Etudes expérimentales des propriétés dispersives de structures photoniques à base de micro-résonateurs pour la réalisation de fonctions optiques

Stephane Trebaol

▶ **To cite this version:**

Stephane Trebaol. Etudes expérimentales des propriétés dispersives de structures photoniques à base de micro-résonateurs pour la réalisation de fonctions optiques. Physique [physics]. Université Rennes 1, 2010. Français. NNT : . tel-00550001

HAL Id: tel-00550001

https://theses.hal.science/tel-00550001

Submitted on 23 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2010REN1E006 **ANNÉE 2010**

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : PHYSIQUE

École doctorale SDLM

présentée par

Stéphane Trebaol

préparée à l'unité de recherche UMR 6082 Foton

École nationale supérieure des sciences appliquées et de technologie

---

Études expérimentales des propriétés dispersives de structures photoniques à base de micro-résonateurs pour la réalisation de fonctions optiques

Thèse soutenue à Lannion le 19 octobre 2010

devant le jury composé de :

Hervé FOLLIOT
Professeur, Foton INSA Rennes / *président*

Fabien BRETENAKER
Directeur de recherche CNRS, LAC / *rapporteur*

Laurent VIVIEN
Chargé de recherche CNRS, IEF / *rapporteur*

Giancarlo RIGHINI
Directeur de recherche CNR, IFAC / *examinateur*

Laurent LARGER
Professeur, FEMTO-ST Université de Franche-Comté / *examinateur*

Patrice FÉRON
Maître de conférence HDR, Foton Université de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Remerciements

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés au laboratoire Foton à Lannion dans le groupe GPL (Groupe de Physique des Lasers).

Mes premiers remerciements vont à Patrice Féron et Yannick Dumeige respectivement mon directeur et mon encadrant de thèse. L'humilité, la persévérance, la rigueur scientifique - chaque jour remettre en question les résultats obtenus -, la volonté de travailler en équipe, la curiosité autant de qualités qui vous caractérisent et dont j'ai pu bénéficier au cours de ces trois années.

Je remercie chaleureusement Fabien Bretenaker et Laurent Vivien d'avoir accepté d'être rapporteur de mon travail. Merci pour leur efficacité, leurs remarques et questions à chaque fois pertinentes.

Je remercie également Giancarlo Righini du CNR - spécialement venu de Florence - et Laurent Larger du Laboratoire Femto-ST pour leur participation et leurs questions constructives lors de la soutenance. Un grand merci à Hervé Folliot d'avoir accepté de juger mon travail et de présider ce jury.

Parmi les autres collègues du laboratoire, je tiens à remercier Réjane leroy, Danielle Graviou, Nelly Vaucelle et Sylvain Fève pour leur aide précieuse et leur bonne humeur.

Je remercie également Stéphane chehayed et Henry L'Her du service technique pour les dépannages informatiques et électroniques.

Je remercie le directeur du Laboratoire, Jean Claude Simon et le responsable du groupe GPL, Pascal Besnard de m' avoir accueilli au sein du Laboratoire pendant ces trois années de thèse.

Comme dirait Patrice : "dans le groupe microsphère on ne fait que jouer aux billes", je me permets une petite digression quand à la mise en page de ces remerciements:

Merci à mes collègues
de travail et notamment Laura
Ghişa pour m'avoir initié aux billes au
début de ma thèse, Ngân Thi Kim Nguyen
pour nos expériences communes sur la "dransparence
intuite" par l'intermédiaire du *slip bleu*. Merci à Ana
Stoita pour m'avoir appris à jurer en langue roumaine.
Merci à Olivier Vaudel pour ses bons conseils LaTeX, sa gentillesse et ses videos et blagues du matin. Merci à Yohann Léguillon le footeux et Kenny HeyTow *the wrestler* de m'avoir presque convaincu de faire du foot, du moins dans un canapé. Je les remercie également pour la bonne humeur qu'ils ont su propager dans tout le bâtiment E. Merci à Alexandra et Quoc Thai pour les petites douceurs accompagnants le café du matin. Une pensée également pour Lei Xiao, collègue de travail chinois pendant deux ans. À son contact, j'ai découvert une autre culture et une autre façon de travailler. Nos nombreux échanges tant professionnels que personnels ont été enrichissants. Je remercie également marraine pour la relecture attentive de ce manuscrit. De manière générale merci à toutes les
personnes qui m'ont aidé au quotidien et
que je n'ai pas explicitement nommées dans cette bille.

Et enfin, je remercie mes parents de m'avoir toujours soutenu et encouragé à faire de mes envies une réalité. Merci à Anne sans qui je ne serai pas allé jusqu'au bout de cette thèse. Tu as su me faire tenir pied durant les moments difficiles de la rédaction et m'écouter le soir te raconter un charabia...

Table des matières

Remerciements iii

Table des matières v

Table des figures ix

Liste des tableaux xiii

Introduction 1

I Descriptions théorique et expérimentale d'un résonateur optique 7

1 Description d'un résonateur optique 9
1.1 Modèle d'évolution temporelle . . . 9
1.1.1 Choix du formalisme . . . 9
1.1.2 La cavité isolée . . . 10
1.1.3 La cavité couplée . . . 11
1.1.4 Le champ de sortie . . . 13
1.1.4.1 Détermination de c_u . . . 13
1.1.4.2 Détermination de c_{in} . . . 14
1.2 Le régime stationnaire . . . 15
1.2.1 La transmission . . . 15
1.2.2 Les propriétés dispersives . . . 18
1.2.2.1 Le temps de groupe . . . 18

2 Méthodes de caractérisation de résonateurs à haut facteur de qualité 21
2.1 Les méthodes expérimentales de caractérisation . . . 21
2.1.1 Caractérisation de résonateurs en régime stationnaire . . . 21
2.1.2 Réponse temporelle du résonateur . . . 22
2.1.2.1 Principe de la méthode . . . 22
2.1.2.2 Simulations numériques . . . 23
2.1.3 Méthode hybride spectrale/temporelle . . . 26
2.2 Modèle théorique . . . 28
2.2.1 La période des oscillations . . . 29

2.2.2 Mise en évidence du rôle de τ_0 et τ_e . . . 31
2.3 Validation Expérimentale . . . 31
2.3.1 Dispositif expérimental . . . 32
2.3.2 Protocole expérimental . . . 34
2.3.3 Comparaison théorie|expérience . . . 35
2.3.3.1 En régime stationnaire . . . 35
2.3.3.2 En régime dynamique . . . 38
2.3.4 Commentaires . . . 38
2.4 Identification du régime de couplage . . . 40
2.5 Le régime de transparence . . . 42
2.6 Le régime d'amplification sélective . . . 46
2.6.1 Test préliminaire . . . 47
2.6.2 Mesure de l'amplification sélective . . . 48
2.6.2.1 Mesure de grand gain . . . 49
2.6.2.2 Contexte d'utilisation . . . 51
2.7 Applications de la méthode . . . 52
2.7.1 Résonateur à fort facteur de qualité en configuration *add/drop* . . . 52
2.7.2 Microrésonateur à modes de galerie . . . 54

II Phénomènes optiques cohérents à base de cavités couplées 57

3 Couplage de 2 cavités co-résonantes 59
3.1 Le modèle théorique . . . 59
3.1.1 Cas de deux cavités couplées . . . 59
3.1.1.1 La cavité #1 . . . 60
3.1.1.2 Les deux cavités couplées . . . 61
3.1.2 Généralisation à N cavités . . . 63
3.2 Phénomène de transparence induite par couplage de résonateurs (CRIT) . . . 64
3.2.1 Principes et modélisation . . . 64
3.2.1.1 Simulations . . . 66
3.2.1.2 Rôle du couplage . . . 67
3.2.1.3 Absorption induite par couplage de résonateurs (CRIA) . . . 69
3.2.2 Ajustement des propriétés dispersives par contrôle optique . . . 70
3.2.2.1 Les ordres élevés de dispersion . . . 71
3.3 Expérience sur le CRIT actif . . . 74
3.3.1 Montage expérimental . . . 74
3.3.2 Mesures de $T(\delta)$ et $\phi(\delta)$ . . . 76
3.3.3 Protocole expérimental . . . 77
3.4 Les résultats . . . 78
3.4.1 La transmission . . . 78
3.4.2 Le déphasage . . . 81
3.5 Conclusion . . . 82

4 Dispersion induite intracavité par couplage de résonateurs actifs 85
4.1 Introduction . . . 85
4.2 Principes fondamentaux . . . 86
4.3 Augmentation du facteur de qualité par couplage de résonateurs . . . 88

4.3.1 Réduction de la largeur de raie par couplage de cavités purement dispersives . . . 89
4.3.1.1 Cas général . . . 89
4.3.1.2 Application à deux cavités . . . 91
4.3.1.3 Rôle des pertes . . . 92
4.3.1.4 Impact des pertes sur un système de trois cavités . . . 93
4.3.2 Dispersion induite intracavité par couplage de résonateurs actifs . . . 95
4.3.2.1 Principe . . . 95
4.3.2.2 Ajustement du facteur de qualité du système . . . 98
4.4 Démonstrations expérimentales . . . 98
4.4.1 Montage expérimental . . . 100
4.4.2 Exaltation du phénomène de *cavity ringdown* par couplage de résonateurs . . . 100
4.4.3 Dispersion induite par couplage de résonateurs actifs . . . 104

III Étude et caractérisation de résonateurs : Applications aux modes de galerie 107

5 Description des modes de galerie 109
5.1 Approche géométrique . . . 109
5.2 Première approche ondulatoire . . . 110
5.2.1 Spectre des modes de galerie dans l'approche Eikonale . . . 114
5.2.1.1 Position des résonances dans une sphère parfaite . . . 114
5.2.1.2 Effet d'une légère ellipticité sur le spectre des modes . . . 115
5.2.1.3 Positions des résonances dans un sphéroïde . . . 119
5.3 Le problème électromagnétique . . . 121
5.3.1 La distribution radiale du champ . . . 122
5.3.2 La distribution angulaire du champ . . . 123
5.4 Propriétés des modes de galerie . . . 125
5.4.1 Positions des résonances . . . 125
5.5 Les différentes contributions au facteur de qualité . . . 127
5.6 Fabrication des sphères . . . 133
5.6.1 Fusion par arc électrique . . . 134
5.6.2 Fusion par torche plasma . . . 136
5.7 Le couplage par ondes évanescentes . . . 137

6 Le couplage modal par diffusion Rayleigh 139
6.1 Introduction . . . 139
6.2 La diffusion Rayleigh en microcavité . . . 139
6.3 La méthode hybride spectrale/temporelle appliquée au couplage de modes . . . 141
6.3.1 Modèle d'évolution temporelle dans le cas de cavités couplées . . . 141
6.3.1.1 Résolution du système . . . 143
6.3.2 Application au couplage modal . . . 144
6.3.2.1 Régime stationaire . . . 145
6.3.2.2 Position des nouvelles fréquences propres . . . 145
6.3.2.3 Le couplage modal dans des sphères de silice . . . 146
6.3.2.4 Simulation en régime stationnaire . . . 147
6.3.2.5 Régime dynamique . . . 150

6.4 Validation expérimentale . . . 153
6.4.1 Montage et protocole expérimentaux . . . 154
6.4.2 Résultats Expérimentaux . . . 155
6.4.2.1 Mesures simultanées de T et R . . . 156
6.4.2.2 Comparaison avec le régime stationnaire . . . 157
6.4.2.3 Influence du couplage . . . 158
6.4.2.4 Influence des effets thermiques . . . 159
6.4.2.5 Discussion sur les mesures expérimentales de γ . . . 160
6.4.2.6 Contribution au facteur de qualité intrinsèque . . . 162

7 Amplification sélective en microsphère active 165
7.1 Le résonateur sous test . . . 165
7.2 Montage expérimental . . . 166
7.2.1 Système d'excitation . . . 167
7.2.2 Chaîne d'acquisition . . . 167
7.3 Amplification sélective . . . 167
7.3.1 Mesure d'un faible gain . . . 168
7.3.1.1 Gain et retard de groupe à résonance . . . 168
7.3.1.2 Gain sur un tour . . . 170
7.3.2 Mesure d'un grand gain . . . 170

Conclusion 173

A Lien entre l'approche stationnaire et l'approche dynamique 177

B Publications et conférences relatives à ce travail de thèse 179

Table des figures

1.1 Schéma d'une cavité décrite par son mode $u(t)$ et ses pertes intrinsèques représentées par le temps de vie des photons intracavités $\tau_0/2$. 10
1.2 Schéma d'une cavité couplée à une ligne d'accès 11
1.3 Spectre de transmission en régime stationnaire d'un résonateur unique . . . 16
1.4 Évolution du retard de groupe en fonction des valeurs relatives de τ_0 et τ_e . 19

2.1 Protocole expérimental de la méthode de scan 21
2.2 Chronogramme de la méthode de *cavity ring down/up* 23
2.3 Schéma d'un anneau couplé à une ligne d'accès 24
2.4 Simulation du cavity Ring Down/Up dans un résonateur de rayon $R_0 = 6,46$ μm et d'indice $n = 1,45$ 25
2.5 Réponse stationnaire et dynamique d'un résonateur 27
2.6 Représentation de la méthode hybride spectrale/temporelle 27
2.7 Transmission d'un résonateur en régime critique pour différentes vitesses de balayage 30
2.8 Transitoire temporel d'un résonateur en couplage critique - étude de la période des oscillations. 31
2.9 Transmission en régime stationnaire (a) et en régime dynamique (b) pour deux résonateurs dont le rôle de τ_0 et τ_e est inversé 32
2.10 Schéma du résonateur "modèle" à fibre 33
2.11 Montage expérimental de la méthode hybride spectrale/temporelle 34
2.12 Présentation des régimes de couplage étudiés dans le cadre de la validation expérimentale de la méthode de CRDM. 35
2.13 Superposition du modèle théorique (en orange) aux mesures expérimentales (en bleu) pour les trois régimes de couplage 36
2.14 Présentation des régimes de couplage étudiés dans le cadre de la détermination entre régimes sous- et sur-couplé. 40
2.15 Résultats expérimentaux en balayage lent et rapide 41
2.16 Présentation du régime de transparence 42
2.17 Transmission et propriétés dispersives d'un résonateur de 1 m de périmètre en régime de transparence 43
2.18 Transmission d'un résonateur en régime de transparence pour différentes vitesses de balayage 44
2.19 Mesures expérimentales sur un résonateur en régime de transparence 45
2.20 Présentation du régime de couplage étudié à savoir le régime d'amplification sélective. 46
2.21 Transmission en régime d'amplification sélective pour différentes vitesses de balayage 47

2.22 Courbes expérimentales associées à leur ajustement 48
2.23 Courbes expérimentales associées à leur ajustement pour deux cas d'amplification sélective 49
2.24 Mesure en balayage rapide d'un résonateur en régime d'amplification sélective 50
2.25 Architecture d'un oscillateur opto-électronique. 51
2.26 Schéma d'un résonateur fibré en configuration *add/drop* 52
2.27 Schémas équivalents du résonateur *add/drop* suivant le sens de l'injection du laser de sonde 53
2.28 Signaux de "ringing" en transmission sur les deux voies d'accès d'un anneau fibré en configuration *add/drop.* 54
2.29 Schéma et dimensions du disque en MgF_2 à modes de galerie 55
2.30 Réponse dynamique pour le disque en MgF_2 de la figure 2.29 56

3.1 Représentation de deux cavités couplées 60
3.2 Système de N cavités couplées 64
3.3 Transmission et retard de groupe d'un système de deux cavités couplées . . 66
3.4 Évolution du couplage entre deux cavités couplées pour différentes valeurs de ρ_1 68
3.5 Transmission et retard de groupe d'un système de deux cavités couplées . . 69
3.6 Transmission d'un système de deux cavités couplées en configuration CRIA 70
3.7 Propriétés de transmission et de dispersion d'un CRIT et d'une cavité unique en fonction du paramètre a_2^2 72
3.8 Comparaison de la transmission et des propriétés dispersives entre un résonateur unique et un CRIT 73
3.9 Schéma expérimental pour la mesure simultanée de la transmission et de la phase d'un dispositif CRIT actif 75
3.10 Transmission et phase d'un CRIT actif 79
3.11 Comparaison théorie (orange)/expérience (bleu) du retard de groupe τ_g d'un CRIT actif. La dispersion du second ordre β_2 est également représentée. . . 80
3.12 Valeur de la transmission à résonance et valeur du temps de groupe τ_g en fonction du taux de perte a_2^2. 81
3.13 Dispersion du troisième ordre pour 3 valeurs de a_2 obtenues expérimentalement 82

4.1 Schéma d'une cavité en anneau contenant un milieu dispersif introduisant une phase supplémentaire $\phi(\omega)$ et des pertes $a_D(\omega)$ 86
4.2 Système de N cavités couplées 89
4.3 Transmission $T = |t_2|^2$ dans le cas de deux résonateurs 91
4.4 Représentation de la fonction $f(a, \rho)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs du coefficient de perte a. 94
4.5 Spectre de transmission $T = |t_3|^2$ dans le cas de trois anneaux $N = 3$ sensiblement identiques 94
4.6 Schéma du système permettant l'exaltation de la dispersion à partir de résonateurs actifs couplés 96
4.7 Transmission en intensité $T_2 = |t_2|^2$ du milieu dispersif en fonction de $2\delta/\Delta^0_{1/2}$ pour $a_2 = 0$ et $a_2 = 1$. 97
4.8 Évolution du déphasage $\phi_2(\delta)$ et du temps de groupe τ_g apportés par le milieu dispersif artificiel pour deux valeurs de a_2 97
4.9 Évolution de l'absorption $1-T$ de la structure en fonction du taux de perte a_2^2. 98
4.10 Spectre de transmission $T = |t_3|^2$ pour différentes valeurs de a_2 99

4.11 Montage expérimental composé de N résonateurs actifs couplés à une ligne d'accès par le coupleur C_N 100
4.12 Spectre expérimental de la transmission de la cavité 2 dans le cas $N = 2$ . . 101
4.13 Spectres expérimentaux de la transmission $T = |t_3|^2$ en régime stationnaire 105

5.1 Propagation d'un rayon lumineux dans une cavité sphérique 110
5.2 Représentations de la déformation de la sphère pour différents rayons paramétriques $\overline{r}(\theta)$ 116
5.3 Représentation d'un sphéroide de type prolate. 117
5.4 Distribution modale dans une sphère et dans un sphéroïde 120
5.5 Représentation des potentiels effectifs et de leur fonction radiale associée . . 124
5.6 Représentation schématique de la rugosité de surface d'une microsphère . . 131
5.7 Évolution des différents modèles du facteur de qualité liés à l'état de surface en fonction de σ, la hauteur moyenne des diffuseurs 133
5.8 Photographies de sphères réalisées par arc électrique 135
5.9 Représentation schématique de configurations de couplage par ondes evanescentes 137
5.10 Représentation du recouvrement des champs évanescents pour une sphère couplée à un taper biconique. 138

6.1 Représentation spectrale des modes d'une microcavité 140
6.2 Représentation schématique de deux cavités monomodes couplées 142
6.3 Représentation schématique du couplage modal dans une cavité sous l'effet de la rétrodiffusion. 144
6.4 Simulations du couplage modal dans 3 sphères de diamètres 40 μm, 80 μm et 100 μm pour $K = 1/3$. La valeur du Γ est de respectivement 30, 15 et 10. 148
6.5 Mesures expérimentales en régime stationnaire de T et R pour un couplage modal de $\Gamma = 10$ 148
6.6 Simulations du couplage modal dans 3 sphères de diamètres 40 μm, 80 μm et 100 μm pour $K = \sqrt{1 + \Gamma^2}$. La valeur du Γ est de respectivement 30, 15 et 10.149
6.7 Évolution de la transmission $T(0)$ et réflexion $R(0)$ en fonction du couplage normalisé K 150
6.8 Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage critique 152
6.9 Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage modal pour $\Gamma = 7$ et $K = 1/3$ 153
6.10 Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage modal pour $\Gamma = 50$ et $K = 10$ 154
6.11 Montage expérimental utilisé pour caractériser les microsphères en silice. . . 155
6.12 Signal de transmission a) et de réflexion b) pour une sphère de 120 μm de diamètre 156
6.13 Signal de transmission T en balayage rapide a) et lent b) pour une sphère de 110 μm de diamètre 157
6.14 Transitoires temporels pour un même doublet d'une sphère de 110 μm de diamètre 158
6.15 Profils temporels de doublet de Rayleigh dans une sphère de 120 μm de diamètre dans laquelle nous observons des effets thermiques 159
6.16 Profil temporel en transmission pour une sphère de 80 μm de diamètre . . . 160
6.17 Illustration du couplage entre une nanoparticule et un mode de galerie . . . 163

7.1 Schéma de la microsphère active Er^{3+} :ZBLALiP dopé à 0,1-mol% couplée à un taper biconique 166
7.2 Dispositif expérimental de mesure de l'amplification sélective 166
7.3 Mesure en balayage rapide dans une microsphère Er^{3+} :ZBLALiP 169
7.4 Mesure du régime d'amplification sélective dans une microsphère active . . . 171
7.5 Résultats de l'optimisation numérique pour différentes valeurs du paramètre η 172

Liste des tableaux

2.1 Récapitulatif des données obtenues en balayage lent et rapide. 37
2.2 Résultats obtenus par la méthode de *cavity ringdown* 39
2.3 Mesures des temps caractéristiques obtenues par la méthode hybride spectrale/temporelle pour un résonateur en régime de sous-couplage puis de surcouplage. 42
2.4 Récapitulatif des résultats obtenus pour le régime de transparence. 46
2.5 Résultats des ajustements relatifs aux figures 2.23 et 2.24 pour différentes configurations d'amplification sélective. 50
2.6 Récapitulatif des mesures effectuées sur l'anneau en configuration *add/drop*. 55

4.1 Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux. Les valeurs de $\Delta\nu^0_{1/2}$ et de Q_0 théoriques sont utilisées pour l'étape de comparaison théorie/expérience. 102
4.2 Comparaison entre les valeurs théoriques et les données expérimentales. Les valeurs de ρ_2 et de a_2 théoriques sont utilisées pour l'étape de comparaison théorie/expérience. 103
4.3 Description des résonateurs utilisés dans la démonstration expérimentale de l'effet de dispersion induite intracavité 104

5.1 Premières harmoniques sphériques en fonction de q 117
5.2 Résultats expérimentaux de la mesure de la rugosité de surface sur une sphère en silice 130
5.3 Synthèse des différentes contributions au facteur de qualité intrinsèque pour une sphère en silice 132

6.1 Paramètres de structure pour l'étude du couplage modal par effet Rayleigh dans trois microsphères de diamètre 40, 80 et 100 μm. Leur coefficient de couplage modal est respectivement de 30, 15 et 10. 147
6.2 Récapitulatif des valeurs obtenues à partir de la superposition du modèle théorique avec les mesures expérimentales de la figure 6.14 pour les positions du taper a), b) et c). 159
6.3 Paramètres structurels et valeurs théoriques et expérimentales associés à l'éclatement fréquentiel dans les sphères étudiées. 161

7.1 Caractéristiques linéaires d'une microsphère dopée Erbium en régime d'amplification sélective 169

Introduction

La réduction de la vitesse de groupe de la lumière, si possible de plusieurs ordres de grandeur, par rapport à la célérité c de la lumière dans le vide, est un des grands enjeux de la photonique actuelle. Le contrôle actif ou passif de la vitesse de groupe permettrait de mettre en place de nouvelles fonctions optiques de traitement du signal (mémoire tampon, retard continûment ajustable, recentrage d'impulsions dans une fenêtre temporelle...) et des interactions lumière – matière ou lumière – lumière prolongées. Ce domaine de recherche, communément nommé *lumière lente* [1], repose sur la maîtrise des propriétés dispersives [2,3] du système physique étudié via la dispersion du matériau en interaction avec la lumière ou la dispersion "géométrique" ou structurelle de ce système. En physique atomique pour jouer sur la dispersion du matériau, l'approche privilégiée utilise un système atomique à 2 ou 3 niveaux qui, par interaction non linéaire cohérente [4], est amené en transparence optique et permet de bénéficier de fortes dispersions en minimisant les pénalités associées à l'absorption. Dans ce contexte les deux effets emblématiques que sont les oscillations cohérentes de population [5–10] (abbrévié CPO, de l'anglais Coherent Population Oscillation) et la transparence induite électromagnétiquement [11–13] (EIT, Electromagnetically Induced Transparency) ont permis d'obtenir des vitesses de groupes réduites à quelques mètres par secondes [14]. Sans effet de ralentissement proprement dit, l'ingénierie géométrique permet de retarder la lumière dans des cavités de petite taille et de fort coefficient de surtension il est plus à même dans ce cas de parler de retard de groupe.

Les résonateurs optiques sont utilisés dans de nombreux domaines de l'optique linéaire ou non-linéaire. Leur utilisation permet le recyclage d'une onde lumineuse pour maintenir une oscillation laser, augmenter la longueur effective d'interaction en spectroscopie, augmenter la résolution de mesures interférométriques, exalter les interactions dans le cas de mélange d'ondes, etc. Pour de telles applications, les propriétés déterminantes telles qu'un facteur de qualité élevé et une grande finesse ne peuvent être obtenues que dans des cavités constituées de miroirs de très hautes réflectivités et présentant les plus faibles pertes.

En dépit de leur versatilité, les cavités traditionnelles de type Fabry-Pérot - au sens large, c'est-à-dire que nous y incluons les cavités repliées et en anneaux - restent des dispositifs de coûts élevés, globalement de grandes tailles, d'assemblage et réglages complexes, sensibles aux vibrations. Pour certaines applications la stabilité et un faible volume de mode sont de première importance et la miniaturisation de ce type de résonateurs se révèle extrêmement

compliquée si l'application nécessite une grande finesse et un haut facteur de qualité Q. Les dispositifs à cristaux photoniques sont une bonne alternative aux cavités Fabry-Pérot. Ils permettent la réalisation de résonateurs intégrés et miniaturisés (qcq 100 nm) de haut facteur de qualité ($Q > 10^7$) [15–17]. Les progrès technologiques quant à la réalisation de ces structures photoniques offrent une grande versatilité sur le design de ces systèmes. Le couplage de cavités, le contrôle des pertes par le gain, l'ajustement nanométrique des défauts de structure donnent aujourd'hui accès à de nombreuses fonctions optiques notamment dans le domaine des télécommunications.
Dans ce travail, nous nous intéressons à des résonateurs monolithiques dans lesquels la lumière suit des trajectoires fermées par réflexion totale interne sur les surfaces incurvées de résonateurs diélectriques transparents. Suivant la dénomination traditionnelle des micro-ondes, nous dénommons ces cavités "résonateurs diélectriques ouverts". Les modes optiques dans ces résonateurs c'est-à-dire les "morphology-dependent resonances" (MDR) ou "whispering gallery modes" (WGMs) peuvent être vus comme des tores lumineux confinés par réflexion totale interne à la surface des résonateurs. Ces résonateurs diélectriques ouverts peuvent se présenter sous des formes aussi diverses que des cylindres, des sphères, des sphéroïdes, des tores, des anneaux ainsi que d'autres formes ou topologies avec différents principes de confinement de la lumière. Par désir de simplification nous utiliserons le terme générique de Résonateurs à Modes de Galerie (whispering gallery resonators - WGRs) et whispering gallery modes (WGMs) pour décrire ces résonateurs et leurs modes. Des facteurs de qualités Q extrêmement élevés associés à des volumes de modes aussi petit que le cube de la longueur d'onde peuvent être obtenus si l'on arrive à conjuguer l'utilisation de matériaux de haute transparence à une réalisation très précise de l'interface du résonateur.
Les géométries les plus simples pour ces résonateurs sont les anneaux, cylindres et sphères. Quand le matériau utilisé présente un contraste d'indice suffisamment élevé avec le milieu environnant et que le rayon de courbure du résonateur est supérieur à quelques dizaines de longueur d'ondes, les pertes radiatives (similaires aux pertes par courbure des guides d'ondes) deviennent très petites et le facteur Q se retrouve uniquement limité par l'atténuation du matériau utilisé et la diffusion causée par les imperfections géométriques du résonateur (*i.e.* la rugosité de surface).

La fabrication de résonateurs diélectriques ouverts est potentiellement simple et de coût peu élevé et se prêterait très bien à l'hybridation ou à l'intégration de composants et dispositifs. Cette combinaison de très hauts facteurs de qualité ($Q \sim 10^8$ aisément réalisé pour un résonateur sphérique) et d'une grande compacité a été l'objet de nombreuses études tant dans les domaines des sciences fondamentales, appliquées ou de l'ingénierie. Il a été démontré que la petite taille de ces résonateurs a notamment pour conséquence une grande stabilité mécanique associée à un contrôle relativement aisé des paramètres de la cavité. Les WGRs peuvent être "aisément" accordés, stabilisés et intégrés dans un système optique ou optronique.

L'étude systématique des WGMs commence avec leurs observations directes en 1977 dans l'étude de la diffusion de la lumière par des gouttelettes (micro résonateur liquide) maintenues en lévitation laser [18–20]. Il a été démontré que les WGMs permettent la détermination des tailles, formes, indices de réfraction et de la température des gouttes [21,22]. Ces études ont été appliquées aussi à la détermination des diamètres des fibres optiques [23]. La très forte influence sur l'exaltation de la fluorescence [24–26] ou de la diffusion Raman [27–29] par des WGMs dans les microgouttes a été reconnue dès le début des années 80. Enfin l'effet laser sur des gouttelettes dopées Rhodamine 6G a été observé, étudié et détaillé dans les groupes de R.K. Chang dès 1984 [30, 31] ainsi que par H. Lin et A. Campillo [32]. Ces travaux ont aussi porté sur différents effets non-linéaires exaltés par la présence des modes de galerie [29, 33]. Dans ces expériences, les gouttelettes en chute libre présentent les inconvénients d'avoir une courte durée de vie, de varier légèrement de forme (évaporation et résonances mécaniques) pendant l'analyse et d'être faiblement transparentes (ce qui limite le facteur de qualité à 10^7).

Les résonateurs solides permettent de s'affranchir de ces inconvénients. C'est au milieu des années 80 que V. Braginsky propose l'utilisation des WGMs de microsphères solides en verre pour des expériences d'électrodynamique quantique [34, 35]. En ce qui concerne les microrésonateurs sphériques solides actifs (dopés aux ions terres rares) nous pouvons noter les études historiques de Y. Wang et B. Lu [36, 37] utilisant des sphères en verre dopées Nd^{3+} (ϕ <100 μm) pompées par un faisceau libre. Les études théoriques et expérimentales ont montré que pour obtenir un fort confinement temporel et spatial d'un champ à l'intérieur d'une microsphère - c'est à dire les modes les plus confinés de haut facteur de qualité - les modes doivent être excités par effet tunnel optique. Ainsi, vers la moitié des années 90 des recherches sur le couplage d'un champ avec les modes de galerie de sphères de silice passives [38, 39] ont permis de rendre le pompage efficace et de tendre vers l'effet laser sans seuil : en utilisant le couplage par prisme, l'équipe de S. Haroche et J.M. Raimond (ENS-LKB) s'est intéressée aux oscillations laser dans des sphères silice dopées terres rares et ont obtenu un effet laser à 1,06 μm avec un seuil de 200 nW [40, 41]. Plus récemment, W. Von Klitzing *et al.* [42] ont obtenu une oscillation laser à 544 nm avec un seuil le 30 μW avec des microsphères en verre fluoré dopé Erbium.

Dans la dernière décennie, l'utilisation des propriétés uniques de confinement de la lumière dans des résonateurs à modes de galerie a ouvert de nouvelles voies de recherches dans des domaines des sciences tant fondamentales qu'appliquées. Nous en sommes arrivés à un point où il est devenu extrêmement difficile de faire une bibliographie qui aurait la prétention d'être exhaustive. Les applications en sont extrêmement variées et se déclinent depuis les expériences de lévitation de microgouttes dans les aérosols jusqu'au résonateurs cristallins de ultra-hauts facteurs de qualité en passant par l'intégration (au sens de l'optique intégrée) de micro résonateurs dans des dispositifs et systèmes pour les télécommunications optiques ou pour l'instrumentation. Ces résonateurs peuvent être le support de phénomènes en optique

linéaire, optique non-linéaire, physique des lasers et peuvent être appliqués à des fonctions aussi différentes que les sources (lasers ou génération d'harmoniques par mélange d'ondes) les filtres (stop bande, passe bande) fixes ou accordables et passifs ou actifs mais aussi à la spectroscopie, la détection de molécules uniques et enfin aux expériences fondamentales d'électrodynamique quantique en cavité.

Pour différentes raisons, l'utilisation de résonateurs à modes de galerie passifs pour des applications pratiques n'est pas des plus adaptée. En effet, le facteur de qualité intrinsèque est déterminé par la diffusion de Rayleigh provoquée par la rugosité de surface résiduelle et les inhomogénéités de la matrice hôte constituant le résonateur [43]. Dans le cas de résonateurs cristallins de haute facture, cette rugosité résiduelle peut être l'élement limitant le facteur de qualité [44]. Les résonateurs amorphes sont quant à eux très sensibles aux facteurs environnementaux. Pour exemple, le facteur de qualité d'une sphère passive réalisée par fusion de silice se dégrade dans le temps due à l'adsorption de l'eau atmosphérique.
Pour s'affranchir des pertes imposées par la cavité et le matériau qui la constitue, nous proposons dans ces travaux d'utiliser des cavités dites "actives" permettant de moduler les pertes du dispositif sous test et ainsi rendre envisageables les applications précitées. Notons également que les résonateurs actifs utilisés en régime d'amplification sélective sont de très bons filtres sélectifs et amplificateurs.

Le sujet de cette thèse est d'étudier différents schémas de structures photoniques à base de résonateurs et microrésonateurs actifs à modes de galerie dans lesquelles les propriétés dispersives peuvent être façonnées par effets de structure ou par le gain soit par une combinaison des deux.
Avant toute utilisation, les microrésonateurs à modes de galerie doivent être caractérisés en terme de transmission et de phase. Nous pouvons ainsi connaître les facteurs de qualité intrinsèque (lié à la cavité) et externe (lié au couplage) et par là même déterminer le régime de couplage et les propriétés dispersives du dispositif. Les méthodes classiques de caractérisation ne s'appliquent pas de manière triviale dans le cas des résonateurs de haut facteur de qualité. C'est dans ce contexte que nous présentons dans la première partie de ce manuscrit une méthode simple permettant d'obtenir l'ensemble des propriétés linéaires d'un résonateur et ce quelque soit la cavité photonique étudiée (Interféromètre de Fabry-Perot, microrésonateur, cavité à cristal photonique ...). Cette technique sera utilisée tout au long de ce travail.

Organisation du manuscrit

Dans une première partie, après avoir décrit dans le cas général la fonction de transfert associée à un résonateur **[chapitre 1]**, nous présentons une méthode hybride spectrale/temporelle donnant accès à une description totale d'une cavité couplée à une ligne

d'accès unique en régime linéaire [**chapitre 2**]. Dans ce même chapitre nous présentons une revue de différentes configurations pouvant être décrites par cette méthode dans le cas d'un résonateur unique à savoir : le sous-couplage, le couplage critique, le sur-couplage, le résonateur transparent et le régime d'amplification sélective. Cette méthode est également appliquée à la caractérisation d'un micro-résonateur à modes de galerie.
La deuxième partie est dévolue à la description de différentes architectures basées sur un système modèle constitué de cavités couplées à fibre. En effet, le couplage de résonateurs apporte un degré de liberté supplémentaire pour façonner la relation de dispersion du système. Nous verrons également que le contrôle du gain ou des pertes dans ce type de structures permet de rendre le système encore plus versatile. Dans le **chapitre 3**, nous présentons la contrepartie classique de la transparence induite électromagnétiquement (EIT) à savoir la transparence induite par couplage de résonateur (CRIT en anglais) permettant d'obtenir une fenêtre de transparence à résonance. De plus, le contrôle des pertes dans cette structure permet d'ajuster dynamiquement le retard de groupe τ_g et même d'annuler la dispersion d'ordre 2 et 3, pré-requis pour la réalisation de ligne à retard pour signaux impulsionnels. Dans le **chapitre 4**, nous présentons un dispositif permettant d'exalter la dispersion intrinsèque d'un résonateur et par là même son facteur de qualité en introduisant dans un résonateur de référence un milieu purement dispersif. Nous présentons entre-autres un système de 3 résonateurs résultant du couplage d'une cavité de référence à un CRIT. Ainsi, le facteur de qualité du résonateur de référence est ajusté par le contrôle des pertes dans le CRIT actif dans un domaine allant de 2×10^7 à $2,4 \times 10^8$.
La troisième partie présente les résultats obtenus dans des microsphères à modes de galerie. Nous présentons dans le **chapitre 5** les propriétés associées aux résonateurs à modes de galerie, plus particulièrement dans le cas des microsphères. Dans le **chapitre 6**, nous abordons, au travers du régime de couplage modal dans une sphère passive, la méthode hybride spectrale/temporelle appliquée au cas de deux cavités couplées. Enfin, dans le **chapitre 7** nous présentons une configuration à fort potentiel applicatif consistant en un résonateur microsphérique dopé Erbium en régime d'amplification sélective permettant de retarder un signal optique d'environ 1,5 μs et présentant un gain total d'approximativement 20 dB.

Première partie

Descriptions théorique et expérimentale d'un résonateur optique

Chapitre 1

Description d'un résonateur optique

1.1 Modèle d'évolution temporelle

1.1.1 Choix du formalisme

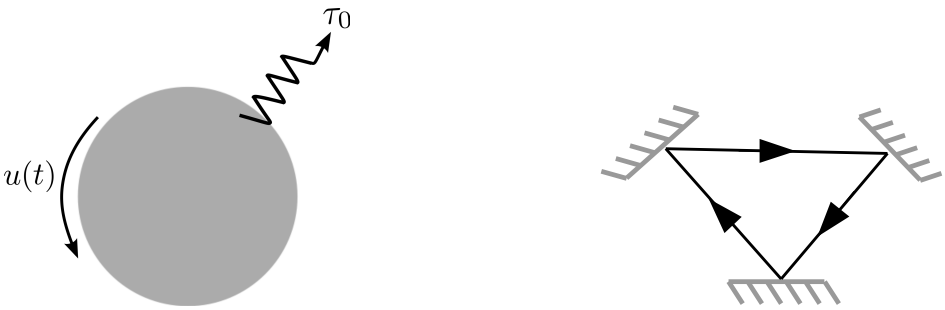
La description théorique des phénomènes mis en jeu dans les résonateurs que nous étudions doit faire appel à un formalisme. Les différents modèles à notre disposition ont tous pour fondement la théorie des modes couplés proposée par A. Yariv [45] en 1973. Le modèle que nous allons choisir doit répondre au cahier des charges suivant :

1. permettre l'étude complète d'un résonateur en régime linéaire,
2. le modèle doit pouvoir être enrichi en fonction du système étudié - il doit rendre possible l'introduction phénoménologique de termes tels que : les pertes, le couplage (insertion/extraction), le couplage de plusieurs cavités, etc,
3. les résonateurs que nous étudions ont des propriétés qui peuvent être mises en évidence soit dans les domaines spectral ou temporel, en ce sens le formalisme doit être d'une utilisation commode dans les deux espaces.

