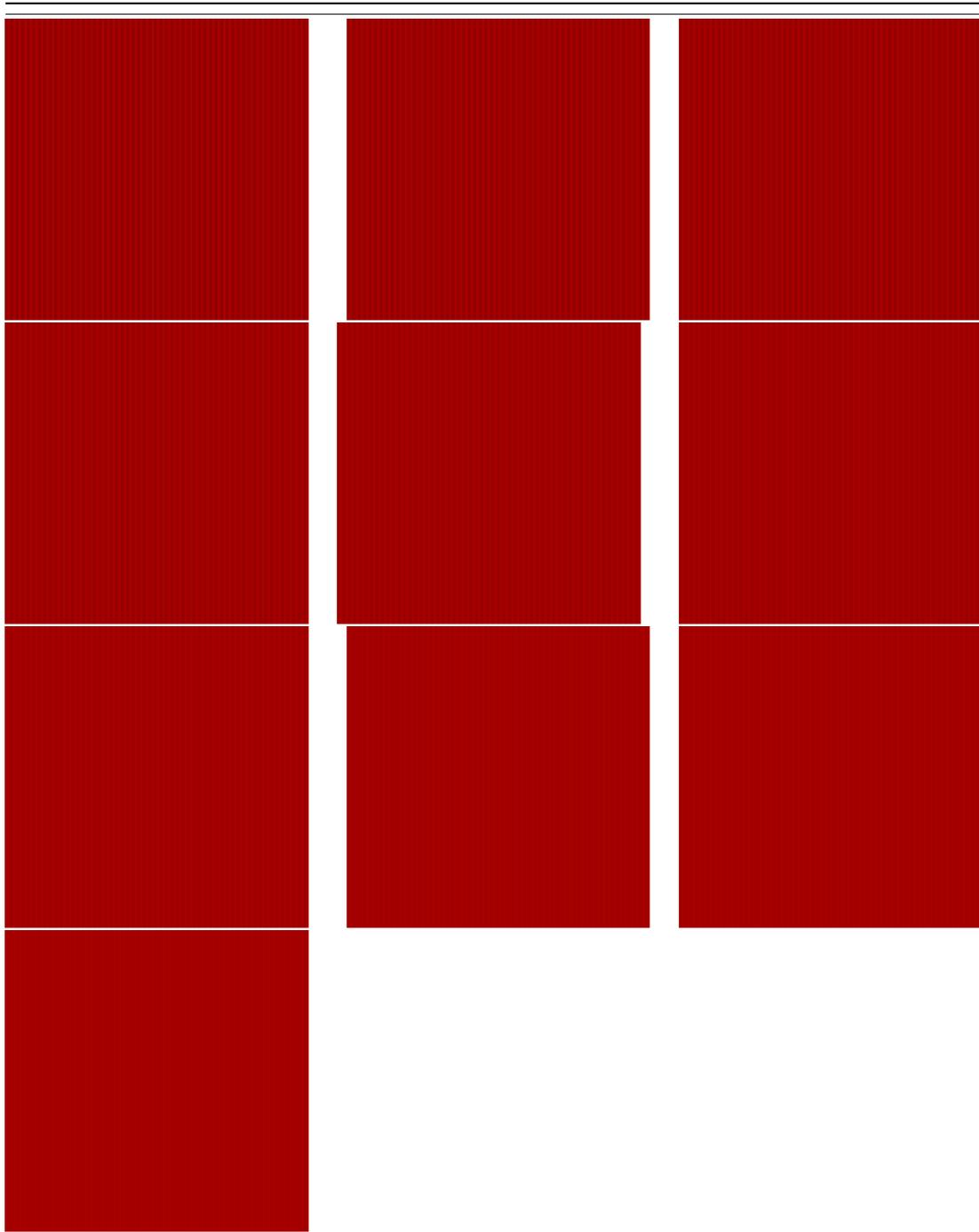
- D.1 Images texturées colorées dans la teinte rouge
- D.2 Images texturées colorées dans la teinte verte
- D.3 Images texturées colorées dans la teinte blue
- D.4 Images texturées colorées dans la teinte jaune

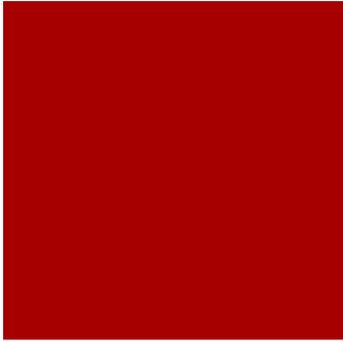
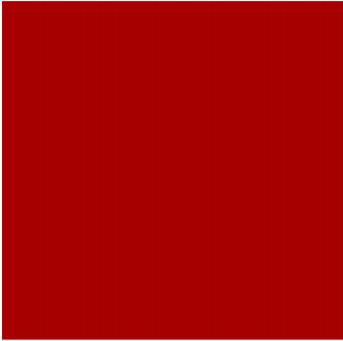
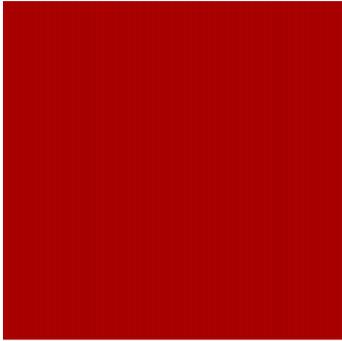
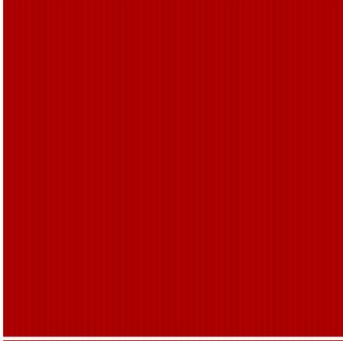
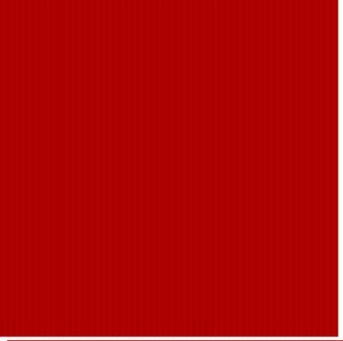
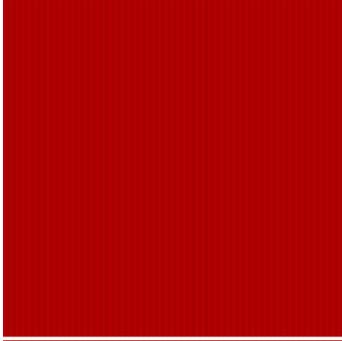
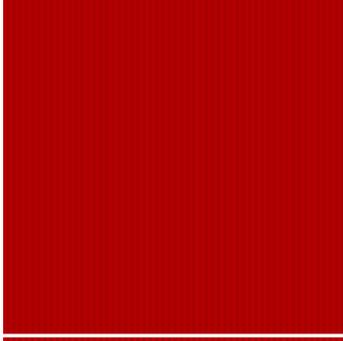
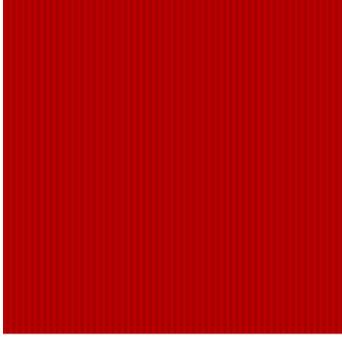
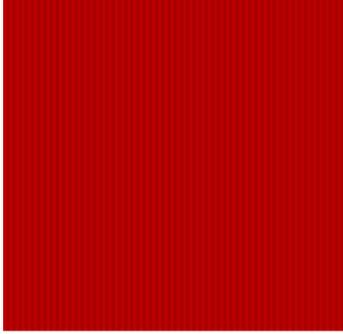
D.1 Images texturées colorées dans la teinte rouge