Les travaux présentés dans ce manuscrit seront modélisés à partir des deux formalismes suivant :
(i) Le modèle développé par A. Yariv [46] est une approche fréquentielle reposant sur l'utilisation de matrices de transfert. Chaque résonateur est représenté par une matrice, ce qui permet *in fine* de modéliser des systèmes complexes à base de cavités couplées. Ce formalisme est décrit et utilisé dans les thèses de M$^{\text{elles}}$ Arnaud et Ghişa [47,48]. Nous l'utiliserons pour décrire la transparence et la dispersion induites par couplage de résonateurs aux chapitres 3 et 4.
(ii) Le modèle temporel décrit par H.A. Haus [49] dans son ouvrage "*Waves and fields in optoelectronics*" répond à l'ensemble des critères définis précédement. La philosophie de ce formalisme est de constituer, à partir d'observations phénoménologiques, la fonction de transfert d'un résonateur excité par un signal d'entrée quelconque. Ce système est excité par un signal d'entrée $s_{in}(t)$, on récupère alors un signal de sortie $s_{out}(t)$ correspondant au

produit de convolution de la fonction de transfert $\mathcal{H}$ du système avec le signal d'entrée tel que : $s_{out}(t) = h(t) \otimes s_{in}(t)$.
Nous nous proposons maintenant de décrire analytiquement cette fonction $\mathcal{H}$ dans le cas d'un résonateur couplé à une ligne d'accès unique. Nous allons successivement exposer l'évolution temporelle de l'amplitude d'un mode dans une cavité isolée puis son couplage à une ligne d'accès. L'ensemble des composants du système est supposé monomode. Nous choisissons pour convention les champs proportionnels à $\exp(j\omega t)$ avec ω la fréquence angulaire.

1.1.2 La cavité isolée



(a) Schéma générique d'une cavité monomode

(b) Modèle équivalent en espace libre

FIGURE 1.1 – Schéma d'une cavité décrite par son mode $u(t)$ et ses pertes intrinsèques représentées par le temps de vie des photons intracavités $\tau_0/2$.

Considérons la propagation d'un champ électromagnétique d'amplitude $u(t)$ dans une cavité isolée monomode de fréquence propre ω_0 [Fig. 1.1]. À résonance, le champ interne oscille à la fréquence ω_0 et obéit à l'équation d'évolution temporelle :

$$\frac{du(t)}{dt} = j\omega_0 u(t), \tag{1.1}$$

où $u(t) = U\exp(j\omega_0 t)$. Les pertes de la cavité peuvent être insérées dans le modèle de la manière suivante :

$$\frac{du(t)}{dt} = j\omega_0 u(t) - \frac{1}{\tau_0}u(t) \tag{1.2}$$

où τ_0 est le temps de décroissance du champ dû aux pertes intrinsèques (ou internes). L'amplitude du champ $u(t)$ décroît exponentiellement en $\exp(-t/\tau_0)$.
Le lien entre ce terme de fuite et la puissance dissipée P_d s'établit en notant que :

$$\frac{dW}{dt} = u\frac{du^*}{dt} + u^*\frac{du}{dt} = -\frac{2}{\tau_0}W = -P_d \tag{1.3}$$

où $W = |u(t)|^2$ est l'énergie contenue à l'intérieur de la cavité. L'énergie intrinsèque W décroît alors de manière proportionnelle à $\exp(-2t/\tau_0)$.
Par définition, le facteur de qualité s'exprime de la manière suivante :

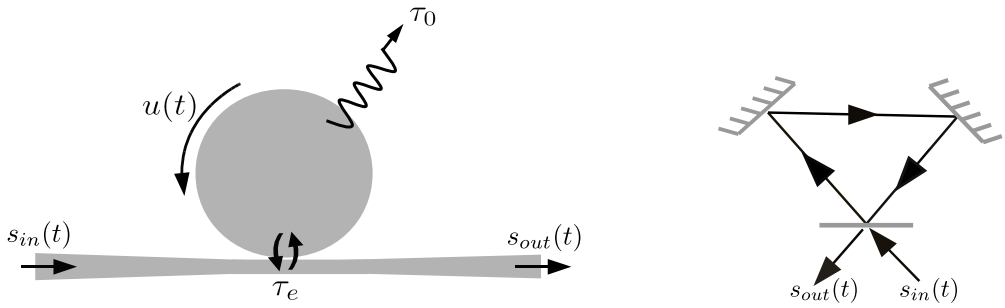
$$Q = \frac{2\pi \times \text{énergie stockée}}{\text{énergie dissipée par cycle}} \tag{1.4}$$

Dans notre cas, la puissance P_d est une énergie dissipée par unité de temps, nous définissons comme P_d/ν_0 l'énergie dissipée par cycle. En utilisant l'expression (1.3), le facteur de qualité intrinsèque Q_0 de la cavité s'écrit :

$$Q_0 = \frac{2\pi\nu_0 W}{P_d} = \frac{\omega_0\tau_0}{2}. \tag{1.5}$$

1.1.3 La cavité couplée

Le coupleur



(a) Schéma d'une cavité couplée à une ligne d'accès

(b) Modèle équivalent en espace libre

FIGURE 1.2 – Schéma d'une cavité couplée à une ligne d'accès. Le système est décrit par ses pertes intrinsèques τ_0 et externes τ_e.

Le système étudié [Fig. 1.2] est composé de la cavité couplée à une ligne d'accès monomode. L'insertion et l'extraction de lumière dans la cavité sont modélisées par le temps de vie extrinsèque (ou externe) τ_e du coupleur. Le couplage est supposé ponctuel et sans perte. L'introduction du terme relatif à la fuite d'énergie dans le coupleur, τ_e, modifie l'équation d'évolution du champ de la manière suivante :

$$\frac{du(t)}{dt} = j\omega_0 u(t) - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}\right) u(t). \tag{1.6}$$

La puissance dissipée doit alors être redéfinie :

$$\frac{dW}{dt} = -2\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}\right) W = -\frac{2}{\tau} W = -P_d, \tag{1.7}$$

avec :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}. \tag{1.8}$$

$\tau/2$ représente le temps de vie (en énergie) des photons dans le système (cavité isolée + coupleur).

Par analogie avec Q_0 [Equ. (1.5)], nous définissons le facteur de qualité externe Q_e modélisant le couplage :

$$Q_e = \frac{\omega_0\tau_e}{2}, \tag{1.9}$$

et le facteur de qualité global du résonateur :

$$Q = \left(\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e}\right)^{-1} = \frac{\omega_0 \tau}{2}. \tag{1.10}$$

La ligne d'accès

Elle est caractérisée par ses signaux d'entrée $s_{in}(t)$ et de sortie $s_{out}(t)$. Une partie du signal d'entrée $[\zeta s_{in}(t)]$ est couplée à la cavité. Notons que le coefficient ζ correspond à un certain degré de couplage entre la cavité isolée et la ligne d'accès. Le signal d'excitation est tel que $s_{in}(t) \propto \exp(j\omega t)$. On ajoute alors un terme supplémentaire à l'équation d'évolution du champ :

$$\frac{du}{dt} = j\omega_0 u - \frac{1}{\tau} u + \zeta s_{in}. \tag{1.11}$$

Par la suite la dépendance en temps sera sous-entendue. En considérant un champ u de la forme $u(t) = U \exp(j\omega t)$, l'intégration de l'équation (1.11) mène à une nouvelle forme du champ u :

$$u = \frac{\zeta s_{in}}{j(\omega - \omega_0) + [(1/\tau_0) + (1/\tau_e)]}. \tag{1.12}$$

Expression de ζ

En s'appuyant sur le principe de conservation de l'énergie, nous pouvons définir l'expression du coefficient ζ.
Prenons le cas d'un résonateur sans perte interne. Nous avons $1/\tau_0 = 0$. À un instant $t = t_0$, on insère le champ s_{in}. D'après l'équation (1.7), l'énergie interne W du résonateur augmente en suivant l'équation d'évolution :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{\tau_e} W. \tag{1.13}$$

Notre système atteint son régime stationnaire pour $t = t_0 + \tau_e/2$. À cet instant, on coupe le signal d'entrée s_{in}. En considérant le coupleur symétrique, l'extraction de l'énergie intrinsèque s'exprime par :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau_e} W = -\left|s_{out}\right|^2, \tag{1.14}$$

où $|s_{out}|^2$ est la puissance du signal de sortie. Pendant la charge du résonateur le champ u est "forcé" à la fréquence ω_0 et l'enveloppe du champ augmente avec le temps de vie $1/\tau_e$. L'équation d'évolution du champ [Equ. 1.11] se réduit à :

$$\frac{du}{dt} = \left(j\omega_0 - \frac{1}{\tau_e}\right) u + \zeta s_{in} \tag{1.15}$$

Pour un champ u de la forme $u(t) = U \exp(j\omega t)$, la fréquence angulaire complexe de travail s'écrit alors :

$$\omega = \omega_0 - \frac{j}{\tau_e}. \tag{1.16}$$

Introduisons cette fréquence dans l'expression du champ u [Equ. (1.12)] toujours avec $1/\tau_0 = 0$:

$$u = \frac{\zeta s_{in}}{2/\tau_e}. \tag{1.17}$$

Le système étant considéré sans perte, la puissance injectée $|s_{in}|^2$ est égale à la puissance en sortie $|s_{out}|^2$. Ainsi, d'après l'équation (1.14), nous avons :

$$|s_{in}|^2 = \frac{2}{\tau_e}|u|^2. \tag{1.18}$$

En combinant les deux dernières équations, nous obtenons l'expression de ζ :

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}. \tag{1.19}$$

Nous prenons de manière arbitraire la phase de ζ nulle. Nous verrons dans le paragraphe suivant les conséquences de ce choix.
Finalement, l'équation d'évolution du champ [Equ. (1.11)] dans le résonateur s'exprime comme :

$$\frac{du}{dt} = j\omega_0 u - \frac{1}{\tau}u + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}s_{in}. \tag{1.20}$$

Bilan

Dans cette partie nous avons décrit la réponse d'un résonateur à une excitation par une onde incidente. Ce résonateur est modélisé à partir de trois paramètres :

- ω_0, sa pulsation à résonance,
- τ_0, le temps de décroissance du champ associé aux pertes internes,
- τ_e, le temps de décroissance du champ relatif au couplage avec la ligne d'accès.

1.1.4 Le champ de sortie

Afin de déterminer la fonction de transfert de notre résonateur, il est indispensable de connaître l'expression du champ de sortie s_{out}. Notre modèle étant linéaire, le champ de sortie doit être proportionnel à une combinaison linéaire du signal d'entrée s_{in} et du champ interne u tel que :

$$s_{out} = c_{in}s_{in} + c_u u \tag{1.21}$$

avec c_{in} et c_u les deux constantes à déterminer.

1.1.4.1 Détermination de c_u

L'expression du coefficient c_u, est obtenue par identification à partir des équations établies dans le cas d'un résonateur sans perte interne avec un champ d'entrée nul. Ainsi, d'après l'équation (1.14) nous avons :

$$|s_{out}| = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}|u| = |c_u|u \tag{1.22}$$

on choisit alors :

$$|c_u| = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}. \tag{1.23}$$

Le terme de phase associé au coefficient c_u est défini de manière arbitraire à 0. Comme souligné au moment de la détermination de ζ, la différence de phase sera prise en compte dans le terme c_{in}.

1.1.4.2 Détermination de c_{in}

Nous déterminons le coefficient c_{in} en utilisant le principe de conservation de l'énergie. Dans ce cas, la différence entre la puissance en entrée et la puissance en sortie doit être égale à la somme de la puissance interne et des pertes intrinsèques au résonateur. Ce qui s'exprime comme :

$$|s_{in}|^2 - |s_{out}|^2 = \frac{d|u|^2}{dt} + 2\left(\frac{1}{\tau_0}\right)|u|^2 \tag{1.24}$$

De l'équation d'évolution [Equ. (1.20)], nous déduisons aisément celle à laquelle obéit l'énergie interne à la cavité :

$$\frac{d|u|^2}{dt} = -2\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}\right)|u|^2 + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}\,(u^* s_{in} + u s_{in}^*) \tag{1.25}$$

En insérant l'équation (1.25) dans l'équation (1.24), la conservation de l'énergie prend la forme :

$$-\frac{2}{\tau_e}|u|^2 + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}\,(u^* s_{in} + u s_{in}^*) = |s_{in}|^2 - |s_{out}|^2 \tag{1.26}$$

Nous introduisons l'expression du champ de sortie $s_{out} = c_{in}s_{in} + \sqrt{2/\tau_e}u$ dans l'équation (1.26) ce qui nous donne :

$$\sqrt{\frac{2}{\tau_e}}\,(u^* s_{in} + u s_{in}^*) + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}(u^* c_{in} s_{in} + u c_{in}^* s_{in}^*) = |s_{in}|^2(1 - c_{in}^2) \tag{1.27}$$

Nous en déduisons la valeur du coefficient c_{in} telle que :

$$c_{in} = -1 = e^{j\pi}. \tag{1.28}$$

Notons que la différence de phase π entre le champ d'entrée et le champ sortant de la cavité apparaît naturellement dans le coefficient c_{in}. À chaque passage dans le coupleur, le champ acquiert une phase de $\pi/2$.
Finalement, le champ de sortie prend la forme :

$$s_{out} = -s_{in} + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}u. \tag{1.29}$$

Conclusion

Nous sommes capables, à partir du modèle temporel de H.A Haus, de décrire le fontionnement linéaire d'un résonateur. Pour un signal d'excitation $s_{in}(t)$, l'évolution temporelle de l'amplitude du mode dans la cavité est donnée par :

$$\frac{du}{dt} = j\omega_0 u - \frac{1}{\tau}u + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}s_{in}. \tag{1.30}$$

L'intérêt majeur de ce modèle temporel, est de permettre l'étude du comportement dynamique d'un résonateur excité par un signal arbitraire quelconque en résolvant une équation différentielle ordinaire.

1.2 Le régime stationnaire

La fonction de transfert $\mathcal{H}$ du résonateur est obtenue en utilisant l'équation (1.29) :

$$\mathcal{H} = \frac{s_{out}}{s_{in}} = \sqrt{T}\exp(j\phi), \tag{1.31}$$

où T est la transmission en intensité et ϕ la phase induite par le système.
Dans ce paragraphe nous supposons une excitation monochromatique d'expression :

$$s_{in}(t) = A\exp(j\omega t), \tag{1.32}$$

l'équation (1.30) se résout analytiquement. Si nous exprimons ω en fonction du décalage fréquentiel par rapport à la résonance $\omega = \omega_0 + 2\pi\delta$ nous obtenons pour fonction de transfert en amplitude :

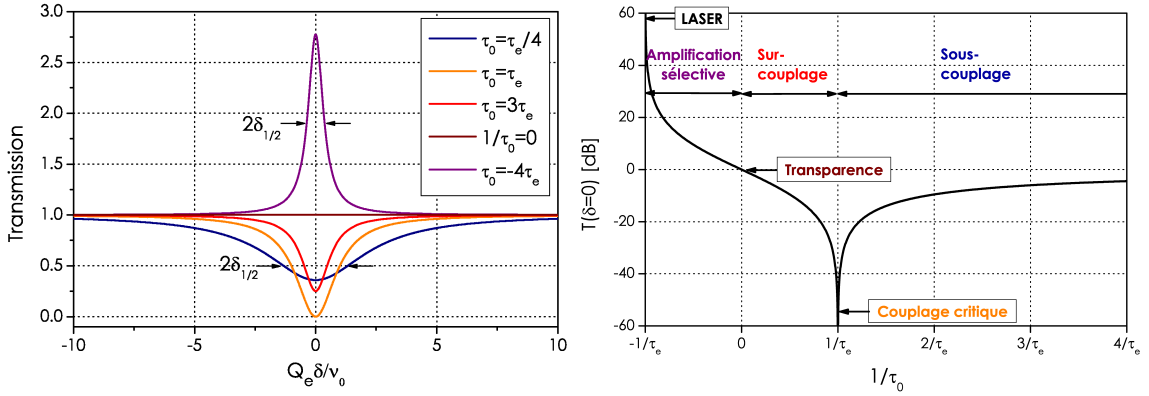
$$\mathcal{H}(\delta) = \frac{1/\tau_e - 1/\tau_0 - 2j\pi\delta}{1/\tau_e + 1/\tau_0 + 2j\pi\delta}. \tag{1.33}$$

1.2.1 La transmission

Soit $T(\delta)$ la transmission du système définie par :

$$T(\delta) = |\mathcal{H}(\delta)|^2 = \frac{(1/\tau_e - 1/\tau_0)^2 + 4\pi^2\delta^2}{(1/\tau_e + 1/\tau_0)^2 + 4\pi^2\delta^2}. \tag{1.34}$$

À partir de cette équation, nous pouvons tracer les différents régimes de fonctionnement d'un résonateur en fonction des valeurs relatives de τ_0 et τ_e. La figure 1.3(a) rassemble les différents cas envisageables. L'axe des abscisses est proportionnel au décalage fréquentiel δ, l'axe des ordonnées correspond à la transmission. Les courbes que nous obtenons ont toutes un profil Lorentzien de largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2}$ à l'exception du cas $\frac{1}{\tau_0} = 0$ correspondant au résonateur transparent. Ce régime est caractérisé par une transmission constante sur tout le spectre ($T(\delta) = 1$).
Ci-dessous nous donnons des exemples de régimes de couplage atteignables par un résonateur suivant la valeur relative de ses pertes intrinsèques et du taux de couplage. Chacun des cas



(a) Spectre de transmission

(b) Transmission à résonance

FIGURE 1.3 – Transmission en régime stationnaire pour différentes valeurs relatives de τ_0 et τ_e. Sur la figure (a), l'axe des abscisses est gradué en fonction du décalage fréquentiel normalisé $Q_e\delta/\nu_0$. La figure (b) présente la transmission à résonance $[T(0)]$ en fonction des valeurs relatives de τ_0 et τ_e.

discutés est représenté sur la figure 1.3(a) en fonction du désaccord fréquentiel normalisé $Q_e\delta/\nu_0$.
La figure 1.3(b) présente la transmission à résonance $T(0)$ définie par :

$$T(0) = \left(\frac{\tau_e - \tau_0}{\tau_e + \tau_0}\right)^2 \tag{1.35}$$

pour différentes valeurs relatives de τ_0 et τ_e.

1. **Sous-couplage** $[\tau_0 = \tau_e/4 \mid \tau_0 < \tau_e]$
   Ce régime est caractérisé par un couplage avec la ligne d'accès plus faible que celui avec l'ensemble des modes à fuites du résonateur. L'energie interne, $W(t)$, décroît lentement du fait d'un temps de vie externe τ_e grand. Les pertes intrinsèques sont alors plus élevées que les pertes extrinsèques. Dans ce cas la transmission à résonance est définie pour $0 < T(0) < 1$ [Fig. 1.3(b)].

2. **Couplage critique** $[\tau_0 = \tau_e]$
   La fuite du champ interne par le coupleur et la partie réfléchie du signal d'entrée interfèrent destructivement de sorte que la transmission soit nulle $[T(0) = 0]$. Dans ce cas les pertes intrinsèques sont égales aux pertes extrinsèques et $T(0) = 0$ [Fig. 1.3(b)].

3. **Sur-couplage** $[\tau_0 = 3\tau_e \mid \tau_0 > \tau_e]$
   Il correspond au cas inverse du sous-couplage. La fuite de l'énergie interne dans le coupleur est prépondérante. Les pertes intrinsèques sont alors plus faibles que les pertes extrinsèques ($\tau_0 > \tau_e$). Comme pour le régime de sous-couplage, la transmission à résonance est telle que $0 < T(0) < 1$ [Fig. 1.3(b)].

4. **Résonateur transparent** $[\tau_0 \to \infty]$
   Le résonateur ne présente pas de perte interne $\frac{1}{\tau_0} \to 0$, la transmission à résonance

est telle que $T(0) = 1$ [Fig. 1.3(b)]. C'est le cas idéal de l'interféromètre de Gires-Tournois [50] auquel cas la fonction de transfert du résonateur se réduit à $\mathcal{H} = \exp(j\phi)$. Le résonateur se comporte alors comme un filtre purement déphasant.

5. **L'amplification sélective** $[\tau_0 < -\tau_e < 0]$
   Le résonateur est en régime de gain $\tau_0 < 0$. Le champ interne $u(t)$ est exalté. Le régime laser n'est pas atteint car les fuites du coupleur ne sont pas compensées, autrement dit $|\tau_0| < \tau_e$. Néanmoins la transmission à résonance se définit par $T(0) > 1$ [Fig. 1.3(b)] et affiche une largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2}$ s'affinant lorsque le gain augmente.

6. **Le régime Laser** $[\tau_0 \to -\tau_e]$
   Au delà, le gain interne est tel que les pertes du coupleur sont compensées $|\tau_0| = \tau_e$. D'après l'équation (1.34) la transmission tend vers l'infini, nous sommes en régime d'oscillations laser. Ce régime de fonctionnement non-linéaire n'est à aucun moment traité dans ce manuscrit, il ne rentre pas dans le domaine de validité du modèle temporel. Il est tout de même identifié sur la figure 1.3(b) comme cas limite de l'amplification sélective.

D'un point de vue pratique, la mesure du facteur de qualité global Q est obtenue en mesurant la largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2}$ [Fig. 1.3(a)] puis en utilisant la définition du facteur de qualité :

$$Q = \frac{\nu_0}{2\delta_{1/2}} \tag{1.36}$$

où $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ est la fréquence optique à résonance.

Remarque 1

Les temps caractéristiques τ_0 et τ_e jouent le même rôle dans l'équation (1.34). De ce fait l'analyse de la transmission en régime stationnaire [Fig. 1.3(a)] ne permet pas l'identification des contributions intrinsèques et extrinsèques au facteur de qualité global.

Remarque 2

Si nous examinons l'évolution de la transmission à résonance ($\delta = 0$) en fonction de τ_0 et τ_e [Fig. 1.3(b)] :

$$T(0) = \left(\frac{\tau_e - \tau_0}{\tau_e + \tau_0}\right)^2,$$

pour $\frac{1}{\tau_0} > 0$, hormis pour le couplage critique défini par $T(0) = 0$ ($\tau_0 = \tau_e,\ Q_0 = Q_e = 2Q$) il est possible d'avoir deux couples (τ_0, τ_e) permettant de trouver la même valeur de $T(0)$ et la même largeur $\delta_{1/2}$. L'un $\tau_0 > \tau_e$ correspond au sur-couplage et l'autre $\tau_0 < \tau_e$ au sous-couplage.

1.2.2 Les propriétés dispersives

En régime stationnaire, pour un signal d'entrée de dépendance temporelle $e^{j(\omega_0+2\pi\delta)t}$, les différentes phases induites pour chaque régime de couplage s'écrivent :

1. **Sous-couplage** $[\tau_0 < \tau_e]$

$$\phi(\delta) = \pi - \arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 - \tau_e}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 + \tau_e}\right) \tag{1.37}$$

2. **Couplage critique** $[\tau_0 = \tau_e]$

$$\phi(\delta) = \pi + \frac{\pi}{2}\frac{\delta}{|\delta|} - \arctan(\pi\delta\tau_0) \tag{1.38}$$

3. **Sur-couplage** $[\tau_0 > \tau_e]$

$$\phi(\delta) = -\arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 - \tau_e}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 + \tau_e}\right) \tag{1.39}$$

4. **La transparence** $[\tau_0 \to \infty]$

$$\phi(\delta) = -2\arctan\left(2\pi\delta\tau_e\right) \tag{1.40}$$

5. **L'amplification sélective** $[\tau_0 < -\tau_e < 0]$

$$\phi(\delta) = -\arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 - \tau_e}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi\delta\tau_0\tau_e}{\tau_0 + \tau_e}\right) \tag{1.41}$$

Ces expressions montrent que, contrairement à la transmission, la phase induite pour les régimes de sous- et sur-couplage est définie de manière unique pour chaque valeur du couple (τ_0,τ_e). Une mesure de la phase permet de connaître de manière univoque le régime de couplage du résonateur.

1.2.2.1 Le temps de groupe

Nous rappelons que la dérivée première de la phase par rapport à la fréquence angulaire correspond au temps de groupe τ_g. Pour une dépendance temporelle du champ en $\exp(j\omega t)$, τ_g est donné par :

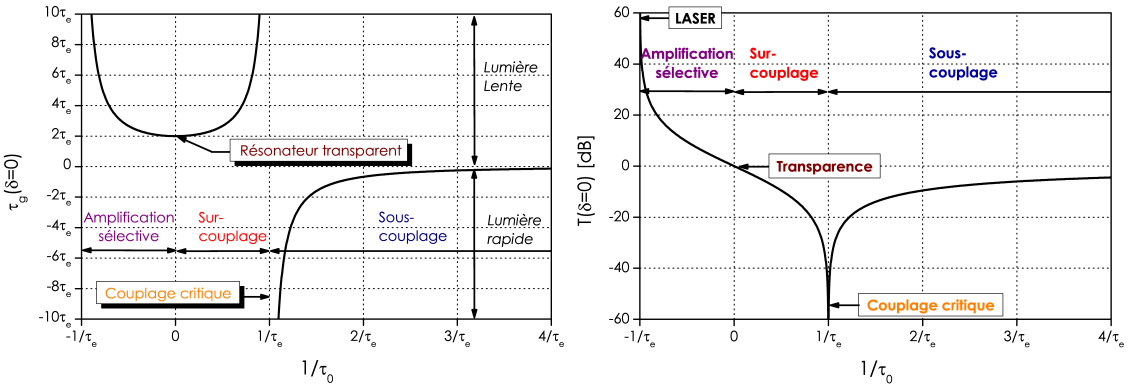
$$\tau_g(\delta) = -\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial\delta}. \tag{1.42}$$

Nous parlerons de retard de groupe négatif (lumière rapide) et de retard de groupe positif (lumière lente).

Pour les régimes de sous-couplage, sur-couplage et d'amplification sélective, le temps de groupe s'écrit :

$$\tau_g(\delta) = \tau_e\tau_0\left[\frac{\tau_0 - \tau_e}{(\tau_0 - \tau_e)^2 + (2\pi\delta\tau_0\tau_e)^2} + \frac{\tau_0 + \tau_e}{(\tau_0 + \tau_e)^2 + (2\pi\delta\tau_0\tau_e)^2}\right]. \tag{1.43}$$

Le cas du couplage critique est naturellement écarté étant donné qu'à résonance l'ensemble du signal est absorbé. Dans ce cas le retard de groupe τ_g n'est pas défini.
Nous définissons le retard de groupe à résonance, par $\tau_g(0)$:



(a) Évolution du temps de groupe à résonance (b) Rappel de la transmission à résonance

FIGURE 1.4 – (a) Temps de groupe à résonance. (b) Rappel de la transmission à résonance. L'axe des abscisses est défini pour différentes valeurs de τ_0 pour un τ_e fixé.

$$\tau_g(0) = 2\frac{\tau_e \tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau_e^2}. \tag{1.44}$$

En régime de transparence [Equ. (1.40)], le temps de groupe se réduit à :

$$\tau_g(\delta) = \frac{2\tau_e}{1 + 4\pi^2\delta^2\tau_e^2} \tag{1.45}$$

ce qui donne à résonance $\tau_g(0) = 2\tau_e$.
Le retard de groupe à résonance est tracé sur la figure 1.4(a). Contrairement à la transmission [figure 1.4(b)], à chaque régime de couplage est associé un unique retard.

Remarques et commentaires

Au cours de ce chapitre nous avons examiné un modèle très simple permettant d'étudier le comportement d'un résonateur aussi bien en régime stationnaire qu'en régime transitoire. En particulier, nous avons détaillé : (i) La transmission en puissance $T(\delta)$ et (ii) la phase $\phi(\delta)$ induite par le champ incident.
Seule la mesure simultanée de la transmission [Fig. 1.4(b)] et de la phase [Fig. 1.4(a)] permet une détermination des régimes de couplage et du régime lent ou rapide de la lumière. En effet, la mesure de la dispersion permet de trancher entre le régime de sous- et sur-couplage tandis que la transmission permet de statuer entre l'amplification sélective et le sur-couplage.
Notre objectif étant de déterminer les propriétés linéaires d'un résonateur de haut facteur de qualité, il nous faut définir une méthode de caractérisation permettant de mesurer simultanément τ_0 et τ_e, paramètres le décrivant complètement. Dans ce cas il nous sera possible

de remonter d'une part au régime de couplage [Fig. 1.4(b)] et d'autre part aux propriétés dispersives du résonateur [Fig. 1.4(a)].

Dans le chapitre suivant, nous proposons une méthode expérimentale simple basée sur le balayage en fréquence d'un laser de sonde permettant de caractériser complètement un résonateur au prix d'un ajustement numérique.

Chapitre 2

Méthodes de caractérisation de résonateurs à haut facteur de qualité

2.1 Les méthodes expérimentales de caractérisation

2.1.1 Caractérisation de résonateurs en régime stationnaire

La méthode usuelle de mesure de facteurs de qualité élevés consiste à exciter le résonateur (ici considéré comme passif) à l'aide d'un laser accordable très fin spectralement dont la fréquence ν est balayée lentement et linéairement. La figure 2.1 présente le protocole de mesure de cette méthode conventionnellement appelée : méthode de scan ou de balayage spectrale. L'enregistrement de la transmission (c.à.d. $|s_{out}(t)|^2$) présente un pic d'absorption lorsque la fréquence du laser est accordée sur la fréquence de résonance ν_0 du résonateur. La mesure de la largeur à mi-hauteur δt s'effectuant dans le domaine temporel, par une calibration précise de la vitesse de balayage $\tilde{V}_s$ nous obtenons la largeur à mi-hauteur de la résonance : $\delta_{1/2} = \tilde{V}_s \times \delta t$.

Cette mesure de la transmission permet d'obtenir simplement la valeur de $T(0)$ et du facteur

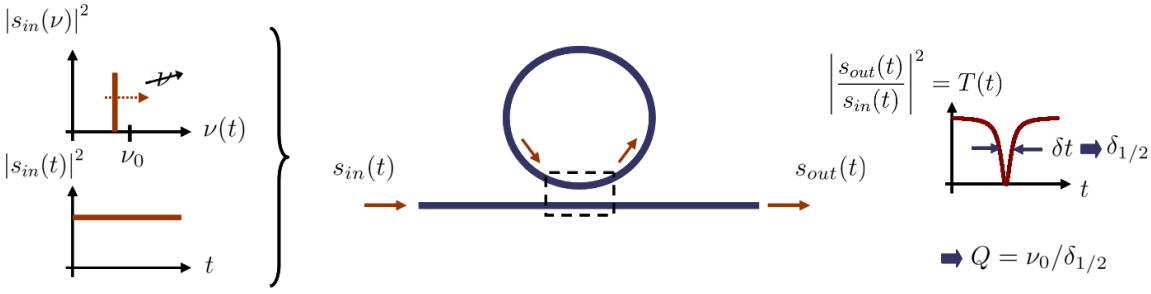


FIGURE 2.1 – Protocole expérimental de la méthode de scan. Par un balayage de la fréquence ν d'un laser accordable, le signal de sortie reproduit dans le domaine temporel la forme spectrale de la fonction de transfert en intensité du résonateur.

de qualité global du résonateur ($Q = \nu_0/\delta_{1/2}$), information insuffisante pour déterminer le

régime de couplage et les propriétés dispersives.
De plus, cette méthode n'est pas adaptée à la caractérisation d'un résonateur à haut facteur de qualité car elle nécessite des conditions expérimentales contraignantes :

- la largeur de raie du laser de sonde doit être très inférieure à la largeur de la résonance étudiée,
- la vitesse de balayage de la raie du laser de sonde ($\tilde{V_s}$) doit être suffisamment faible pour mesurer le régime stationnaire. En d'autres termes, le temps nécessaire τ_s pour sonder la résonance de la cavité doit être très supérieur à τ le temps caractéristique de décroissance du champ dans le système,
- De plus, les cavités de haut facteur de qualité sont très sensibles aux perturbations. Ces perturbations comme par exemple les effets thermo-optiques, entraînent une dérive fréquentielle du spectre de transmission.

D'autre part, afin de totalement caractériser le résonateur, la méthode de balayage spectrale doit être couplée à d'autres expériences pour obtenir une mesure de la phase. Des techniques de modulation phase/fréquence [51, 52] ou de mesure du temps de propagation d'impulsions [53–55] (mesure directe du retard de groupe τ_g) sont généralement utilisées.

2.1.2 Réponse temporelle du résonateur

La caractérisation de résonateurs de haut facteur de qualité est plus simple dans le domaine temporel. À l'aide d'un signal d'excitation de forme impulsionnelle nous mesurons les temps d'insertion et d'extraction de lumière dans un résonateur. Potentiellement, cette mesure permet de remonter aux temps caractéristiques du résonateur et donc au régime de couplage.

2.1.2.1 Principe de la méthode

Le principe fondamental de cette méthode est de mesurer le temps de vie des photons dans le dispositif sous test *via* la mesure du temps de décroissance de l'énergie lumineuse sortant de l'ensemble {résonateur + coupleur}. Pour cela, l'interrogation du système {résonateur + coupleur} (dénommé dans la suite le résonateur) se fait en le soumettant à une impulsion laser. Le système, suivant la fréquence ν du faisceau laser, présente des réponses en transmission différentes. Hors résonance ($\nu \neq \nu_0$) l'impulsion traverse le système. Par contre à résonance, nous avons couplage d'énergie d'où stockage dans le résonateur ce qui amène une décroissance de l'énergie ($\tau_{\text{insertion}}/2$) reçue à la détection [Fig. 2.2]. En d'autres termes nous observons une diminution de la transmission (signal de Ring Up ou charge du résonateur). Lorsque le régime stationnaire est atteint (minimum de transmission) l'interrogation laser est interrompue et nous observons progressivement l'énergie stockée ressortir du résonateur (signal de Ring Down) ce qui nous permet de mesurer le paramètre $\tau_{\text{extraction}}$. La figure 2.2 présente un chronogramme des différentes étapes de la mesure dans le cas d'une fenêtre temporelle laser à résonance.

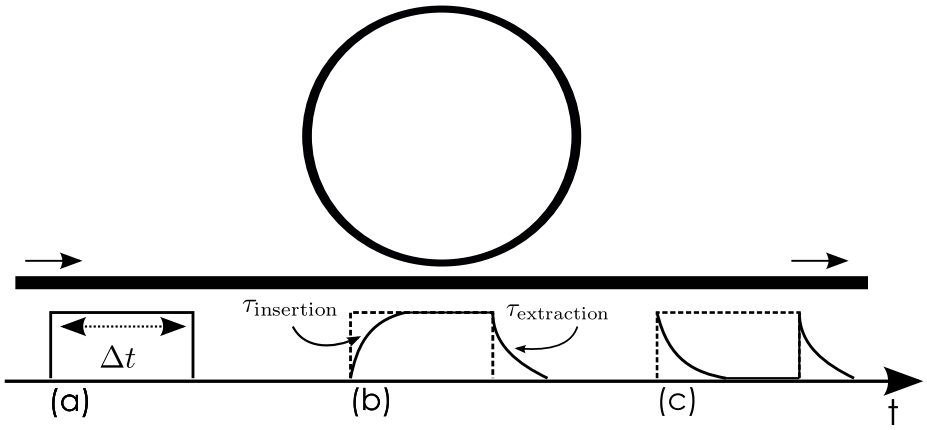


FIGURE 2.2 – Chronogramme de la méthode de *cavity ring down/up*. (a) l'impulsion initiale, (b) la charge du résonateur, (c) l'intensité mesurée sur le port de sortie. Dans le cas ci-dessus le résonateur est en régime critique.

1. Une impulsion carrée de largeur temporelle $\Delta t > \tau/2$ est générée par modulation d'intensité [Fig. 2.2(a)].
2. L'impulsion, de fréquence ν_0, est absorbée en un temps $\tau_{\text{insertion}}$ (Ring Up), puis le résonateur atteint son état stationnaire. Après traversée de l'impulsion, le système se décharge en un temps $\tau_{\text{extraction}}$ (Ring Down) [Fig. 2.2(b)]. La valeur relative de ces deux temps de vie permet d'identifier le régime de couplage du résonateur.
3. Nous mesurons en sortie du montage le profil de l'impulsion absorbée [Fig. 2.2(c)].

2.1.2.2 Simulations numériques

Nous avons réalisé une simulation numérique sur un cas test d'un anneau [Fig. 2.3]. Le couplage entre la ligne d'accès et la cavité est représenté par le temps de vie externe τ_e. La valeur du temps de vie interne est de $\tau_0 = 1,93$ ps. Le choix d'un tel résonateur peut sembler éloigné des préoccupations de l'étude, cependant comme nous nous intéressons à l'évolution temporelle d'un signal optique dans un système linéaire, seul le rapport durée de l'impulsion/taille du résonateur a une importance (simple rapport homothétique).

Ainsi sans aucune perte de généralité sur le comportement du système nous pouvons nous contenter d'un résonateur de taille modeste mais qui présente le grand avantage de permettre une simulation par une méthode de différences finies spatiale et temporelle [56, 57]. L'anneau a un rayon $R_0 = 6,46$ μm en matériau d'indice $n = 1,45$. Nous avons traité trois régimes de couplage différents [Fig. 2.4].