D.1.1 Réseaux à orientation horizontale

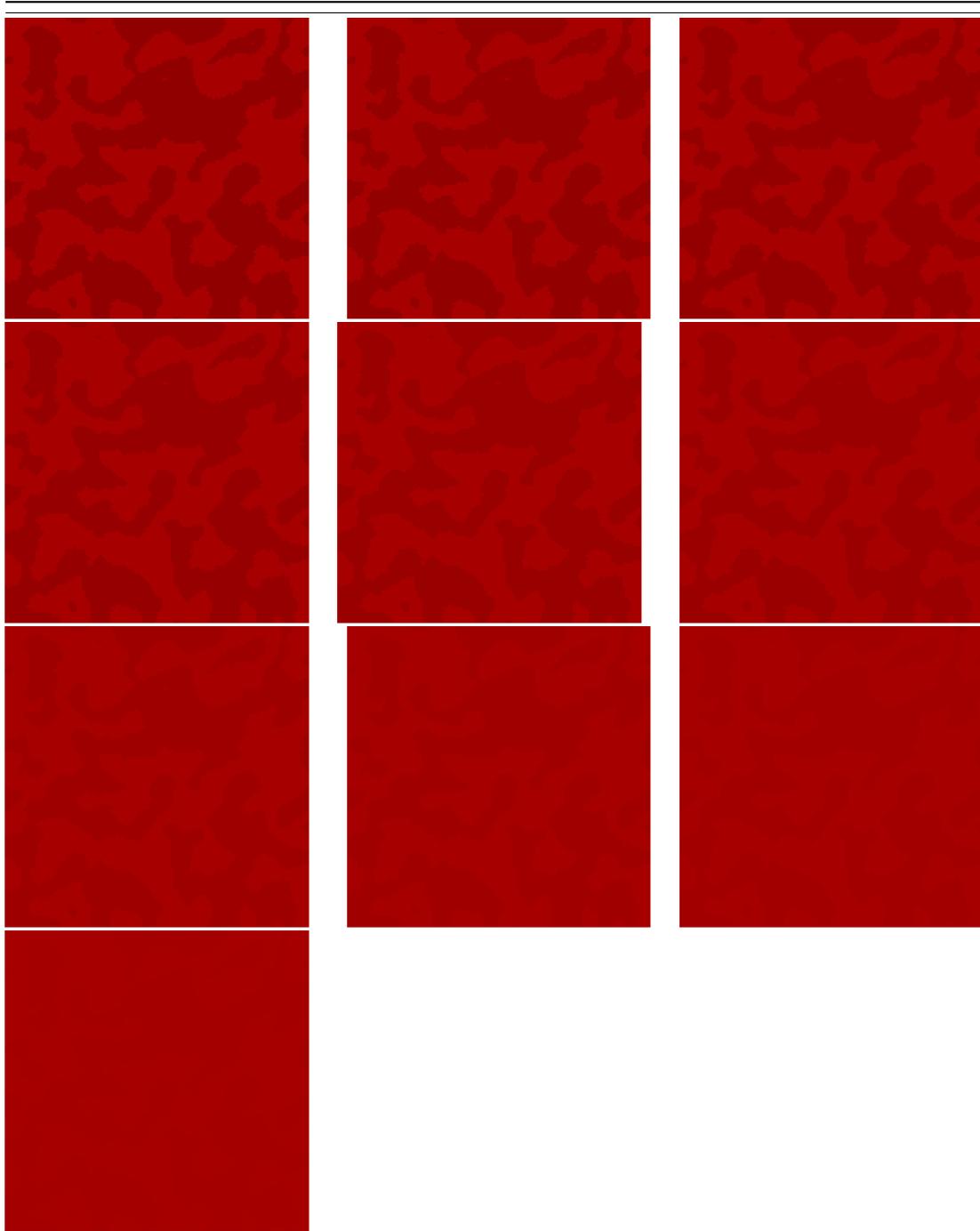


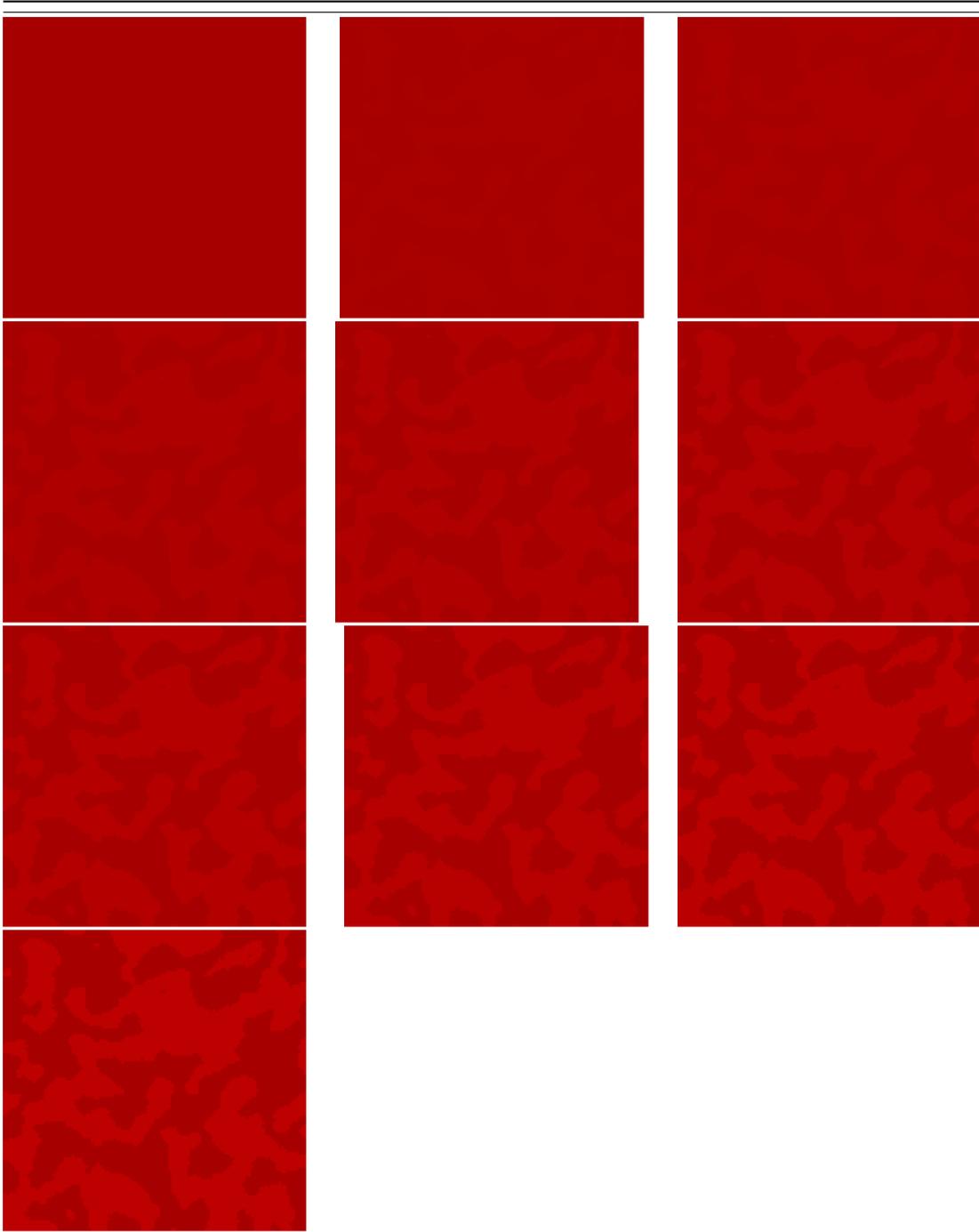
D.1.2 Réseaux à orientation verticale



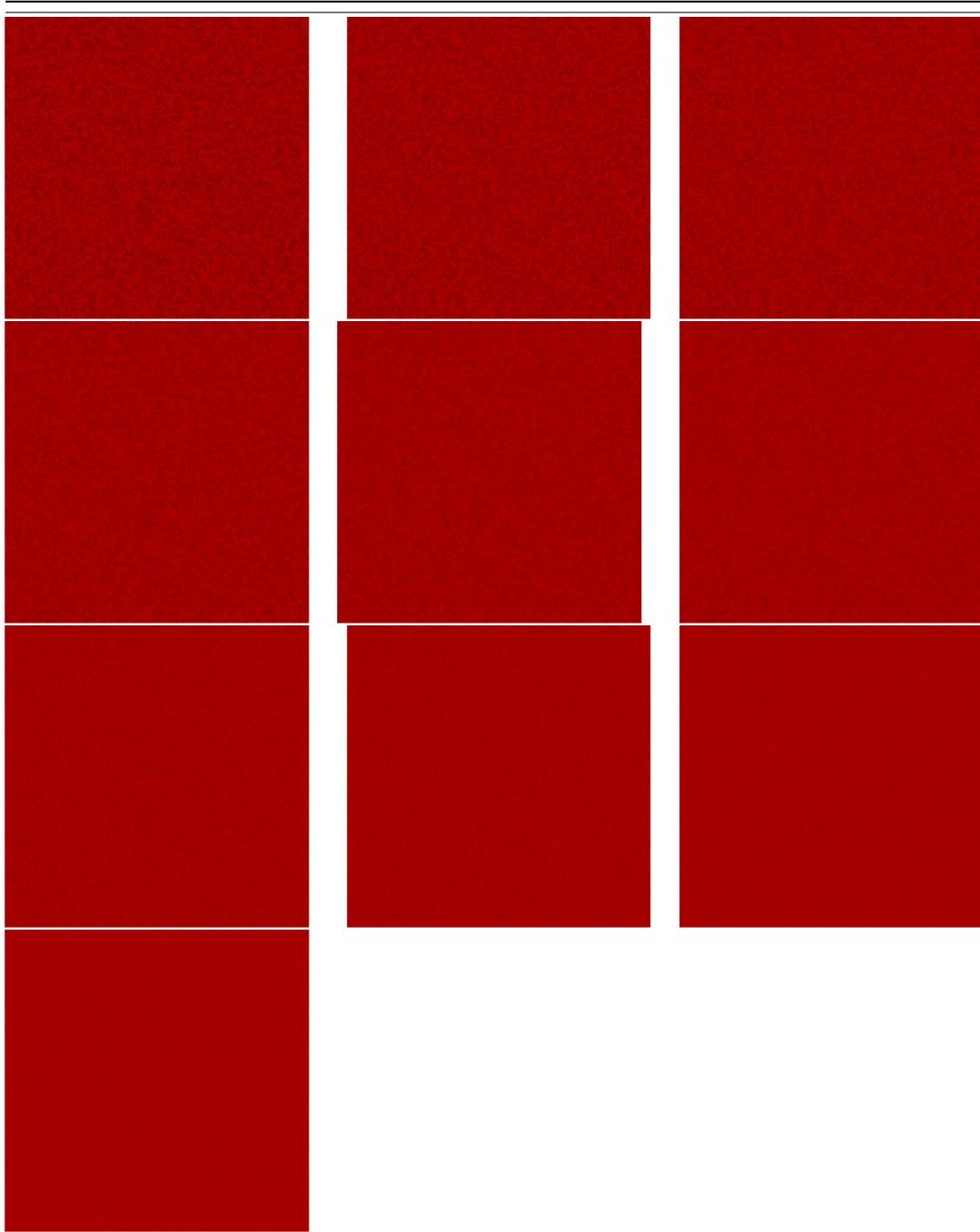
		
		
		
		