Le régime de sur-couplage

La figure 2.4(b) présente le régime de sur-couplage ($\tau_e = 1,04$ ps). Nous remarquons sur le signal de réponse (sortie du guide d'accès sur la figure 2.3) que le front de montée du

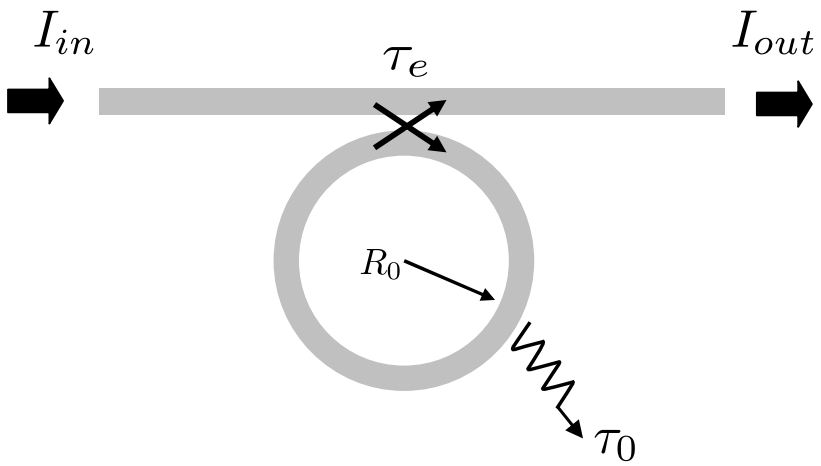


FIGURE 2.3 – Définition des paramètres de simulations temporelles. L'anneau a un rayon $R_0 = 6,46$ μm en matériau d'indice $n = 1,45$. I_{in} et I_{out} représentent respectivement les intensités lumineuses en entrée et en sortie de la ligne d'accès. Le temps de vie interne vaut $\tau_0 = 1,93$ ps.

signal d'excitation [1], présente un maximum inférieur à la valeur atteinte au niveau du front de descente de l'impulsion (décharge en énergie du résonateur). Nous observons également un régime stationnaire supérieur à 0. La figure 2.4(a) représente le pic d'absorption en régime stationnaire.

Le régime critique

La figure 2.4(d) présente le régime de couplage critique ($\tau_e = 1,93$ ps). Dans ce cas, le régime stationnaire correspond à une transmission nulle [Fig. 2.4(c)], son signal de Ring Up est alors équivalent au signal de Ring Down [Fig. 2.4(d)].

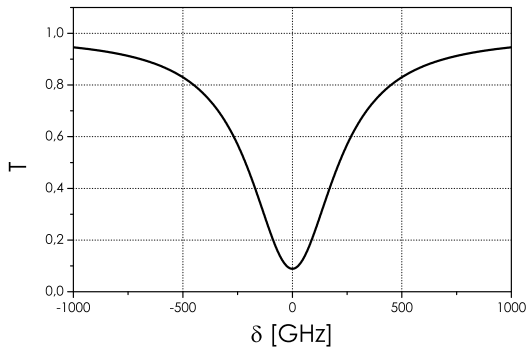
Le régime de sous-couplage

Enfin le cas présenté figure 2.4(f) correspond au régime de sous-couplage ($\tau_e = 3,62$ ps). Le niveau du signal de Ring Up est beaucoup plus élevé que celui du signal de Ring Down. En régime stationnaire la transmission à résonance ne s'annule plus.

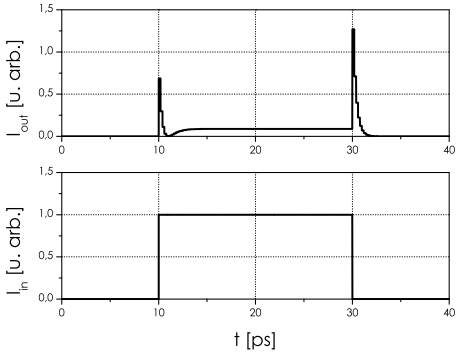
Bilan

Cette méthode dérivée de la méthode de *cavity ring down spectroscopy* (CRDS) permet, par une mesure de $\tau_{\text{insertion}}$ et $\tau_{\text{extraction}}$ d'obtenir τ_0 et τ_e et donc d'identifier le régime de couplage et les propriétes dispersives du résonateur. Cette méthode a été expérimentée

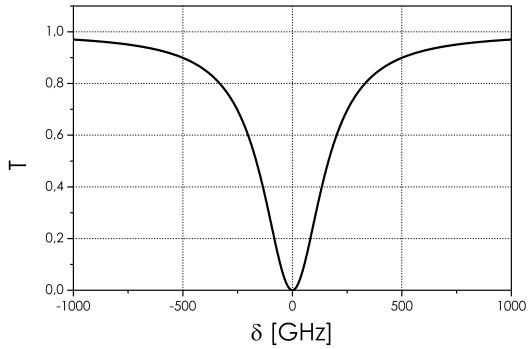
1. Signal représentatif de la charge en énergie du résonateur



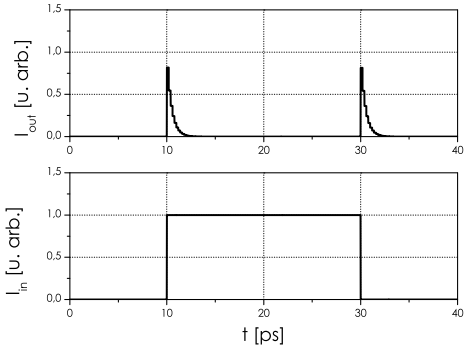
(a) Réponse stationnaire en régime de sur-couplage



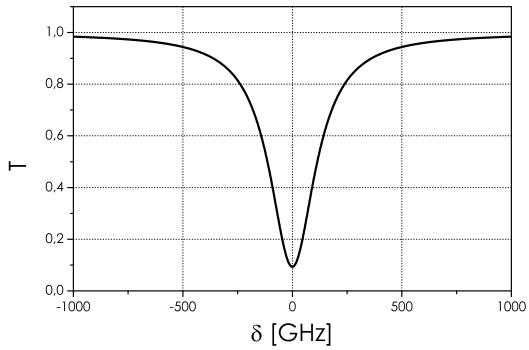
(b) Réponse temporelle en régime de sur-couplage



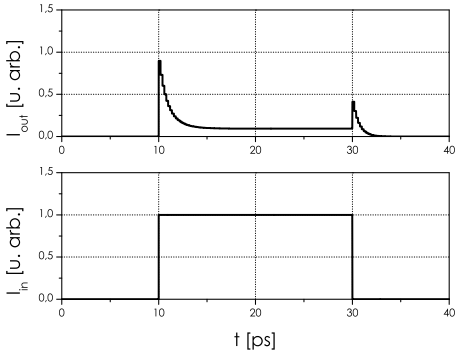
(c) Réponse stationnaire en régime critique



(d) Réponse temporelle en régime critique



(e) Réponse stationnaire en régime de sous-couplage



(f) Réponse temporelle en régime de sous-couplage

FIGURE 2.4 – Simulation du cavity ring down/up dans un résonateur de rayon R_0=6,46 μm et d'indice $n = 1,45$. Les simulations sont obtenues par la méthode des différences finies. La colonne de droite correspond à la réponse temporelle d'un résonateur, la colonne de gauche au régime stationnaire.

entre autres au cours de la thèse de L. Ghişa [48], par A.A. Savchenkov *et al.* [58] et dans les travaux de T.J.A. Kippenberg [59, Chapitre 3, p 43]. Notons que les travaux menés par

Kippenberg ne concernent que l'étude du signal de Ring Down. L'analyse des résultats obtenus dans cette configuration ne permet d'obtenir que le facteur-Q global.

Limitations

Néanmoins cette méthode souffre de sérieuses limitations imposées par les performances des composants électroniques qui constituent le dispositif de mesure. (i) La génération d'un signal d'excitation rigoureusement carré avec des flancs de montée et de descente suffisament droits (inférieur à la dizaine de ns) présentant un retour immédiat à zéro sur le front descendant s'avère être difficile. (ii) La recherche de la fréquence de résonance (ν_0) est opérée manuellement ce qui est d'autant plus complexe lorsque l'on cherche à caractériser des résonateurs de haut facteur de qualité présentant des résonances étroites. Kippenberg s'affranchit de cette difficulté en déclenchant le signal d'excitation sur l'annulation de la transmission. Cette technique revient à combiner la méthode de scan avec la méthode de *cavity ring down*.

2.1.3 Méthode hybride spectrale/temporelle

La méthode que nous utilisons consiste, comme pour la mesure en régime stationnaire [partie 2.1.1], à sonder une résonance de la cavité en balayant en fréquence la raie du laser de sonde. D'un point de vue expérimental, la différence repose sur une variation de la fréquence du laser de sonde plus rapide que le temps de vie caractéristique du résonateur ($\tau_s \ll \tau/2$). Le spectre de transmission [Fig. 2.5] présente dans ce cas des oscillations sur le front montant de la résonance.

La figure 2.6 présente le principe de cette méthode interférométrique basée sur la CRDS. Un signal laser est rapidement balayé sur une résonance de la cavité. Lorsque la fréquence du laser de sonde est accordée sur la fréquence de résonance ν_0, le champ résonne dans la cavité puis est réémis vers le port de sortie avec un temps de décroissance τ. La fréquence du laser de sonde ayant évoluée, le champ extrait de la cavité interfère avec le signal d'entrée de fréquence $\nu_0 + \Delta\nu$. Le battement résultant apparaît sur le signal détecté sous forme d'oscillations [Fig. 2.5]. L'enveloppe du signal correspond au temps de décroissance du champ. D'un point de vue sémantique, nous appelons cette méthode la "méthode hybride spectrale/temporelle". Les premières observations de ce phènomène d'oscillations (*ringing*) sont rapportées dans des cavités hyperfréquences supraconductrices par H.J. Schmitt *et al.* [61]. De ces mesures, le temps de décroissance $\tau/2$ de la cavité est déduit et par conséquent son facteur de qualité global Q.

Ce phénomène a été observé dans des cavités Fabry-Pérot de haute finesse [62–67], dans des résonateurs à fibre [60] ou encore des résonateurs à modes de galerie [44, 68, 69].

Cependant, à notre connaissance, les différents travaux menés sur l'exploitation de ces oscillations, ne conduisent qu'à obtenir les informations expérimentales suivantes :

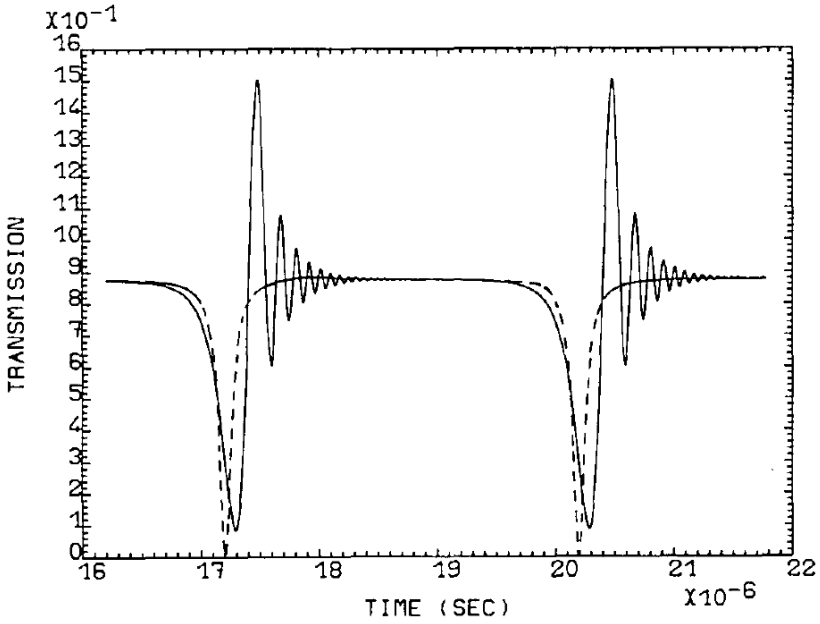


FIGURE 2.5 – Réponse stationnaire (en tirets) et dynamique (traits pleins) d'un résonateur en fonction de la vitesse de balayage du laser de sonde. Extrait de Ioannidis *et al.* [60].

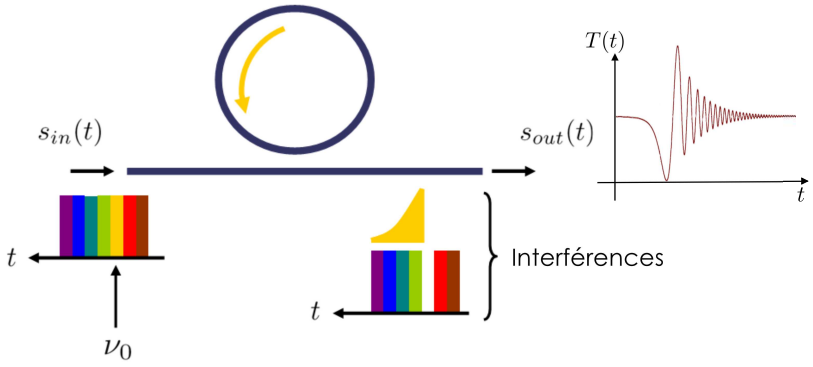


FIGURE 2.6 – Représentation de la méthode hybride spectrale/temporelle. Par un balayage rapide du laser de sonde sur une résonance de la cavité nous obtenons la réponse dynamique du résonateur. L'étude du régime transitoire obtenu donne accès à toutes les propriétés linéaires du résonateur et donc au régime de couplage et aux propriétes dispersives.

1. La vitesse de balayage, obtenue en mesurant les périodes des oscillations [65–67],
2. Le facteur de qualité global, en mesurant le temps de vie des photons $\tau/2$ [44] (exploitation de l'enveloppe du signal),
3. La finesse de la cavité [62, 63, 65, 67].

Nous allons montrer que l'étude intensive de ces oscillations permet d'obtenir toutes les propriétés linéaires d'un résonateur. Nos travaux nous ont menés à appliquer un modèle théorique qui, superposé aux mesures, permet de déterminer τ_0, τ_e et la vitesse de balayage $\tilde{V}_s$ et ainsi de connaître le régime de couplage et les propriétés dispersives du résonateur.

Dans un premier temps nous présentons un modèle théorique basé sur le modèle de H.A. Haus puis nous appliquons la méthode à un système modèle à base de fibres. Nous présentons par la suite des résultats obtenus dans différentes configurations et notamment dans des résonateurs en régime d'amplification et à modes de galerie. Dans le chapitre 6, le modèle sera adapté à la caractérisation de cavités couplées.

2.2 Modèle théorique

La description du régime transitoire temporel [réponse caractéristique de la méthode de CRDM (*cavity ringdown measurement*)] est simplement obtenue en appliquant le modèle développé par H.A. Haus [49].
Contrairement au régime stationnnaire, pour le régime dynamique, la fréquence d'excitation du résonateur varie temporellement. La nouvelle expression du champ d'entrée est $s_{in}(t) = Ae^{j\omega(t)\cdot t}$ avec :

$$\omega(t) = \omega_i + \frac{\Omega}{2T_s}t \tag{2.1}$$

où ω_i est la pulsation du signal d'entrée $s_{in}(t)$ à l'instant $t = 0$ et Ω l'intervalle de fréquence angulaire décrit en une période de temps T_s. Nous avons donc une variation temporelle quadratique de la phase du champ d'entrée.
Nous définissons la fréquence instantanée du signal telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{\Omega}{T_s}t = \omega_i + V_s t, \tag{2.2}$$

avec V_s, la vitesse de balayage en fréquence angulaire. Par commodité expérimentale, nous définissons également $\tilde{V}_s = V_s/(2\pi)$, la vitesse de balayage fréquentielle.
La nouvelle expression du champ $s_{in}(t)$ modifie la forme du champ à l'intérieur de la cavité. En insérant la nouvelle expression de $s_{in}(t)$ dans l'équation d'évolution du champ $u(t)$ [Equ. (1.20)] :

$$\frac{du}{dt} = j\omega_0 u - \frac{1}{\tau}u + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}s_{in},$$

et en résolvant par la méthode de variation de la constante nous obtenons pour expression du champ interne :

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}A\exp\left(j\omega_0 - \frac{1}{\tau}\right)t\left[f(t) - f(0) + \frac{1}{j\left(\omega_i - \omega_0\right) + 1/\tau}\right] \tag{2.3}$$

avec :

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \exp\left[j\theta(t') + \left(\frac{1}{\tau} - j\omega_0\right)t'\right]\mathrm{d}t' \tag{2.4}$$

ce qui peut s'exprimer en utilisant la fonction erreur complexe $erf(z)$ [60,65,70] avec $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(t) = -\sqrt{\frac{j^2\pi}{2V_s}}\exp\left[\frac{-j(2\pi\delta_i - j/\tau)^2}{2V_s}\right]\mathrm{erf}\left(\frac{j/\tau - 2\pi\delta_i - V_s t}{\sqrt{2j^2V_s}}\right) \tag{2.5}$$

avec $2\pi\delta_i = \omega_i - \omega_0$ le désaccord fréquentiel à l'instant $t = 0$.

Remarque

La description du phénomène de CRD (*cavity ringdown*) peut être réalisée, pour une seule cavité, par une approche sommation des champs. C'est ce que propose Lawrence *et al.* dans la référence [66]. Dans cette dernière référence, les auteurs montrent que leur modèle initialement défini par une relation de récurrence, se résume à résoudre une équation différentielle linéaire identique au modèle que nous utilisons.
Comme pour le régime stationnaire, nous déterminons la transmission du résonateur $T(t) = |s_{out}/s_{in}|^2$ en insérant la nouvelle expression du champ $u(t)$ [Equ. (2.3)] dans la relation :

$$s_{out} = -s_{in} + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}}u.$$

La transmission $T(t)$ est maintenant une fonction du temps. Contrairement au régime stationnaire nous remarquons que τ_0 et τ_e ne jouent plus le même rôle dans l'expression du champ $u(t)$ [Equ. (2.3)]. On peut alors naturellement penser que nous allons pouvoir dissocier l'influence de l'un et l'autre dans la fonction de transmission et ainsi déterminer le régime de couplage. La dépendance temporelle de $T(t)$ est fonction de la vitesse de balayage fréquentielle $\tilde{V}_s$. Ainsi, pour un résonateur en régime de couplage déterminé (τ_0 et τ_e fixé) l'allure de la fonction de transmission ne dépendera que de $\tilde{V}_s$.
Sur la figure 2.7, nous avons représenté la transmission pour un résonateur en régime de couplage critique pour différentes valeurs de vitesse $\tilde{V}_s$ normalisées par rapport à $\tilde{V}_0 = 2/(\pi\tau^2)$. Cette vitesse de balayage normalisée $\tilde{V}_0$ correspond à une résonance de largeur $1/(\pi\tau)$ balayée pendant un temps $\tau/2$. La figure 2.7(a) obtenue pour une vitesse de balayage lente ($\tilde{V}_s = 0,0075\ \tilde{V}_0$) correspond au régime quasi-stationnaire que nous avons déjà décrit [Fig. 1.3(a)]. Lorsque la vitesse de balayage augmente [cas (b), (c) et (d)], des oscillations apparaissent et ceci d'autant plus que la vitesse est grande. Ces oscillations font référence au phénomène de *cavity ring down* [60, 61, 65] aussi appelé *ringing*.
L'étude de ce régime transitoire temporel permet de caractériser entièrement le résonateur.

2.2.1 La période des oscillations

Nous voyons sur la figure 2.7, et notamment sur les graphiques (b), (c) et (d) que la période des oscillations n'est pas constante. Ces oscillations ont pour origine le battement entre le champ intracavité et l'onde excitatrice.
Soient respectivement I_{in} et I_u les intensités des champs d'entrée et intracavité. En considérant qu'à $t = 0$ nous avons $\omega_{in} = \omega_0$, la pulsation d'excitation prend la forme $\omega_{in} = \omega_0 + V_s t/2$. Seul le champ oscillant à la fréquence ω_0 sera résonant dans la cavité. L'intensité résultant du battement entre les deux composantes est de la forme :

$$\begin{aligned} I &= I_{in} + I_u + 2\sqrt{I_{in}I_u}\cos\left[(\omega_{in} - \omega_0)t\right] \\ &= I_{in} + I_u + 2\sqrt{I_{in}I_u}\cos\left[(V_s t/2)t\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

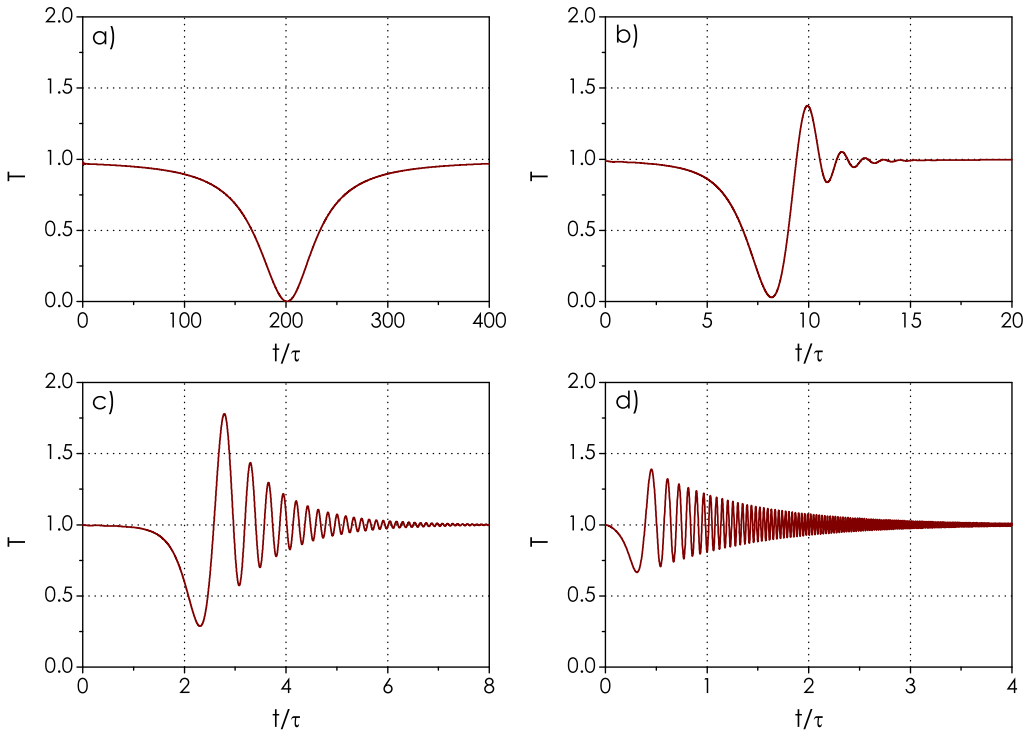
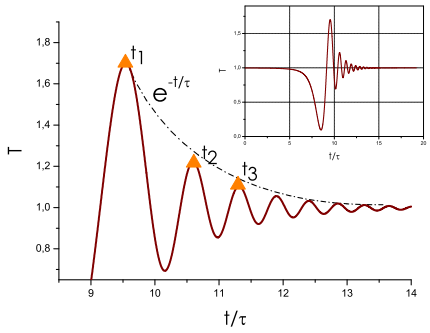


FIGURE 2.7 – Transmission d'un résonateur en régime critique pour différentes vitesses de balayage. a) $\tilde{V}_s = 0,0075\ \tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\ \tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = 3\ \tilde{V}_0$, d) $\tilde{V}_s = 30\ \tilde{V}_0$ avec $\tilde{V}_0 = 2/(\pi\tau^2)$. L'axe des abscisses est normalisé par rapport au temps de vie global τ.

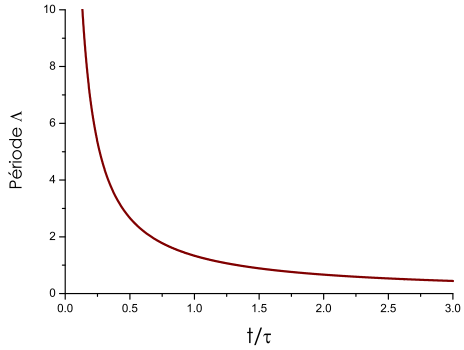
ainsi la période Λ des oscillations s'écrit :

$$\Lambda = \frac{4\pi}{V_s}\frac{1}{t} = \frac{2}{\tilde{V}_s}\frac{1}{t}, \tag{2.7}$$

Nous avons donc une période des oscillations qui diminue lorsque la pulsation du signal d'entrée augmente. La figure 2.8(a) représente la simulation d'un régime transitoire temporel pour un résonateur en régime critique. Les différentes périodes Λ_n sont calculées à partir de l'expression : $\Lambda_n = t_{n+1} - t_n$ où t_n ($n \in \mathbb{N}$) correspondent aux repères temporels identifiés sur la figure. Au regard de la figure 2.8(a), il apparaît que la période Λ_n est plus grande que Λ_{n+1}. Ceci est conforté par le tracé de l'évolution de la période Λ en fonction du temps normalisé t/τ [figure 2.8(b)]. Ainsi, la mesure expérimentale de quelques Λ_n permet, par l'intermédiaire de l'expression (2.7), de connaître exactement la vitesse de balayage.
Notons également, que l'enveloppe des oscillations est proportionnelle au temps de décroissance du champ dans le résonateur et suit une évolution en $\exp(-t/\tau)$ [Fig. 2.8(a)]. La mesure de ce temps de vie permet alors de remonter au facteur de qualité global du résonateur.



(a) Transitoire temporel pour une vitesse de balayage $\tilde{V}_s = 0,75\tilde{V}_0$. En insert, vue d'ensemble du signal.



(b) Période des oscillations du régime transitoire en fonction du temps

FIGURE 2.8 – (a) Transitoire temporel d'un résonateur en couplage critique pour une vitesse de balayage $\tilde{V}_s = 0,75\tilde{V}_0$. (b) Période des oscillations pour une vitesse de balayage $\tilde{V}_s = 0,75\tilde{V}_0$ simulée à partir de l'équation (2.7).

2.2.2 Mise en évidence du rôle de τ_0 et τ_e

Nous avons vu lors de l'étude du régime stationnaire [Page 17] que les temps caractéristiques τ_0 et τ_e jouent un rôle identique dans l'expression de la transmission $T(\delta)$ [Equ. (1.34)]. Ainsi à τ donné et $\tau_e = \alpha\tau_0$ ou inversement $\tau_0 = \alpha\tau_e$ nous avons la même transmission caractérisée par son facteur-Q global :

$$Q = \omega_0 \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\tau_i}{2} \tag{2.8}$$

et sa transmission à résonance :

$$T(0) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2 \tag{2.9}$$

avec $\tau_i = \inf(\tau_e, \tau_0)$ et $\alpha \geq 1$.
Sur la figure 2.9(a) sont représentées les transmissions dans le cas particulier $\alpha = 3$ à savoir $\tau_e = 3\tau_0$ (résonateur sous-couplé) et $\tau_0 = 3\tau_e$ (résonateur sur-couplé). Les deux transmissions stationnaires se superposent parfaitement. La figure 2.9(b) présente les réponses dynamiques de ces deux mêmes systèmes. Il apparaît clairement que les réponses sont différentes en terme d'amplitude. Ces résultats sont calculés avec $\tilde{V}_s = 2,25\ \tilde{V}_0$ et l'axe des abscisses est normalisé par rapport au temps de vie des photons τ. Dans la suite de ce chapitre nous reviendrons sur les autres régimes linéaires comme la transparence et l'amplification sélective [parties 2.5 et 2.6].

2.3 Validation Expérimentale

L'objectif de cette première validation expérimentale est de comparer les résultats obtenus par les méthodes de scan (balayage lent) et de CRDM (balayage rapide). Dans un

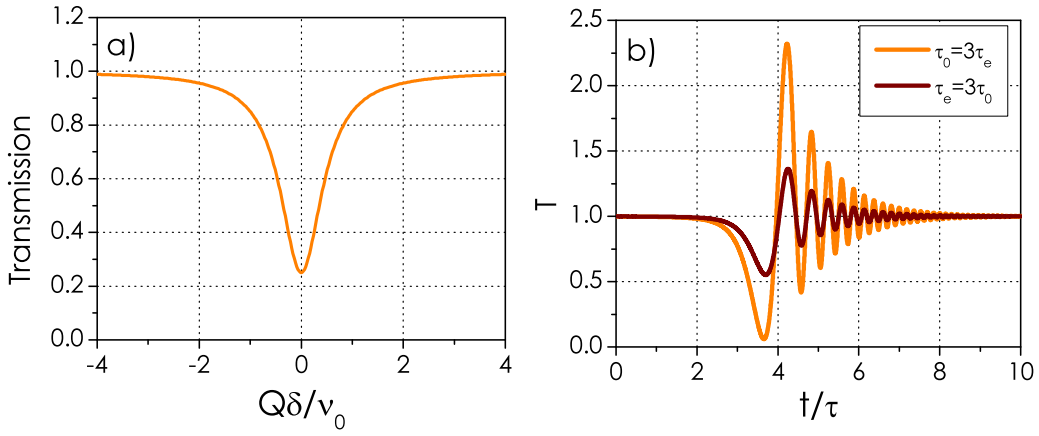


FIGURE 2.9 – Transmission en régime stationnaire (a) et en régime dynamique (b) pour deux résonateurs dont le rôle de τ_0 et τ_e est inversé. La vitesse de balayage rapide est de $\tilde{V}_s = 2,25\ \tilde{V}_0$.

premier temps, nous présentons le dispositif expérimental et notamment le résonateur "modèle" nous permettant d'aborder toutes les configurations linéaires atteignables.
Nous étudions dans un second temps le cas du couplage critique par le biais des deux méthodes afin de comparer les mesures de τ_0 et τ_e. Le but est de mettre en évidence de manière expérimentale les résultats obtenus au paragraphe 2.2.2. Ensuite nous appliquons, toujours à l'aide de notre résonateur "modèle", la méthode de CRDM à tous les régimes linéaires de couplage [Fig. 1.3(b)]. Enfin, nous présentons des résultats obtenus dans un résonateur en configuration *add/drop* et dans une cavité à modes de galerie.

2.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté avec sa chaîne de mesure sur la figure 2.11. Ci -dessous nous présentons le résonateur modèle *sous test* nous permettant d'obtenir expérimentalement un haut facteur de qualité et d'étudier les différents régimes de couplage.

Le résonateur

La figure 2.10 présente le dispositif sous test composé d'une cavité réalisée à partir d'une boucle de fibre [71–74]. Une section de fibre dopée Er^{3+} associée à un coupleur variable nous donne les degrés de liberté nécessaires aux ajustements expérimentaux de τ_0 et τ_e, permettant d'obtenir l'ensemble des régimes de couplage atteignables par un résonateur.

Ajustement de τ_0 Le résonateur de 2,5 m de circonférence est composé d'une section de fibre monomode à 1550 nm de type SMF 28 et d'un tronçon de 50 cm de fibre dopée Er^{3+} de concentration 1100 ppm. Le paramètre τ_0 est ajusté en contrôlant le niveau de puissance du laser de pompe à 980 nm injectée dans la fibre dopée. La transition ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4 I_{15/2}$ de l'Erbium est mise à profit pour amplifier le signal de sonde à 1550 nm. Ce tronçon est inséré dans le résonateur *via* 2 multiplexeurs 1550/980 nm. Le premier sert à injecter le signal de pompe dans la fibre, le deuxième à l'extraire. La partie fibrée du résonateur est thermalisée par immersion dans un récipient d'eau. On stabilise de cette manière les dilatations de la fibre responsables, entre-autres, de la dérive fréquentielle des résonances.

Ajustement de τ_e Cette boucle de fibre est couplée au dispositif de mesure par un coupleur variable permettant d'ajuster le temps τ_e.

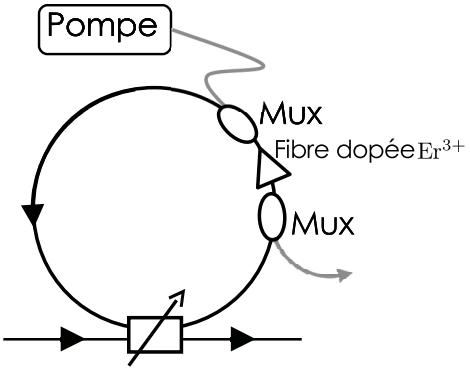


FIGURE 2.10 – Schéma du résonateur "modèle" à fibre

Contrôle de la vitesse de balayage

Le laser de sonde à 1550 nm est une TUNICS-BT de largeur de raie $\delta\nu$ =150 kHz accordable sur une plage d'environ 5 GHz. La puissance maximale de sortie du laser est de 2,5 mW. La fréquence de la raie du laser est pilotée par un signal de commande électrique périodique de type triangulaire d'une amplitude de 8 V et de fréquence ajustable. L'amplitude du signal électrique détermine l'excursion spectrale du laser, sa fréquence fixe la vitesse de balayage. Les résonateurs que nous étudions ont tous des facteurs de qualité dépassant les 10^8 ainsi, sauf notification particulière, nous considérerons un balayage rapide pour une fréquence de commande de 400 Hz et un balayage lent pour une fréquence de commande de 30 Hz. Ainsi, un balayage rapide correspond à environ $V_s \approx 5$ MHz/μs et un balayage lent à $V_s \approx 0{,}4$ MHz/μs.
Un isolateur suivi d'un contrôleur de polarisation est placé en aval du laser de sonde. L'isolateur permet de protéger le laser de réflexions éventuelles. Le contrôleur de polarisation permet d'ajuster la polarisation du signal d'entrée afin d'observer une seule famille de modes en sortie du résonateur.

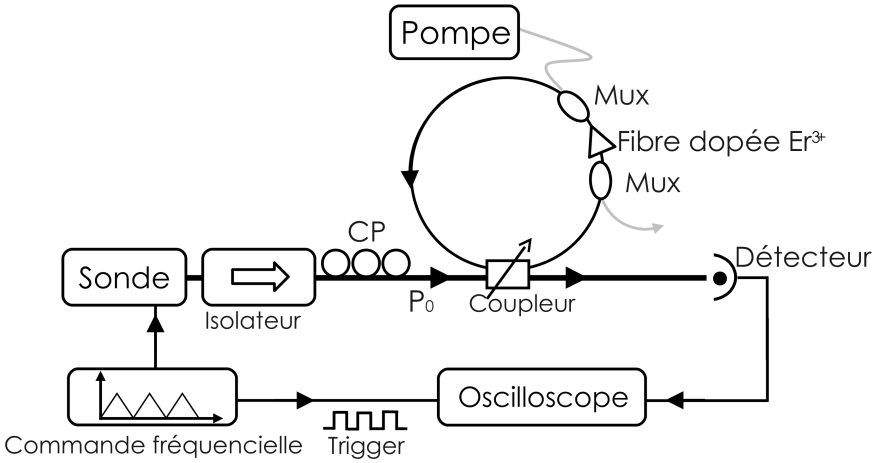


FIGURE 2.11 – Montage expérimental de la méthode hybride spectrale/temporelle. La section de fibre dopée est pompée par un laser à 980 nm par l'intermédiaire de 2 multiplexeurs (Mux). Le laser de sonde d'une puissance P_0 est suivi d'un isolateur et d'un contrôleur de polarisation (CP). Le signal est collecté sur un détecteur puis observé sur un oscilloscope synchronisé sur la commande électrique du laser.

Chaîne de mesure

Le signal de transmission est ensuite collecté sur un détecteur. Ce détecteur doit avoir au moins une bande passante de 10 MHz, afin de suivre les oscillations du signal utile. La composante continue du signal doit également être conservée pour normaliser les acquisitions sur l'intensité du signal hors résonance. Dans le cas où la bande passante du détecteur n'est pas suffisante, la superposition avec le modèle théorique n'est pas satisfaisante et ne permet pas de remonter aux paramètres τ_0, τ_e et $\tilde{V}_s$. La trace temporelle du signal est ensuite observée sur un oscilloscope avec une grande profondeur mémoire. L'oscilloscope est synchronisé sur le générateur du signal de commande du laser de sonde.

2.3.2 Protocole expérimental

Pour un même résonateur ($\equiv \tau_0$ donné) dans une même condition de couplage ($\equiv \tau_e$ donné) nous ne pouvons pas mesurer simultanément les réponses stationnaire et dynamique aussi, sont-elles faites l'une après l'autre. Dans un premier temps, nous mesurons le spectre de transmission (quasi-stationnaire) d'une résonance. Dans un second temps, nous effectuons une mesure de la réponse dynamique en appliquant un balayage rapide de la fréquence du laser de sonde. De cette dernière mesure, par traitement, nous déterminons les caractéristiques τ_0, τ_e qui servent alors à déduire la réponse théorique stationnaire qui est superposée au spectre de transmission (quasi-stationnaire) expérimental.

Les différents régimes de couplage étudiés sont présentés figure 2.12. Nous travaillons à taux

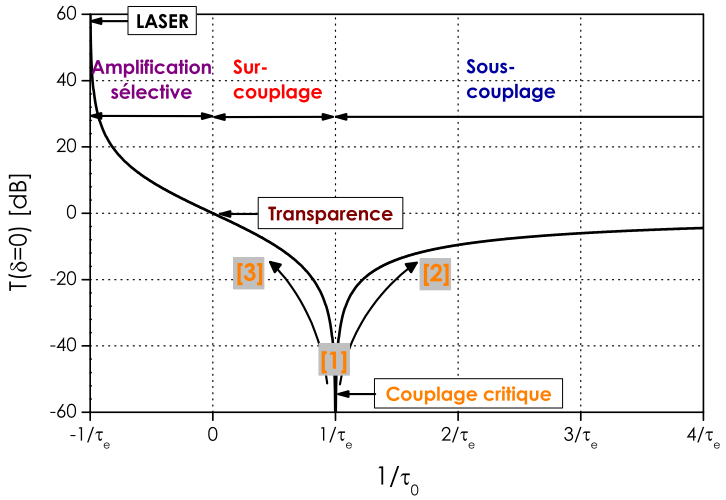


FIGURE 2.12 – Présentation des régimes de couplage étudiés dans le cadre de la validation expérimentale de la méthode de CRDM.

de couplage fixé ($\equiv \tau_e$ donné). Le premier cas étudié [Fig. 2.12 (1)] correspond au couplage critique, c'est à dire à l'unique point de fonctionnement identifiable par la méthode de scan. Ce point ($\tau_0 = \tau_e$) est obtenu pour une puissance de pompe de 4,5 mW. Pour une puissance de pompe inférieure (3,8 mW) nous passons en régime de sous-couplage ($\tau_0 < \tau_e$) [Fig. 2.12 (2)]. Pour une puissance de pompe supérieure (5,2 mW) nous obtenons le régime de sur-couplage ($\tau_0 > \tau_e$) [Fig. 2.12 (3)].
Les mesures sont effectuées avec une puissance du laser de sonde $P_0 = 2$ mW. Pour chaque régime de couplage nous procédons à une mesure en balayage lent (régime quasi-stationnaire) et en balayage rapide. Les acquisitions sont reportées dans la figure 2.13. La colonne de droite correspond aux mesures en balayage lent tandis que la colonne de gauche correspond au balayage rapide. La puissance de pompe nécessaire pour observer le couplage critique est de 4,5 mW. Pour observer le sous-couplage et le sur-couplage la puissance de pompe est de respectivement 3,8 mW et 5,2 mW.

2.3.3 Comparaison théorie|expérience

2.3.3.1 En régime stationnaire

À partir des mesures obtenues par la méthode de scan, nous sommes uniquement capables de déterminer le facteur de qualité global [Equ. (1.36)] en mesurant la largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2}$ d'un mode. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.1. La ligne "théorie" correspond aux calculs réalisés à partir des paramètres de la structure à savoir le périmètre de la boucle de fibre, l'indice effectif et le coefficient de couplage. La vitesse de balayage $\tilde{V}_s$, est estimée à partir de la valeur théorique de l'ISL (Intervalle spectral libre). En scan, les valeurs

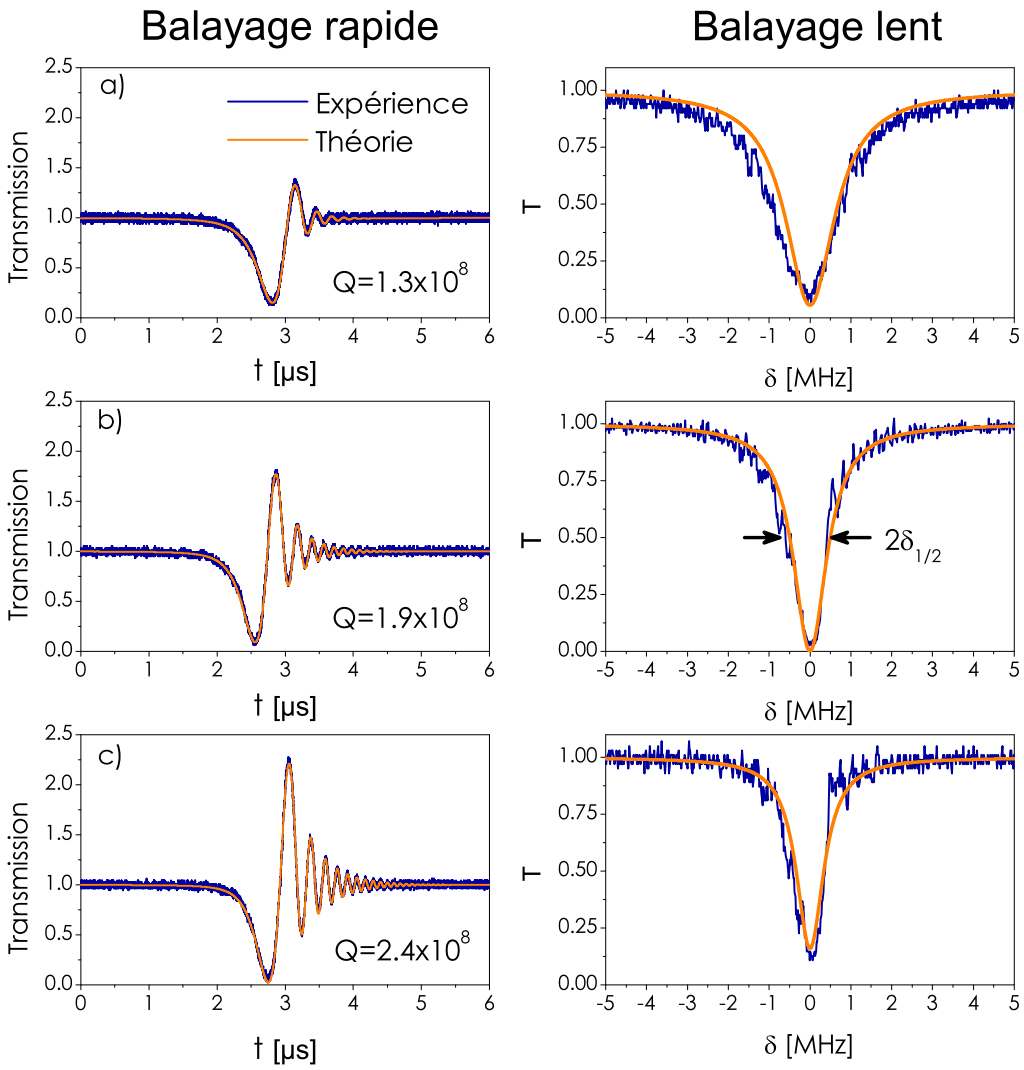


FIGURE 2.13 – Superposition du modèle théorique (en orange) aux mesures expérimentales (en bleu) pour les trois régimes de couplage. a) sous-couplage, b) critique, c) sur-couplage. La valeur du coupleur reste constante dans les trois cas étudiés, seule la puissance de pompe varie. Les puissances de pompe sont respectivement de 3,8 mW (a), 4,5 mW (b) et 5,2 mW (c). Le signal de sonde P_0 vaut 2 mW. Le modèle est ajusté sur les courbes expérimentales en balayage rapide. Le modèle stationnaire [Equ. (1.34)] est superposé aux mesures en balayage lent à partir des paramètres τ_0 et τ_e obtenus en balayage rapide.

TABLE 2.1 – Récapitulatif des données obtenues pour $\tilde{V_s} \approx 0,4$ MHz/μs (scan) et $\tilde{V_s} \approx 5$ MHz/μs (CRDM) en couplage critique. La ligne "théorie" présente les calculs réalisés à partir des valeurs structurelles à savoir le périmètre de la boucle de fibre, l'indice effectif et le coefficient de couplage donnés par le coupleur. τ_L correspond au temps de parcours de la cavité.

	Q_{global}	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	τ_L [ns]	$\lvert\kappa\rvert^2$ [%]
Théorie	$1,61 \times 10^8$	533	533	12,16	5 ± 1
Scan	$1,89 \times 10^8$	624	624		$3,9 \pm 0,6$
CRDM	$1,9 \times 10^8$	677	616	$13,3 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,5$

des temps de vie reportées dans le tableau sont déduites de la mesure du facteur de qualité. On mesure à l'oscilloscope une durée Δt nécessaire pour sonder deux résonances successives. Ce Δt correspond à un ISL, on obtient ainsi la vitesse $\tilde{V_s} = 0,40 \pm 0,02$ MHz/μs. Nous faisons l'hypothèse que $\tilde{V_s}$ est constant sur la durée d'acquision de l'ISL, ce qui n'est pas forcément le cas. Afin de minimiser l'incertitude sur la mesure de l'ISL, nous effectuons une moyenne sur 4 mesures d'ISL. La valeur de l'ISL moyen que nous considérons est d'environ 75 MHz.

L'exploitation du régime de couplage critique donne plus d'informations que les autres régimes de couplage. En effet, nous avons non seulement le facteur de qualité global, mais aussi les facteurs de qualité intrinsèque et externe. Ils sont reliés par l'expression suivante :

$$Q = \frac{Q_0}{2} = \frac{Q_e}{2} \tag{2.10}$$

Nous mesurons dans le cas du régime critique une largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2} = 1,02$ MHz associée à une valeur de facteur de qualité global $Q = 1,89 \times 10^8$. Par la suite nous déterminons $2Q = Q_0 = Q_e = 3,78 \times 10^8$. La finesse vaut alors :

$$\mathcal{F} = \frac{\text{ISL}}{2\delta_{1/2}} = \frac{c}{2\delta_{1/2} n L} = 80,6 \tag{2.11}$$

avec $n = 1,46$ et $L = 2,5$ m.

À partir de cette mesure nous déterminons également le coefficient de couplage en intensité :

$$\lvert\kappa\rvert^2 = \frac{\pi}{\mathcal{F}} = 3,9 \pm 0,6 \ \% \tag{2.12}$$

2.3.3.2 En régime dynamique

Le signal de *ringdown* est comparé au modèle analytique développé précédemment dans la section 2.2 par la méthode des moindres carrés :

$$\sigma^2\left(\tau_0, \tau_e, V_s\right) = \sum_{i=1}^{N} [T_{mes,i} - T_{theo,i}\left(\tau_0, \tau_e, V_s\right)]^2, \tag{2.13}$$

où N est le nombre de points expérimentaux de la trace temporelle. Les transitoires expérimentaux et théoriques sont respectivement $T_{mes,i}$ et $T_{theo,i}$. Nous utilisons un programme Matlab afin de minimiser la valeur de σ^2 en ajustant les différents paramètres τ_0, τ_e et $\tilde{V}_s$. L'ajustement du transitoire correspondant au régime de couplage critique [Fig. 2.13(b)] donne $\tau_0 = 677$ ns et $\tau_e = 616$ ns. Le facteur de qualité global résultant est déterminé à partir de l'équation $Q^{-1} = Q_0^{-1} + Q_e^{-1}$. Des mesures des facteurs-Q intrinsèque ($Q_0 = 4,1 \times 10^8$) et extrinsèque ($Q_e = 3,7 \times 10^8$) nous déduisons le facteur-Q global $Q = 1,9 \times 10^8$.
La vitesse de balayage est également un des paramètres de sortie du modèle. Pour les mesures en régime dynamique il nous donne : $\tilde{V}_s = 5,2 \pm 0,2$ MHz/μs. La vitesse de balayage mesurée est la vitesse instantanée lorsque la raie du laser sonde traverse une résonance de la cavité. Cette valeur est obtenue par l'ajustement des périodes des oscillations (cf. p. 29). Pour une bonne superposition du transitoire, il n'existe qu'un seul jeu de paramètres τ_0, τ_e et $\tilde{V}_s$. Connaissant la vitesse de balayage rapide $\tilde{V}_s$, nous mesurons expérimentalement l'ISL de la cavité et nous pouvons ainsi comparer les temps de parcours théorique et expérimental :

$$\tau_{L_{theo}} = \frac{nL}{c} = 12,16 \text{ ns} \approx \tau_L = \frac{1}{ISL} = 13,3 \pm 0,5 \text{ ns}. \tag{2.14}$$

Cet écart entre les valeurs théorique et expérimentale de τ_L trouve deux origines. (i) La mesure du périmètre de l'anneau ne peut être réalisée avec précision ($\pm$ 10 cm). (ii) Nous supposons que l'indice de groupe dans les fibres monomode et dopée est le même ce qui n'est pas forcément le cas.
À partir de cette mesure de τ_L nous déduisons le coefficient de couplage en intensité $|\kappa|^2$:

$$|\kappa|^2 = \frac{2\tau_L}{\tau_e} = 4,3 \pm 0,5 \ \% \tag{2.15}$$

en bon accord avec la valeur de 5% relevée sur le coupleur.
Le traitement numérique est ensuite appliqué de la même manière au cas du sur- et sous-couplage. Les résultats obtenus par la méthode de CRDM sont reportés dans le tableau 2.2.

2.3.4 Commentaires

Nous remarquons le bon ajustement des acquisitions expérimentales en régime dynamique avec le modèle. En balayage lent, le modèle est superposé aux acquisitions expérimentales en utilisant les valeurs des temps caractéristiques obtenus en balayage rapide

TABLE 2.2 – Résultats obtenus par la méthode de CRDM en couplage critique, sous-couplage et sur-couplage.

	Q_{global}	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	τ_L [ns]	$\lvert\kappa\rvert^2$ [%]
Sous-couplé	$1,3 \times 10^8$	347	578	$13,3 \pm 0,5$	$4,2 \pm 0,5$
Critique	$1,9 \times 10^8$	677	616	$13,3 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,5$
Sur-couplé	$2,4 \times 10^8$	1305	562	$13,3 \pm 0,5$	$4,3 \pm 0,5$

[Tab. 2.1].
Comme prévu théoriquement, nous avons $\tau_0 \approx \tau_e$ dans le cas de la méthode CRDM en couplage critique. Ces valeurs sont en accord avec le facteur de qualité mesuré en balayage lent.
Le tableau 2.2 présente les résultats obtenus par la méthode hybride spectrale/temporelle pour les trois régimes de couplage. Dans le protocole de mesure, la valeur du couplage reste constante pour les trois régimes étudiés. La lecture simultanée de τ_e dans les trois cas confirme la stabilité du couplage. Le coefficient de couplage indiqué par le coupleur variable est d'environ 5 %. Expérimentalement, nous mesurons des valeurs très proches en balayage lent et rapide : $4,3 \pm 0,5$ % et $3,9 \pm 0,5$ % respectivement.
Pour passer d'un régime à l'autre, nous avons fait varier la valeur de τ_0 par l'intermédiaire du pompage. L'ajustement des transitoires par le modèle du CRDM corrobore l'évolution du paramètre τ_0 en fonction du régime de couplage étudié. En effet, nous avons un τ_0 plus grand en régime de sur-couplage (pompage fort) et un τ_0 plus faible en sous-couplage (pompage faible) [Tab. 2.2].

Remarques et conclusion

La validation expérimentale de la méthode hybride spectrale/temporelle montre la capacité de la méthode à décrire complètement les caractéristiques linéaires d'un résonateur à fort facteur de qualité contrairement à la méthode classique de balayage spectrale qui présente de sérieuses limitations.
En effet, en balayage lent (régime quasi-stationnaire), nous considérons que le balayage est infiniment lent par rapport au temps de vie global du résonateur. Dans la majorité des cas, cette approximation est vérifiée. Cependant, lorsque le résonateur présente un facteur de qualité supérieur à 10^8, le signal de transmission présente des oscillations sur les flancs de la Lorentzienne et nécessite alors la prise en compte des effets dynamiques. La caractérisation par la méthode de scan de résonateurs de facteur de qualité avoisinant les 10^8 nécessite l'utilisation d'un laser de sonde très fin spectralement. Typiquement la largeur de la raie du laser doit être au moins 10 fois plus fine que la largeur de la résonance étudiée.

La forme analytique associée à la méthode hybride spectrale/temporelle ne prend pas en compte la largeur du laser de sonde (150 kHz), pour autant l'ajustement avec les courbes expérimentales est satisfaisant. J. Morville *et al.* [75] ont remarqué que cette méthode tolère des largeurs de sonde 100 fois plus grande que celle de la résonance étudiée.

2.4 Identification du régime de couplage

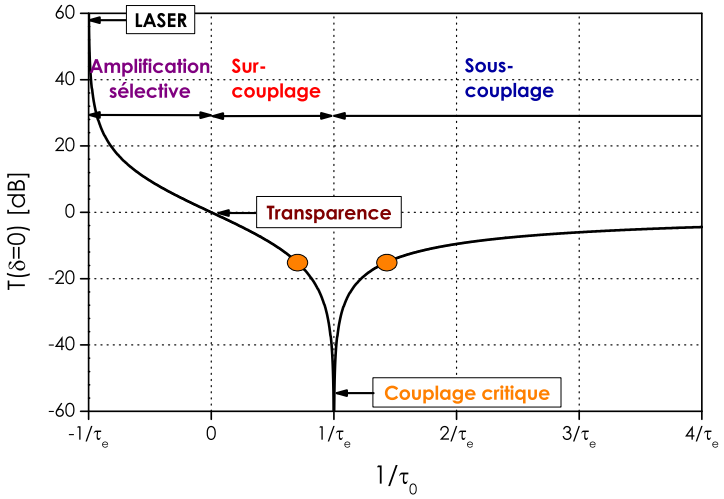


FIGURE 2.14 – Présentation des régimes de couplage étudiés dans le cadre de la détermination entre régimes sous- et sur-couplé.

Dans le paragraphe 2.2 page 31, nous avons vu que la transmission en balayage lent pouvait présenter la même réponse spectrale pour deux régimes de couplage différents. En l'occurrence cette situation apparaît entre les cas de sous-couplage et de sur-couplage. Nous avons représenté sur la figure 2.14 les deux points de fonctionnement d'un résonateur que nous étudierons l'un après l'autre. Nous démontrons que la méthode hybride spectrale/temporelle permet de lever l'indétermination sur le régime de couplage.

La figure 2.15 présente les mesures obtenues pour un même résonateur dans des régimes de couplage différents. Pour réaliser ces cas de figure les valeurs de τ_0 et τ_e sont inversées en ajustant de manière adéquate les taux de pompage et les coefficients de couplage. Ainsi, en régime de sous-couplage [Fig. 2.15(a)] la puissance de pompe est de 4,5 mW pour un coefficient de couplage $|\kappa|^2 \approx 5\%$ tandis qu'en régime de sur-couplage [Fig. 2.15(b)] la puissance est de 7 mW pour un coefficient de couplage $|\kappa|^2 \approx 10\%$. La puissance de la sonde en entrée du résonateur est $P_0 = 1,5$ mW.

En utilisant la méthode de scan, le résonateur présente une réponse stationnaire identique dans les deux cas étudiés [Fig. 2.15, colonne de droite]. Par contre, par la méthode hybride spectrale/temporelle nous obtenons un transitoire temporel particulier pour chaque

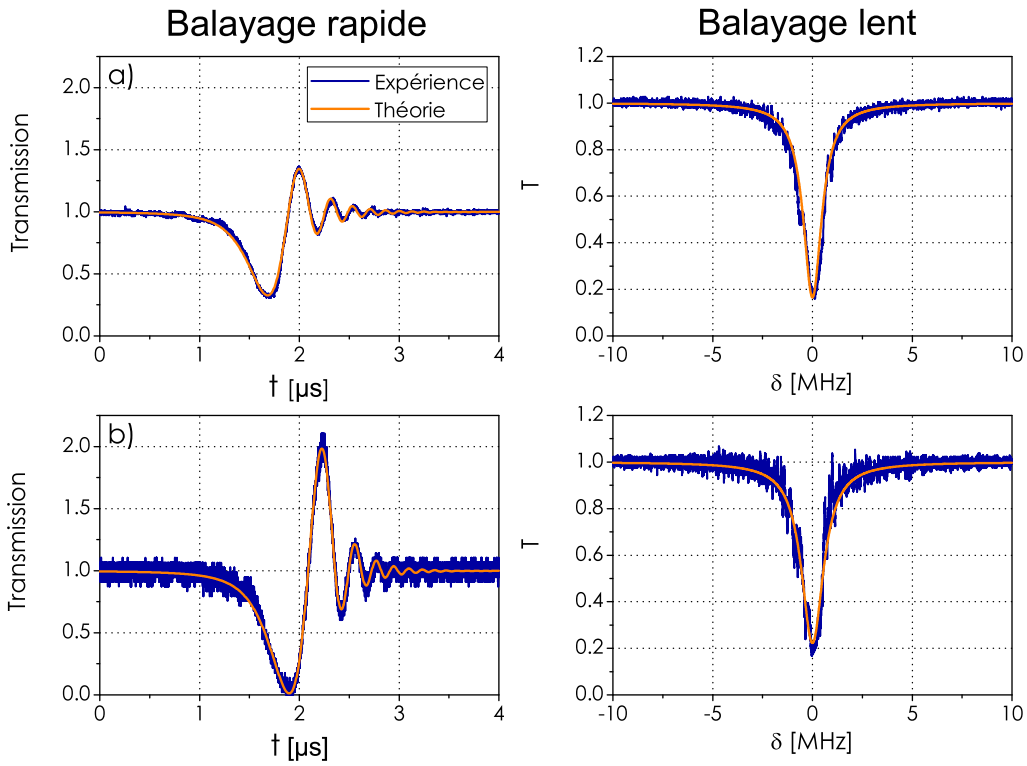


FIGURE 2.15 – Résultats expérimentaux en balayage lent et rapide en a) sous-couplage ($P_{pompe} = 4,5$ mW) et b) sur-couplage ($P_{pompe} = 7$ mW). Le modèle théorique est ajusté au transitoire en balayage rapide. Les résultats de mesure sont reportés dans la table 2.3.

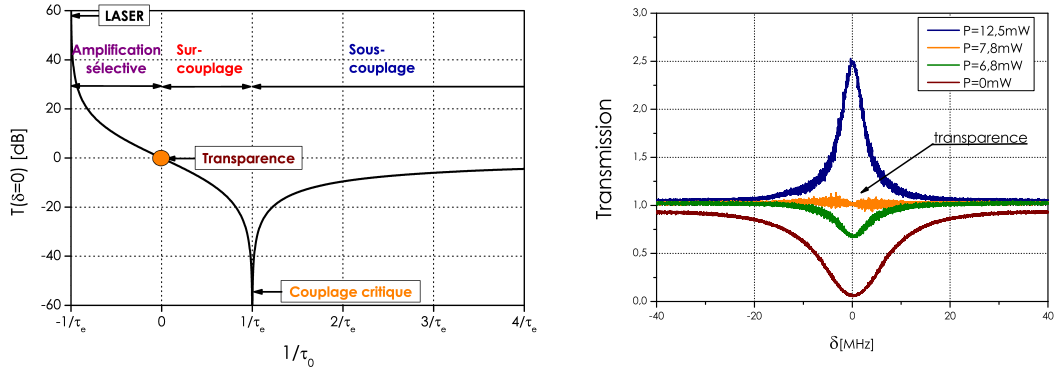
régime. En superposant le modèle théorique aux transitoires expérimentaux par la méthode des moindres carrés, nous obtenons les valeurs des temps caractéristiques dans chacun des cas. Les courbes bleues correspondent aux mesures tandis que les courbes orange sont les résultats de l'application du protocole de traitement.

Le tableau 2.3 rassemble les mesures des temps caractéristiques obtenues à partir de la méthode hybride spectrale/temporelle. Alors que la méthode de balayage lent nous donne une largeur à mi-hauteur $2\delta_{1/2}$ sensiblement identique dans les deux cas, la lecture des résultats obtenus par la méthode de CRDM, permet de déterminer sans équivoque les régimes de couplage du résonateur.

Cette propriété de la méthode hybride spectrale/temporelle est très intéressante, lorsque nous étudions des résonateurs où le coefficient de couplage ne peut pas être expérimentalement modifié.

TABLE 2.3 – Mesures des temps caractéristiques obtenues par la méthode hybride spectrale/temporelle pour un résonateur en régime de sous-couplage puis de sur-couplage.

	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	τ [ns]	Q_{global}
Sous-couplé	404	958	284	$1,72 \times 10^8$
Sur-couplé	895	321	236	$1,43 \times 10^8$



(a) (b)

FIGURE 2.16 – (a) Présentation du régime de couplage étudié à savoir le régime de transparence. (b) Mesures expérimentales de la transmission d'un anneau pour différentes puissances du laser de pompe.

2.5 Le régime de transparence

Le régime de transparence dans un résonateur est associé traditionnellement à l'interféromètre de Gires-Tournois [50]. Proposé pour la première fois en 1964, cette déclinaison de l'interféromètre de Fabry-Pérot est caractérisée par un milieu sans perte intrinsèque ($1/\tau_0 \rightarrow 0^+$) lui confèrant une transmission unitaire. Ce régime unique sépare les deux régimes de sur-couplage et d'amplification sélective [Fig. 2.16(a)]. Ce type de résonateur est assimilable à un filtre purement déphasant APF (*All Pass Filter*) [76,77]. La figure 2.16(b) présente la superposition de spectres obtenus par la méthode de scan pour un τ_e fixé et un τ_0 ajustable. L'ensemble des régimes linéaires sont représentés et en particulier le régime de transparence pour lequel la transmission est unitaire sur toute la bande spectrale balayée. Une mesure en régime stationnaire ne donne accès à aucune information sur le résonateur. La fonction de transfert du résonateur [Equ. (1.33)], se réduit dans ce cas à :

$$H(\delta) = \frac{1 - 2j\pi\delta\tau_e}{1 + 2j\pi\delta\tau_e}, \tag{2.16}$$

que l'on peut dissocier en module et phase :

$$\begin{cases} T(\delta) & = 1, \\ \phi(\delta) & = -2\arctan(2\pi\delta\tau_e). \end{cases} \tag{2.17}$$

Le retard de groupe prend alors la forme $\tau_g = 2\tau_e$.

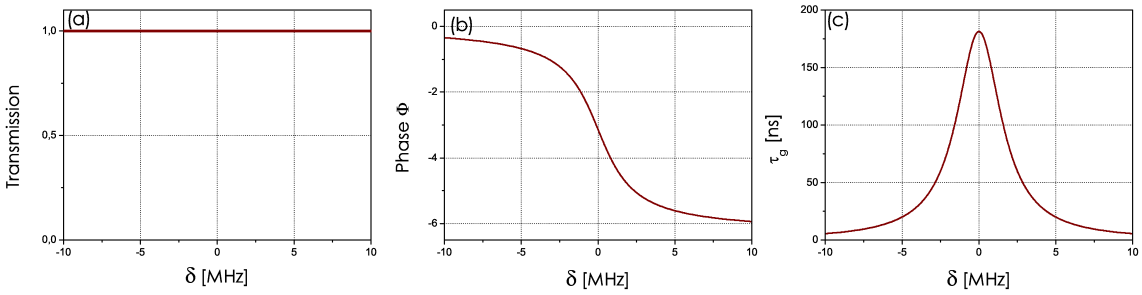


FIGURE 2.17 – Transmission et propriétés dispersives d'un résonateur de 1 m de périmètre en régime de transparence. La valeur du couplage est telle que $\tau_e = 94$ ns, $1/\tau_0 \rightarrow 0^+$. (a) correspond à la transmission du résonateur en régime stationnaire, (b) correspond à la phase induite par le système, (c) correspond au retard de groupe engendré par le résonateur.

La figure 2.17 présente les simulations obtenues pour un résonateur en régime de transparence. La transmission en régime stationnaire présente une réponse plate ne permettant pas de distinguer la position de la résonance. La phase quant à elle présente une variation abrupte à résonance [Fig. 2.17(b)], menant à un retard de groupe τ_g positif correspondant à un régime de lumière lente [Fig. 2.17(c)].
La simulation du régime de transparence pour différentes vitesses de balayage est représentée sur la figure 2.18. En balayage lent, la transmission présente une légère inflexion à résonance liée au facteur de surtension intrinsèque Q_0 élevé. C'est ce que nous mesurons expérimentalement par la méthode de scan [Fig. 2.16(b) et Fig.2.19(a)]. Lorsque la vitesse de balayage augmente, nous observons les oscillations caractéristiques du transitoire temporel nous permettant de caractériser entièrement le résonateur.

Dispositif expérimental

Le montage expérimental [Fig. 2.11] est utilisé dans les mêmes conditions expérimentales que précédemment pour les vitesses de balayage lente ($\tilde{V}_s = 0,4$ MHz/μs), rapide ($\tilde{V}_s = 5$ MHz/μs) et pour la puissance d'entrée ($P_0 = 1{,}5$ mW). La position du coupleur variable reste identique au cours de l'expérience. La seule valeur modifiée est le temps de vie intrinsèque τ_0 que l'on cherche à faire tendre vers l'infini en ajustant le taux de pompage.
Pour ce faire nous basculons le résonateur de son couplage critique vers le régime de transparence et cela en trois étapes :

1. $\tau_0 \approx \tau_e$, le résonateur est légèrement sous-couplé [Fig. 2.19(a)](courbe bleue), la puissance de pompe vaut $P_{\text{pompe}} = 3,3$ mW,

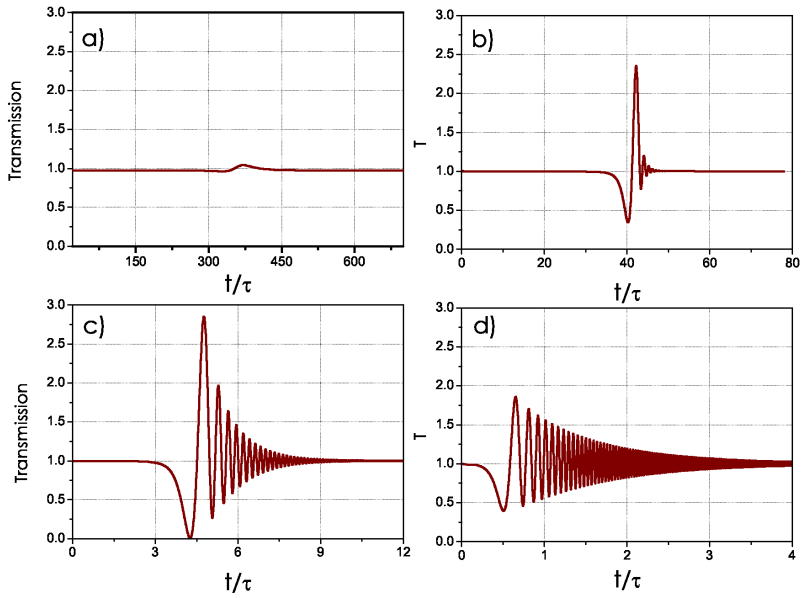


FIGURE 2.18 – Transmission d'un résonateur en régime de transparence pour différentes vitesses de balayage. a) $\tilde{V}_s = 0,0075\ \tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\ \tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = 3\ \tilde{V}_0$, d) $\tilde{V}_s = 30\ \tilde{V}_0$ avec $\tilde{V}_0 = 2/(\pi\tau^2)$. L'axe des abscisses est normalisé par rapport au temps de vie global τ.

2. $\tau_0 > \tau_e$, le résonateur est sur-couplé, $\mathrm{P_{pompe}} = 5,5$ mW (courbe rouge),
3. $\tau_0 \gg \tau_e$, le résonateur est transparent et dans ce cas $1/\tau_0 \to 0^+$. La courbe marron présente une légère inflexion, due au facteur de qualité intrinsèque très grand. ($\mathrm{P_{pompe}} = 8$ mW).

À chaque mesure en balayage lent est associée la mesure en balayage rapide. Les graphiques (a), (b) et (c) de la figure 2.19 présentent respectivement les cas de la transparence, du sur-couplage et du sous-couplage.

Résultats

Les valeurs obtenues sont cohérentes avec les prévisions, nous obtenons un facteur de qualité $Q_0 = 4,9 \times 10^{14}$, pour lequel $1/\tau_0 \to 0^+$. Le facteur de qualité externe est de $Q_e = 2,3 \times 10^8$ pour les trois régimes étudiés. Le facteur de qualité global est donc limité par la valeur du coupleur, nous avons $Q \approx Q_e$. Le temps de groupe τ_g mesuré est alors de 758 ns. Malgré un facteur de qualité intrinsèque dépassant les 10^{14}, l'ajustement avec le modèle est toujours bon. Les autres oscillations se superposent parfaitement au modèle. Les valeurs de τ_e obtenues par la CRDM [Tab. 2.4] montrent que la valeur du coupleur reste relativement constante (variation de 4%) durant les mesures.

Selon nos observations, la source principale de variation de τ_e provient d'un phénomène physique intrinsèque au coupleur. En effet, une augmentation de la puissance de pompe [2], entraîne une élévation de l'énergie interne du résonateur provoquant une dilatation des fibres

2. Ce qui se traduit par un facteur de qualité Q_0 relativement élevé.

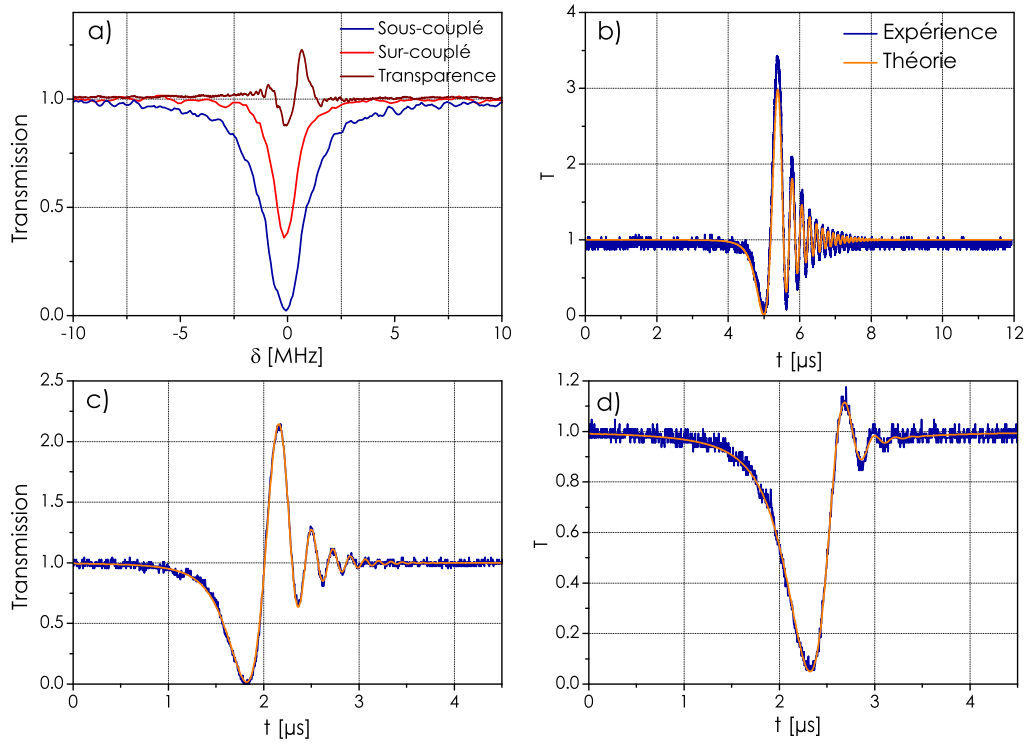


FIGURE 2.19 – **a**) Résultats en balayage lent après filtrage du bruit. La courbe marron correspond au régime de transparence. Les figures b), c) et d) sont des résultats en balayage rapide. **b)** régime de transparence $\tau_0 = 818$ ms et $\tau_e = 378$ ns, **c)** régime sur-couplage $\tau_0 = 1,181$ μs et $\tau_e = 342$ ns, **d)** régime de sous-couplage $\tau_0 = 266$ ns et $\tau_e = 342$ ns.

à l'intérieur du coupleur. Par conséquent, une variation dans la mesure de τ_e. Les résultats de la figure 2.19 corroborent cette proposition. En régime de transparence, en (b), la valeur du couplage vaut $\tau_e = 378$ ns. Lorsque l'on diminue cette puissance de pompe, c'est à dire les cas (c) et (d), la valeur mesurée du couplage est identique $\tau_e = 342$ ns, nous sommes dans un régime de fonctionnement normal du coupleur.

Par cette illustration de la méthode expérimentale appliquée au cas de l'interféromètre de Gire-Tournois, nous montrons que la méthode de CRDM permet de faire des mesures de très hauts facteurs de qualité intrinsèques. Cela montre que le domaine de validité de la méthode peut être étendue aux résonateurs transparents. Cette mesure met en avant un des atouts de la méthode hybride spectrale/temporelle à savoir **la caractérisation d'un résonateur transparent par un simple balayage fréquentiel**.

TABLE 2.4 – Récapitulatif des résultats obtenus pour le régime de transparence.

	τ_0	τ_e
b) transparence	818 ms	378 ns
c) sur-couplage	1,18 μs	342 ns
d) sous-couplage	266 ns	342 ns

2.6 Le régime d'amplification sélective

Pour terminer la revue des régimes de couplage linéaires que peut présenter un résonateur, étudions le régime d'amplification sélective. Situé entre le régime de transparence et le régime laser [Fig. 2.20], il est caractérisé par un gain $T(0) > 1$ ($\tau_0 < 0$) et par la relation $\tau_0 < -\tau_e$. Les pertes du coupleur ne sont alors pas compensées, nous évitons ainsi l'apparition des oscillations LASER.

Nous allons constater qu'une fois de plus la méthode de CRDM permet de caractériser

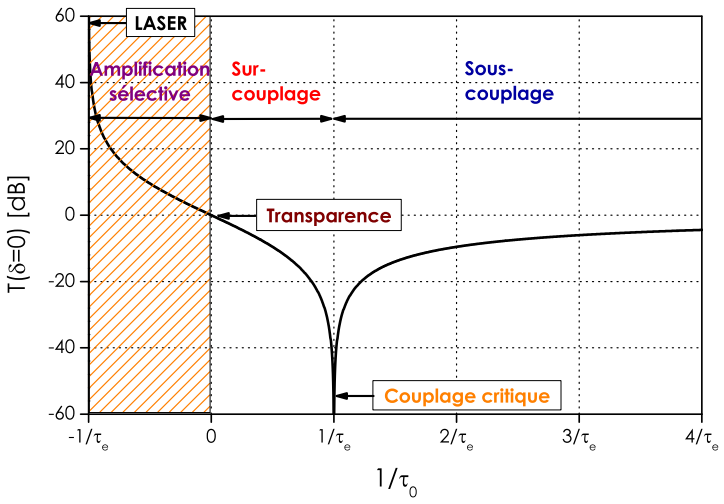


FIGURE 2.20 – Présentation du régime de couplage étudié à savoir le régime d'amplification sélective.

entièrement le résonateur en termes de τ_0, τ_e et $\tilde{V}_s$. Nous comparerons les mesures à celles obtenues par la méthode de scan.

Nous allons dans un premier temps montrer que la méthode de CRDM permet de faire la différence entre un résonateur en régime passif et un résonateur en régime d'amplification sélective [71, 78, 79]. Dans un deuxième temps, différents cas d'amplifications sélectives seront étudiés, puis nous discuterons des limites du balayage lent dans ce régime de couplage. Tout d'abord, nous allons illustrer notre propos à l'aide de simulations numériques.

La figure 2.21 présente l'évolution de la transmission en régime dynamique pour différentes vitesses de balayage. Pour une vitesse de balayage lente devant le temps de vie des photons, la transmission présente un profil Lorentzien [Equ. (1.34)]. Pour le cas simulé, $\tau_0 = -2,5\tau_e$, l'équation (1.35) :

$$T(0) = \left(\frac{\tau_e - \tau_0}{\tau_e + \tau_0}\right)^2,$$

prévoit un gain de 5,4 ce qui est effectivement observé en régime quasi-stationnaire sur le graphe (a). Pour une vitesse de balayage plus élevée, le phénomène de "ringing" apparaît et le gain apparent diminue. Pour une vitesse $\tilde{V}_s = 30\ \tilde{V}_0$ le gain apparent n'est plus que de $2,9$, alors que nous avons conservé $\tau_0 = -2,5\tau_e$. Autrement dit, expérimentalement nous ne mesurerions pas directement le gain mais un gain apparent. Le traitement numérique de la réponse dynamique nous donne les paramètres τ_0 et τ_e qui, une fois injectés dans l'expression (1.34) :

$$T(\delta) = |\mathcal{H}(\delta)|^2 = \frac{(1/\tau_e - 1/\tau_0)^2 + 4\pi^2\delta^2}{(1/\tau_e + 1/\tau_0)^2 + 4\pi^2\delta^2},$$

permet de reconstituer la réponse du système en régime stationnaire.