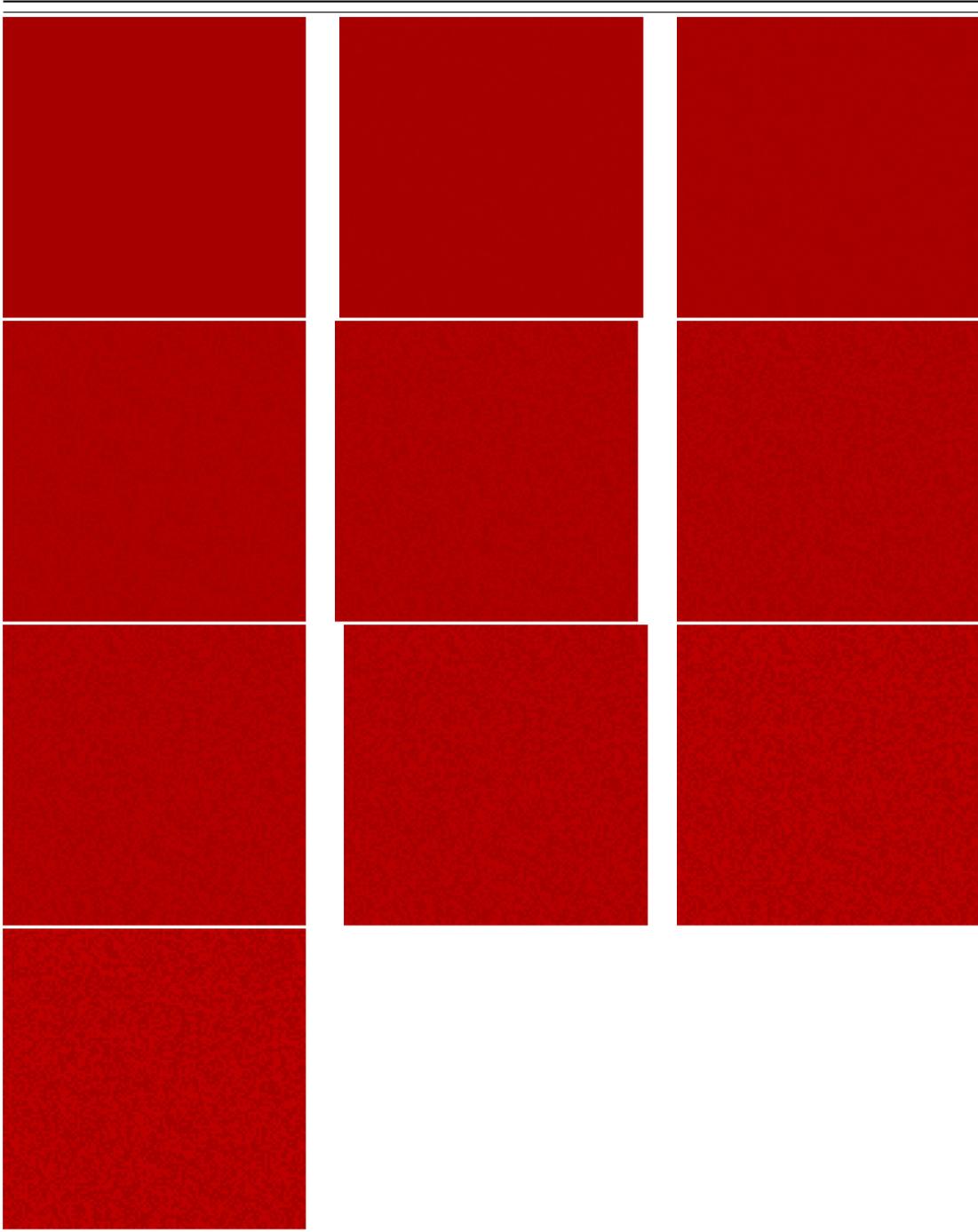
D.1.3 Textures isotropes





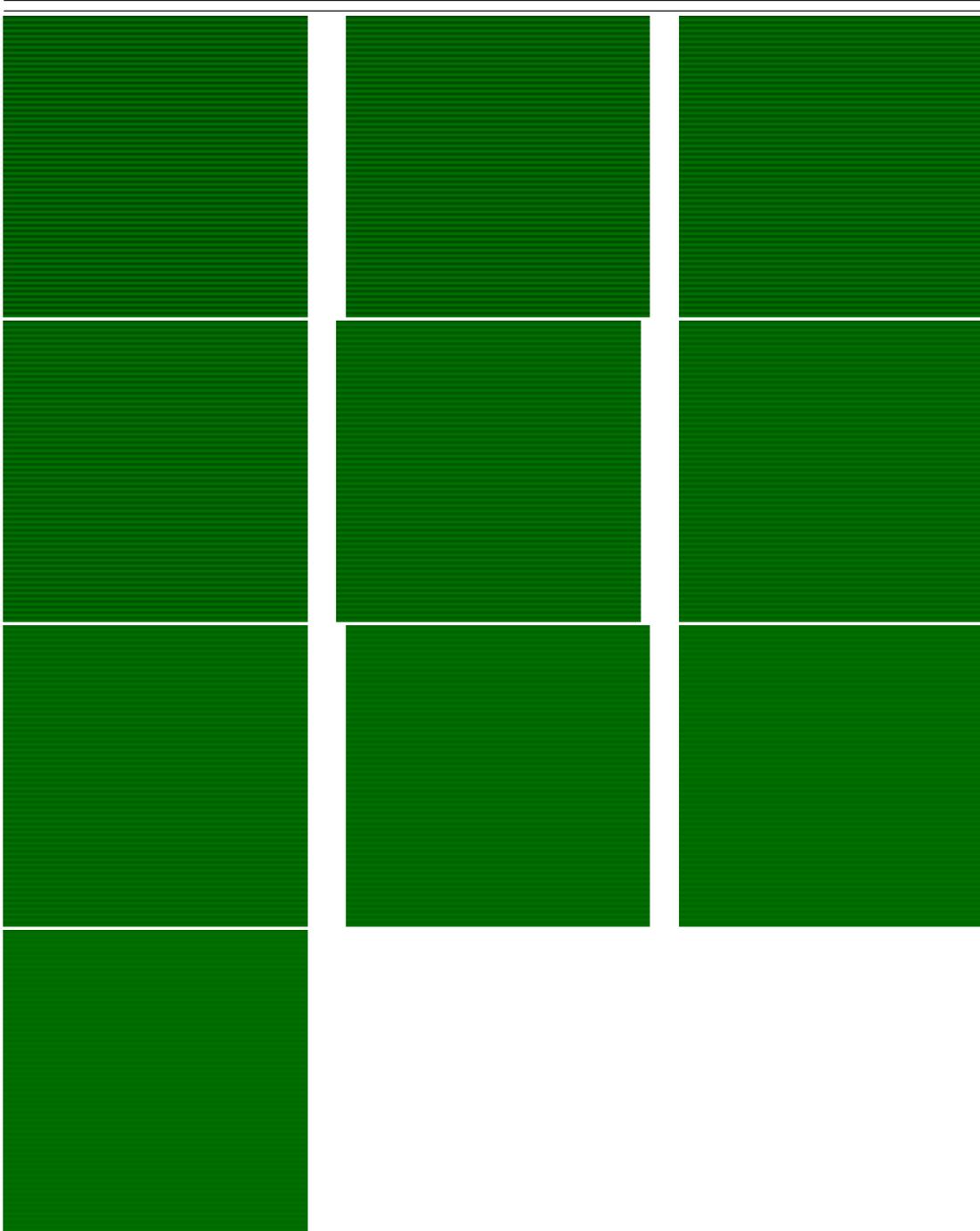
D.1.4 Textures aléatoires

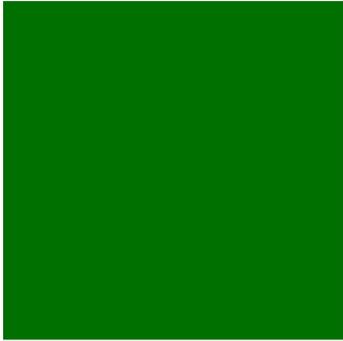
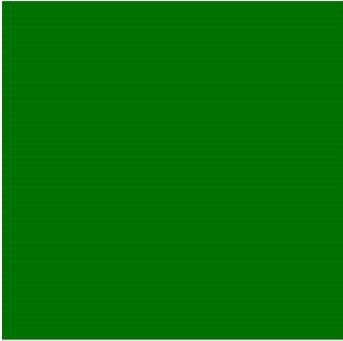
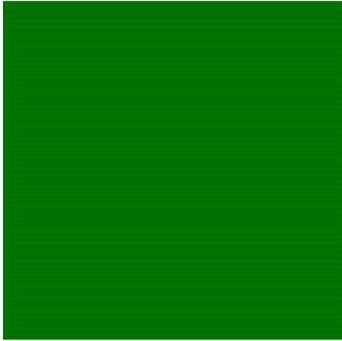
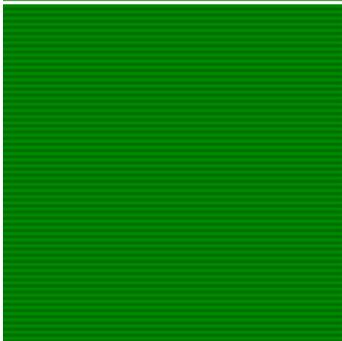
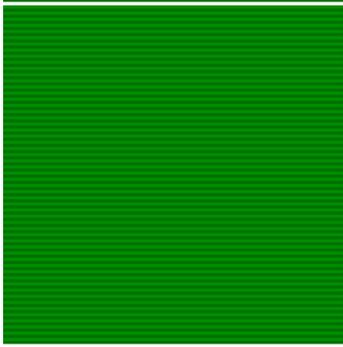




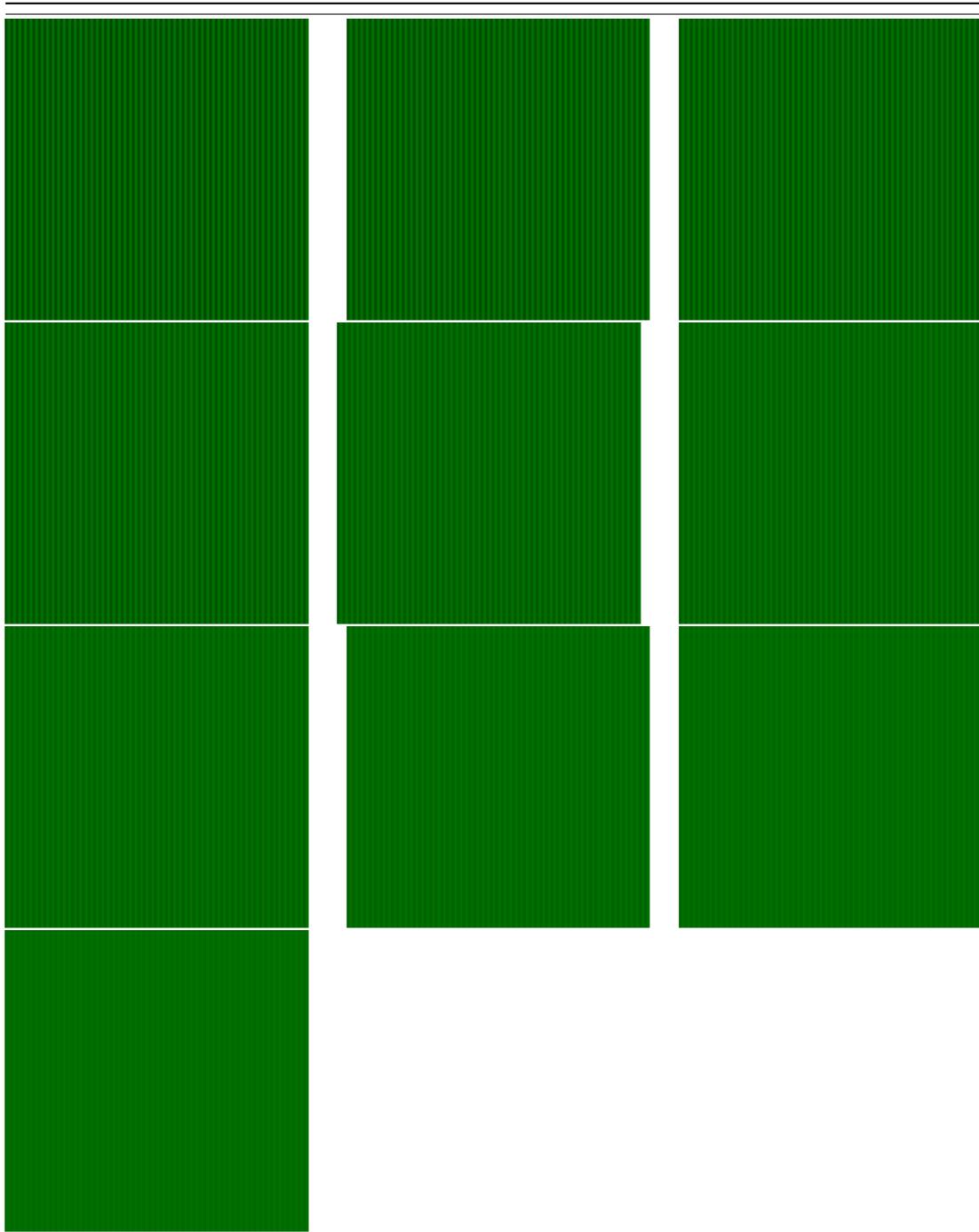
D.2 Images texturées colorées dans la teinte verte

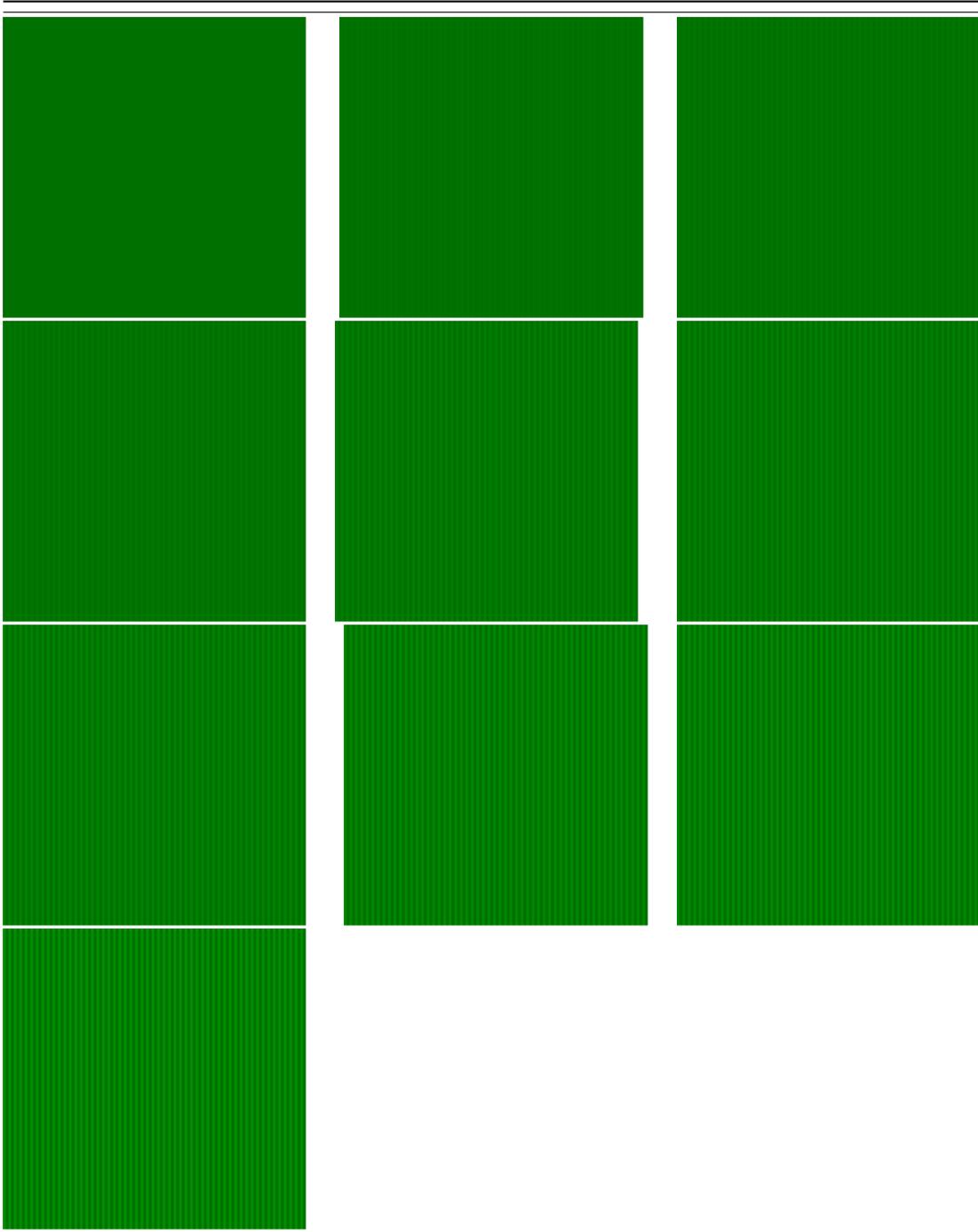
D.2.1 Réseaux à orientation horizontale



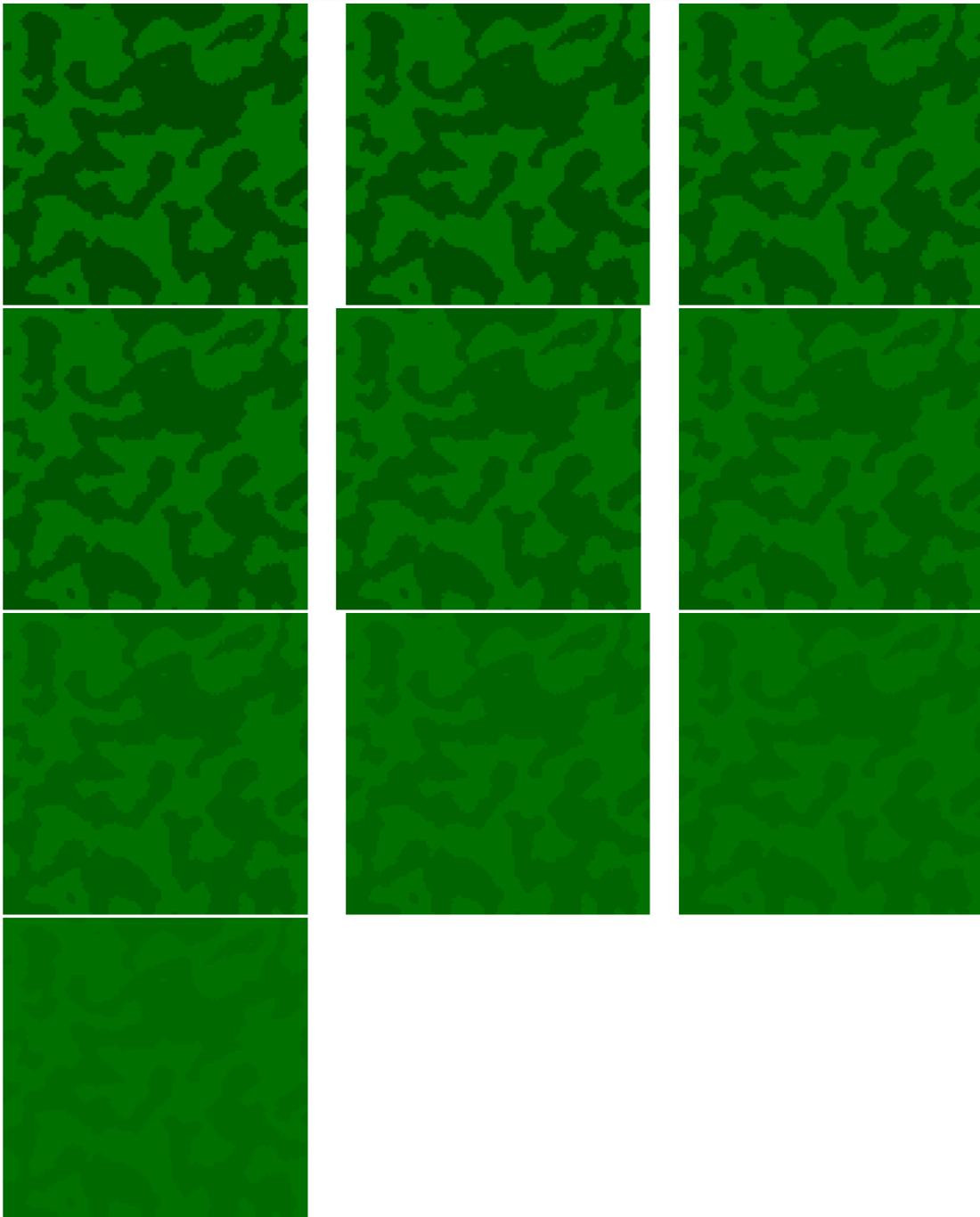
		
		
		