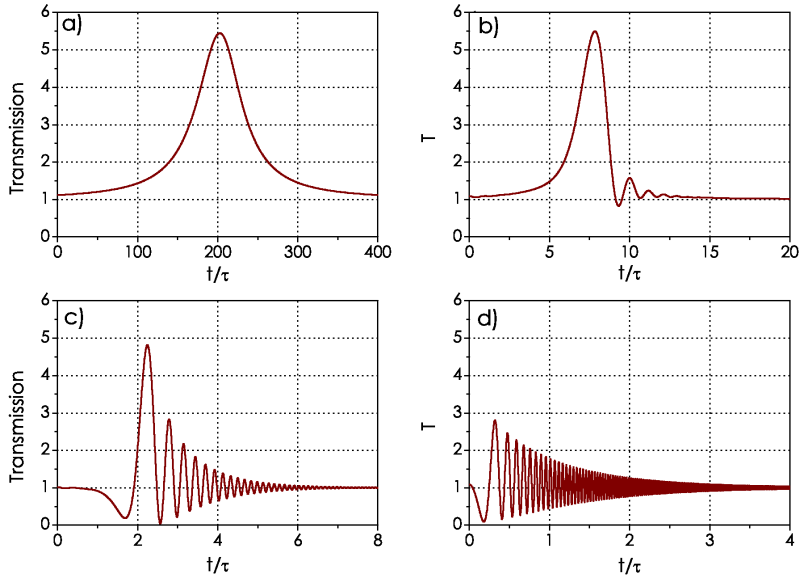


FIGURE 2.21 – Transmission en régime d'amplification pour différentes vitesses de balayage dans le cas $\tau_0 = -2,5\tau_e$. a) $\tilde{V}_s = 0,0075\ \tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\ \tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = 3\ \tilde{V}_0$, d) $\tilde{V}_s = 30\ \tilde{V}_0$ avec $\tilde{V}_0 = 2/(\pi\tau^2)$. L'axe des abscisses est normalisé par rapport au temps de vie global τ.

2.6.1 Test préliminaire

Nous utilisons toujours le montage de la figure 2.11 avec une puissance du signal de sonde P_0 de 0,8 mW. Pour établir la validité de la méthode hybride spectrale/temporelle en régime d'amplification sélective nous procédons de la manière suivante. Le système modèle à base de fibre est placé en régime de sous-couplage ($P_{pompe} = 5,7$ mW). Ensuite, tout en

conservant la valeur du couplage fixe, on augmente la puissance de pompe jusqu'à 8 mW pour inverser le signe de τ_0 et obtenir l'amplification sélective. Les mesures et les ajustements

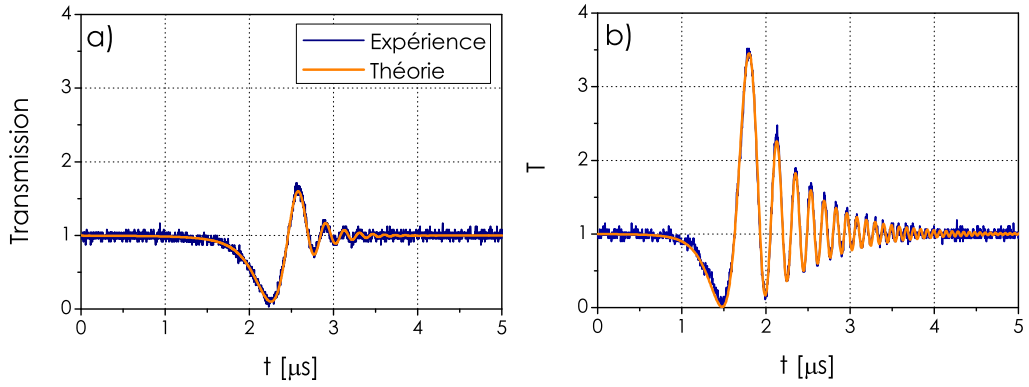


FIGURE 2.22 – Courbes expérimentales associées à leur ajustement. a) Sous-couplage ($P_{pompe} = 5,7$ mW) $\tau_0 = 530$ ns et $\tau_e = 594$ ns . b) Amplification sélective ($P_{pompe} = 8$ mW) $\tau_0 = -2686$ ns et $\tau_e = 510$ ns.

en régime de sous-couplage (a) ($\tau_0 = 530$ ns et $\tau_e = 594$ ns) et en amplification sélective (b) ($\tau_0 = -2686$ ns et $\tau_e = 510$ ns) sont présentées sur la figure 2.22.
Comme attendu, les valeurs de τ_e obtenues dans les deux cas sont sensiblement identiques ($\tau_e = 594$ ns ≈ 510 ns). Nous avons $\tau_0 < \tau_e$ dans le régime de sous-couplage et $\tau_0 < -\tau_e$ dans le régime d'amplification sélective. On se trouve alors dans le cas où le résonateur ne compense pas uniquement les pertes de la cavité mais où il amplifie le signal intracavité de telle sorte que le signal d'entrée P_0 soit amplifié. Dans le cas présent nous observons un gain de 3,4 dB.

2.6.2 Mesure de l'amplification sélective

Dans un nouveau jeu de mesures, nous allons vérifier l'évolution du régime de couplage en fonction du pompage pour une valeur de couplage fixée. Les études théoriques [80, p. 497] [81] prévoient pour une augmentation du gain $T(0)$ un affinement de la largeur de la résonance. Vérifions expérimentalement ces hypothèses.
La puissance d'entrée P_0 est de 1,5 mW. On réalise l'acquisition des traces expérimentales en balayage lent et rapide pour des puissances de pompe $P_{pompe} = 11$ mW [Fig. 2.23(a)] et $P_{pompe} = 14,6$ mW [Fig. 2.23(b)]. Les valeurs obtenues par ajustement sont rassemblées dans le tableau 2.5. Entre les courbes (a) et (b), en balayage rapide, on observe pour une augmentation de la puissance de pompe, une diminution de la valeur de $|\tau_0|$ et un gain $T(0)$ qui augmente. La largeur de raie diminue pour passer de 1,3 MHz à 1 MHz et le retard de

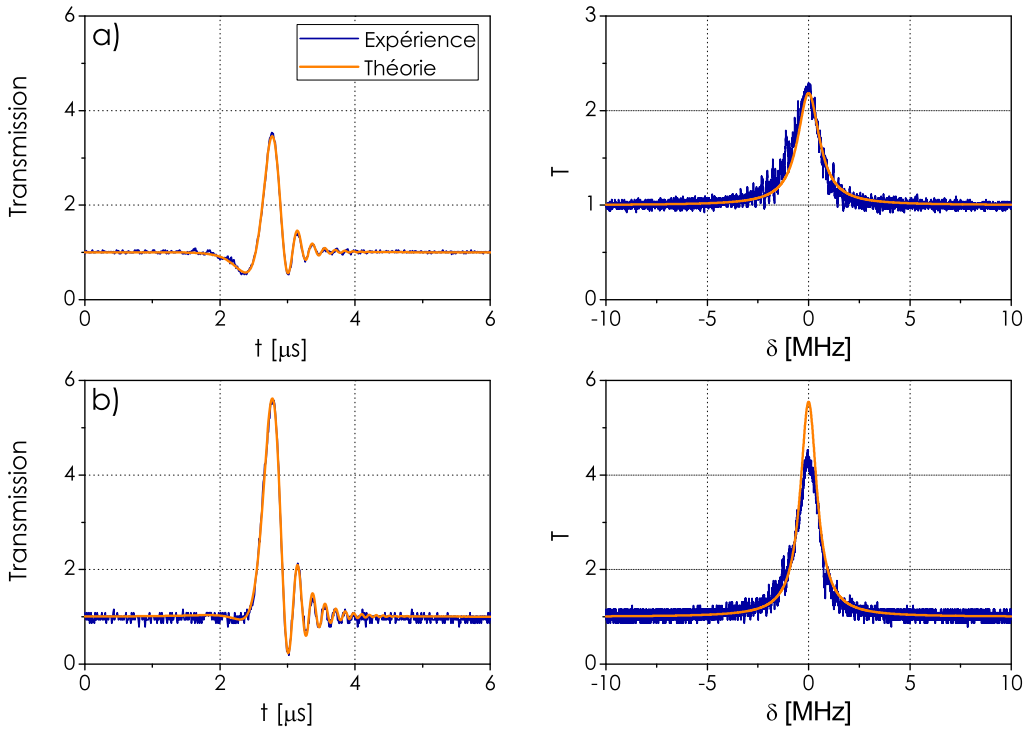


FIGURE 2.23 – Courbes expérimentales associées à leur ajustement pour deux cas d'amplification sélective. a) $P_{pompe} = 11$ mW, l'ajustement donne $\tau_0 = -1017$ ns et $\tau_e = 196$ ns. b) $P_{pompe} = 14,6$ mW, l'ajustement donne $\tau_0 = -470$ ns et $\tau_e = 190$ ns.

groupe τ_g augmente de 407 ns à 454 ns. Pour un temps de vie externe τ_e fixé, plus le temps de vie des photons intracavité va être long (pompage fort), plus le retard de groupe sera grand.

La comparaison des courbes de la figure 2.23 en balayage lent est réalisée à partir des caractéristiques déterminées en balayage rapide. Le désaccord entre le modèle théorique et la mesure expérimentale du régime stationnaire [Fig. 2.23(b)] peut être attribué aux fluctuations temporelles de la pompe entre les deux types de mesures.

2.6.2.1 Mesure de grand gain

La figure 2.24 présente un résultat de mesure pour une valeur de couplage différente ($\tau_e = 287$ ns), une puissance de pompe de 22,1 mW ($\tau_0 = -476$ ns). Le gain apparent est de 9 dB ce qui équivaut à 12,1 dB en régime stationnaire.

La mesure par la méthode de scan n'est pas associée à la mesure de CRDM pour la simple raison que nous ne pouvons pas réaliser cette mesure. En effet, les mesures en balayage lent ne peuvent plus être assimilées au régime stationnaire. Nous évoquons différentes causes à

TABLE 2.5 – Résultats des ajustements relatifs aux figures 2.23 et 2.24 pour différentes configurations d'amplification sélective.

	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	τ_g [ns]	T(0) [dB]	$2\delta_{1/2}$ [MHz]	Q
Figure 2.23(a)	- 1017	196	407	3,4	1,3	$1,5 \times 10^8$
Figure 2.23(b)	- 470	190	454	7,4	1	2×10^8
Figure 2.24	- 476	287	900	12,2	0,440	$4,5 \times 10^8$

cela.

D'une part la vitesse de scan de 0,4 MHz/μs ne peut plus être considérée comme "lente"

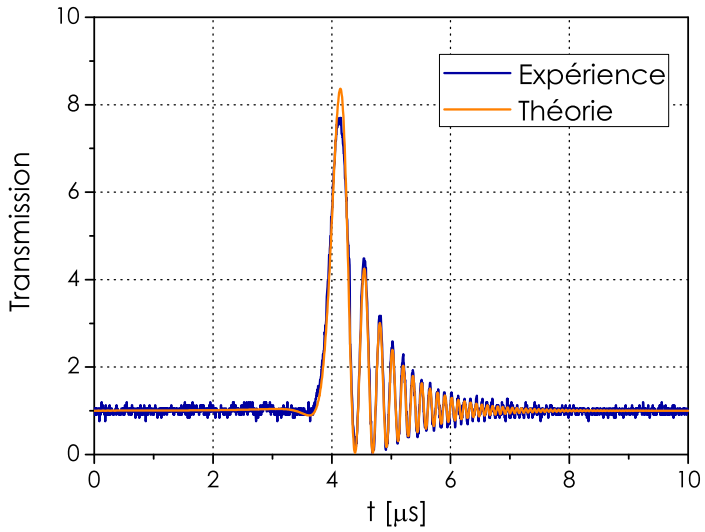


FIGURE 2.24 – Mesure en balayage rapide d'un résonateur en régime d'amplification sélective. Le gain est de 12,1 dB. Les paramètres obtenues par la superposition sont : $\tau_0 = -476$ ns, $\tau_e = 287$ ns et $\tau_g = 900$ ns. La largeur à mi-hauteur en stationnaire est de 440 kHz ce qui correspond à un facteur de qualité de $Q = 4,5 \times 10^8$.

par rapport au temps de vie global [3]. Ceci entraîne une déformation de la Lorentzienne. Il faut dans ce cas prendre en compte les effets dynamiques.

D'autre part, l'énergie introduite dans la cavité est importante et entraîne des effets non-linéaires qui ne peuvent pas être simplement pris en compte par la méthode de scan. Dans le cas de la méthode hybride spectrale/temporelle l'utilisation du balayage rapide permet de limiter la quantité d'énergie introduite dans la cavité. Dans ce cas de figure nous sommes donc moins sensibles aux effets non-linéaires.

Enfin, la superposition du modèle nous donne dans le cas de la figure 2.24 une largeur à

3. Voir la discussion chapitre 2.1 page 21

mi-hauteur de la résonance de 440 kHz ce qui est du même ordre de grandeur que la largeur de raie du laser de sonde.

2.6.2.2 Contexte d'utilisation

Un résonateur en régime d'amplification peut être assimilé à un filtre sélectif ($2\delta_{1/2} = 440$ kHz) et amplificateur ($T(0) = 12,1$ dB). Un tel montage correspond à une ligne à retard amplificatrice. En effet un signal monochromatique peut dans ce cas être retardé d'environ 1 μs. Une telle fonction optique peut être utile pour améliorer la sensibilité d'un interféromètre [82, 83], ou encore servir de boucle à contre-réaction dans un oscillateur opto-électronique tout en limitant la part de la réamplification électrique. Nous détaillons ci-dessous une des configurations envisagées pour la réalisation d'un oscillateur opto-électronique.

La figure 2.25 présente le schéma de principe d'un oscillateur opto-électronique en simple

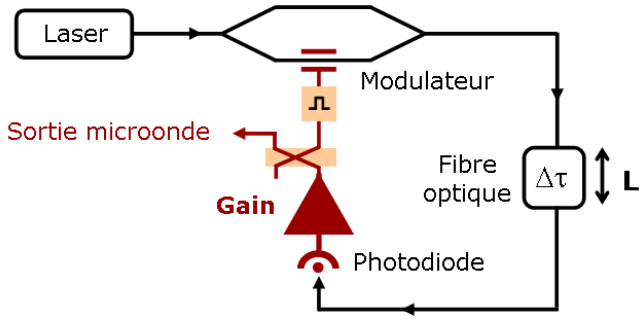


FIGURE 2.25 – Architecture d'un oscillateur opto-électronique.

boucle. Cette architecture a été proposée dès 1994 par l'équipe de L. Maleki (JPL -Caltech) [84, 85] pour obtenir des oscillateurs micro-ondes aux qualités spectrales meilleures que celles des oscillateurs à quartz déjà existants. Le principe de fonctionnement est semblable à celui d'un oscillateur. Le signal micro-onde est inscrit sur une porteuse optique à l'aide d'un modulateur externe associé à un laser. La boucle de contre-réaction est assurée par une bobine de fibre optique. Une photodiode permet de récupérer le signal hyperfréquence qui est ensuite amplifié puis réinjecté dans la ligne à retard optique. La pureté spectrale du signal généré dépend directement de la longueur de la ligne à retard. La fibre optique est avantageuse par rapport à une ligne à retard électrique du fait de sa très faible atténuation et des longueurs très importantes de retard (≈ 1 km $\equiv \tau_g = 5$ μs) qu'elle permet. L'objectif du projet ANR O^2E piloté par le laboratoire FEMTO-ST (Université de Franche-Comté) auquel nous avons participé consistait à remplacer la bobine de fibre optique par un microrésonateur permettant un retard équivalent tout en limitant la sensibilité du système complet aux instabilités mécaniques et en permettant une intégration potentielle.

Dans ce contexte, la ligne à retard composée d'une bobine de fibre peut être remplacée par un résonateur de haut facteur de qualité ($Q = 4,5 \times 10^8$) en régime d'amplification sélective.

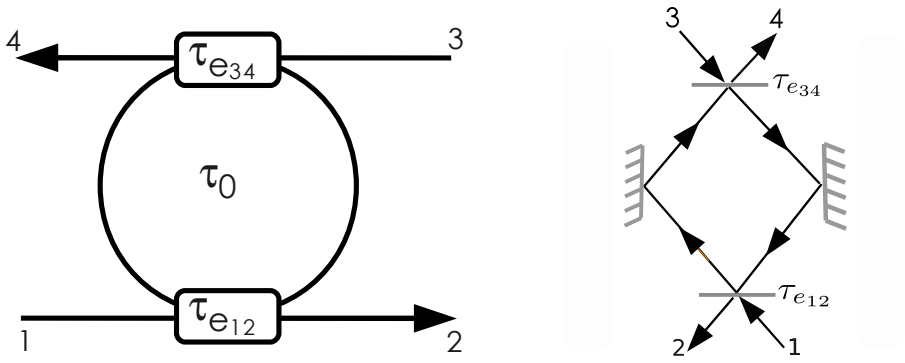
Le facteur de qualité dans le domaine des ondes hyper-fréquences s'écrit alors :

$$Q_{\mathrm{Hf}} = \frac{f}{\nu_0} Q_{\mathrm{opt}} \tag{2.18}$$

où f est la fréquence microonde et ν_0 la fréquence optique. Un résonateur optique de facteur $Q_{\mathrm{opt}} = 10^9$ à 1550 nm placé dans la boucle de contre-réaction conduit à un oscillateur opto-hyper de facteur de qualité $Q_{\mathrm{Hf}} \approx 5 \times 10^4$ à 10 GHz. Ce résultat est équivalent aux meilleures réalisations actuellement obtenues.
La présence de gain ($T(0) = 12,1$ dB) apporté par le système permet de diminuer l'amplification micro-onde (source de bruit).
Dans notre cas, le retard de groupe du résonateur est de $\tau_g \approx 1$ μs ce qui correspond à 200 m de fibre. Des résonateurs de plus grande finesse et de haut facteur de qualité comme les microsphères sont de sérieux candidats pour augmenter ce retard de groupe et ainsi atteindre $\tau_g = 5$ μs correspondant, à notre longueur d'onde de travail (1550 nm), à 1 km de fibre [chapitre 7].

2.7 Applications de la méthode

2.7.1 Résonateur à fort facteur de qualité en configuration *add/drop*



(a) Schéma de l'anneau en configuration *add/drop*.

(b) Représentation équivalente de l'anneau en espace libre.

FIGURE 2.26 – Schéma d'un résonateur en configuration *add/drop*. Son périmètre est de 20 m. Les ports d'entrée/sortie sont reliés par deux coupleurs caractérisés par leurs temps de vie externes $\tau_{e_{12}}$ et $\tau_{e_{34}}$.

Le résonateur étudié est représenté sur la figure 2.26(a). C'est un résonateur en configuration *add/drop* constitué de 2 ports d'entrée/sortie. Il est réalisé en fibres monomodes à 1550 nm d'indice de coeur 1,46. Les ports d'entrée/sortie sont reliés à la cavité par deux coupleurs caractérisés par leurs temps de vie externes. Les deux ports d'entrée sont notés 1 et 3. Pour déterminer les caractéristiques linéaires de ce résonateur, nous devons mesurer τ_0, le temps de vie intrinsèque ainsi que $\tau_{e_{12}}$ et $\tau_{e_{34}}$ les temps de vie externe. Le temps de

vie global est défini de la manière suivante :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{e12}} + \frac{1}{\tau_{e34}} \tag{2.19}$$

La configuration du composant nécessite de décomposer la mesure en deux parties :

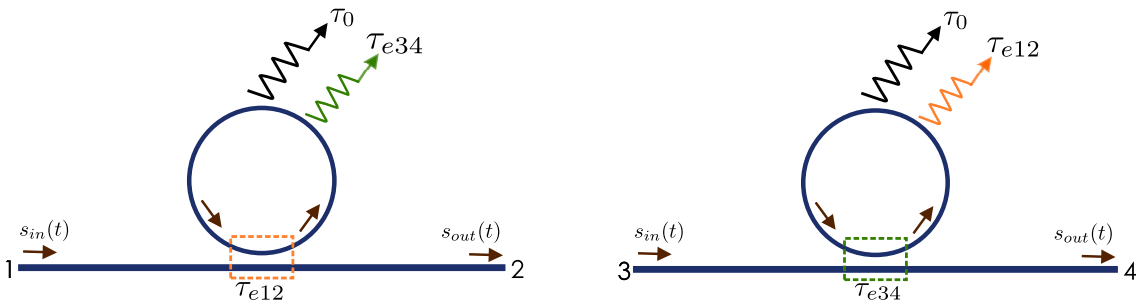


FIGURE 2.27 – Schémas équivalents du résonateur *add/drop* suivant le sens de l'injection du laser de sonde. (a) dans le sens 1 vers 2. (b) dans le sens 3 vers 4.

De 1 vers 2 Le schéma equivalent du résonateur est présenté sur la figure 2.27(a). Pour une mesure par le port d'entrée/sortie 1 $\rightarrow$ 2 nous mesurons $\tau_{e_{12}}$ et τ_0'. Dans ce cas nous avons :

$$\frac{1}{\tau_0'} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{e_{34}}} \tag{2.20}$$

où $\tau_{e_{34}}$ peut être vu comme un terme de fuite.

De 3 vers 4 De même, en utilisant le port d'entrée/sortie 3 $\rightarrow$ 4 [Fig. 2.27(b)], nous obtenons $\tau_{e_{34}}$ et τ_0'' à partir de :

$$\frac{1}{\tau_0''} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{e_{12}}} \tag{2.21}$$

où $\tau_{e_{12}}$ peut être vu comme un terme de fuite.
Des expressions (2.20) et (2.21), nous obtenons un système à deux équations et une inconnue : τ_0. La résolution du système donne deux évaluations de τ_0 et τ ce qui permet également de vérifier la cohérence des paramètres de sortie du modèle.

L'anneau représenté sur la figure 2.26(a) est placé dans le montage utilisé précédemment [Fig. 2.11]. La puissance d'entrée P_0 est de $2,5$ mW. Les courbes expérimentales et leurs ajustements sont réunis sur la figure 2.28. Étant donné que le résonateur est constitué d'une boucle de 20 m de fibre, le temps de vie intracavité est relativement long. On obtient ainsi des régimes transitoires constitués d'un nombre important d'oscillations. Nous avons une très bonne superposition du modèle avec les courbes expérimentales. Un récapitulatif des résultats est présenté dans le tableau 2.6. Nous obtenons deux mesures de τ_0 et par conséquent deux évaluations de la largeur $2\delta_{1/2}$ et du facteur Q_{global}. Les valeurs mesurées de

τ_0 ne présentent qu'une légère variation ($< 10\%$) prenant en compte l'incertitude sur les mesures des temps de vie externes. Nous mesurons un facteur de qualité global d'environ 4,4 $\times 10^9$ soit une largeur à mi-hauteur de la résonance d'environ 43 kHz.

Nous remarquons que la méthode hybride spectrale/temporelle permet de caractériser des

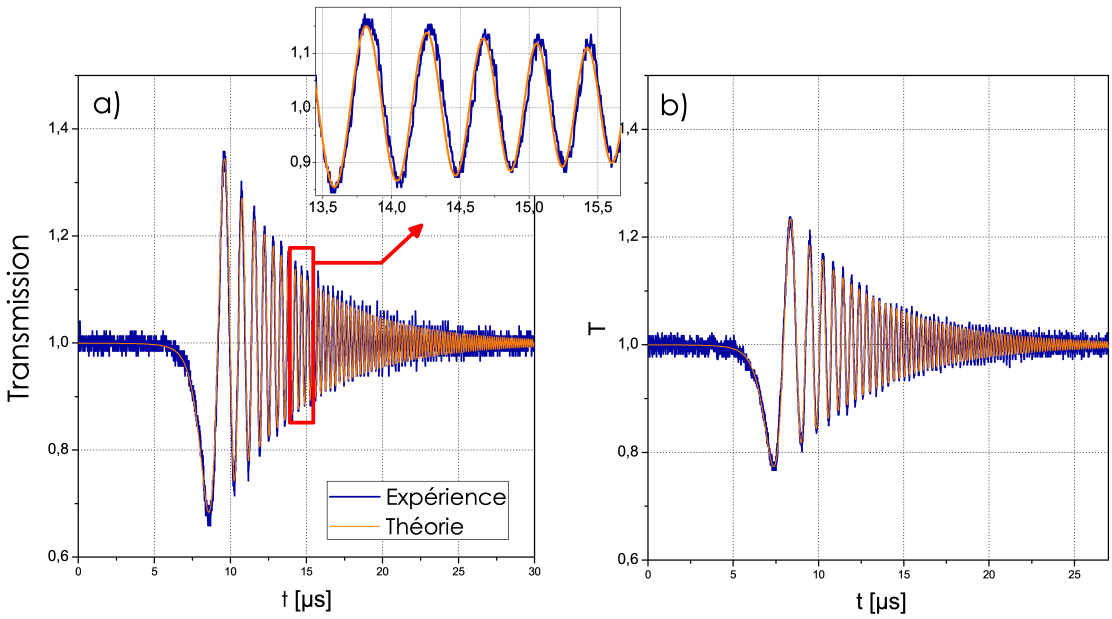


FIGURE 2.28 – Signaux de "ringing" en transmission sur les deux voies d'accès d'un anneau fibré en configuration *add/drop*. a) $1 \rightarrow 2$, b) $3 \rightarrow 4$. Récapitulatif des résultats dans le tableau 2.6.

résonateurs en configuration *add/drop*, en mesurant l'un après l'autre les temps de vie externes des deux coupleurs. Une mesure de scan (avec notre dispositif expérimental) ne peut pas s'appliquer à la caractérisation d'un tel résonateur du fait que : (i) les mesures de CRDM sont dans le cas présent réalisées pour une vitesse $\tilde{V}_s = 0,38 \pm 0,2$ MHz/μs ; (ii) la largeur à mi-hauteur mesurée ($\approx$ 43 kHz) de la résonance est beaucoup plus faible que celle du laser de sonde (150 kHz).

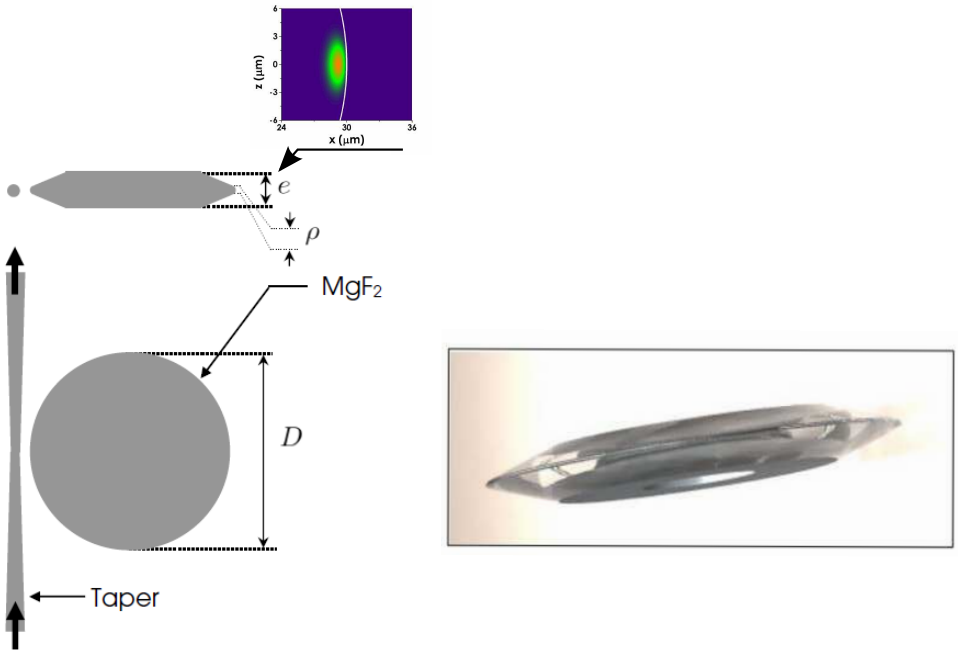
Ce résonateur a été intégré dans un prototype d'oscillateur opto-hyperfréquence au LAAS (Toulouse). Les résultats sont présentés dans la thèse de P.H. Merrer [86]. Ce composant présente un facteur de qualité optique correspondant à la valeur requise ($> 10^9$). Cependant, son ISL étant trop faible (10 MHz) ce résonateur ne réalise pas correctement sa fonction de filtrage. On notera également que ce dispositif ne permet pas de stabiliser suffisamment le signal.

2.7.2 Microrésonateur à modes de galerie

Nous avons également testé notre méthode hybride spectrale/temporelle dans le cas d'un résonateur à modes galerie. Le résonateur [Fig. 2.29] est un disque en MgF_2, fabriqué à Femto-ST (Besançon), de diamètre $D = 5,2$ mm, d'épaisseur $e = 0,7$ mm et d'une partie

TABLE 2.6 – Récapitulatif des mesures effectuées sur l'anneau en configuration *add/drop*.

	τ_0 $[\mu s]$	$\tau_{e_{12}}$ $[\mu s]$	$\tau_{e_{34}}$ $[\mu s]$	Q_{global}	$2\delta_{1/2}$ [kHz]
Ajustement	14,15 | 12,85	15,04	20,80	4,4 | 4,8 $\times 10^9$	43,99 | 40,58



(a) (b)

FIGURE 2.29 – (a) Schéma et dimensions du disque en MgF_2 à modes de galerie. Le diamètre du taper ≈ 3 μm - le diamètre du disque D=5,2 mm, son épaisseur e=0,7 mm et la partie sphérique polie $\rho = 60$ μm. (b) Photographie du disque réalisée au laboratoire FEMTO-ST de Besançon.

sphérique polie de $\rho = 60$ μm. Les modes de galerie sont confinés dans la partie polie du disque [encart de la Fig. 2.29].

Pour obtenir une mesure expérimentale des paramètres du résonateur on applique la méthode hybride spectrale/temporelle précédemment présentée. On remplace dans le schéma de la figure 2.11 le système composé de l'anneau à fibre et du coupleur variable par le disque en MgF_2 couplé à un taper permettant d'injecter le laser de sonde par ondes évanescentes. Le taper est une fibre amincie réalisé en fibre SMF 28 de diamètre minimal de 2 ± 1 μm (cf. description page 137).

Le régime transitoire expérimental et sa superposition au modèle théorique sont présentés sur la figure 2.30. Nous mesurons les caractéristiques : $\tau_0 = 545$ ns, $\tau_e = 4,13$ μs et $\tilde{V}_s = 3,3$ MHz/μs. Notre microrésonateur est donc sous-couplé ($\tau_0 < \tau_e$). À partir des valeurs de τ_0 et τ_e nous déduisons le facteur de qualité intrinsèque $Q_0 = 3,3 \times 10^8$, le facteur

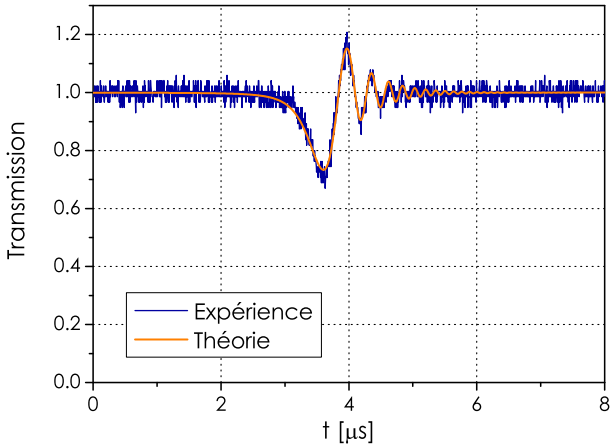


FIGURE 2.30 – Réponse dynamique pour le disque en MgF_2 de la figure 2.29. Le traitement du signal associé donne : $Q_0 = 3,3 \times 10^8$, $Q_e = 2,5 \times 10^9$ et $\tilde{V}_s = 3,3$ MHz/μs.

de qualité externe $Q_e = 2,5 \times 10^9$ et le facteur de qualité global $Q = 2,9 \times 10^8$. En sous-couplage le résonateur est en régime de lumière rapide et $\tau_g(0) = -146$ ns. À partir du *Handbook of optical constants of solids* [87] nous estimons l'indice du MgF_2 à 1550 nm à $n = 1,38$ ce qui donne une finesse pour le résonateur de l'ordre de $\mathcal{F} = 20000$.
La méthode de CRDM s'applique également à la description complète de résonateurs à modes de galerie de grande finesse. De cette mesure nous pouvons conclure quant à l'utilisation de ce résonateur comme élément optique dans la boucle de contre réaction de l'oscillateur opto-hyperfréquence. Avec un ISL de quelques nanomètres et une largeur de raie de 585 kHz le résonateur réalise correctement sa fonction de filtrage. Du point de vue de la ligne à retard, en régime de sous-couplage le résonateur est en régime de lumière rapide ($\tau_g = -146$ ns). Le résonateur étant passif, il faut améliorer l'étape de fabrication afin de réaliser des résonateurs avec des facteurs de qualité intrinsèques Q_0 plus élevés ($> 10^9$) et ainsi obtenir des résonateurs en régime de sur-couplage ($\tau_g > 0$) présentant un régime de lumière lente.

Deuxième partie

Phénomènes optiques cohérents à base de cavités couplées

Chapitre 3

Couplage de 2 cavités co-résonantes

Nous avons vu dans le chapitre 1, qu'une cavité couplée à une ligne d'accès unique peut être décrite par τ_0 son temps de vie intrinsèque et τ_e son temps de vie externe. Les propriétés dispersives d'un tel résonateur s'expriment directement en fonction de ces deux paramètres. Le contrôle de la dispersion nécessite d'augmenter le nombre de degrés de liberté du système et le couplage de cavités est une des techniques permettant d'ajuster les propriétés dispersives des structures photoniques. En s'inspirant des travaux menés par D. D. Smith *et al.* [88] sur le couplage de cavités passives, nous montrons que le contrôle actif et indépendant des pertes ou du gain dans chaque cavité permet : (i) de conserver une fenêtre de transparence à résonance, (ii) d'ajuster le retard de groupe τ_g induit par le système [89].
Dans ce chapitre, nous étudions de manière théorique et expérimentale une configuration à base de deux résonateurs couplés. L'ajout du taux de perte interne comme paramètre ajustable permet de modifier la valeur du retard de groupe tout en en conservant une transparence élevée à résonance. D'autre part, nous démontrons, dans le même système modèle, que les différents ordres de dispersion peuvent être ajustés uniquement en modifiant les pertes internes.

3.1 Le modèle théorique

Dans un premier temps, nous décrivons le système à partir de la théorie des modes couplés [45, 46] et comment un développement itératif permet de décrire un dispositif de N résonateurs couplés [88, 90–92].

3.1.1 Cas de deux cavités couplées

Le système de deux cavités couplées est schématisé sur la figure 3.1. Les deux résonateurs sont reliés par le coupleur C_1. La cavité #1 correspond au résonateur placé le plus loin de la ligne d'accès. La cavité #2 est reliée à la ligne d'accès par le coupleur C_2. Le

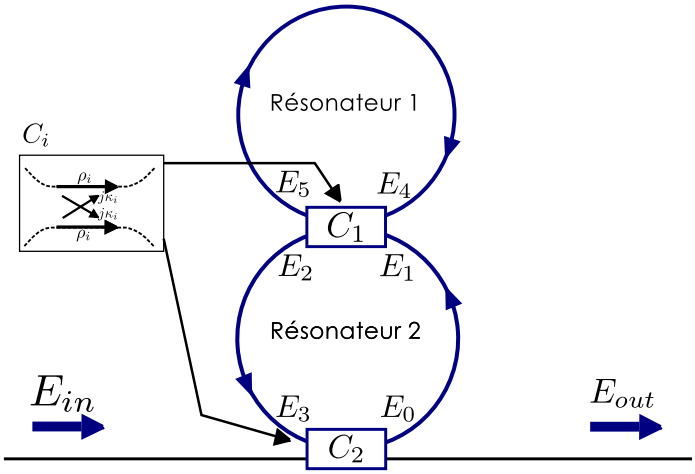


FIGURE 3.1 – Le système consiste en deux résonateurs de longueur L_1 et L_2 couplés par un coupleur 2×2 C_1. Le système est couplé à une ligne d'accès par un coupleur C_2. Les champs d'entrée et de sortie de la structure sont E_{in} et E_{out}. E_i avec $i \in [0;5]$ représentent les champs à différentes positions dans le système de résonateurs couplés.

dispositif est alors composé de deux cavités de longueur L_i ($i \in \{1;2\}$). Les coupleurs sont considérés comme unidirectionnels. Par analogie avec les modèles développés précédemment nous considérons des résonateurs monomodes parcourus par des champs électromagnétiques de fréquence angulaire ω. Sans perte de généralité, les coupleurs sont placés à la moitié de chaque boucle de telle sorte que C_1 soit placé à $L_2/2$ de C_2. Les deux coupleurs, considérés comme ponctuels, sont modélisés par une matrice 2×2 [46] telle que :

$$C_i = \begin{bmatrix} \rho_i & j\kappa_i \\ j\kappa_i & \rho_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1;2\} \tag{3.1}$$

où ρ_i et κ_i sont les coefficients de transmission et de couplage du coupleur C_i considéré sans perte. Ils sont reliés par l'expression :

$$\rho_i^2 + \kappa_i^2 = 1. \tag{3.2}$$

κ_i est multiplié par un coefficient j de manière à prendre en compte le déphasage de $\pi/2$ accumulé par les champs à chaque traversée des coupleurs.

3.1.1.1 La cavité #1

Les champs réfléchi E_5 et transmis E_2 s'expriment en fonction des champs E_1 et E_4 grâce à la matrice de couplage C_1 [Equ. (3.1)] :

$$\begin{bmatrix} E_5 \\ E_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} E_4 \\ E_1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

ce qui se développe en :

$$E_5 = \rho_1 E_4 + j\kappa_1 E_1 \tag{3.4a}$$

$$E_2 = j\kappa_1 E_4 + \rho_1 E_1 \tag{3.4b}$$

E_4 correspond à E_5 après parcours de la cavité. Cette cavité lui fait subir une atténuation a_1 et un déphasage φ_1.
De manière générale, le terme d'atténuation s'écrit :

$$a_i = e^{-\frac{\alpha_i L_i}{2}}, \quad i \in \{1;2\} \tag{3.5}$$

avec α_i le coefficient de perte de la cavité considérée. Ce coefficient prend en compte toutes les contributions aux pertes intrinsèques à savoir :

- Les pertes dépendant de la structure (soudures, courbure, injection, polarisation, etc.),
- Les pertes dépendant du matériau (dopage, impuretés, inhomogénéité, etc.).

De même, nous définissons la phase induite sur un tour :

$$\varphi_i = \frac{n\omega L_i}{c}, \quad i \in \{1;2\} \tag{3.6}$$

où n est l'indice de réfraction du matériau de la cavité. Des équations (3.5) et (3.6), nous définissons l'expression du champ E_4 par :

$$E_4 = a_1 E_5 e^{j\varphi_1}. \tag{3.7}$$

En conjuguant les équations du système (3.4) et l'expression du champ E_4, la transmission complexe en amplitude t_1, de la cavité 1 s'écrit :

$$t_1 = |t_1| e^{j\phi_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\rho_1 - a_1 e^{j\varphi_1}}{1 - \rho_1 a_1 e^{j\varphi_1}}. \tag{3.8}$$

Nous en déduisons $|t_1|^2$ la transmittance et $\phi_1 = \arg(t_1)$ le déphasage induit par la cavité.

Remarque

Dans le cas d'un résonateur obéissant à l'hypothèse de grande finesse et en se limitant à de faibles variations de φ, les expressions des facteurs de qualité permettent de faire le lien entre ce modèle et celui de H.A. Haus [annexe A].

3.1.1.2 Les deux cavités couplées

Les relations entre les champs au niveau du coupleur C_2 ont une forme similaire au système (3.3) :

$$\begin{bmatrix} E_{out} \\ E_0 \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} E_{in} \\ E_3 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

La matrice C_2 s'exprime comme :

$$C_2 = \begin{bmatrix} \rho_2 & j\kappa_2 \\ j\kappa_2 & \rho_2 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

ce qui nous donne :

$$E_{out} = \rho_2 E_{in} + j\kappa_2 E_3 \tag{3.11a}$$

$$E_0 = j\kappa_2 E_{in} + \rho_2 E_3 \tag{3.11b}$$

La propagation des champs dans la boucle 2 doit tenir compte de la présence du coupleur C_1 positionné en $L/2$. Ainsi, l'enveloppe des champs à l'intérieur du résonateur 2 s'écrit :

$$E_p = \sqrt{a_2} E_{p-1} e^{j\varphi_2/2}, \quad p \in \{1; 3\} \tag{3.12}$$

En combinant les 3 dernières expressions, nous exprimons la transmission en amplitude du système :

$$t_2 = |t_2| e^{j\phi_2} = \frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{\rho_2 - a_2 t_1 e^{j\varphi_2}}{1 - \rho_2 a_2 t_1 e^{j\varphi_2}}, \tag{3.13}$$

ce qui, en tenant compte de l'expression de t_1 [Equ. (3.8)] donne :

$$t_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1\rho_2 a_1 e^{j\varphi_1} - \rho_1 a_2 e^{j\varphi_2} + a_1 a_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}}{1 - \rho_1 a_1 e^{j\varphi_1} - \rho_1\rho_2 a_2 e^{j\varphi_2} + \rho_2 a_1 a_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}}. \tag{3.14}$$

Il est commode, suivant les effets étudiés, d'utiliser les notions de "*buildup*" facteur et de facteur d'exaltation ("*magnification factor*") introduites par D.D. Smith *et al.* [88, 93]. Ces facteurs donnent accès à la répartition des champs d'entrées et de sorties des coupleurs.

Expressions du *buildup* facteur et du facteur d'exaltation

Le *buildup* facteur correspond au rapport entre les champs interne et externe d'une cavité. Le facteur d'exaltation correspond au rapport entre le champ interne de la cavité considérée et le champ d'entrée de la structure.
Nous pouvons définir ces deux facteurs pour chacune des deux cavités de notre système :

1. le *buildup* facteur $\xi_1(\varphi_1)$ de la cavité 1 correspond au rapport entre le champ interne E_4 et le champ d'entrée E_1. Il s'obtient en combinant les expressions (3.4a) et (3.7) :

$$\xi_1(\varphi_1) = \frac{E_4}{E_1} = \frac{j a_1 \kappa_1 e^{j\varphi_1}}{1 - a_1\rho_1 e^{j\varphi_1}}, \tag{3.15}$$

2. Le *buildup* facteur $\xi_2(\varphi_1,\ \varphi_2)$ de la cavité 2 correspond au rapport entre les champs interne (E_3) et d'entrée (E_{in}). Il s'obtient d'une part, en combinant les expressions (3.11b) et (3.12) ($p = 1$) et d'autre part en soustrayant E_1 à partir des équations (3.12) ($p = 3$) et (3.8) tel que :

$$\xi_2(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{E_3}{E_{in}} = \frac{j\kappa_2 a_2 t_1 e^{j\varphi_2}}{1 - \rho_2 a_2 t_1 e^{j\varphi_2}}. \tag{3.16}$$

3. le facteur d'exaltation $\mu_1(\varphi_1, \varphi_2)$ correspond au rapport entre le champ interne de la cavité 1 (E_4) et le champ d'entrée du système (E_{in}). Il s'exprime à partir des expressions (3.11b), (3.15) et (3.12) ($p = 1$) par :

$$\mu_1(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{E_4}{E_{in}} = (\rho_2\xi_2 + j\kappa 2)\xi_1\sqrt{a_2}e^{j\varphi_2/2}. \tag{3.17}$$

Une autre expression de μ_1 s'obtient en opérant un rapport entre les champs :

$$\mu_1 = \frac{E_4}{E_{in}} = \frac{E_4}{E_1}\frac{E_3}{E_{in}}\frac{E_1}{E_2}, \tag{3.18}$$

puis en exprimant E_2 à partir de E_3 à l'aide de l'équation (3.12) ($p = 3$) nous avons :

$$\mu_1 = \frac{\xi_1\xi_2}{t_1\sqrt{a_2}}e^{-j\varphi_2/2}. \tag{3.19}$$

4. Dans le cas de la cavité couplée à la ligne d'accès, le facteur d'exaltation $\mu_2(\varphi_1, \varphi_2)$ et le *buildup* facteur $\xi_2(\varphi_1, \varphi_2)$ sont égaux.

3.1.2 Généralisation à N cavités

Le cas de deux cavités couplées se généralise à N cavités. Le schéma de cette structure est représenté sur la figure 3.2. En respectant les conventions utilisées précédemment nous avons pour $i \in [1; N]$, φ_i le déphasage induit sur un tour de cavité i de longueur L_i. On note a_i l'atténuation introduite par chaque boucle. Les coupleurs sont toujours considérés sans perte.
Dans ce cas, le buildup facteur de la $i^{ème}$ boucle est donné par :

$$\xi_i = \frac{j\kappa_i a_i t_{i-1} e^{j\varphi_i}}{1 - \rho_i a_i t_{i-1} e^{j\varphi_i}}, \quad i \in [1; N] \tag{3.20}$$

tandis que le $i^{ème}$ facteur d'exaltation, correspondant au rapport entre le champ interne de la $i^{ème}$ boucle et le champ d'entrée de la structure (E_{in}) est donné par :

$$\mu_i = \xi_N \prod_{s=i+1}^{N} \frac{\xi_{s-1}}{t_{s-1}\sqrt{a_s}} e^{-j\varphi_s/2}. \tag{3.21}$$

Le résonateur indicé *résonateur* #0 n'existant pas, la valeur de sa transmission est $t_0 = 1$. Finalement, la fonction de tranfert totale de la structure peut être établie par récurrence à partir des fonctions de transfert de chaque cavité. Celles-ci correspondent à des briques élémentaires définies par :

$$t_i = |t_i|e^{j\phi_i} = \frac{\rho_i - t_{i-1}a_i e^{j\varphi_i}}{1 - t_{i-1}\rho_i a_i e^{j\varphi_i}}. \tag{3.22}$$

On pose alors $T = |t_N|^2$ et $\phi = \arg(\phi_N)$. De ce qui précède, le *buildup* facteur et le facteur d'exaltation en intensité de la $i^{ème}$ cavité s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_i &= |\xi_i|^2, \\ M_j &= |\mu_i|^2 = \prod_{s=i}^{N} R_s. \end{aligned} \tag{3.23}$$

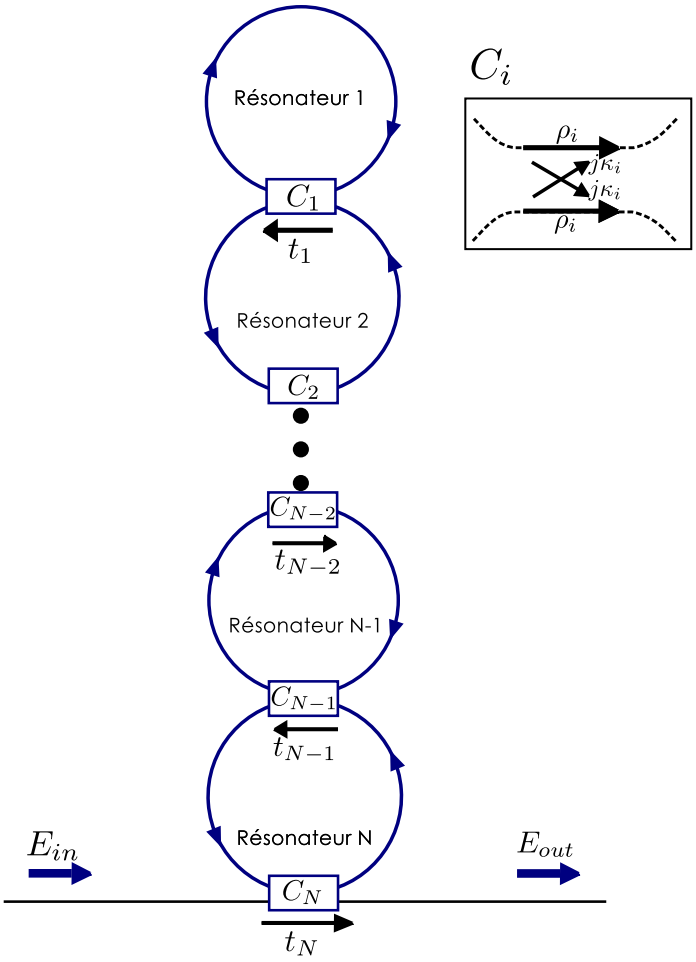


FIGURE 3.2 – Système de N cavités couplées. Chaque étage est caractérisé par sa fonction de transfert t_i, son coupleur C_i, son atténuation a_i et sa phase sur un tour φ_i pour $i \in [1; N]$. Les champs d'entrée et de sortie du système sont E_{in} et E_{out}.

3.2 Phénomène de transparence induite par couplage de résonateurs (CRIT)

3.2.1 Principes et modélisation

Nous traitons dans ce paragraphe la ligne à retard transparente dans un CRIT (Coupled Resonators Induced Transparency) en régime de lumière lente. Nous abordons également le phénomène inverse, à savoir, l'absorption induite par couplage de résonateur (Coupled Resonators Induced Absorption ou CRIA)]. Pour observer ces effets il suffit de coupler deux résonateurs.

D'après l'étude détaillée de D. D. Smith *et al.* [94], ce régime de transparence en lumière lente est accessible lorsque le résonateur le plus éloigné de la ligne d'accès est sur-couplé. Apparaît alors au milieu du large pic d'absorption du résonateur 2, une fenêtre de transparence de largeur $2\delta_{1/2}$ induite par le couplage avec le résonateur 1.

Dans le paragraphe ci-dessous nous détaillons le phénomène de la transparence induite. Tout au long de cette partie théorique nous comparerons cette architecture de deux résonateurs couplés au cas du résonateur unique précédemment étudié afin de dégager les différences du point de vue de la transmission et de la relation de dispersion.

Le résonateur unique Son spectre de transmission et ses propriétés dispersives ont été discutés [1] dans le chapitre 1. Le déphasage de π supplémentaire porté précédemment dans le cas du sous-couplage [Equ. (1.37)] est, dans le formalisme actuellement utilisé, associé au régime de sur-couplage. Pour un signal d'entrée dont la fréquence angulaire correspond à une fréquence de résonance du système, nous avons une transmission qui présente un pic d'absorption dont la profondeur dépend de a et ρ. En effet, à chaque passage d'un coupleur la lumière acquiert une phase de $\pi/2$ [46], ainsi pour un résonateur simple en couplage critique ($a = \rho$) le champ interne interfère destructivement avec le signal d'entrée de telle sorte que la transmission à résonance soit nulle.

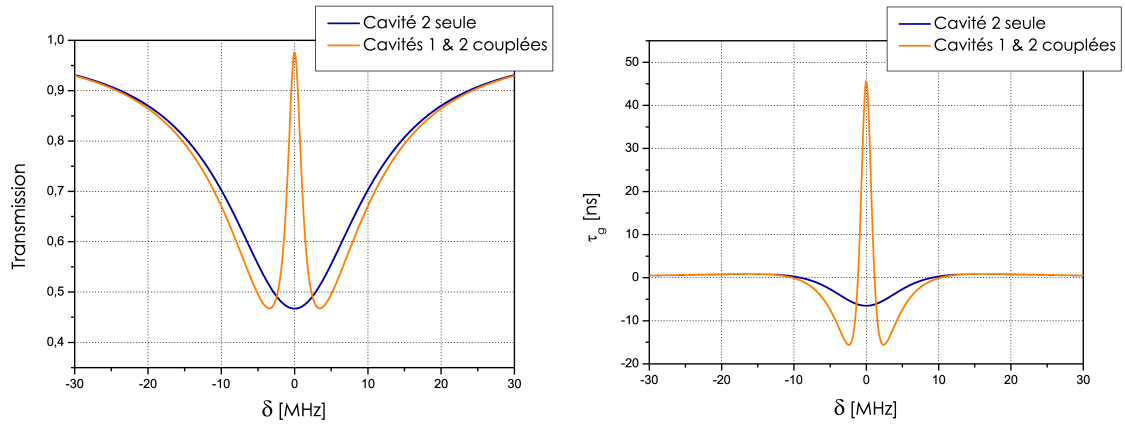
Les deux cavités couplées Dans le cas où le résonateur le plus éloigné est sur-couplé ($\rho_1 < a_1$) et le résonateur le plus proche de la ligne d'accès est sous-couplé ($\rho_2 > a_2$), les interférences destructives apparaissent au niveau du coupleur C_1 entre les champs $\rho_1 E_1$ et $j\kappa_1 E_0$ présentant respectivement une phase de $\pi/2$ et $3\pi/2$. Dans ce cas les champs E_{in} et $j\kappa_2 E_3$ interfèrent constructivement, le système est alors porté dans un état de transparence à résonance.
Pour étudier le CRIT nous appliquons le modèle matriciel présenté dans la partie 3.1. Considérons deux résonateurs identiques de périmètre $L = L_1 = L_2$, par conséquent la phase induite sur un tour vaut $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$. Les résonateurs sont co-résonants.
La fréquence angulaire du signal d'entrée prend la forme utilisée auparavant à savoir $\omega = \omega_0 + 2\pi\delta$ où δ correspond au désaccord fréquentiel par rapport à la résonance.
La phase accumulée sur un tour de cavité s'écrit de manière générale : $\varphi = n\omega L/c$ où n correspond à l'indice de réfraction de la fibre.
Dans le cas de deux résonateurs co-résonants, l'expression de la transmission complexe [Equ. (3.14)] s'écrit :

$$t_2 = |t_2|e^{j\phi_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1\rho_2 a_1 e^{j\varphi} - \rho_1 a_2 e^{j\varphi} + a_1 a_2 e^{2j\varphi}}{1 - \rho_1 a_1 e^{j\varphi} - \rho_1\rho_2 a_2 e^{j\varphi} + \rho_2 a_1 a_2 e^{2j\varphi}}, \tag{3.24}$$

en considérant :

$$t_1 = |t_1|e^{j\phi_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\rho_1 - a_1 e^{j\varphi}}{1 - \rho_1 a_1 e^{j\varphi}}. \tag{3.25}$$

1. Attention, il faut prendre en compte le changement de convention. La dépendance en temps des champs dans le modèle matricielle est en $\exp(-j\omega t)$. Ceci n'entraîne qu'un changement de signe dans l'expression de τ_g.



(a) Spectre de transmission en fonction de δ.

(b) Retard de groupe τ_g en fonction de δ.

FIGURE 3.3 – Transmission et retard de groupe d'un système de deux cavités couplées. Les paramètres de la structures sont : $a_1 = 0,9995$; $a_2 = 0,76$; $\rho_1 = 0,995$; $\rho_2 = 0,95$, $L = L_1 = L_2 = 1$ m, $\lambda_0 = 1,55$ μm et $n = 1,46$. La transmission a) et le retard de groupe b) sont également représentés dans le cas du résonateur 2 seul.

3.2.1.1 Simulations

La figure 3.3 présente la transmission [Fig. 3.3(a)] et le retard de groupe [Fig. 3.3(b)] d'un système de deux cavités couplées co-résonantes [Equ.(3.24)]. À titre de comparaison, nous y avons superposé les caractéristiques d'un résonateur unique. Dans ce cas $t_1 = 1$ dans l'équation (3.25). Le jeu de paramètres séléctionné pour la simulation est : $a_1 = 0,9995$; $a_2 = 0,76$; $\rho_1 = 0,995$; $\rho_2 = 0,95$. Le périmètre de chaque cavité vaut $L = 1$ m. On prend pour valeur de l'indice de réfraction celui d'une fibre optique de type SMF 28 à savoir $n = 1,46$.

La figure 3.3(a) présente dans le cas du système couplé une fenêtre de transmission à résonance permettant au signal interne de sortie de la cavité sans atténuation (courbe orange). Dans le cas du résonateur unique (courbe bleue), le spectre de transmission présente un pic d'absorption à résonance atténuant de 50 % le signal d'entrée E_{in}.

La figure 3.3(b) présente le retard induit. Dans le cas des deux cavités couplées, le spectre du temps de groupe en fonction du désaccord fréquentiel présente un grand retard à résonance. Le temps de groupe, sur les ailes, affiche un temps de groupe négatif ce qui correspond à un régime de lumière rapide. Ainsi, un signal de sonde à résonance traversera le résonateur sans atténuation mais retardé. À l'opposé, un signal légèrement désaccordé par rapport à la résonance sortira en avance mais très absorbé. Le cas du résonateur 2 seul est également représenté. Dans ce cas, le retard de groupe est négatif, le signal est légèrement en régime de lumière rapide et fortement atténué.

Nous remarquons qu'un système de deux résonateurs co-résonants (CRIT) se caractérise par un retard de groupe élevé lorsque la cavité externe (résonateur 1) présente un haut facteur de qualité (a_1 et ρ_1 proche de 1). Notons que le retard induit et la largeur de la fenêtre

de transparence sont inversement proportionnels [88]. Pour les simulations présentées sur la figure 3.3 le facteur de qualité du résonateur 1 est de $Q \approx 3 \times 10^8$.

3.2.1.2 Rôle du couplage

Le couplage entre les deux résonateurs entraîne un éclatement du pic d'absorption du résonateur 2 donnant naissance à deux nouvelles fréquences. À partir de l'expression du *buildup* facteur dans le résonateur 2 [Equ. (3.16)], nous avons l'expression de l'enveloppe du champ interne. Notons D son dénominateur :

$$D = 1 - \rho_2 a_2 t_1 e^{j\varphi}. \tag{3.26}$$

Nous définissons δ_s comme étant la fréquence des nouvelles résonances. Ainsi, pour $\delta = \delta_s$ le champ intracavité est maximum par conséquent $|D|$ est minimum. Les positions des nouvelles fréquences de résonance sont obtenues en dérivant $|D|$ par rapport au désaccord δ :

$$\left.\frac{\partial |D|}{\partial \delta}\right|_{\delta_s} = 0, \tag{3.27}$$

ce qui nous donne, en supposant $a_1 \approx 1$ et en utilisant le développement au premier ordre de $1 - \rho_1$, la position des résonances :

$$\delta_s = \pm \frac{1}{\pi \tau_L} \sqrt{\frac{1 - \rho_1}{2}}. \tag{3.28}$$

Il s'avère que l'écart entre les deux résonances, $\Delta_s = 2\delta_s$ ne dépend que de la valeur de ρ_1. En d'autres termes, suivant la force du couplage entre les deux résonateurs la fenêtre de transparence sera plus où moins large [93,95]. La figure 3.4 présente l'évolution du couplage entre les deux cavités en fonction de la variation du seul paramètre ρ_1. Dans le cas d'une cavité 1 très faiblement couplée [cas **a**], la transmission totale du système présente une séparation des résonances très fine. Lorsque la valeur du couplage entre les deux résonateurs augmente [**a** $\rightarrow$ **f**], Δ_s augmente jusqu'à atteindre une valeur égale à la moitié de l'ISL des résonateurs. Dans ce cas limite ($\rho_1 \approx 0$ - cas **f**), le montage est équivalent à un seul résonateur dont le périmètre est égal à deux fois la taille des cavités utilisées.
La figure 3.5(a) présente différents spectres de transmission en fonction de ρ_1, les autres paramètres étant constants. Ce graphique met en évidence le rôle du couplage entre les deux cavités : il influence directement sur la largeur de la fenêtre de transparence sans modifier le maximum de transmission. La figure 3.5(b) présente l'évolution du retard de groupe pour différentes valeurs de ρ_1, les autres paramètres étant fixés. Le retard de groupe étant inversement proportionnel à la largeur de l'éclatement nous avons tout intérêt à prendre un taux de couplage κ_1 proche de 0. En conclusion, le régime de fonctionnement du CRIT qui nous intéresse correspond au cas $\rho_1 \approx 1$, auquel cas le retard de groupe présente une grande

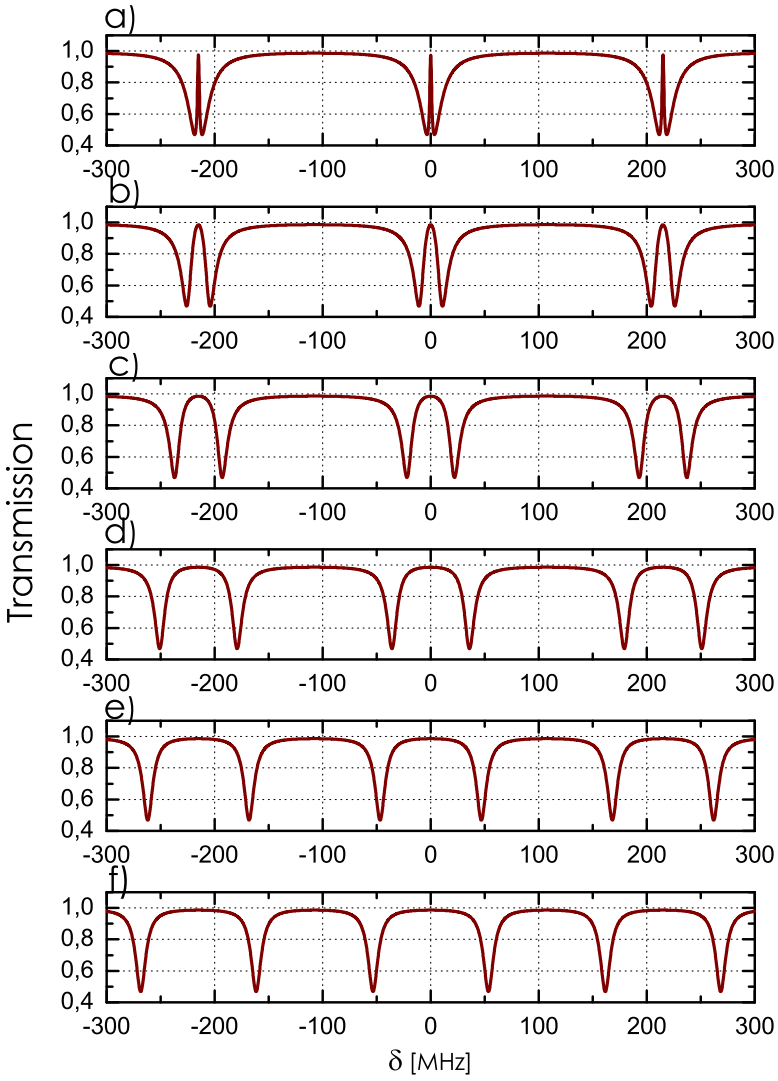


FIGURE 3.4 – Évolution du couplage entre deux cavités couplées pour différentes valeurs de ρ_1 : a) $0,995$; b) $0,95$; c) $0,8$; d) $0,5$; e) $0,2$; f) $0,01$. La transmission est représentée en fonction du désaccord δ sur un spectre présentant 2 ISL.

valeur positive.

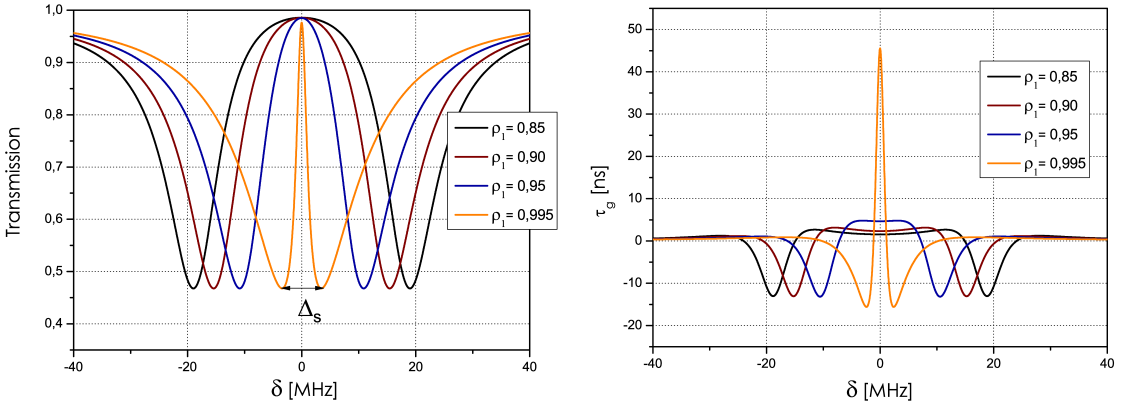
La finesse $\mathcal{F}$ peut être reliée à la largeur à mi-hauteur de la fenêtre de transparence $2\delta_{1/2}$ par l'expression suivante :

$$\tau_L \mathcal{F} = \frac{1}{2\delta_{1/2}}, \tag{3.29}$$

où τ_L est le temps de parcours de la cavité défini par $\tau_L = nL/c$.

Par analogie avec cette définition de la finesse dans le cas d'un résonateur unique nous proposons de faire le parallèle avec notre sytème de deux cavités couplées. Dans ce cas, plus

le couplage sera faible, plus $2\delta_{1/2}$ sera petit. Ainsi, pour un τ_L fixé par la géométrie de la cavité, la finesse augmente. Le champ interne parcourant $\mathcal{F}$ fois la cavité avant d'en sortir, le retard induit sera d'autant plus grand que le couplage sera faible.
On comprend alors qu'il faudra faire un compromis entre le retard induit et la bande passante du système.



(a) Spectre de transmission en fonction de δ.

(b) Retard de groupe τ_g en fonction de δ.

FIGURE 3.5 – Transmission et retard de groupe d'un système de deux cavités couplées. Les paramètres de la structure sont : $a_1 = 0,9995$; $a_2 = 0,76$; $\rho_2 = 0,95$, $L = L_1 = L_2$, $\lambda_0 = 1,55$ μm et $n = 1,46$. La transmission a) et le retard de groupe b) sont représentés pour pour différentes valeurs de ρ_1 : $0,85$; $0,90$; $0,95$; $0,995$.

3.2.1.3 Absorption induite par couplage de résonateurs (CRIA)

La figure 3.6 présente la réponse spectrale du système de deux cavités couplées en configuration CRIA (pour *Coupled resonator induced absorption*). Elle est obtenue en inversant les rôles des coefficients de perte et de couplage, tel que a_i prend la valeur de ρ_i $[i \in \{1;2\}]$ pour chaque résonateur. Le CRIA peut être vu comme la fonction optique inverse du CRIT : au lieu d'observer une fenêtre de transmission au milieu du pic d'absorption, le spectre présente une raie étroite d'absorption à résonance imposant au système une transmission nulle. Ceci s'explique par des interférences destructives localisées au niveau du coupleur C_2 entre le champ d'entrée et le champ interne. Pour comparaison, les spectres de transmission du CRIT et de la cavité unique sont également représentés.

Remarques

Nous venons de voir que la configuration CRIT présente l'avantage de permettre à un signal d'entrée résonant à une fréquence propre du système d'être retardé sans être atténué. Cette configuration n'est toutefois pas forcément avantageuse par rapport au cas du résonateur unique. Pour peu que le résonateur unique ait un haut facteur de qualité et soit sur-couplé, il peut présenter un retard de groupe bien plus grand pour une cavité présentant

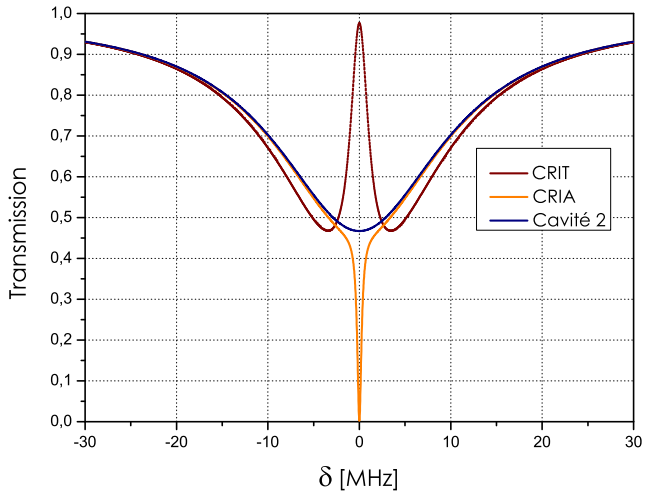


FIGURE 3.6 – Transmission d'un système de deux cavités couplées. La configuration CRIT de la figure 3.3(a) est superposée à la configuration CRIA avec les paramètres suivant : $a_1 = 0,995$, $\rho_1 = 0,9995$, $a_2 = 0,95$ et $\rho_2 = 0,76$. Le cas du résonateur unique est également représenté.

les mêmes caractéristiques structurelles. Toutefois, le résonateur simple pâtit d'un manque de contrôle des propriétés dispersives d'ordres élevés ce qui le pénalise de manière indubitable dans le cas d'un signal d'entrée impulsionnel. Nous montrons que le CRIT, pour un choix de paramètres appropriés, permet d'annuler la dispersion d'ordre 3 [96, 97].

3.2.2 Ajustement des propriétés dispersives par contrôle optique

Le choix de l'optimisation des propriétés dispersives suivant les paramètres de couplage posent de nombreux problèmes que nous avons déjà évoqués. C'est pourquoi, nous proposons de rajouter un paramètre ajustable à savoir les pertes [89]. Pratiquement, ce paramètre est ajustable uniquement dans les structures photoniques actives.
La relation de dispersion s'obtient à partir d'un développement de Taylor de $\phi(\delta)$ au voisinage de ω_0 :

$$\phi(\delta) = \phi(0) + \delta\frac{\partial\phi}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=0} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\delta^2}\bigg|_{\delta=0} + \frac{\delta^3}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial\delta^3}\bigg|_{\delta=0} + \ldots + \frac{\delta^n}{n!}\frac{\partial^n\phi}{\partial\delta^n}\bigg|_{\delta=0}, \tag{3.30}$$

la dispersion d'ordre n correspond à :

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^n\phi}{\partial\delta^n} \quad , n \in \mathbb{N}^+. \tag{3.31}$$

Dans le cas du résonateur purement déphasant (APF), seul le coefficient de couplage permet l'ajustement du temps de groupe.
Dans le cas du CRIT si nous plaçons le résonateur 1 en régime de couplage critique $a_1 = \rho_1$

l'expression de la transmission totale du système se simplifie en $T = \rho_2^2$.
Le temps de groupe de la structure est dans ce cas donné par :

$$\tau_g = a_2 \frac{\rho_1 \left(1 - \rho_2^2\right)}{\rho_2 \left(1 - \rho_1^2\right)} \tau_L. \tag{3.32}$$

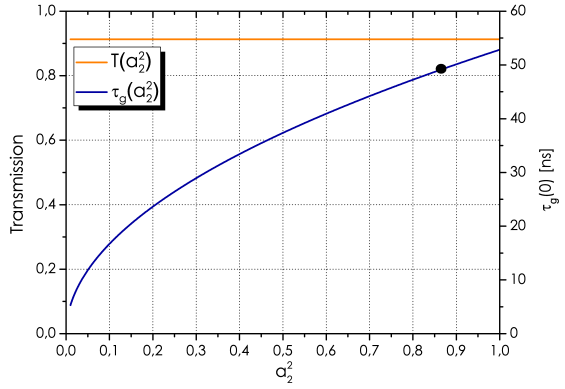
Cette configuration permet donc d'obtenir une ligne à retard transparente ($\rho_2^2 \approx 1$) totalement indépendante des pertes internes du résonateur. Le retard de groupe quant à lui, présente une dépendance linéaire par rapport à a_2. Ces deux propriétés essentielles de notre dispositif sont présentées sur la figure 3.7(a). Pour un jeu de coefficients de couplage (ρ_1, ρ_2) avec le résonateur 1 en régime critique, le temps de groupe τ_g, est directement accordable par un contrôle optique des pertes a_2. L'équation (3.32) montre également que le choix des paramètres de couplage est déterminant pour obtenir un grand retard de groupe. La ligne à retard sera d'autant plus résonante que le résonateur 1 sera découplé par rapport au résonateur 2. La condition devient alors :

$$1 - \rho_1^2 \ll 1 - \rho_2^2. \tag{3.33}$$

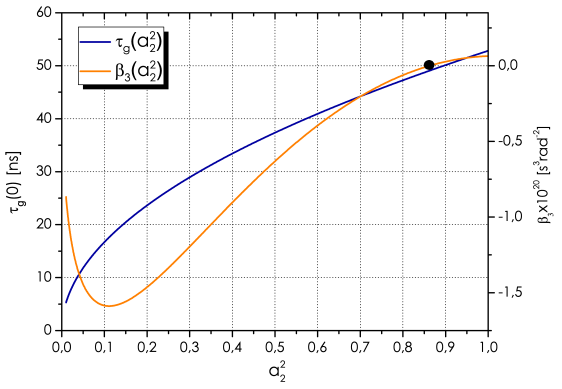
Dans le cas d'un résonateur unique [Fig. 3.7(c)], la transmission et le retard de groupe ont une évolution conjointe. Le premier ordre de dispersion ne peut donc pas être ajusté indépendamment de la transmission du système. On notera également que l'évolution rapide de la transmission à résonance limite la plage d'accordabilité du retard. En résumé, pour être utilisé en tant que ligne à retard fixe, le résonateur unique doit être purement dispersif ($a_2 \approx 1$). Pour être variable, il faut que le couplage (τ_e) soit ajustable.

3.2.2.1 Les ordres élevés de dispersion

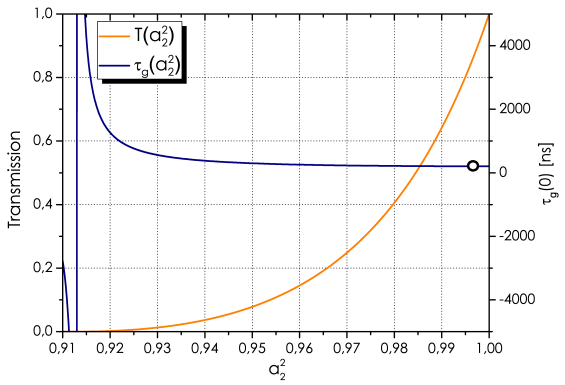
Pour de nombreuses applications, il est nécessaire de retarder des signaux optiques impulsionnels [98–100]. Dans ce cas, les ordres pairs de la relation de dispersion doivent être annulés pour ne pas déformer le signal. Les figures 3.7(b) et 3.7(d) comparent le retard induit et le β_3 en fonction des pertes internes dans le cas d'un CRIT et d'un anneau unique. Dans le cas du CRIT, il existe une valeur de a_2^2 pour laquelle le β_3 s'annule (• Fig. 3.7(b)). Les différentes propriétés optiques de ce régime sont détaillées dans la colonne de droite de la figure 3.8.
Pour une certaine valeur de a_2^2 ($a_2^2 = 0,927$) le β_2 et le β_3 peuvent être annulés sur une étendue spectrale dépendant principalement des propriétés géométriques du résonateur. À défaut de pouvoir accorder expérimentalement les coefficients de couplage, l'ajustement de a_2 permet de placer le CRIT dans un régime ne présentant pratiquement pas d'atténuation ni de distorsion mais un grand retard de groupe. Comme précédemment, le système est maintenant dans un état transparent.
À titre de comparaison le cas du résonateur unique est présenté pour une transmission sensiblement équivalente. Le point de fonctionnement choisi ($a_2^2 = 0,998$) ne correspond



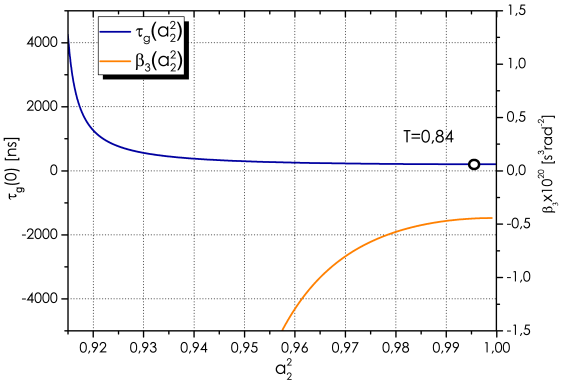
(a) Transmission et retard de groupe d'un CRIT en fonction des pertes intrinsèques a_2^2.



(b) Retard de groupe et dispersion d'ordre 3 d'un CRIT en fonction des pertes intrinsèques a_2^2.



(c) Transmission et retard de groupe d'une cavité unique en fonction des pertes intrinsèques a_2^2.



(d) Retard de groupe et dispersion d'ordre 3 d'une cavité unique en fonction des pertes intrinsèques a_2^2.