		

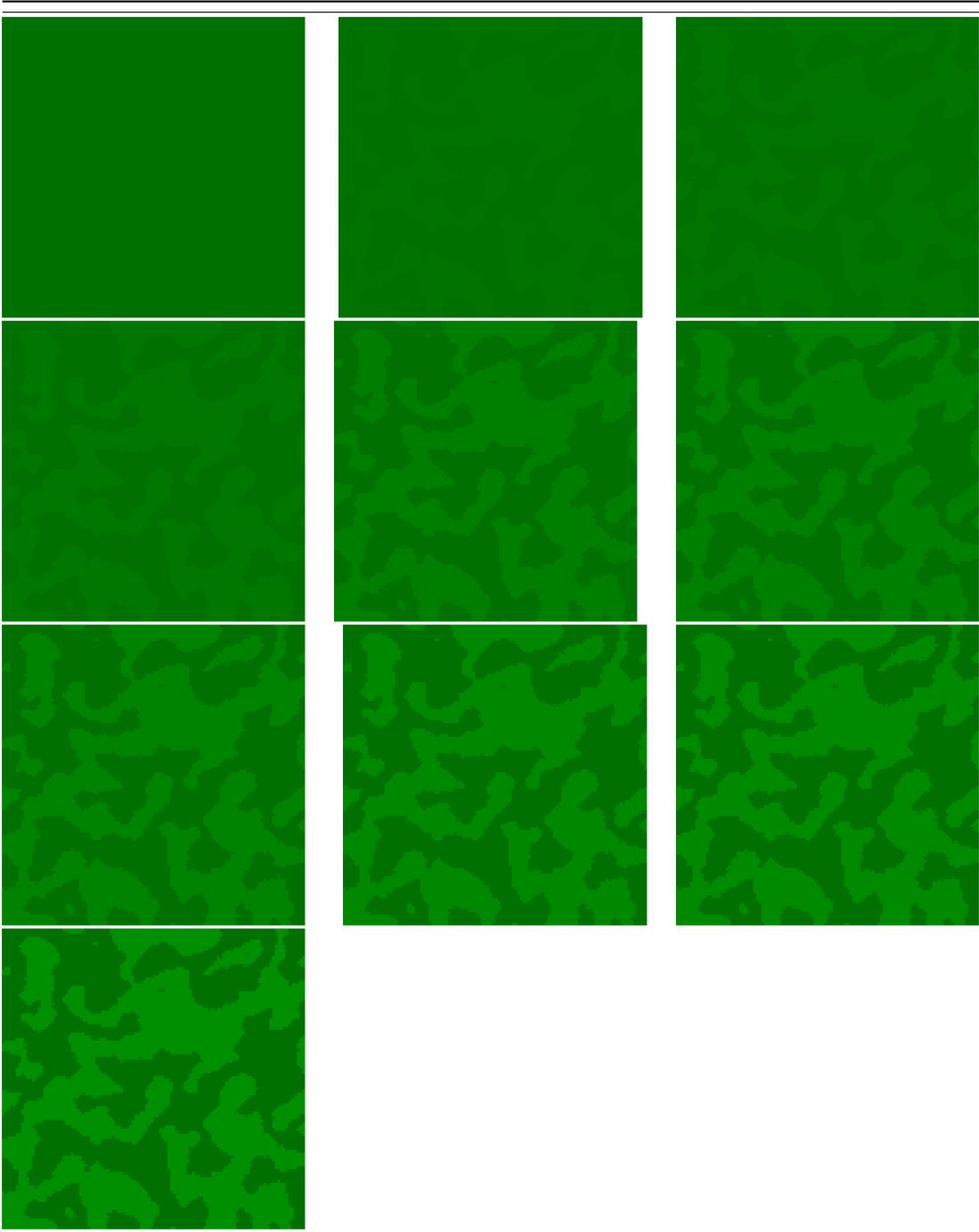
D.2.2 Réseaux à orientation verticale



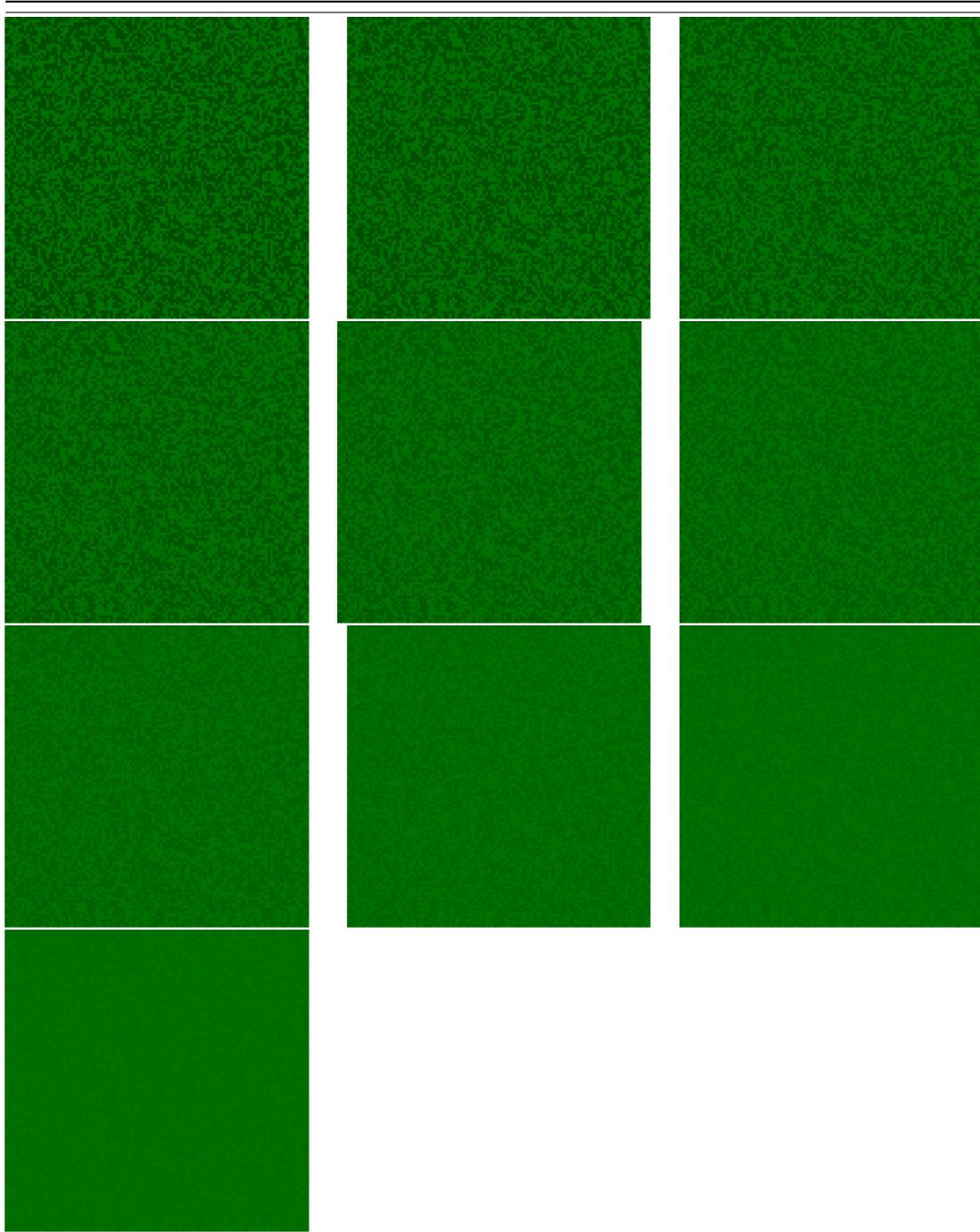


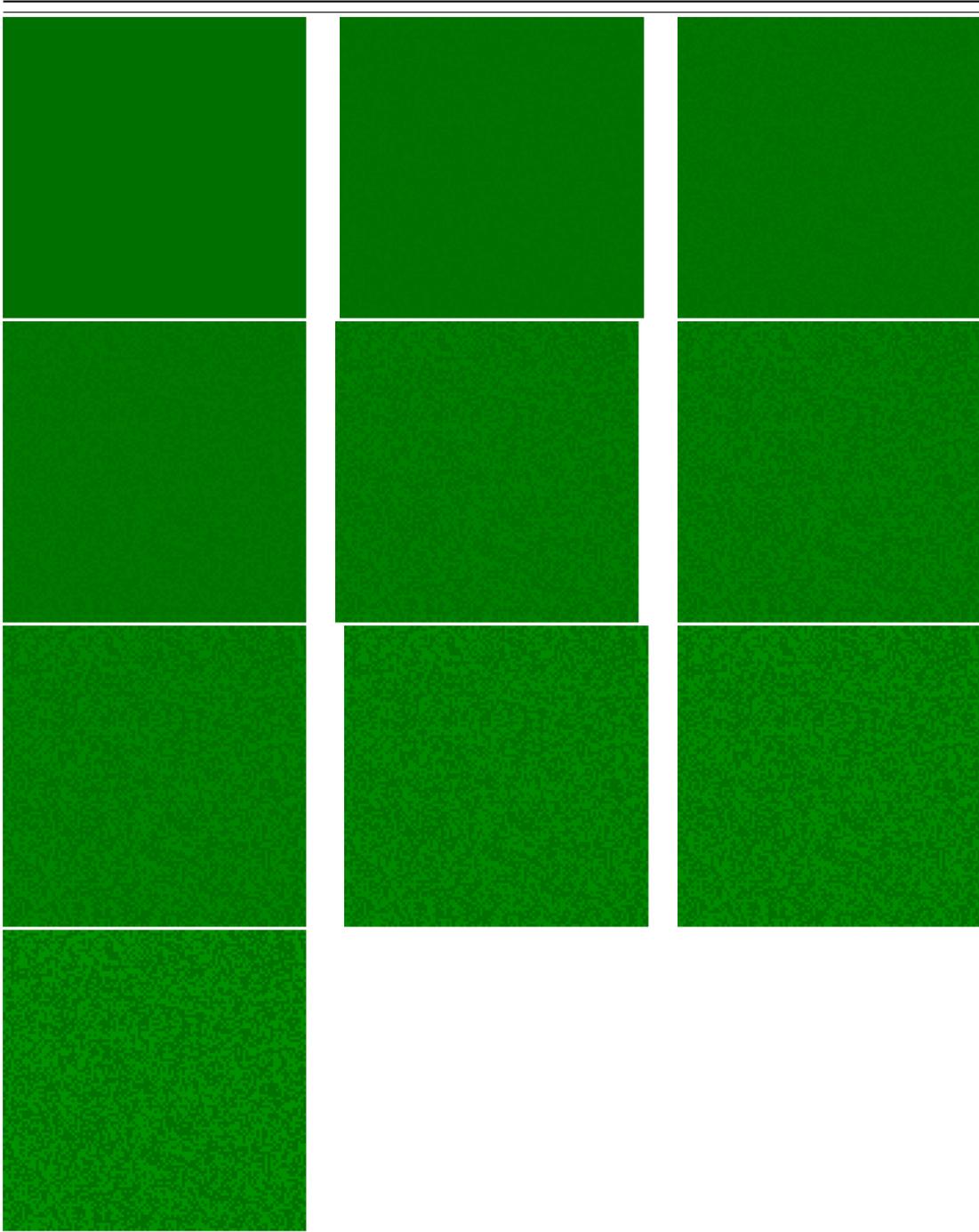
D.2.3 Textures isotropes





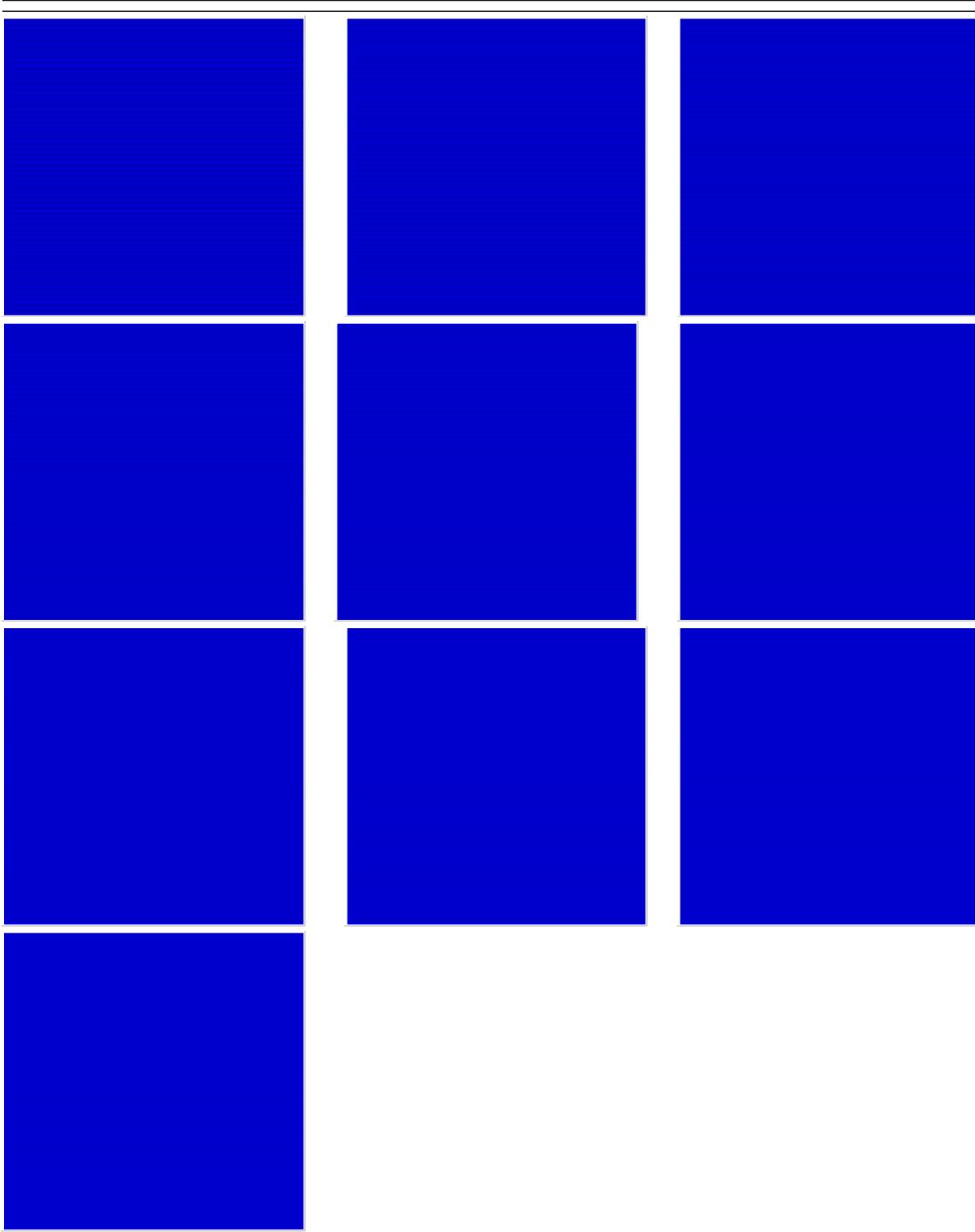
D.2.4 Textures aléatoires

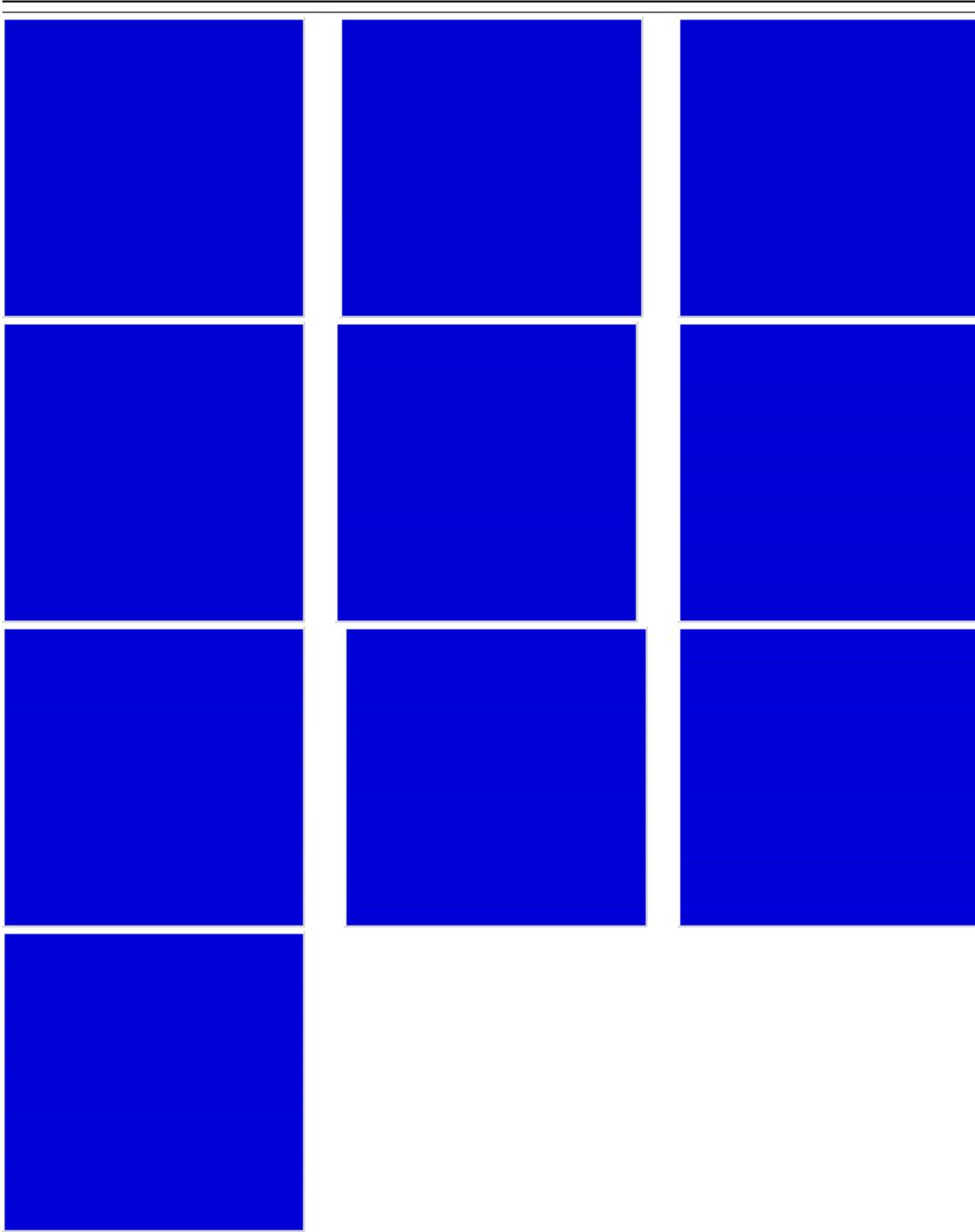




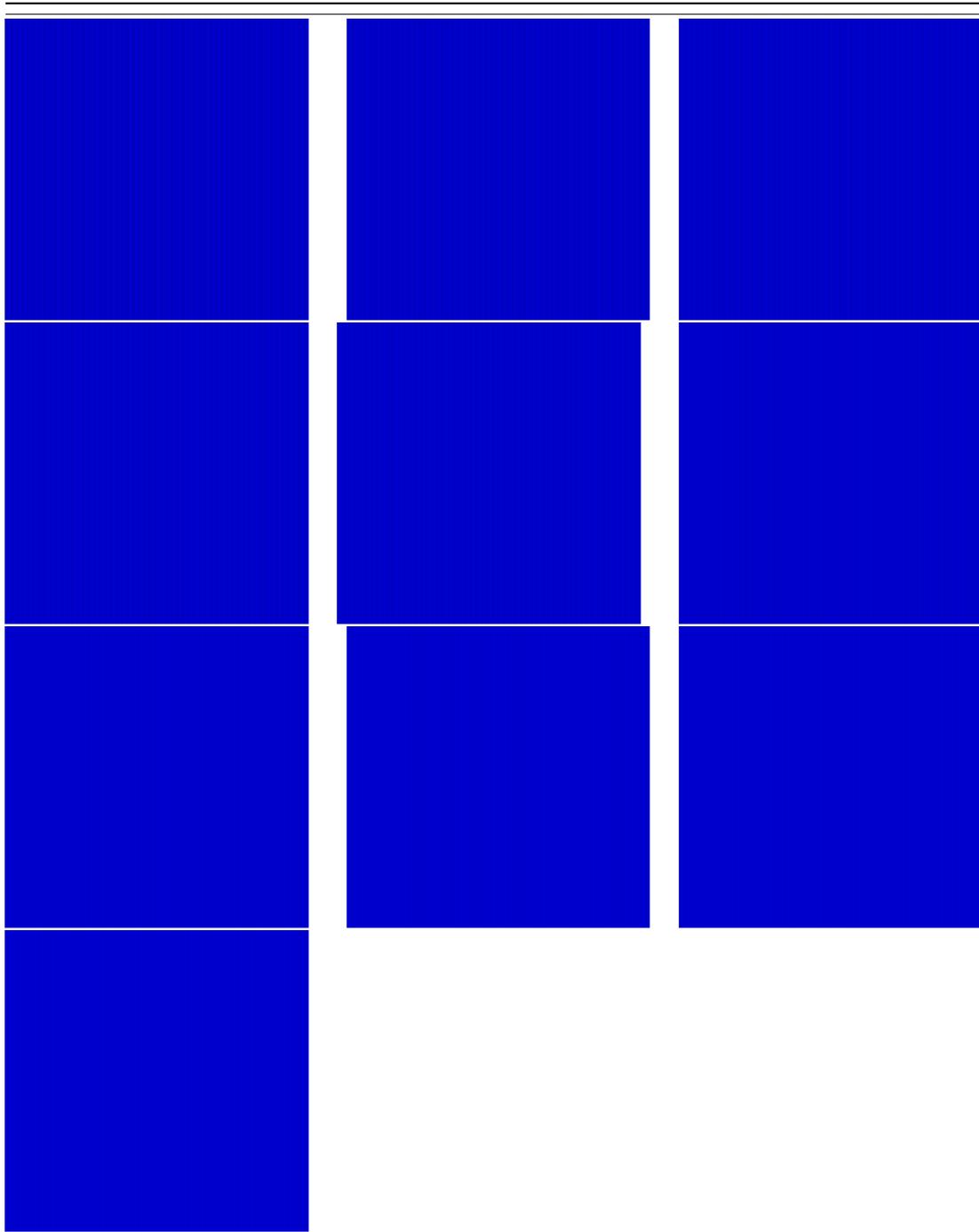
D.3 Images texturées colorées dans la teinte bleue