FIGURE 3.7 – Propriétés de transmission et de dispersion d'un CRIT [figure (a) et (b)] et d'une cavité unique [figure (c) et (d)] en fonction du paramètre a_2^2 pour un désaccord nul ($\delta = 0$). Les paramètres structurels sont : $a_1 = 0,996$; $\rho_1 = 0,996$; $\rho_2 = 0,9555$, $L = L_1 = L_2 = 1$ m, $\lambda_0 = 1,55$ μm et $n = 1,46$. • correspondent aux simulations de la figure 3.8, colonne de droite et ∘ correspond aux simulations de la figure 3.8, colonne de gauche.

qu'à un compromis entre les différents paramètres. En effet, il n'est pas possible d'obtenir un signal impulsionnel retardé sans un minimum de dispersion du $3^{ème}$ ordre étant donné que la dispersion du temps de groupe ne présente en aucun cas une pente nulle à résonance. Les différentes propriétés dispersives du résonateur unique pour le point de fonctionnement $a_2^2 = 0,998$ sont représentées sur la colonne de gauche de la figure 3.8.

Remarque

Le CRIT présente deux avantages majeurs par rapport au résonateur unique. Il peut retarder un signal monochromatique ou impulsionnel car :

1. Le temps de groupe peut être ajusté sans modifier le régime de couplage,

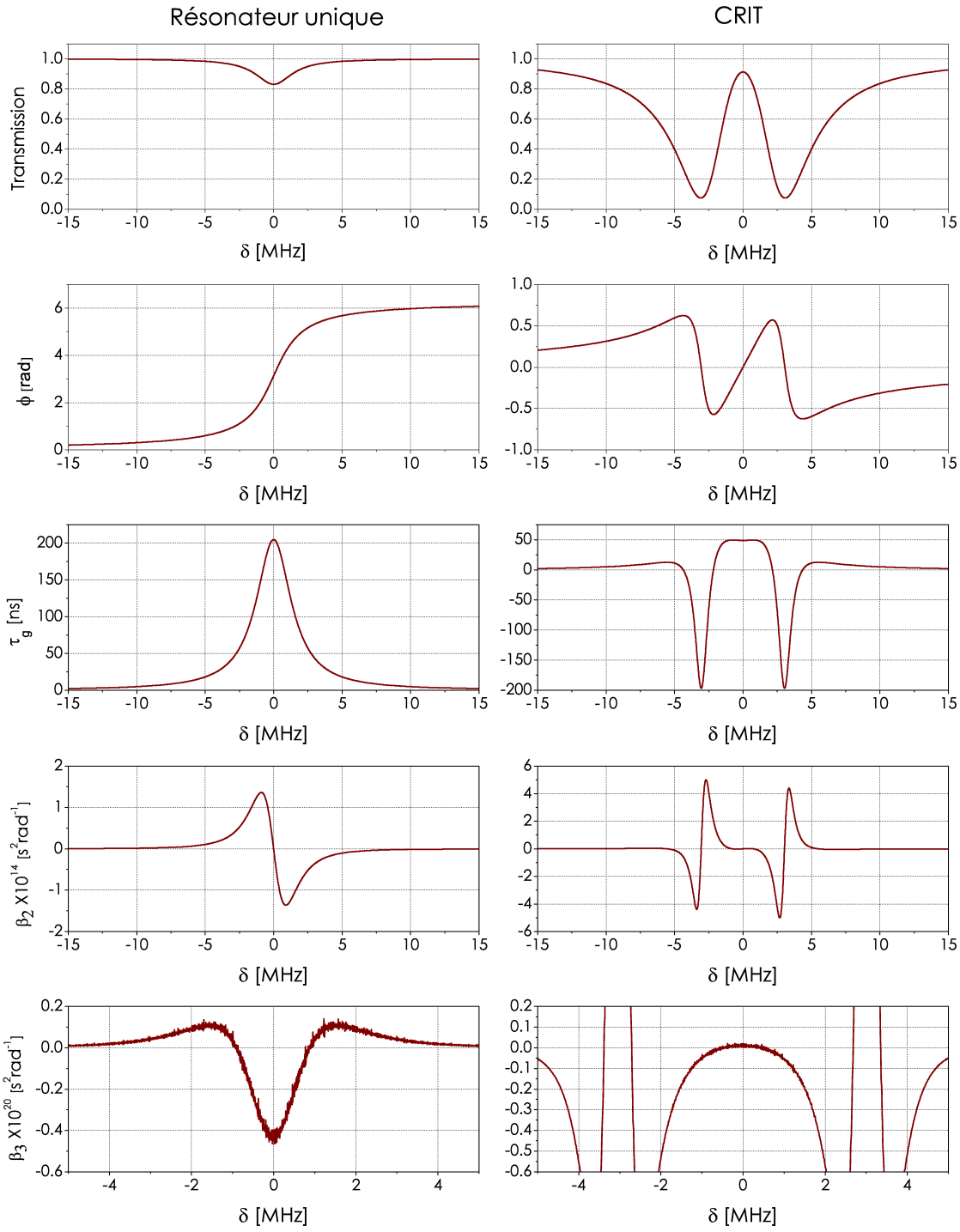


FIGURE 3.8 – Comparaison de la transmission et des propriétés dispersives entre un résonateur unique et un CRIT. Les paramètres de simulation sont identiques à ceux de la figure 3.7(c) dans le cas d'un résonateur unique et à ceux de la figure 3.7(a) dans le cas du CRIT.

2. la modulation des pertes internes du résonateur 2 ne modifie pas la transmission globale du système,
3. Un signal impulsionnel, de largeur inférieure à la bande passante du CRIT, peut être transmis et retardé sans distorsion rédhibitoire.

Ce dernier point nous amène à regarder de plus près le produit retard/bande passante. Suivant les hypothèses posées pour déterminer l'équation (3.32), nous pouvons calculer la largeur à mi-hauteur de la fenêtre de transparence $2\delta_{1/2}$ telle que :

$$2\delta_{1/2} = \frac{1-\rho_1^2}{\pi\tau_L\rho_1\left(\rho_2 a_2 - \rho_1\right)}, \tag{3.34}$$

ce qui donne pour le produit retard×bande passante :

$$2\delta_{1/2}\tau_g(0) = \frac{2\left(1-\rho_2\right)a_2}{\pi\left(1-\rho_2 a_2\right)} \leq \frac{2}{\pi}, \tag{3.35}$$

où $2/\pi$ correspond au produit retard×bande passante d'un résonateur unique purement dispersif. Nous remarquons que le CRIT présente un produit retard×bande passante plus petit que dans le cas d'un résonateur unique. En revanche, l'augmentation du retard de groupe est rendue possible en cascadant des CRIT [101], ce qui n'est pas envisageable dans le cas d'un résonateur unique. Une étude détaillée de la comparaison entre un résonateur unique et une configuration CRIT est également proposée par Mario et Chin dans la référence [101].

Conclusion

Au vue des simulations, nous pouvons dégager deux remarques sur l'utilisation potentielle de ces deux configurations en tant que ligne à retard :

- Lorsque la fonction optique recherchée ne concerne que la ligne à retard fixe pour un signal monochromatique, le résonateur unique en configuration APF est le meilleur candidat.
- Dès lors que nous recherchons plus d'accordabilité, le résonateur unique est très limité. Par contre, un système de deux résonateurs co-résonants en configuration CRIT offrant un contrôle optique des pertes permet d'ajuster et de façonner les propriétés dispersives. Ces propriétés sont un atout pour ajuster dynamiquement le retard sans modifier la transmittance du système. Une dispersion d'ordre 3 nulle associée à une bande passante plus large permet de retarder des impulsions.

3.3 Expérience sur le CRIT actif

3.3.1 Montage expérimental

La réalisation expérimentale de ce qui précède nécessite un résonateur 1 très résonant et surcouplé et un résonateur 2 souscouplé et aux pertes variables. Pour cela nous utilisons

un système modèle basé sur des résonateurs à fibres.
Le montage expérimental est présenté sur la figure 3.9. Les cavités 1 et 2 sont réalisées à partir de fibre SMF 28 et d'un tronçon de fibre de 30 cm dopée Er^{3+} à 1100 ppm. Ce tronçon joue le rôle d'amplificateur afin de moduler les pertes de chaque anneau. Les anneaux 1 et 2 ont un périmètre de respectivement, $L_1 = 1,205$ m et $L_2 = 1,410$ m. Ils sont reliés entre eux par le coupleur C_1 (90%/10%) pour lequel 90% de la lumière est transmise et 10% de la lumière est couplée. L'anneau 2 est couplé à la ligne d'accès par un coupleur C_2 (99%/1%) afin de respecter la condition de sous-couplage précédemment établie. L'insertion et l'extraction de la pompe résiduelle sont effectuées par deux multiplexeurs 980/1550 nm. Le pompage des deux anneaux est réalisé de manière contra-propagative par deux pompes à 980 nm. La puissance de la pompe dans l'anneau 1 est fixée à $8,6$ mW afin de le rendre le plus transparent possible ($a_1 \approx 1$).

La partie amont du montage composée du dispositif de sonde [laser à 1550 nm, isolateur

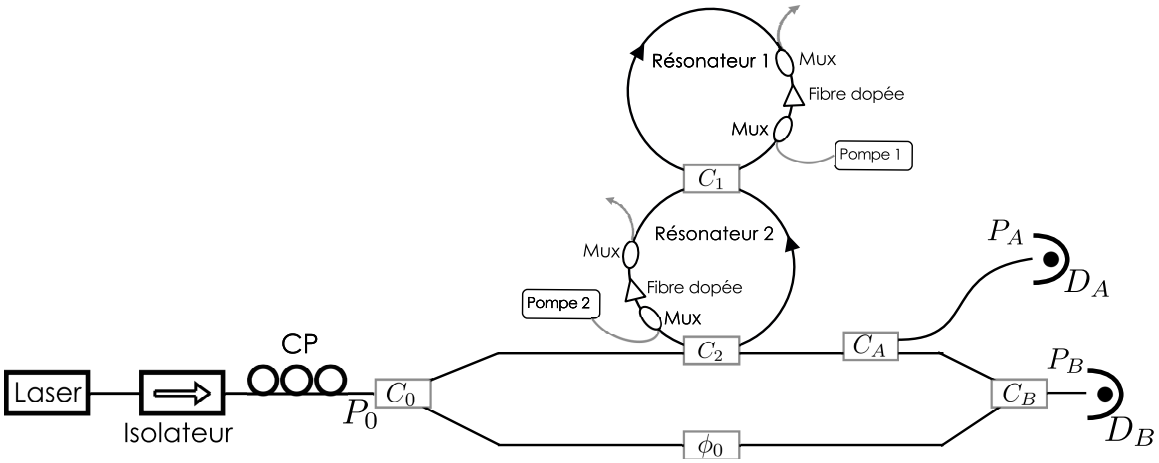


FIGURE 3.9 – Schéma expérimental pour la mesure simultanée de la transmission et de la phase d'un dispositif CRIT actif. Le montage expérimental est composé de deux boucles de fibre. Chaque boucle possède une section de fibre dopée Er^{3+} de 30 cm de long. Le système est implanté dans un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder. C_1 est un coupleur 99%/1%, C_2 est un coupleur 90%/10% tandis que C_0, C_A et C_B sont des coupleurs 50%/50%. CP correspond à un contrôleur de polarisation. La pompe à 980 nm est injectée et extraite des anneaux par des multiplexeurs 980/1550 nm notés M. P_0 correspond à la puissance de la pompe à l'entrée du Mach-Zehnder, quant à P_A et P_B elles correspondent respectivement aux puissances incidentes sur les détecteurs D_A et D_B. Le signal d'entrée est issue d'un laser à cavité externe de largeur de raie 150 kHz accordable sur 60 nm autour de 1550 nm. La raie laser est balayée sur un spectre de 5 GHz à une vitesse de $V_s \approx 0,4$ MHz/μs.

et contrôleur de polarisation] est le même que celui utilisé dans le chapitre 2. Le signal en sortie du dispositif de sonde est noté P_0. Pour mesurer la phase $\phi(\delta)$ et par là même le retard de groupe τ_g, le résonateur est placé dans le bras supérieur d'un Mach-Zehnder (MZ). La longueur du bras inférieur est choisie afin de s'affranchir de la dispersion chromatique de la fibre SMF 28. Le bras inférieur apportant alors seulement une variation de phase fixe ϕ_0. Les

deux bras sont reliés entre eux par un coupleur C_0 en entrée et C_B en sortie. Afin de mesurer la transmission du résonateur, et de s'assurer que nous avons un spectre similaire à celui de la figure 3.3(a), on prélève une partie du signal en sortie de l'anneau 2 par l'intermédiaire du coupleur C_A. Les signaux de transmission et de phase sont mesurés respectivement et simultanément sur les détecteurs D_A et D_B et visualisés sur un oscilloscope. Les détecteurs utilisés ne nécessitent pas de performances particulières en terme de niveau de détection, bande passante, etc. hormis un critère essentiel de linéarité en fonction de la puissance optique incidente. Les coupleurs C_0, C_A et C_B sont des coupleurs 3 dB (50%/50%). Pour limiter les fluctuations thermiques, les anneaux sont immergés dans un bac rempli d'eau.
Cette technique de mesure a été utilisée par de nombreux auteurs pour mesurer la dispersion de systèmes à lumière lente dans des milieux atomiques par EIT [102, 103] ou encore dans des résonateurs passifs de fibre en silice [53]. Plus récemment, Tomita *et al.* [104] utilisent ce même schéma expérimental pour mesurer la dispersion dans une microsphère.

3.3.2 Mesures de $T(\delta)$ et $\phi(\delta)$

En gardant les conventions de notation définies dans la partie théorique, la puissance incidente sur le détecteur D_A s'exprime comme :

$$P_A(\delta) = P_0 \rho_0^2 T(\delta) \rho_A^2. \tag{3.36}$$

La puissance incidente sur le détecteur D_B (sortie de l'interféromètre) se met sous la forme :

$$P_B(\delta) = P_0 \left\{ X^2(\delta) + X_0^2 + 2X(\delta)X_0 \cos\left[\phi(\delta) - \phi_0\right] \right\}, \tag{3.37}$$

avec :

$$X(\delta) = \sqrt{T(\delta)}\rho_0 \; ; \kappa_A \; ; \rho_B, \tag{3.38}$$

où $X_0 = \kappa_0 \; ; \kappa_B$.
Les mesures de P_A et P_B permettent de remonter à la transmission $T(\delta)$ et la phase $\phi(\delta)$ en fonction du désaccord fréquentiel δ du laser de sonde. Pour ce faire, les constantes du montage doivent être mesurées avec précision. Ainsi, les seules variables des expressions (3.36) et (3.37) sont $T(\delta)$ et $\phi(\delta)$. Les paramètres expérimentaux mesurés sont :

1. La puissance à l'entrée du Mach-Zehnder, $P_0 = 2,62$ mW,
2. Les coefficients de couplage ρ et κ des coupleurs C_0, C_2, C_A et C_B,
3. Les pertes introduites par chaque composant du montage à partir du point de fonctionnement P_0. Les pertes sont prises en compte dans les coefficients de couplage définis au point (2). Cette opération permet la normalisation des mesures de transmission et de phase.
4. La sensibilité des deux détecteurs afin de normaliser les mesures de puissance.

3.3.3 Protocole expérimental

Pour obtenir la réponse stationnaire du système, nous faisons évoluer la fréquence du laser de sonde à une vitesse $V_s \approx 0,4$ MHz/μs. Les mesures de P_A et P_B sont collectées simultanément. À l'aide de l'expression (3.36) nous en déduisons $T(\delta)$:

$$T(\delta) = \frac{P_A(\delta)}{P_0 \rho_0^2 \rho_A^2}. \tag{3.39}$$

Cette valeur reportée dans l'équation (3.38) donne $X(\delta)$ puis la phase $\phi(\delta)$:

$$\phi(\delta) = \phi_0 + \arccos\left[\frac{P_B(\delta)/P_0 - X^2(\delta) - X_0^2}{2X(\delta)X_0}\right]. \tag{3.40}$$

En différenciant cette dernière expression [Equ. (1.42)] nous obtenons le retard de groupe $\tau_g(\delta)$.
Les anneaux 1 et 2 n'ayant pas le même périmètre ($L_1 \neq L_2$), leurs ordres d'interférences sont différents :

$$M_i = \frac{nL_i}{\lambda_0}, \quad i \in \{1;2\} \tag{3.41}$$

Ainsi, pour que les deux cavités soient co-résonantes, il faut que le signal d'entrée ait une pulsation telle que $M_1 = pM_2$ avec M_1, M_2 et $p \in \mathbb{N}$.
Afin d'observer un grand nombre de résonances et donc de remplir cette dernière condition, un balayage du laser de sonde sur une large étendue spectrale (5 GHz) est primordial. De plus, nous utilisons un oscilloscope présentant une grande profondeur mémoire permettant de visualiser à différents instants l'étendue spectrale balayée.
Dans la partie théorique, nous avons montré que le contrôle actif du paramètre a_2 permettait d'ajuster le temps de groupe τ_g sans changer la transparence du système. La série de mesures de la figure 3.10 présente la transmittance $T(\delta)$ et le déphasage induit $\phi(\delta)$ en fonction du désaccord fréquentiel. Le paramètre a_2 est ajusté en modifiant le taux de pompage de l'anneau 2. Ainsi, on passe d'un faible pompage (1,5 μW) pour la vignette du haut, à 7,77 mW pour la vignette du bas. L'origine de l'échelle des abscisses est placée au maximun de transmission à résonance. Les mesures brutes récupérées à l'oscilloscope, présentent un bruit dont l'amplitude est rédhibitoire pour l'étape de différenciation numérique de la phase. Nous procédons à un lissage des données expérimentales en appliquant successivement : un filtrage FFT (*Fast Fourier Transform*), puis un filtre Savitzky–Golay [105] afin de supprimer les hautes fréquences et diminuer l'amplitude du bruit.
La valeur moyenne de la phase de $\phi(\delta)$ est soustraite afin de s'affranchir de ϕ_0. À partir de l'expression de la transmission complexe [Equ. (3.24)], on superpose les mesures de transmission et de phase au module et à l'argument de t_2. Nous introduisons alors dans l'équation (3.24) les valeurs expérimentales des paramètres suivant à savoir :

1. les valeurs de φ_1 et φ_2 à partir de l'expression $\varphi_i = n(\delta)\omega L_i/c$ avec $i \in \{1;2\}$;
2. Les valeurs mesurées de $|\kappa_2|^2 = 8,7\%$ et $|\rho_2|^2 = 91,3\%$.

Précisons que, $n(\delta) = 1,46$, correspond à l'indice effectif de la fibre passive SMF 28, on considère alors que l'indice de la fibre dopée est sensiblement le même. La dispersion chromatique dans le système sous test est considérée négligeable. Les seuls paramètres ajustés dans l'équation (3.24) sont :

1. Les coefficients de couplage de C_1, $|\kappa_1|^2 = 0,6\%$ et $|\rho_1|^2 = 99,4\%$;
2. Le taux de perte dans l'anneau 1, $a_1 = 0,996$;
3. Le taux de perte dans l'anneau 2 est modifié pour chaque taux de pompage. Les valeurs obtenues sont affichées sur chaque vignette des figures 3.10 et 3.11.

3.4 Les résultats

Les figures 3.10 et 3.11 présentent la transmission $T(\delta)$, le déphasage $\phi(\delta)$ et ses deux premiers ordres de dispersion à savoir τ_g et β_2. Le seul paramètre modifié durant l'expérience est le taux de perte dans l'anneau 2.

3.4.1 La transmission

Pour une augmentation du taux de pompage dans l'anneau 2, le coefficient a_2 augmente, par conséquent les pertes diminuent. Cependant la transmission à résonance reste constante, elle n'est pas affectée par les variations du taux de pompage. Cette observation est conforme avec les prévisions du modèle théorique [Fig. 3.7(a)]. Sur les flancs de la fenêtre de transparence, aux positions des nouvelles résonances en $\pm\delta_s$, la transmission $T(\pm\delta_s)$ diminue lorsque le pompage augmente. En effet, les pertes internes à l'anneau 2 étant plus faibles, l'intensité du champ intracavité augmente. Par conséquent, les interférences étant destructives en $\pm\delta_s$, la transmission diminue. Cette dernière observation confirme le caractère cohérent des phènomènes mis en jeu dans de telles structures.

Remarque

Le fait d'avoir un milieu à gain pompé optiquement pourrait induire une augmentation du bruit due à l'émission spontanée (ES) [106]. Celle-ci est générée, dans le cas d'une fibre dopée Erbium, sur un domaine spectral d'environ une centaine de nanomètres centré sur 1535 nm. Cependant, nous constatons que le niveau de bruit reste constant pour toutes les valeurs de pompage. Nous n'observons pas de perte de contraste sur la mesure de $T(\delta)$.
Le résonateur, jouant également le rôle de filtre, empêche l'exaltation de cette ES par effet de cavité. L'impact de l'émission spontanée peut donc être négligé. Pour conclure sur ce sujet, nous avons également entrepris la mesure du bruit résiduel provoqué par l'émission spontanée sans signal d'entrée. Son effet est là aussi négligeable.

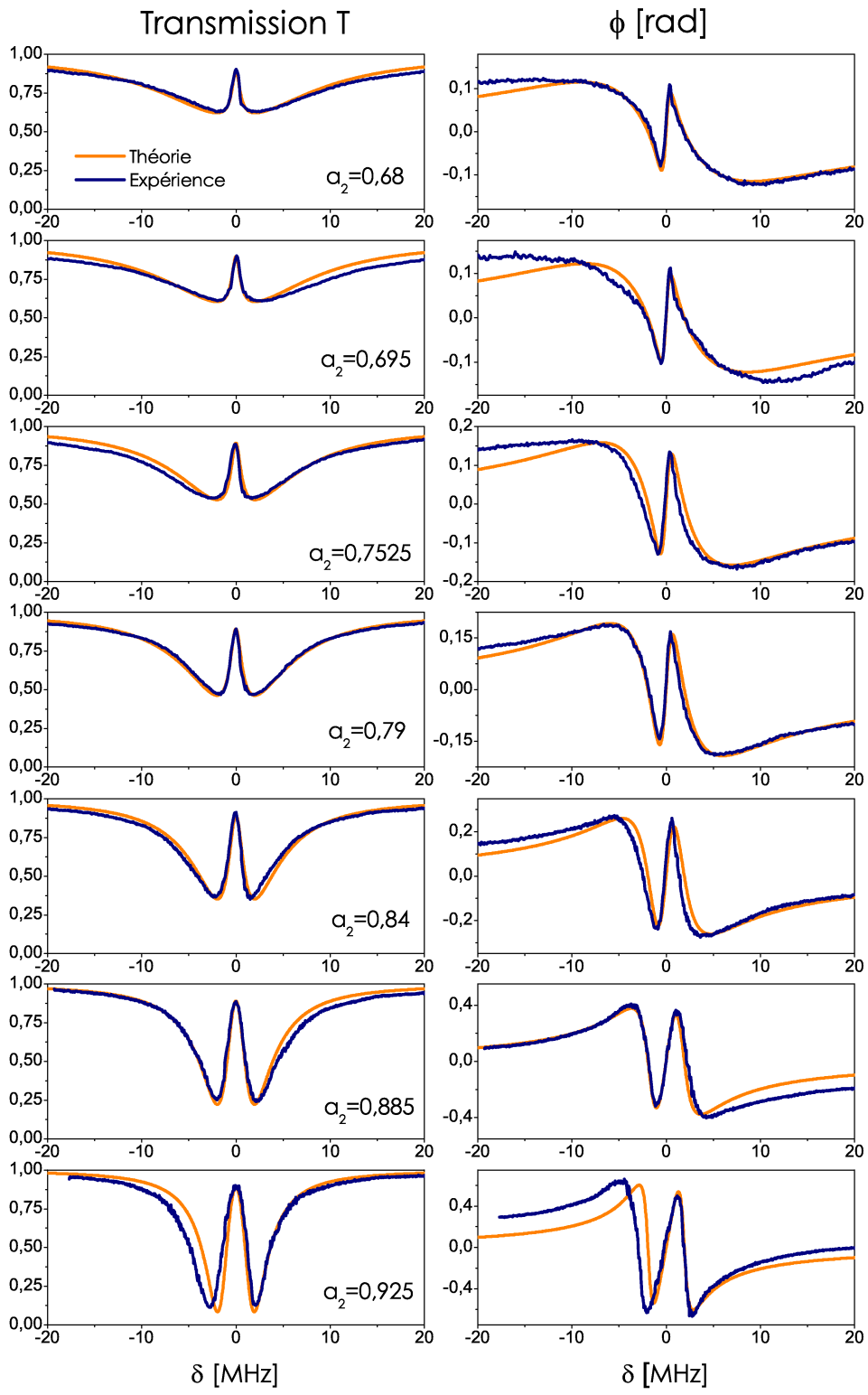


FIGURE 3.10 – Transmission et phase d'un CRIT actif. La puissance de pompe dans l'anneau 1 est de 8,6 mW. Les valeurs de pompe dans l'anneau 2 sont de haut en bas : 1,7 μW, 150 μW, 850 μW, 1,62 mW, 2,24 mW, 4,52 mW et 7,77 mW. Expérience (bleu) – théorie (orange).

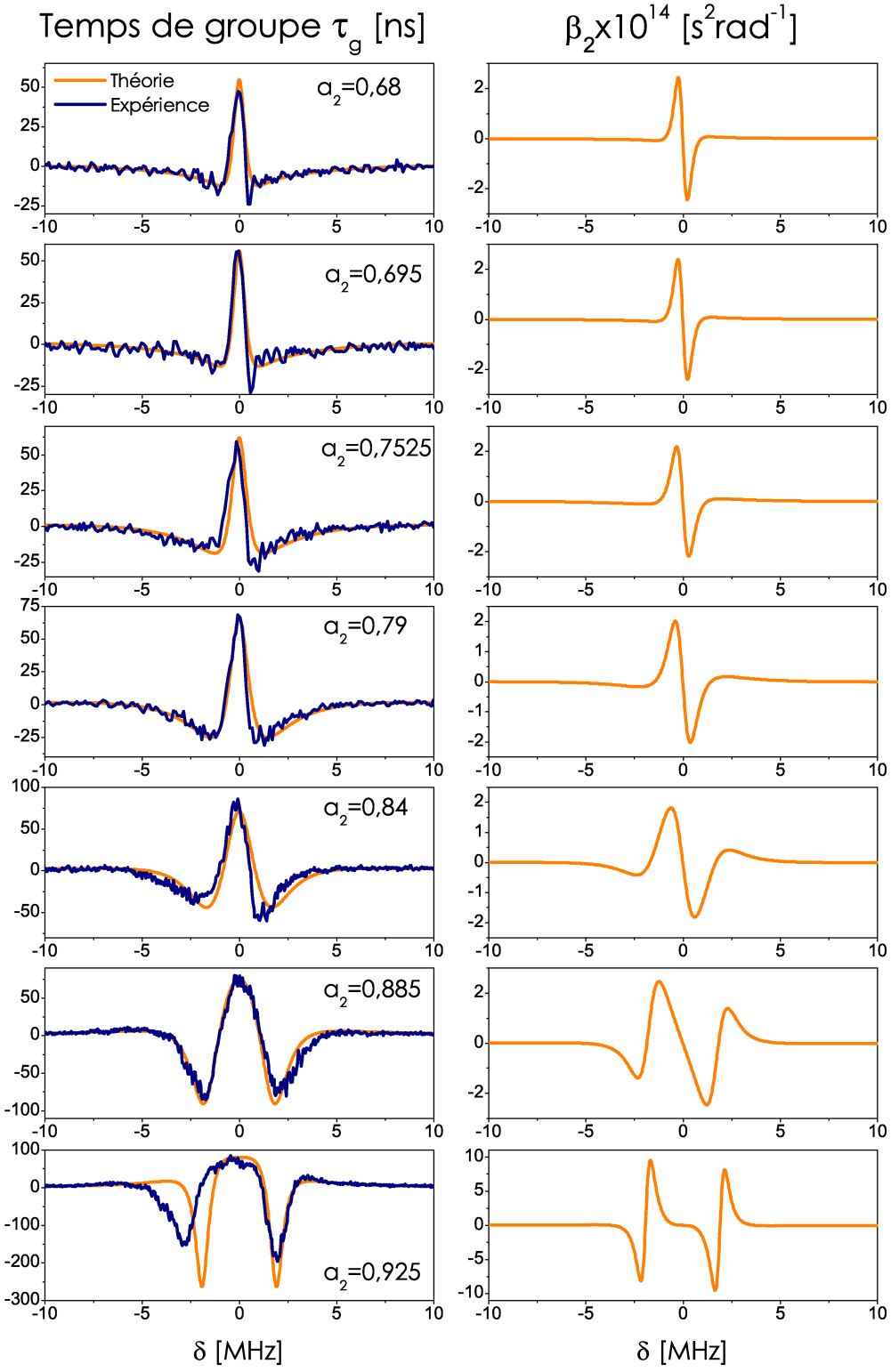


FIGURE 3.11 – Comparaison théorie (orange)/expérience (bleu) du retard de groupe τ_g d'un CRIT actif. La dispersion du second ordre β_2 est également représentée.

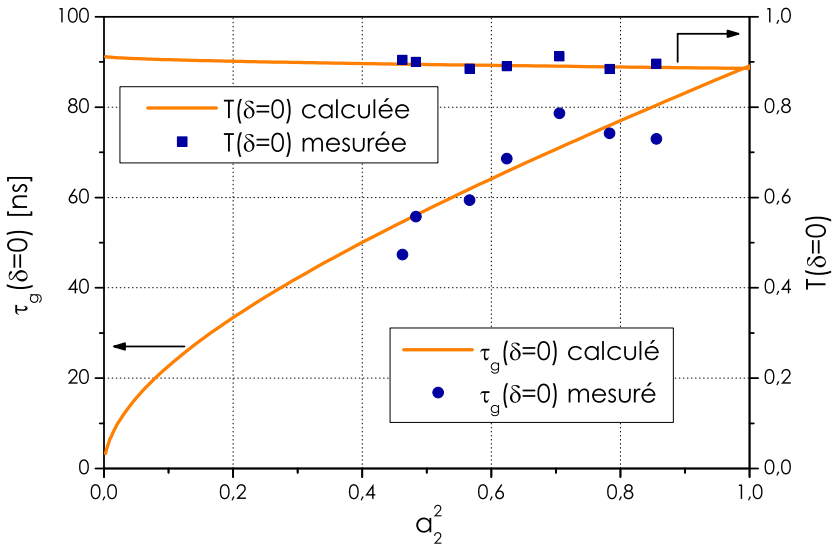


FIGURE 3.12 – Valeur de la transmission à résonance et valeur du temps de groupe τ_g en fonction du taux de perte a_2^2.

3.4.2 Le déphasage

Pour une augmentation du taux de pompage dans l'anneau 2 (variation de a_2), l'amplitude du déphasage ϕ augmente. La variation de la phase autour de la résonance présente des fronts de plus en plus étroits. Le modèle théorique se superpose d'une manière très correcte avec les mesures expérimentales. Par dérivation des courbes expérimentales et théoriques du déphasage nous obtenons le retard de groupe τ_g.
Le temps de groupe à résonance est positif (lumière lente). Pour une augmentation du taux de pompage, le retard augmente de concert ce qui valide les prédictions du modèle théorique [Fig. 3.7(a)].
Lorsque a_2 tend vers 1, la bande passante du signal retardé augmente et s'aplatit. Les différentes composantes spectrales d'un signal non-monochromatique peuvent être alors retardées de la même manière. Nous avons reporté sur la figure 3.12 les simulations et les mesures de la transmission T et du retard de groupe τ_g en fonction du taux de perte a_2^2.
La colonne de droite de la figure 3.11 présente la simulation du β_2 obtenue en dérivant les retards de groupe théorique [Fig. 3.11, colonne de gauche]. On ne dérive pas une deuxième fois les valeurs expérimentales du déphasage induit car le poids du bruit de mesure devient trop grand et ne permet pas une exploitation convenable du signal. La dispersion du retard de groupe s'annule naturellement à résonance du fait de la parité de τ_g. Dans le cas où $a_2 = 0,925$, elle s'annule sur une étendue spectrale correspondant à la zone sur laquelle le retard de groupe est constant. Ainsi, lorsque la dispersion d'ordre 2 s'annule, la dispersion à l'ordre 3 est nulle également. La figure 3.13 présente la dispersion β_3 pour trois valeurs de a_2. Comme nous l'avons montré théoriquement [Fig. 3.7(b)], il n'existe qu'une seule valeur

de a_2 pour laquelle $\beta_3 = 0$.

3.5 Conclusion

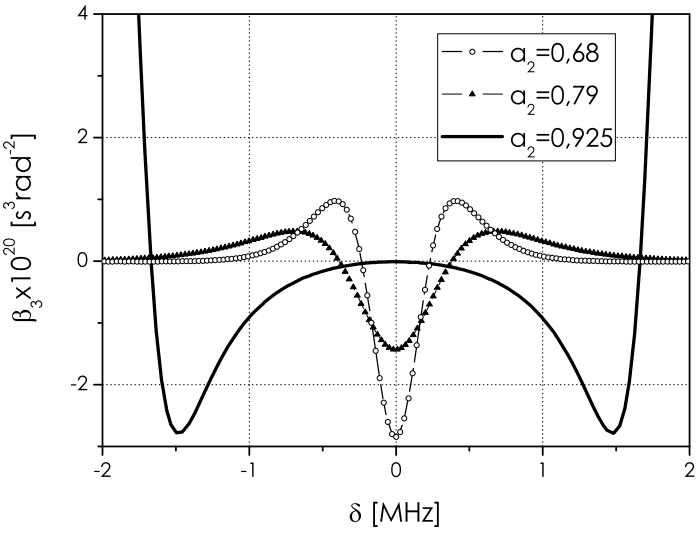


FIGURE 3.13 – Dispersion du troisième ordre pour 3 valeurs de a_2 obtenues expérimentalement. Pour $a_2 = 0,925$ la dispersion d'ordre 3 s'annule à résonance.

Nous retrouvons expérimentalement ce que les simulations du modèle théorique avaient permis d'établir. À savoir que pour un système donné de deux résonateurs couplés co-résonants, il est possible d'ajuster les propriétés dispersives de la structure sans modifier les coefficients de couplage.
Une telle configuration, offre simultanément un grand temps de groupe positif et une transmission à résonance proche de 1. Ces deux propriétés constituent les caractéristiques essentielles d'une ligne à retard optique [92, 107]. Nous avons vu que le contrôle des pertes internes par un pompage optique permet de régler dynamiquement le temps de groupe τ_g. Des applications pour ce genre de ligne à retard existent notamment dans le domaine des micro-ondes [108, 109].
Par pompage optique, nous pouvons non seulement accorder le temps de groupe mais aussi ajuster les ordres élevés de dispersion. Il est déjà proposé d'applatir la dispersion du temps de groupe afin de cumuler le retard dans des résonateurs couplés en choisissant les bons coefficients de couplage [100, 101, 110]. Cependant, il est difficile d'obtenir expérimentalement les paramètres de couplage prévus. Ainsi, en ajustant les pertes des résonateurs, nous montrons qu'il est possible d'ajuster la dispersion après fabrication, afin de trouver le point de fonctionnement annulant les ordres élevés de dispersion.

Une autre configuration à base de cavités couplées permet de retarder des signaux impulsionnels pendant un temps dépassant largement les limites imposées par le produit retard/bande passante. Une impulsion peut être piégée dans une telle structure pendant une durée uniquement limitée par les pertes résiduelles du résonateur 1 [111–113].
Voici une vue générale du protocole expérimental proposé [114] pour un dispositif de deux cavités couplées. Tout d'abord, le pompage des anneaux 1 et 2 est optimisé afin de placer le système dans un fonctionnement identique à celui de la figure 3.8. Les ordres de dispersion 2 et 3 sont alors annulés. L'impulsion rentre dans le dispositif. Le pompage de l'anneau 2 est alors progressivement diminué de sorte que l'impulsion soit "stoppée" dans le résonateur 1. En effet, les pertes dans l'anneau 2 deviennent tellement importantes qu'elles permettent de découpler l'anneau 1 de la ligne d'accès. Pour peu que les pertes intrinsèques au résonateur 1 et que le coefficient de couplage κ_1 soient faibles, l'impulsion peut résonner longtemps. Lorsque l'on souhaite libérer l'impulsion, il suffit de pomper à nouveau le résonateur 2 afin de replacer le système dans son état initial. L'utilisation de plusieurs anneaux permet de garantir un stockage adiabatique de l'impulsion [114].

Chapitre 4

Dispersion induite intracavité par couplage de résonateurs actifs

4.1 Introduction

De manière générale, les dispositifs à résonateurs couplés peuvent être utilisés comme filtres très dispersifs. Nous avons rappelé au chapitre 1 et 2 qu'un résonateur unique sans perte se comporte comme un filtre purement déphasant. Dans le chapitre 3, nous avons montré qu'un système de deux cavités couplées peut, sous certaines conditions, se comporter comme un milieu transparent et dispersif. L'avantage d'une telle structure artificielle réside dans la possibilité d'ajuster le temps de groupe par modulation des pertes internes. Nous présentons dans ce chapitre une utilisation de la dispersion induite par ce type de systèmes résonants.

L'insertion d'un milieu purement dispersif dans un interféromètre permet d'augmenter fortement sa sensibilité spectrale. Cet effet a été démontré auparavant en utilisant des systèmes atomiques et des effets cohérents comme la transparence induite électromagnétiquement (EIT) ou le piégeage cohérent de populations (CPT). Les expériences conduites dans ce domaine ont montré qu'il était possible d'augmenter le facteur de qualité d'une cavité en anneau à finesse fixée [115–117]. Par ailleurs, il a été proposé [118, 119] de remplacer le milieu atomique, siège des effets cohérents, par un milieu artificiel présentant une résonance optique. Nous avons vérifié cette dernière proposition en utilisant deux configurations expérimentales à base de résonateurs couplés. Dans la première, nous utilisons un résonateur pour augmenter artificiellement le chemin optique d'un second jouant le rôle de cavité cible. Dans ce cas, il est possible d'améliorer sensiblement le facteur de qualité du second résonateur. En pratique, cet effet se manifeste par l'exaltation du phénomène de "ringing" [Chap. 2], comme cela a été prévu théoriquement dans les systèmes atomiques par Yang *et al.* [120]. La seconde configuration est composée de trois résonateurs. Dans ce cas, le rôle du milieu purement dispersif est joué par un CRIT actif [Chap. 3]. Son caractère transparent à résonance

et son retard de groupe τ_g contrôlable par le gain permettent d'ajuster dynamiquement le facteur de qualité du troisième résonateur cible sans modifier le régime de couplage de ce dernier.