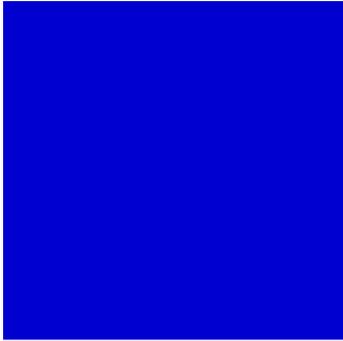
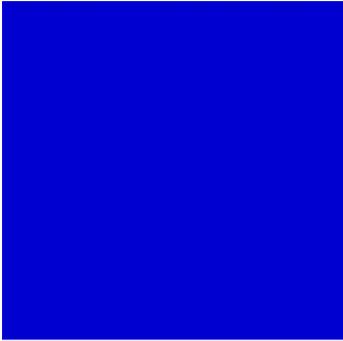
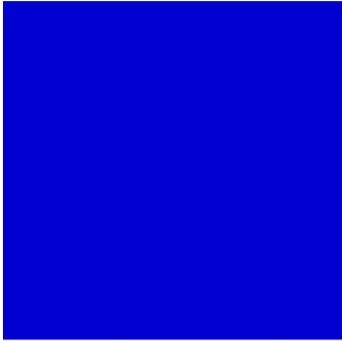
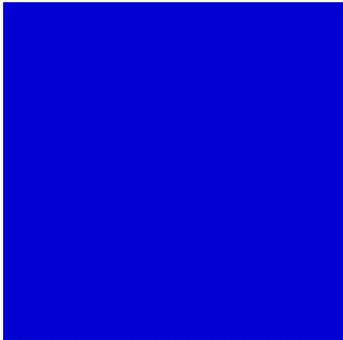
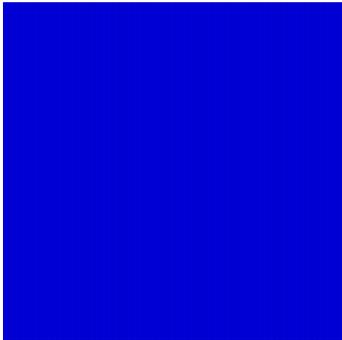
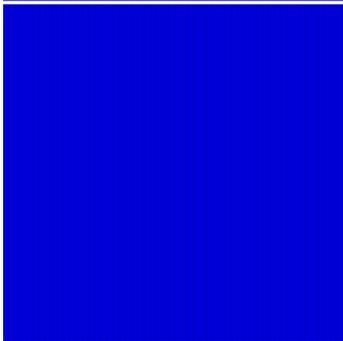
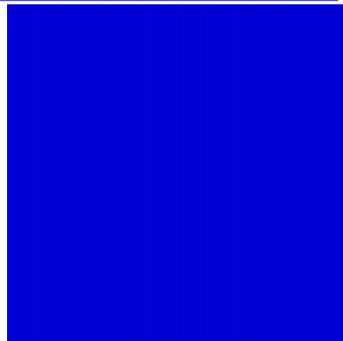
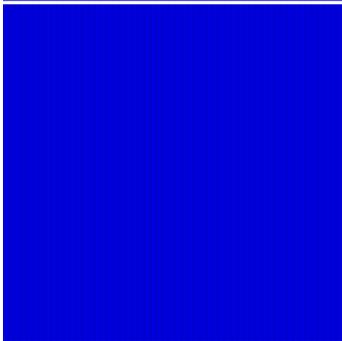
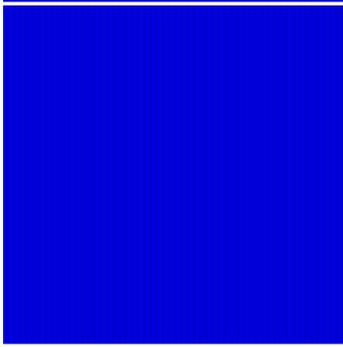
D.3.1 Réseaux à orientation horizontale



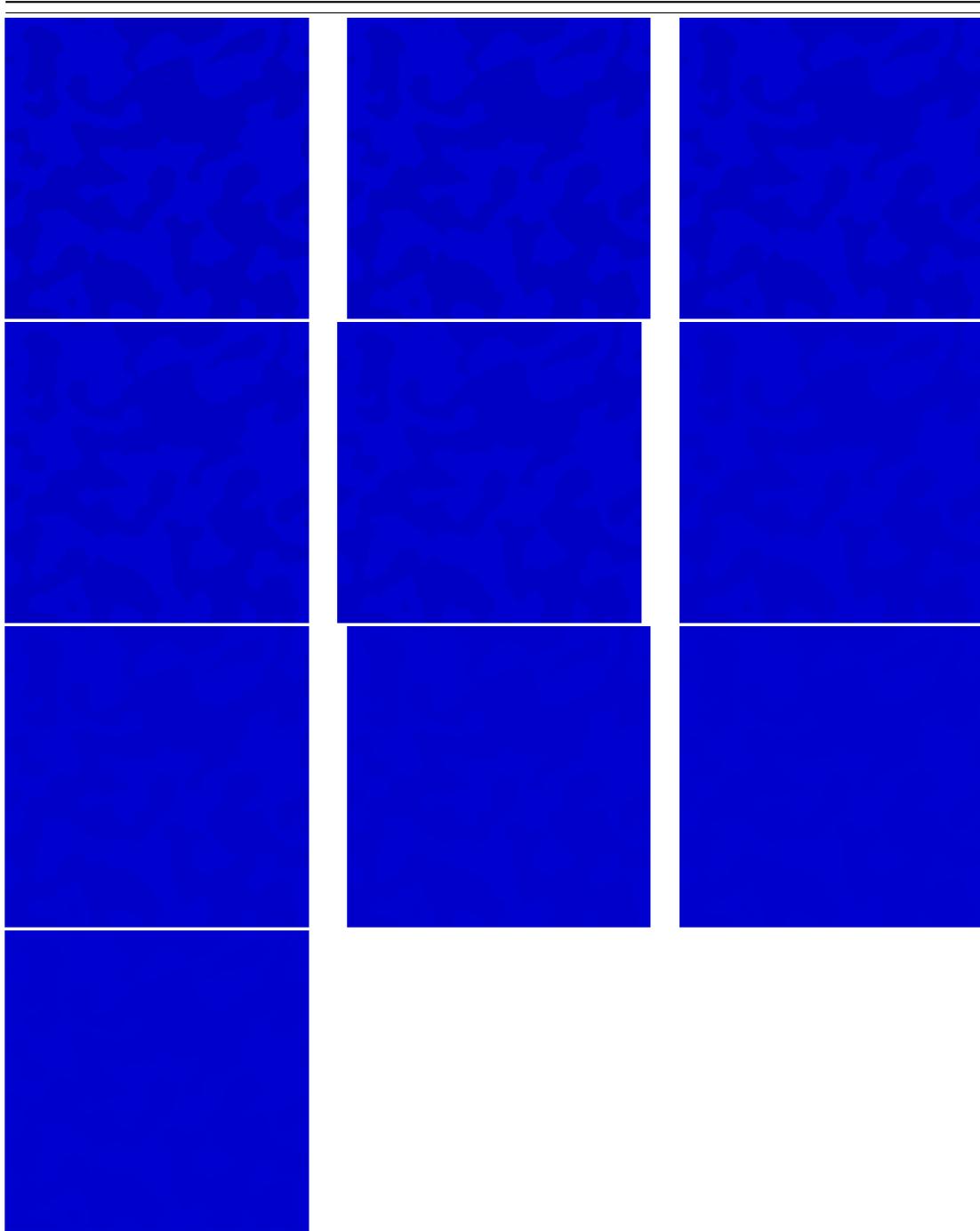


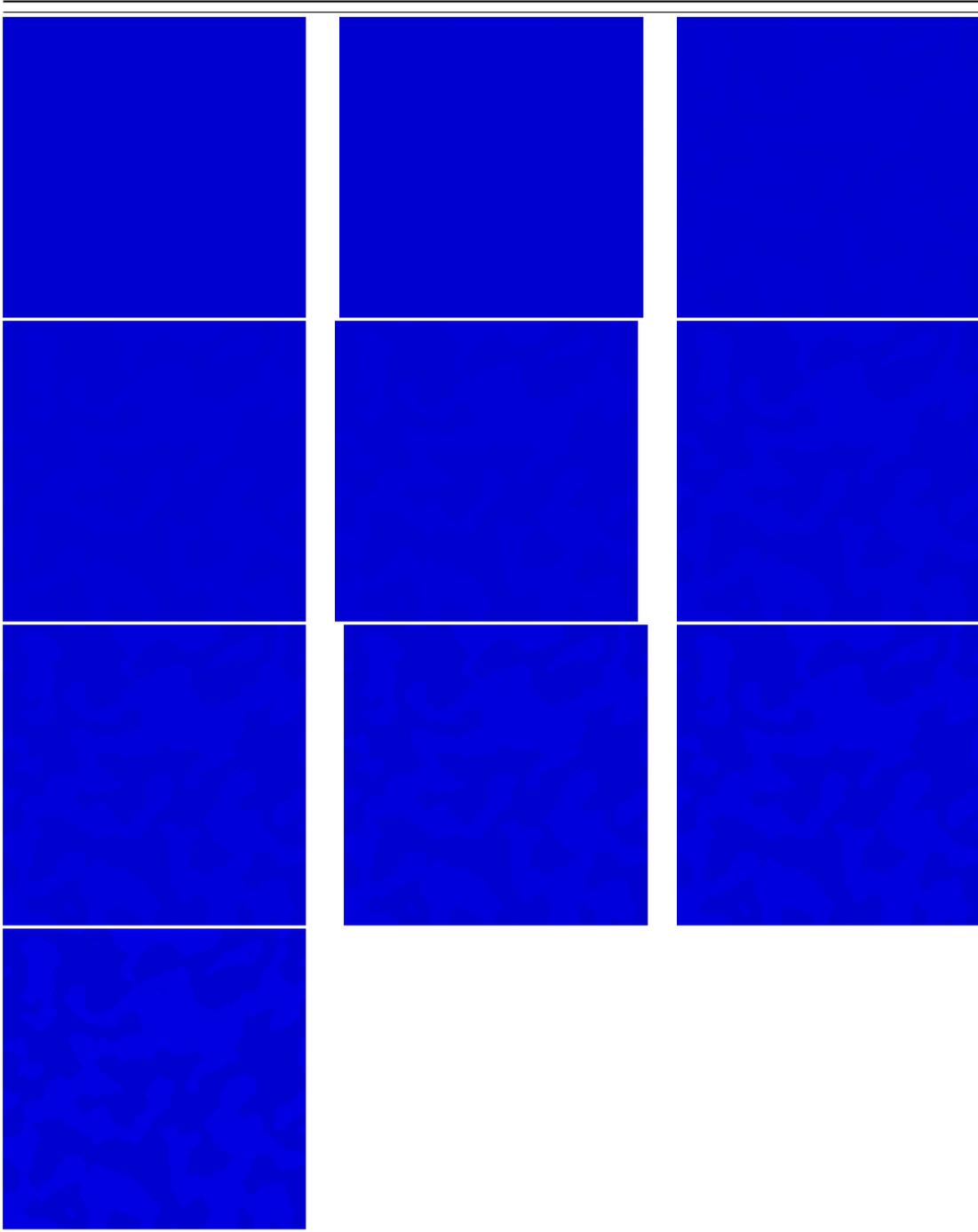
D.3.2 Réseaux à orientation verticale



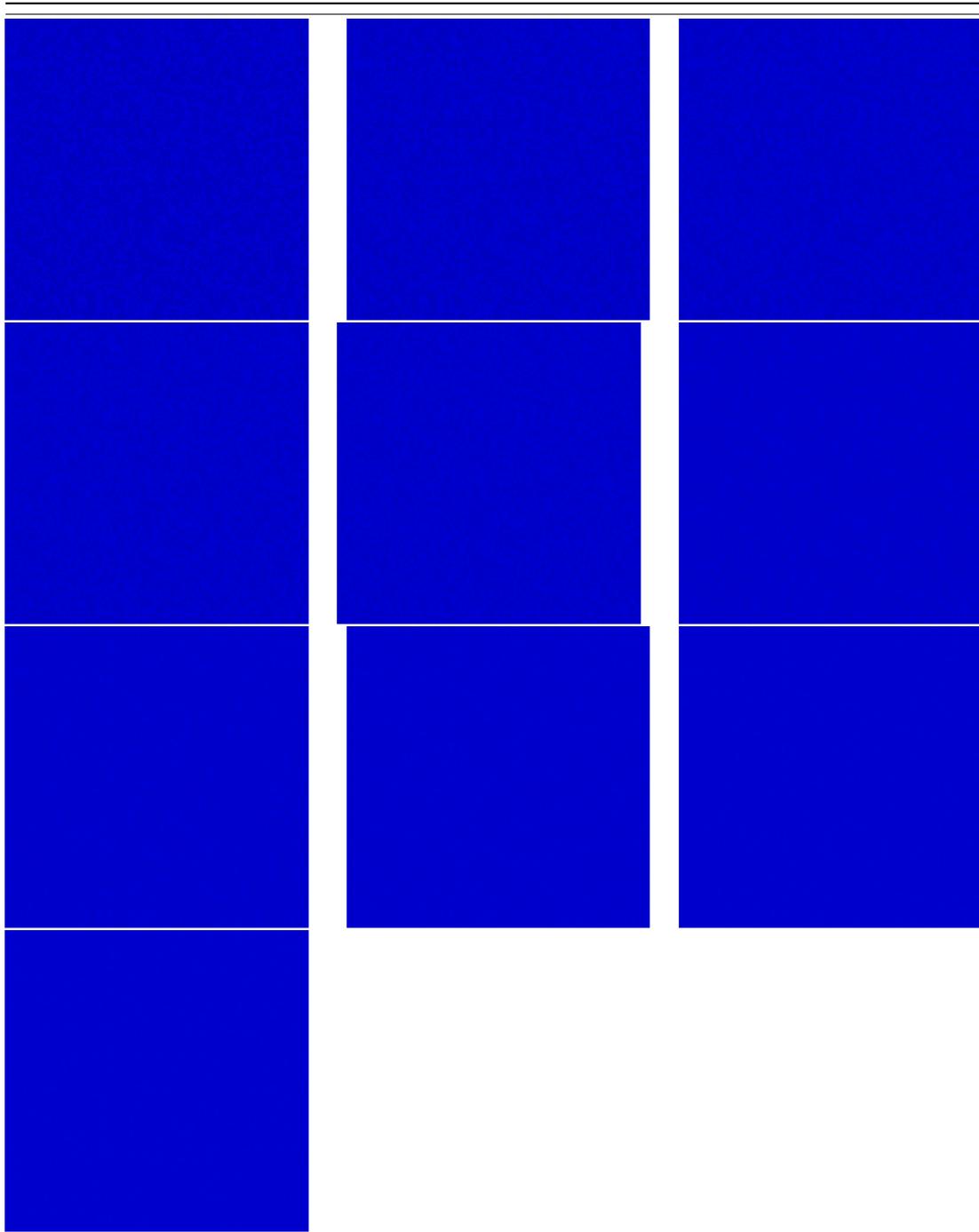
		
		
		
		

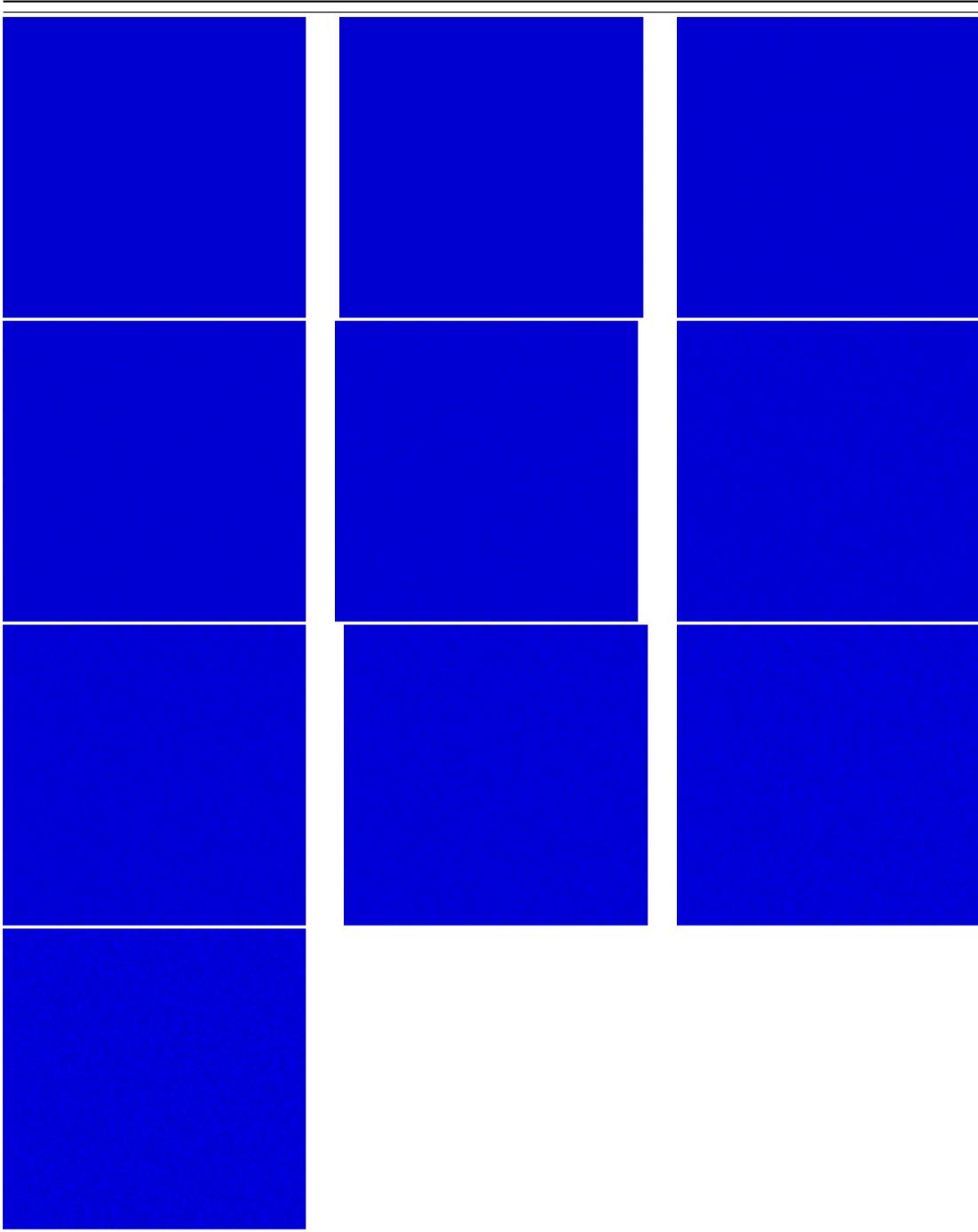
D.3.3 Textures isotropes





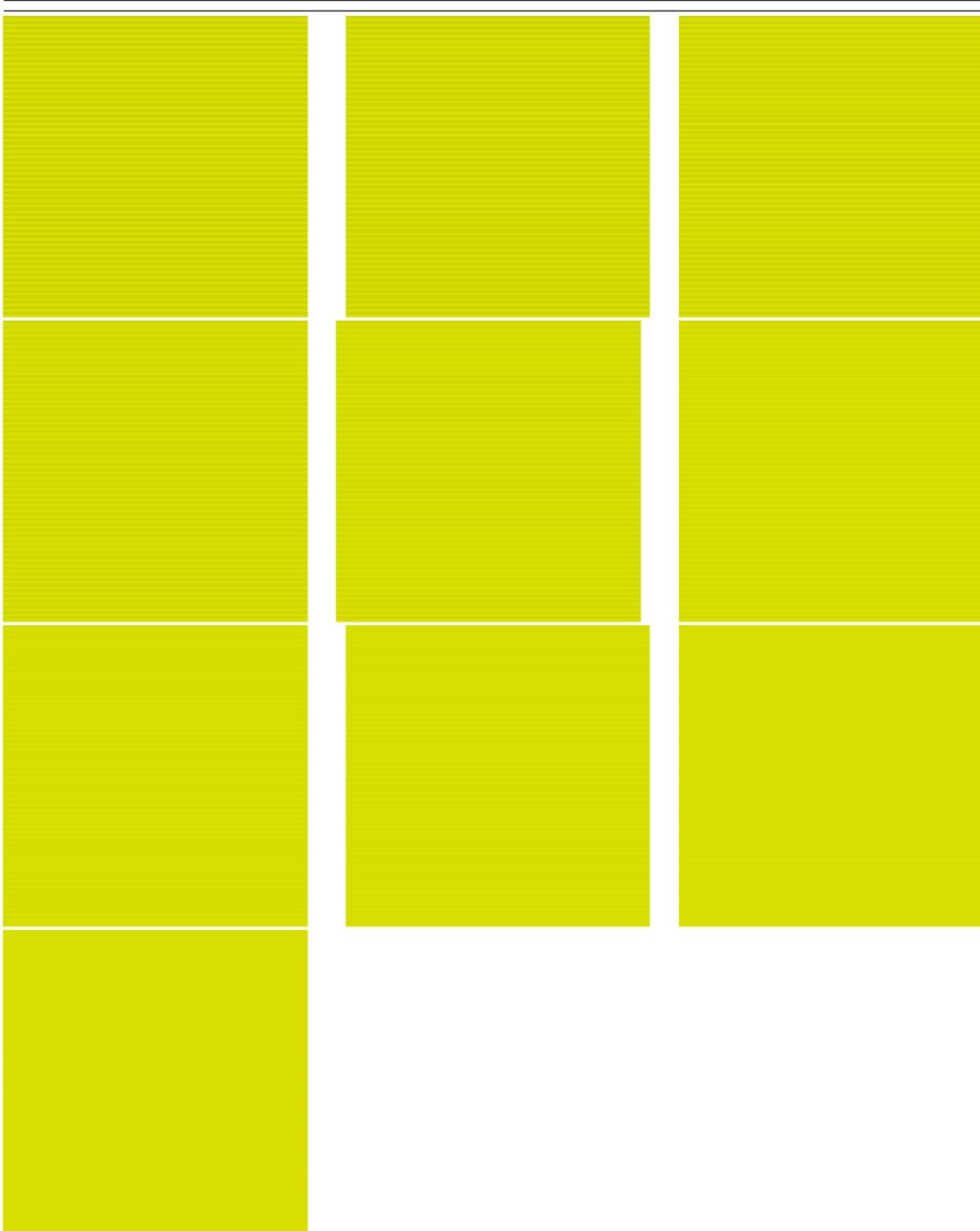
D.3.4 Textures aléatoires

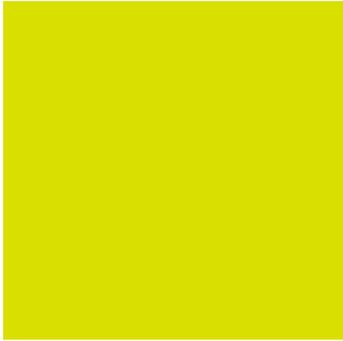
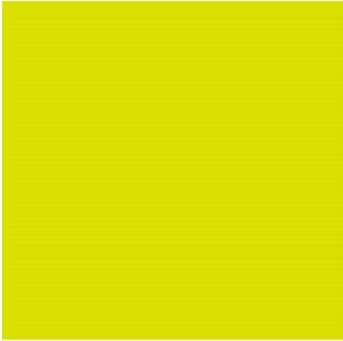
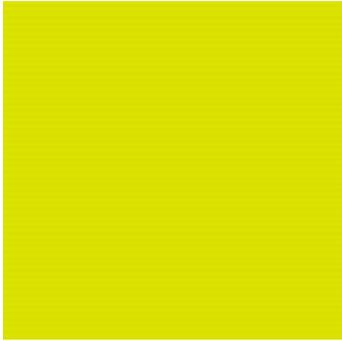




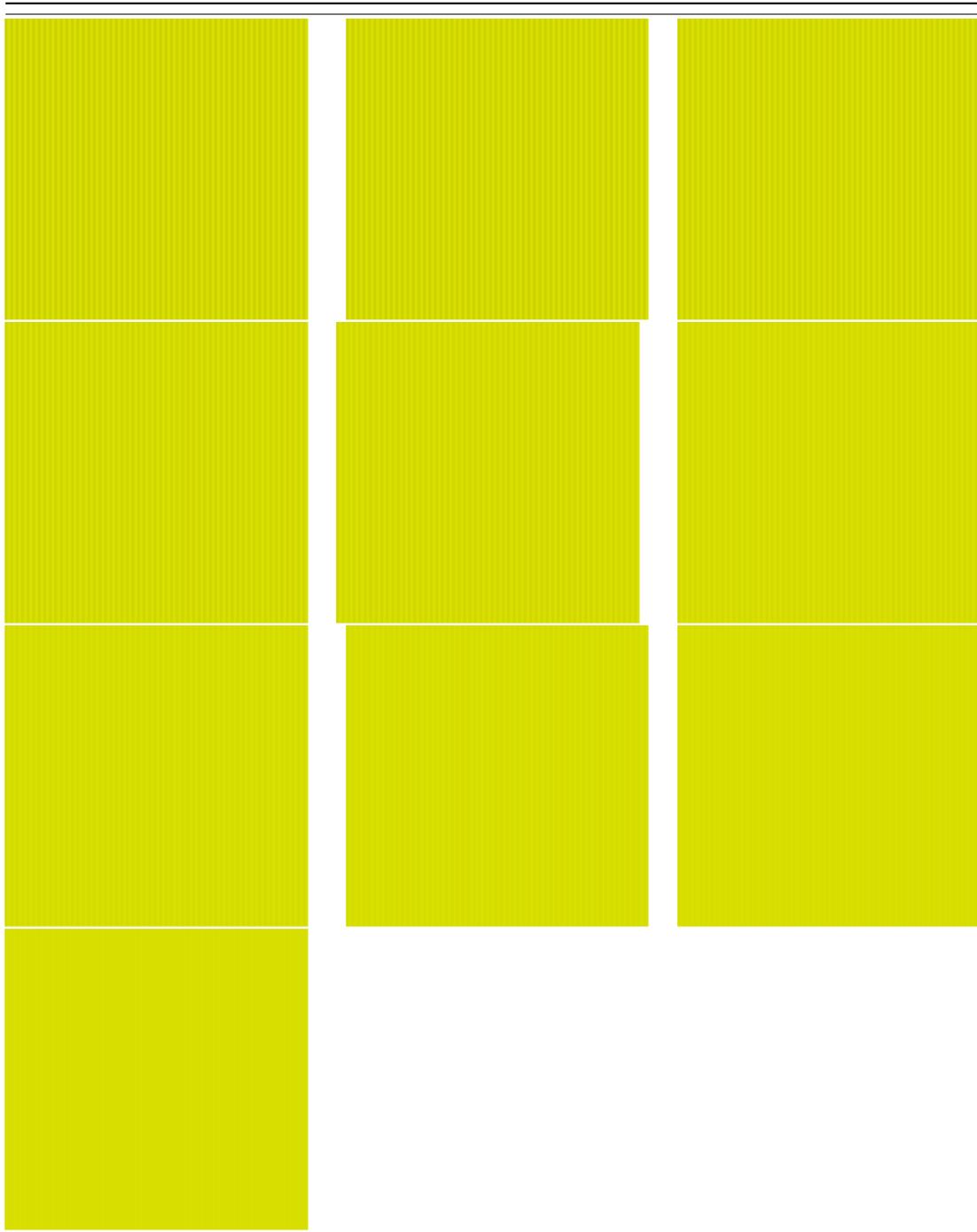
D.4 Images texturées colorées dans la teinte jaune

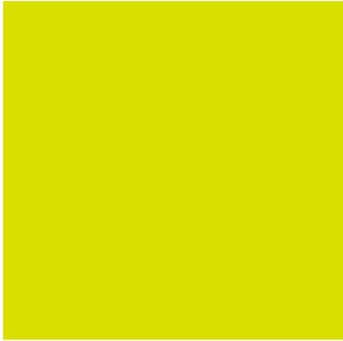
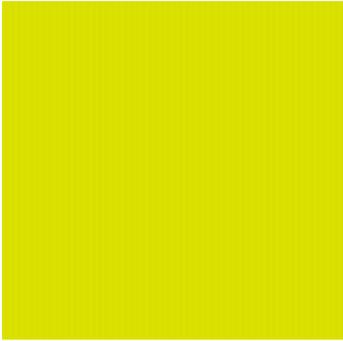
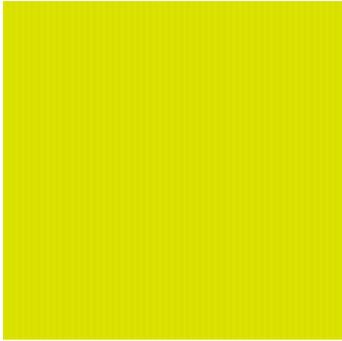
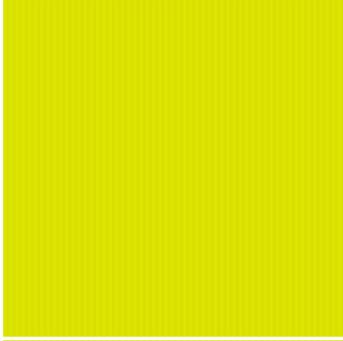
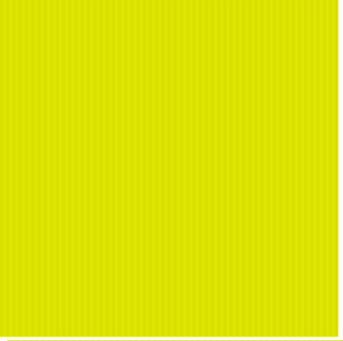
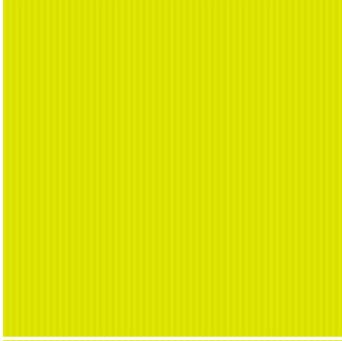
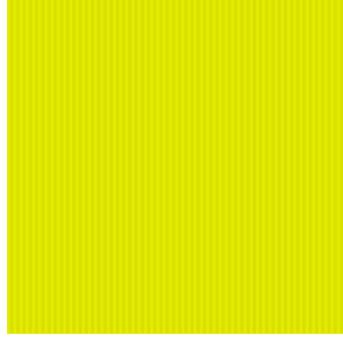
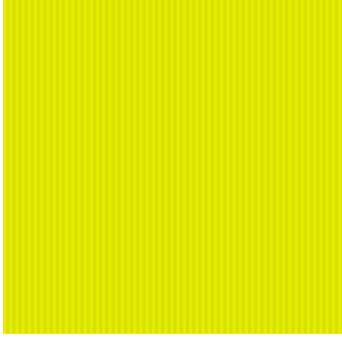
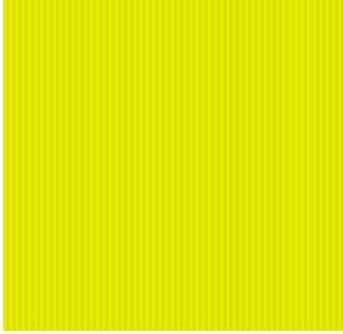
D.4.1 Réseaux à orientation horizontale



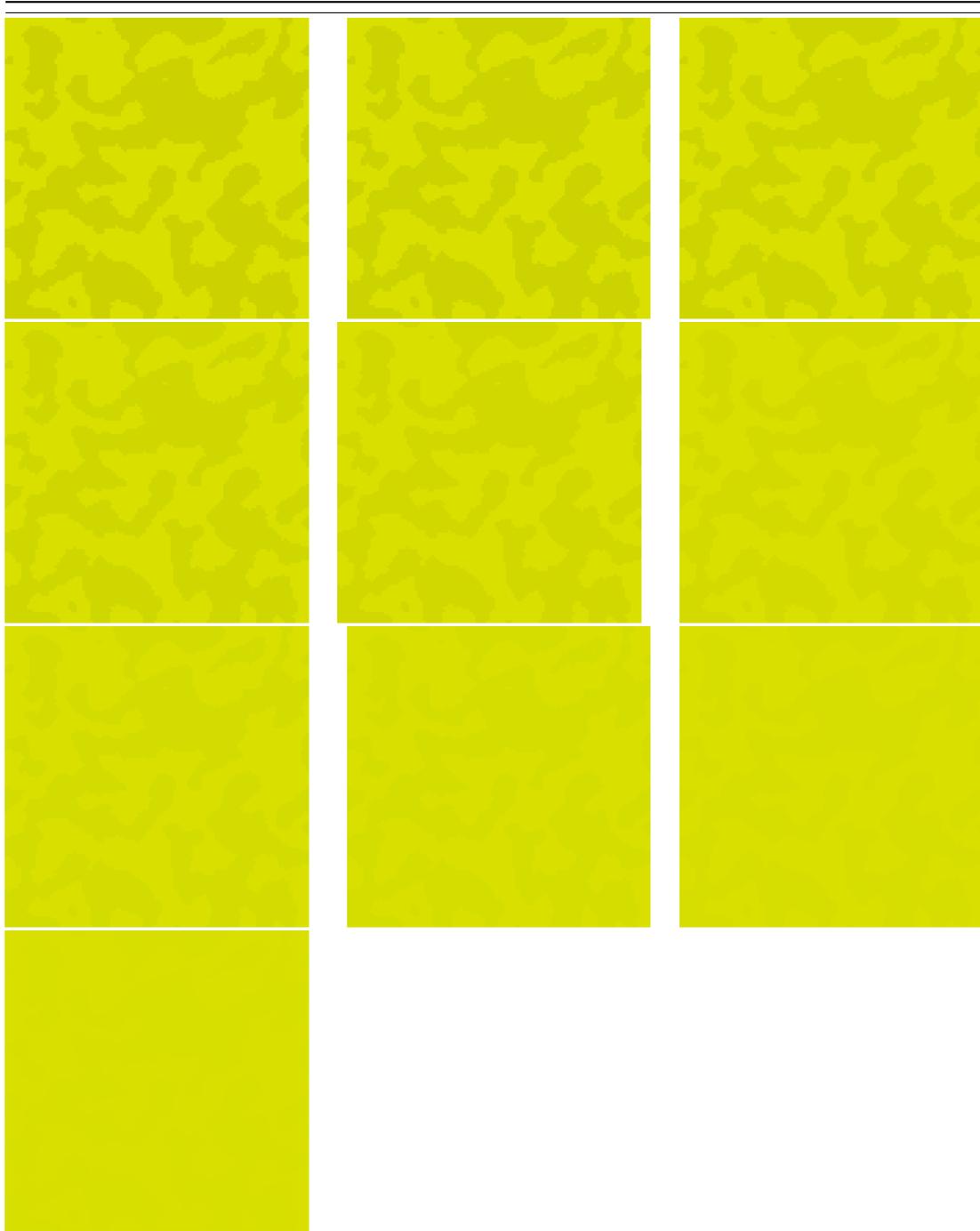
		
		
		
		

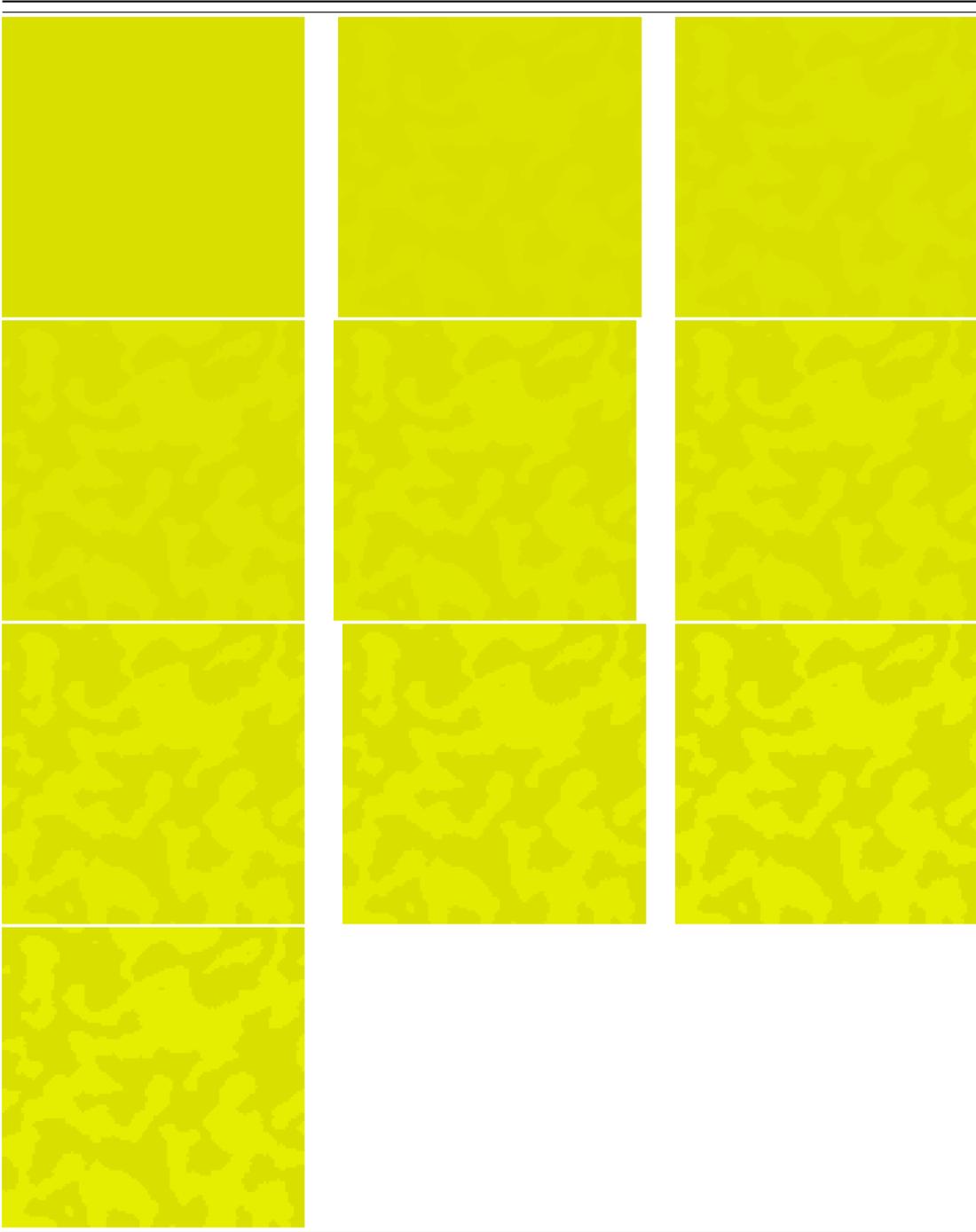
D.4.2 Réseaux à orientation verticale



D.4.3 Textures isotropes





D.4.4 Textures aléatoires