4.2 Principes fondamentaux

Nous étudions dans cette partie, de manière très générale, les modifications spectrales (en phase et en transmission) apportées par l'insertion d'un milieu purement dispersif dans une cavité en anneau [Fig. 4.1].

La cavité cible est un résonateur en anneau caractérisé par son miroir d'entrée/sortie de

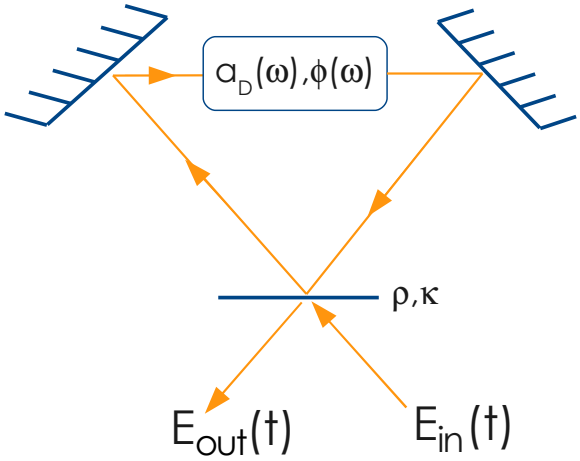


FIGURE 4.1 – Schéma d'une cavité en anneau contenant un milieu dispersif introduisant une phase supplémentaire $\phi(\omega)$ et des pertes $a_D(\omega)$. Les coefficients de réflexion et de transmission du miroir d'entrée/sortie sont respectivement ρ et κ. Les deux autres miroirs sont totalement réfléchissants. Les champs d'entrée E_{in} et E_{out} sont reliés par la fonction de tranfert en intensité T [Equ. (4.4)].

coefficients de réflexion ρ et de transmission κ en amplitude. Le miroir de couplage est considéré sans perte. Les deux autres miroirs sont parfaitement réfléchissants. Le matériau constituant la cavité est un diélectrique caractérisé par son coefficient de pertes en amplitude a_0. La phase φ accumulée sur un tour est définie par $\varphi(\omega) = n(\omega)L\omega/c$ où n est l'indice de réfraction de la cavité et L son périmètre.

L'élément dispersif, permettant le contrôle des propriétés spectrales de la cavité est supposé ponctuel. Il est décrit par son terme d'atténuation $a_D(\omega)$ et son terme de phase $\phi(\omega)$. Dans le cas où il est absent, nous parlerons de "cavité seule", auquel cas $a_D = 1$ et $\phi = 0$.

Contrairement à a_0 et φ, les coefficients $a_D(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sont très dispersifs. Ils correspondent respectivement aux facteurs d'amplitude et de phase de la fonction de transfert du milieu dispersif introduit. Le résonateur avec son milieu dispersif est alors décrit par un nouveau

terme d'atténuation en amplitude :

$$a_C = a_0 a_D, \tag{4.1}$$

et un nouveau terme de phase accumulée sur un tour de cavité :

$$\Phi = \phi + \varphi. \tag{4.2}$$

La fonction de transfert en amplitude d'un résonateur unique avec son milieu dispersif artificiel prend la forme suivante :

$$t = |t| e^{\arg(t)} = \frac{\rho - a_C e^{j\Phi}}{1 - \rho a_C e^{j\Phi}}. \tag{4.3}$$

Nous en déduisons la fonction de transfert en intensité $T = |t|^2$:

$$T = \left| \frac{E_{out}}{E_{in}} \right|^2 = \frac{\rho^2 + a_C^2 - 2a_C\rho\cos\Phi}{1 + a_C^2\rho^2 - 2a_C\rho\cos\Phi}. \tag{4.4}$$

En faisant l'hypothèse d'une cavité de grande finesse, la transmission hors résonance est unitaire ($T_{\max} \approx 1$). À résonance ($\Phi(\omega_0) = 0\ [2\pi]$) on atteint un minimum de transmission :

$$T_{\min} = \frac{[\rho - a_C(\omega_0)]^2}{[1 - a_C(\omega_0)\rho]}. \tag{4.5}$$

Le couplage critique est réalisé pour une transmission nulle ce qui donne $\rho = a_C(\omega_0)$. Le signal d'entrée interfère alors destructivement avec le champ sortant de la cavité. Toujours dans l'hypothèse de grande finesse, nous obtenons l'expression de la largeur à mi-hauteur en terme de phase :

$$\Delta\Phi_{1/2} = \frac{2[1 - a_C(\omega_0)\rho]}{\sqrt{a_C(\omega_0)\rho}}. \tag{4.6}$$

Le développement limité au premier ordre de la phase Φ [Equ. (4.2)] par rapport à ω s'écrit :

$$d\Phi = d\omega \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} = d\omega \left(\left.\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} \right) = d\omega \left(\tau_g + \frac{n_g(\omega_0)L}{c} \right), \tag{4.7}$$

τ_g représente le retard de groupe introduit par le milieu dispersif et n_g l'indice de groupe du matériau constituant la cavité seule. En utilisant les expressions (4.6) et (4.7) nous obtenons une expression de la largeur à mi-hauteur (en fréquence angulaire) de la fonction de transfert :

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{\Delta\Phi_{1/2}}{\tau_g(\omega_0) + \frac{n_g(\omega_0 L)}{c}}. \tag{4.8}$$

qui peut être réécrite en fréquence sous la forme :

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta\nu^0_{1/2}}{1 + \frac{\tau_g(\omega_0)}{\tau_L(\omega_0)}}, \tag{4.9}$$

où $\tau_L = n_g L/c$ est le temps de parcours de la cavité vide. Dans cette expression, $\Delta\nu^0_{1/2}$ représente la largeur à mi-hauteur de la fonction de transfert de la cavité seule :

$$\Delta\nu^0_{1/2} = \frac{c[1 - a_C(\omega_0)\rho]}{\pi n_g(\omega_0) L \sqrt{a_C(\omega_0)\rho}}. \tag{4.10}$$

Expression du facteur de qualité

Notons Q_0 le facteur de qualité de la cavité seule :

$$Q_0 = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{1/2}^0}, \tag{4.11}$$

nous pouvons alors exprimer le facteur de qualité de la cavité avec son milieu dispersif :

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{1/2}} = Q_0 \left(1 + \frac{\tau_g(\omega_0)}{\tau_L(\omega_0)}\right). \tag{4.12}$$

Cette dernière expression montre qu'il est possible d'augmenter le facteur de qualité d'une cavité en y insérant un milieu dispersif. L'amélioration du facteur de qualité est d'autant plus grande, que le temps de groupe τ_g supplémentaire introduit par le milieu dispersif est important.

Remarque

En considérant un milieu dispersif parfaitement transparent, son effet sur la cavité se réduit à un déphasage supplémentaire. L'utilisation d'un tel système permet en particulier de conserver le régime de couplage initial de la cavité.

4.3 Augmentation du facteur de qualité par couplage de résonateurs

Appliquons ces principes fondamentaux au cas des milieux dispersifs artificiels à base de cavités couplées. Dans un premier temps, nous étudions de manière théorique la structure générique constituée [Fig. 4.2] d'un système de N résonateurs couplés défini dans le paragraphe 3.1.2. En respectant les conventions utilisées précédemment nous notons pour chaque cavité φ_i le déphasage induit sur un tour de longueur L_i. Nous nous intéressons uniquement à la dispersion artificielle générée par le couplage des résonateurs. Aussi, considérons nous négligeable la dispersion apportée par le matériau constituant les anneaux. Par conséquent $n_g = n$ et donc $\varphi_i(\omega) = n\omega L_i/c$. Nous notons a_i l'atténuation introduite par la i$^{\text{ème}}$ boucle. Les coupleurs sont toujours considérés sans perte ($\rho_i^2 + \kappa_i^2 = 1$), sans perte de généralité, nous considérons $\rho_i > 0$. La figure 4.2 représente le schéma équivalent du système. La cavité dont nous souhaitons modifier les propriétés spectrales est la boucle N. Les $N-1$ autres boucles constituent le milieu dispersif artificiel [Fig. 4.2]. Nous utilisons alors les notations établies dans le paragraphe précédent au cas particulier des résonateurs couplés. Ainsi, $\rho = \rho_N$, $L = L_N$, $\varphi = \varphi_N$, $a_0 = a_N$, $a_D = |t_{N-1}|$ et $\phi = \arg(t_{N-1})$. Chaque cavité est décrite par sa fonction de transfert $t_i(\omega)$ [Equ. (3.22)] :

$$t_i = |t_i|e^{j\phi_i} = \frac{\rho_i - t_{i-1}a_i e^{j\varphi_i}}{1 - t_{i-1}\rho_i a_i e^{j\varphi_i}}.$$

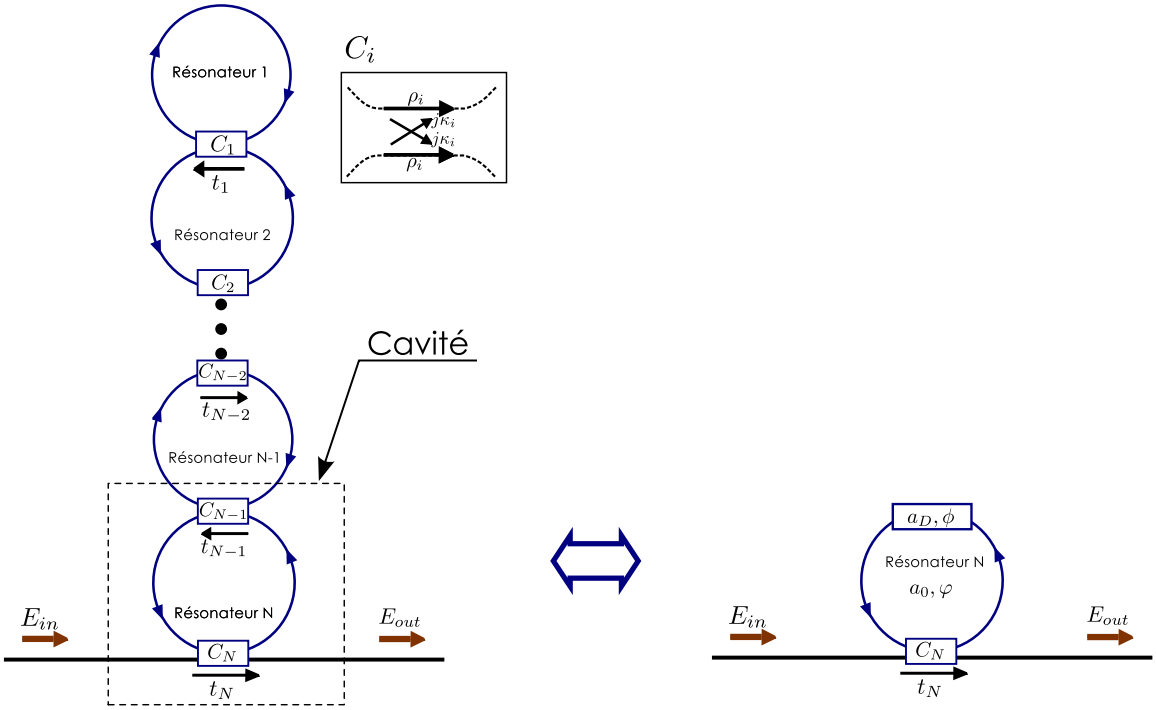


FIGURE 4.2 – Système de N cavités couplées. Chaque étage ($i \in [1; N]$) est caractérisé par sa fonction de transfert t_i, son coupleur C_i, son atténuation a_i et sa phase φ_i sur un tour. Les champs d'entrée et de sortie du système sont E_{in} et E_{out}.

La transmission en intensité de la cavité N est alors donnée par $T = |t|^2 = |t_N|^2$. Elle est obtenue par récurrence à partir de t_i pour $i \in [1; N]$. Le résonateur 1 est considéré sans perte sa fonction de transfert vaut donc $t_0 = 1$.

Suivant la configuration des $N-1$ résonateurs [fixée par les taux de pertes, coefficients de couplage et relation de phase] nous étudions successivement deux architectures permettant l'observation de : (i) la réduction de la largeur de raie par couplage de cavité [partie 4.3.1], (ii) la dispersion induite intracavité par couplage de résonateurs actifs [partie 4.3.2].

4.3.1 Réduction de la largeur de raie par couplage de cavités purement dispersives

4.3.1.1 Cas général

Dans ce premier exemple, le milieu dispersif que nous insérons dans la cavité N correspond aux $N-1$ anneaux de la figure 4.2. Ce modèle de structure, proposé par I. Golub [118], impose d'utiliser des résonateurs sans perte n'apportant qu'un déphasage dépendant de leurs coefficients de couplage. En considérant tous les coupleurs identiques et des anneaux de périmètres semblables nous avons : $a_i = 1$, $\rho_i = \rho$ et $L \approx \ell$ pour $i \in [1; N-1]$, où ℓ correspond au périmètre moyen de chaque cavité.
Cette structure de $N-1$ résonateurs sans perte apporte alors à la cavité N une phase

$\phi = \arg(t_{N-1})$ et un coefficient de perte $a_D = |t_{N-1}| = 1$.
Nous allons maintenant exprimer le facteur de qualité de la cavité N modifié par l'action des $N-1$ résonateurs constituant le milieu dispersif.
L'expression de la phase ϕ induite par le milieu dispersif est obtenue par récurrence à partir de l'expression de ϕ_i :

$$\phi_i = \arg(t_i) = \pi + \varphi_i + \phi_{i-1} + 2\arctan\left(\frac{\rho\sin(\varphi_i+\phi_{i-1})}{1-\rho\cos(\varphi_i+\phi_{i-1})}\right), \quad i \in [1; N-1] \tag{4.13}$$

avec $\phi_0(\omega_0) = 0$.
Nous posons $L_1 = \ell = M\lambda_0/n$ où $\lambda_0 = c/\nu_0$ est la longueur d'onde résonante et M l'ordre d'interférence tel que $M \in \mathbb{N}$ (ici $M \gg 1$). Afin d'obtenir la relation de phase adéquate :

$$\varphi_i(\omega_0) + \phi_{i-1}(\omega_0) = 0[2\pi]. \quad i \in [1; N-1], \tag{4.14}$$

on suppose $L_i = L_1 + \lambda_0/(2n)$. Nous avons ainsi $\varphi_1(\omega_0) = 0[2\pi]$ et $\varphi_i(\omega_0) = \pi[2\pi]$ pour $i \in [2; N]$. La phase apportée par chaque boucle vaut alors $\phi_i(\omega_0) = \pi[2\pi]$ pour $i \in [1; N-1]$. De cette manière on s'assure que chaque cavité résonne pour la fréquence ν_0.
Le retard de groupe à résonance τ_i apporté par chaque étage s'écrit :

$$\tau_i = \left.\frac{\partial\phi_i}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} = \frac{1+\rho}{1-\rho}(\tau_\ell + \tau_{i-1}), \tag{4.15}$$

où $\tau_\ell = n\ell/c$ et $\tau_0 = 0$. Par sommation, nous exprimons le temps de groupe apporté par le milieu dispersif :

$$\tau_g(\omega_0) = \tau_{N-1} = \frac{1+\rho}{2\rho}\left[\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{N-1} - 1\right]\tau_\ell. \tag{4.16}$$

En introduisant cette expression dans l'équation (4.12), le facteur Q devient :

$$Q = Q_0\left\{1 + \frac{1+\rho}{2\rho}\left[\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{N-1} - 1\right]\frac{\ell}{L}\right\}. \tag{4.17}$$

En supposant $L \approx \ell$, ce qui revient à dire que les cavités ont pratiquement toutes le même périmètre, on peut alors écrire :

$$Q = Q_0\frac{1+\rho}{2\rho}\left[\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{N-1} + \frac{\rho-1}{\rho+1}\right]. \tag{4.18}$$

Dans les systèmes que nous étudions, le couplage entre les cavités est toujours supposé faible ($\rho \approx 1$). Dans ce cas, nous pouvons prendre pour expression approchée du facteur de qualité global :

$$Q \approx Q_0\left(\frac{2}{1-\rho}\right)^{N-1}. \tag{4.19}$$

L'expression (4.19) permet de calculer la largeur de raie :

$$\Delta\nu_{1/2} \approx \Delta\nu^0_{1/2}\left(\frac{1-\rho}{2}\right)^{N-1}. \tag{4.20}$$

Les expressions (4.19) et (4.20), montrent que le couplage de $N-1$ cavités purement dispersives permet d'augmenter de manière exponentielle le facteur de qualité du résonateur N choisi comme cavité cible.

4.3.1.2 Application à deux cavités

La figure 4.3 présente la transmission en intensité T dans le cas de deux anneaux couplés. T est tracée en fonction du désaccord fréquentiel δ tel que $\omega = 2\pi\nu = 2\pi(\nu_0 + \delta)$. Le milieu purement dispersif ($a_1 = 1$) correspond à l'anneau 1. Nous choisissons pour coefficients de couplage $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0,95$. Afin d'obtenir un couplage critique le taux de perte dans l'anneau 2 vaut $a_2 = 0,95$.

La finesse $\mathcal{F}$ de la cavité 2 isolée peut s'écrire :

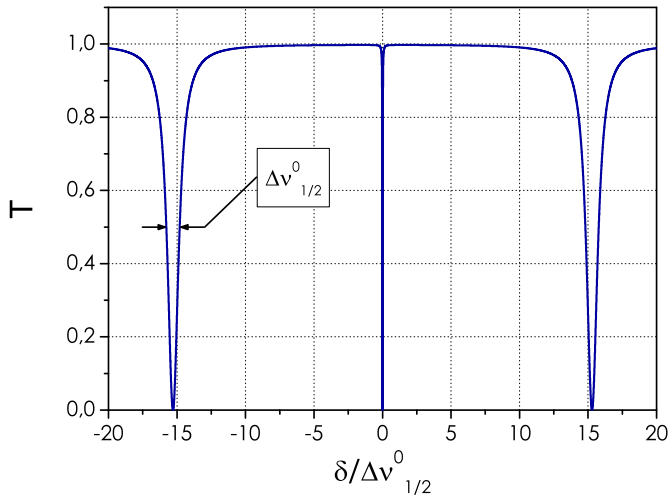


FIGURE 4.3 – Transmission $T = |t_2|^2$ dans le cas de deux résonateurs. Leurs périmètres sont tels que $L_2 = L_1 + \lambda_0/(2n)$. Les autres paramètres de la structure sont : $a_2 = \rho = \rho_1 = \rho_2 = 0,95$ et $a_1 = 1$.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\Delta\nu^0_{1/2}\tau_L}. \tag{4.21}$$

En supposant un couplage critique de la cavité ($a_2 = \rho_2$) et en utilisant l'équation (4.10), la finesse prend la forme simplifiée :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\rho_2}{(1-\rho_2^2)} \approx 30,6. \tag{4.22}$$

L'axe des abscisses du graphique 4.3 étant normalisé par rapport à $\Delta\nu^0_{1/2}$, les résonances de la cavité 2 (sans le milieu dispersif) sont placées en $\pm\mathcal{F}/2$. Leur largeur à mi-hauteur est $\Delta\nu^0_{1/2}$. En revanche, en $\delta = 0$, apparaît une résonance beaucoup plus fine. Cette raie d'absorption supplémentaire provient de l'interaction des deux cavités. À la fréquence ν_0 le résonateur 1 introduit un déphasage de π et un chemin optique supplémentaires permettant l'apparition d'une raie composite très étroite. Sa largeur à mi-hauteur est directement proportionnelle au coefficient de couplage $\rho_1 = \rho$ choisi. Dans notre cas, la raie est affinée d'un facteur $2/(1-\rho) = 40$ par rapport aux deux autres raies caractéristiques de la cavité 2 unique

[Equ. (4.20)]. Par conséquent le facteur de qualité du système est également exalté d'un facteur 40. Remarquons que le milieu dispersif (anneau 1) apporte une amélioration des propriétés de résonance du système sans en modifier le couplage.

4.3.1.3 Rôle des pertes

Nous avons étudié le cas idéal où le milieu dispersif est considéré sans perte. En pratique, les résonateurs présentent toujours des pertes. Ce facteur limitant doit être pris en compte [88, 118]. Si chaque résonateur constituant le milieu dispersif présente des pertes comparables à la cavité cible, les pertes globales du système sont également augmentées de manière exponentielle. Il faut alors déterminer le nombre maximum de cavités que l'on peut coupler pour conserver un effet bénéfique sur le facteur de qualité de la cavité cible.
Prenons le cas de résonateurs passifs réels, en considérant qu'ils sont tous identiques ($a_i = a < 1$), la nouvelle fonction de transfert en amplitude $t_i(\omega_0)$ à résonance avec $i \in [2; N-1]$ s'écrit :

$$t_i(\omega_0) = \frac{a t_{i-1}(\omega_0) + \rho}{\rho a t_{i-1}(\omega_0) + 1}, \tag{4.23}$$

avec

$$t_1(\omega_0) = \frac{\rho - a}{1 - \rho a}. \tag{4.24}$$

La relation de phase [Equ. (4.14)] choisie impose $t_1(\omega_0) < 0$, le dernier résonateur ($i = 1$) doit être en régime de sur-couplage ($\rho < a$).
L'équation (4.23) correspond au terme général d'une suite récurrente homographique. Elle peut donc s'écrire :

$$t_i(\omega_0) = \frac{\Lambda^- - y_1 \Lambda^+ k^{i-1}}{1 - y_1 k^{i-1}}, \tag{4.25}$$

où nous identifions les limites de la suite :

$$\Lambda^{\pm} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a\rho^2}}{2a\rho}, \tag{4.26}$$

ainsi que :

$$k = \frac{a + 1 + \sqrt{(1-a)^2 + 4a\rho^2}}{a + 1 - \sqrt{(1-a)^2 + 4a\rho^2}}, \tag{4.27}$$

et :

$$y_1 = \frac{t_1(\omega_0) - \Lambda^-}{t_1(\omega_0) - \Lambda^+}. \tag{4.28}$$

Comme $k > 1$, la suite $(t_i(\omega_0))$ est croissante et tend vers la racine positive Λ^+. Ainsi, pour une certaine valeur $i_{\max}$ de i, la transmission à résonance $t_{i_{\max}}(\omega_0)$ devient positive.
Rappelons que $t_i(\omega_0)$ doit être un réel strictement négatif afin d'apporter exactement une phase $\Phi(\omega_0) = \pi$ afin de satisfaire à la relation (4.14). Au moment où $t_{i_{\max}}(\omega_0) > 0$ cette dernière relation n'est plus satisfaite et le résonateur $N = i_{\max} + 1$ est hors résonance. Le milieu dispersif ne joue alors plus son rôle et n'introduit que des pertes supplémentaires dans le système.

Dans le cas de résonateurs présentant de faibles pertes et en ne gardant que le développement limité au premier ordre en $(1-a)$ nous avons :

$$\Lambda^{\pm} \approx \frac{(a-1)(1 \mp \rho)}{2\rho} \pm 1 \tag{4.29}$$

et :

$$k \approx \frac{1+\rho}{1-\rho} \tag{4.30}$$

Le terme y_1 peut alors prendre la forme approchée suivante :

$$y_1 \approx -\frac{(1-a)(1+\rho)^2}{4\rho(1-\rho)}. \tag{4.31}$$

Nous déduisons de l'expression (4.25) que le terme t_i devient positif pour :

$$\Lambda^{-} = y_1 \Lambda^{+} k^{i-1}. \tag{4.32}$$

Nous calculons alors $i_{\max}$ tel que $i_{\max} = 1 + \mathrm{E}\left(f(a,\rho)\right)$ où nous définissons :

$$f(a,\rho) = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\Lambda^{-}}{y_1 \Lambda^{+}}\right)}{\ln k}, \tag{4.33}$$

avec $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x. En utilisant la même approximation à l'ordre 1 de $(1-a)$ nous obtenons :

$$f(a,\rho) \approx 1 + \frac{\ln[4\rho(1-\rho)] - \ln[(1+\rho)^2(1-a)]}{\ln(1+\rho) - \ln(1-\rho)}, \tag{4.34}$$

qui représente approximativement $i_{\max}$ le nombre de résonateurs utiles.
La figure 4.4 présente la fonction $f(a,\rho)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de a.
La lecture de ce graphique nous donne deux informations. Premièrement, pour une valeur fixée de l'atténuation a, le nombre de résonateurs utiles décroît lorsque le couplage entre les résonateurs $\left(\kappa = \sqrt{1-\rho^2}\right)$ diminue. Deuxièmement, pour une valeur de ρ fixée, le nombre de résonateurs utiles diminue lorsque les pertes augmentent $(a \to 0)$. Ce graphe souligne le caractère excessivement limitant des pertes de propagation dans les résonateurs du milieu dispersif

4.3.1.4 Impact des pertes sur un système de trois cavités

Nous allons montrer dans le cas de trois cavités que l'influence des pertes est différente suivant le rang du résonateur du milieu dispersif. La figure 4.5 présente les spectres de transmission $T = |t_3|^2$ en fonction de $2\delta/\Delta\nu^0_{1/2}$ pour les paramètres suivants : $L_3 = L_2 = L_1 + \lambda_0/(2n)$ et $a_3 = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$. La fenêtre d'observation choisie pour le spectre de la transmission T est limitée à la raie composite.
Suivant les valeurs relatives de a_1 et a_2 trois cas se dégagent :

1. Le cas idéal sans perte $(a_1 = a_2 = 1)$, le résonateur conserve son couplage critique et sa largeur à mi-hauteur est réduite d'un facteur 1600 [Equ. (4.20)].

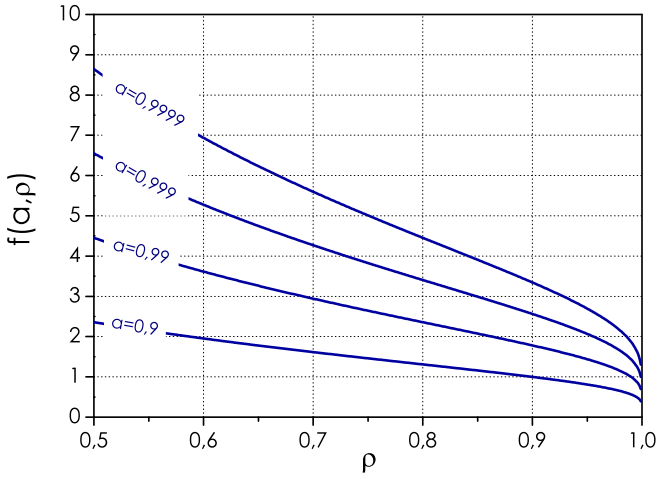


FIGURE 4.4 – Représentation de la fonction $f(a, \rho)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs du coefficient de perte a.

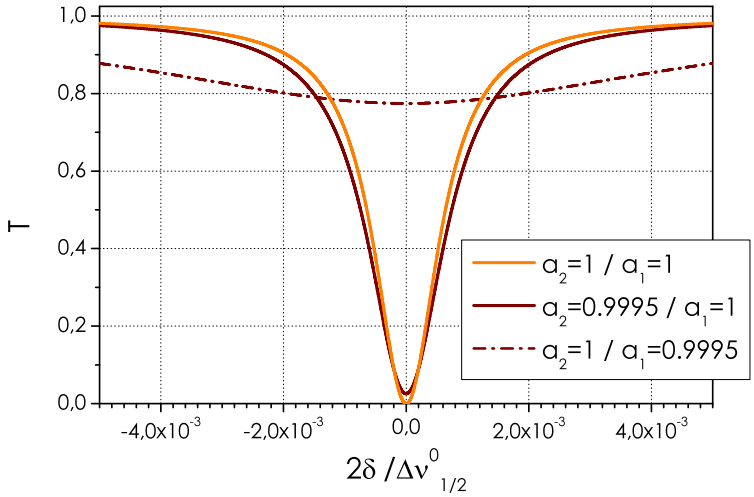


FIGURE 4.5 – Spectre de transmission $T = |t_3|^2$ dans le cas de trois anneaux $N = 3$ sensiblement identiques. Les longueurs de cavités sont choisies de telle manière que $L_3 = L_2 = L_1 + \lambda_0/(2n)$ avec $a_3 = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ pour différentes valeurs des coefficients de perte dans les anneaux 1 et 2.

2. Pour $a_1 = 1$ et $a_2 = 0,9995$, le système présente sensiblement les mêmes caractéristiques spectrales que dans le cas précédent.

3. Pour $a_1 = 0,9995$ et $a_2 = 1$, le résonateur 1 présente des pertes, il n'est plus purement dispersif. Dans ce cas la résonance est très nettement élargie et le caractère critique du couplage a totalement disparu.

Conclusion

De manière générale l'impact des pertes diminue avec le rang du résonateur. On notera également que les pertes du milieu dispersif peuvent modifier fortement les conditions de couplage de la cavité cible. Ce type de configuration présente donc un intérêt uniquement lorsque le résonateur externe (cavité 1) est réellement sans perte ($a_1 = 1$). Quand cette condition est remplie, l'augmentation du facteur de qualité est fixée simplement par les taux de couplage choisis. Nous avons donc envisagé une autre architecture permettant un contrôle dynamique du facteur de qualité en utilisant des résonateurs à pertes modulables.

4.3.2 Dispersion induite intracavité par couplage de résonateurs actifs

Dans ce dispositif de trois cavités, le résonateur 3 est le résonateur de référence dont on veut améliorer le facteur de qualité. Les cavités 1 et 2 correspondent au milieu dispersif, nous choisissons un système de deux cavités co-résonantes en configuration CRIT comme décrit dans le chapitre 3.
Les caractéristiques du CRIT à savoir une transmission $|t_2|^2$ indépendante des pertes et un retard de groupe τ_g variant avec a_2 vont nous permettre de contrôler le facteur de qualité de la cavité 3 **sans modifier son régime de couplage**.
Le dispositif est décrit sur la figure 4.6. Nous employons les notations de la partie 4.2. Les pertes et la phase apportées par le milieu dispersif sont $a_D = |t_2|$ et $\phi = \phi_2 = \arg(t_2)$, la cavité 3 est quant à elle caractérisée par $\rho = \rho_3$ et $L = L_3$. La fonction de transfert de la structure est alors : $T = |t|^2 = |t_3|^2$.

4.3.2.1 Principe

Pour conserver les propriétés de couplage de la cavité cible, la transmission du milieu dispersif doit être identique quelles que soit les pertes introduites dans le résonateur 2, et doit vérifier :

$$a_D(\omega_0, a_2)a_3 = \rho_3 \quad \forall a_2, \tag{4.35}$$

cette condition permet d'obtenir $a_C(\omega_0) = \rho_3$ et assure de plus un couplage critique de la cavité. Comme nous l'avons vu précédemment (p. 70), pour le choix de paramètres suivants : $\rho_1 = a_1$ et $\phi_1(\omega_0) = \phi_2(\omega_0) = 0[2\pi]$, la fonction de transfert en amplitude du CRIT vaut $t_2 = \rho_2$ indépendamment de a_2. La condition imposée par la relation (4.35) est alors remplie. Étant donné que t_2 est réel, à résonance la phase apportée par le milieu dispersif est nulle :

$$\phi(\omega_0) = \phi_2(\omega_0) = 0[2\pi]. \tag{4.36}$$

Dans ce cas, la fréquence de résonance de la cavité 3 n'est pas modifiée par la présence du CRIT.
Rappelons que le CRIT est un système de deux cavités couplées co-résonantes ($L = L_1 = L_2$)

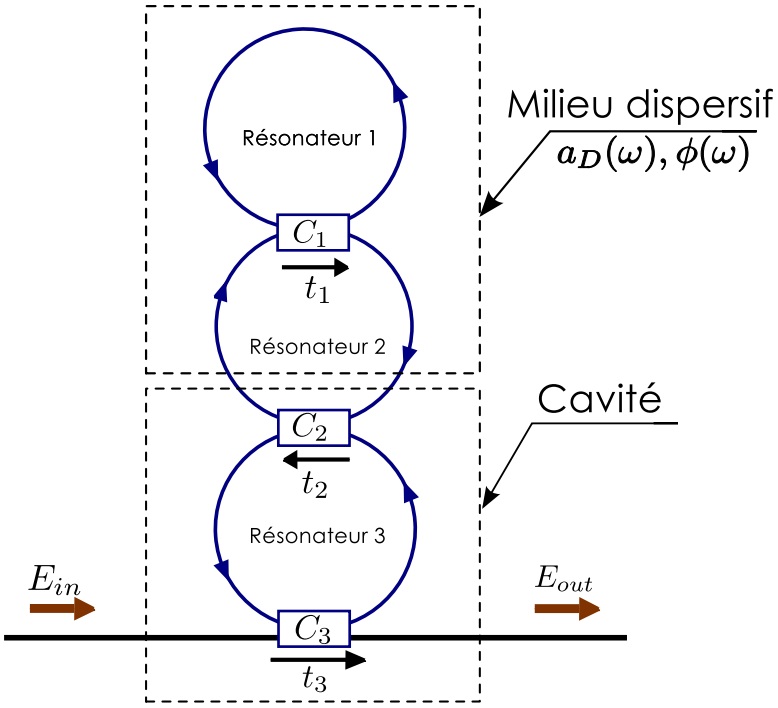


FIGURE 4.6 – Schéma du système permettant l'exaltation de la dispersion à partir de résonateurs actifs couplés. Le facteur de qualité Q du résonateur 3 est ajusté par le milieu dispersif réalisé à partir d'un CRIT (cavité 1 et 2). Chaque cavité est caractérisée par sa fonction de transfert t_i pour $i \in [1;3]$.

qui, pour les paramètres structurels choisis ci-dessus, présente un temps de groupe τ_g variant linéairement avec le coefficient de pertes a_2 [Equ. (3.32)] :

$$\tau_g = a_2 \frac{\rho_1\left(1-\rho_2^2\right)}{\rho_2\left(1-\rho_1^2\right)}\tau_L.$$

D'après l'équation (4.9), la largeur à mi-hauteur de la fonction de transfert du résonateur 3 s'écrit :

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta\nu_{1/2}^0}{1 + a_2\frac{\rho_1\left(1-\rho_2^2\right)}{\rho_2\left(1-\rho_1^2\right)}}. \tag{4.37}$$

Pour des paramètres de couplage fixés, la largeur de la résonance de la structure dépend directement du coefficient de perte a_2.

Pour placer le résonateur 3 en régime critique quel que soit le cas étudié, prenons $a_3 = 1$ et $\rho_2 = \rho_3$, les pertes globales de la cavité 3 sont alors égales au coefficient de transmission ρ_3. Pour illustrer notre propos, nous simulons cette configuration pour les valeurs de paramètre $\rho_1 = a_1 = 0,995$ et $\rho_2 = \rho_3 = 0,95$. Nous rappelons que les trois cavités sont co-résonantes à la fréquence ν_0. La figure 4.7 présente la transmission en intensité T_2 du milieu dispersif pour deux valeurs différentes du taux de pertes a_2. Nous constatons que la transmission à résonance est constante $T_2(\delta = 0) = \rho_2^2 \approx 0,9$ pour n'importe quelle valeur de a_2.

Nous présentons également sur la figure 4.8, le déphasage $\phi_2(\delta)$ et le retard de groupe

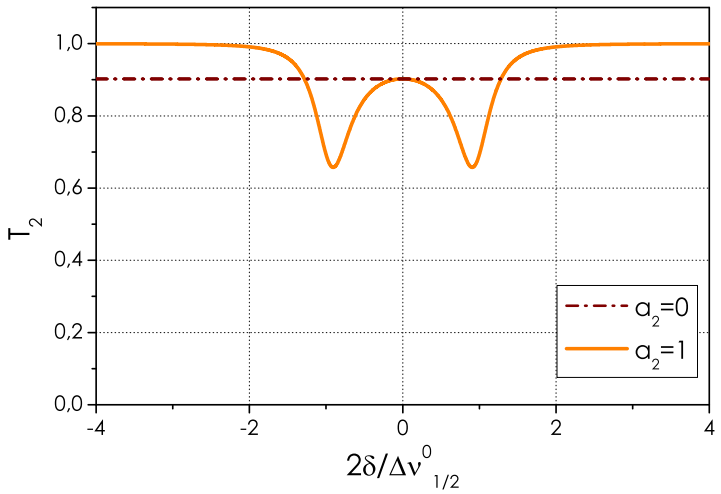


FIGURE 4.7 – Transmission en intensité $T_2 = |t_2|^2$ du milieu dispersif en fonction de $2\delta/\Delta^0_{1/2}$ pour $a_2 = 0$ et $a_2 = 1$.

$\tau_g = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\delta}$ introduits par le milieu dispersif.
Pour les deux cas extrêmes suivants :

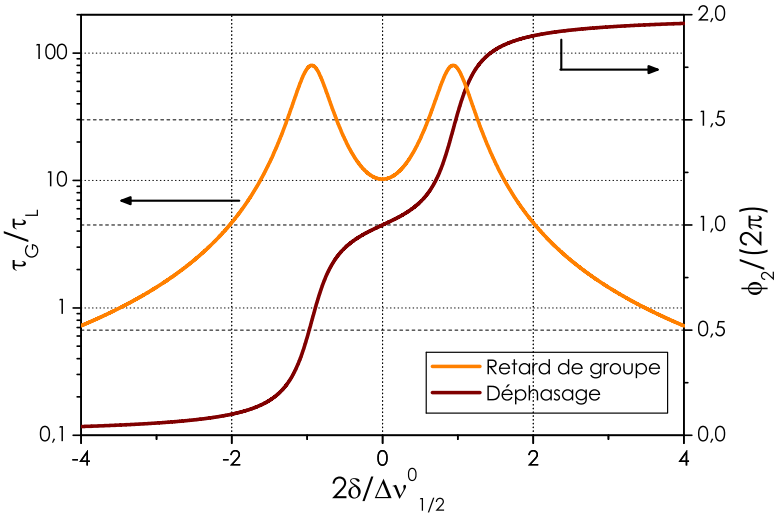


FIGURE 4.8 – Évolution du déphasage $\phi_2(\delta)$ et du temps de groupe τ_g apportés par le milieu dispersif artificiel pour $a_2 = 1$.

1. Lorsque $a_2 = 0$, le CRIT apporte simplement un terme de perte $a_D = |\rho_2|^2 = 0,95$ et un retard de groupe à résonance nul.
2. Pour $a_2 = 1$, la valeur des pertes introduite reste identique tandis que le retard de groupe prend la valeur $\tau_g(\delta = 0) = 10,2\ \tau_L$. Dans ce dernier cas, d'après l'équa-

tion (4.9), le couplage avec le milieu dispersif artificiel mène à une réduction de la largeur de raie d'un ordre de grandeur.

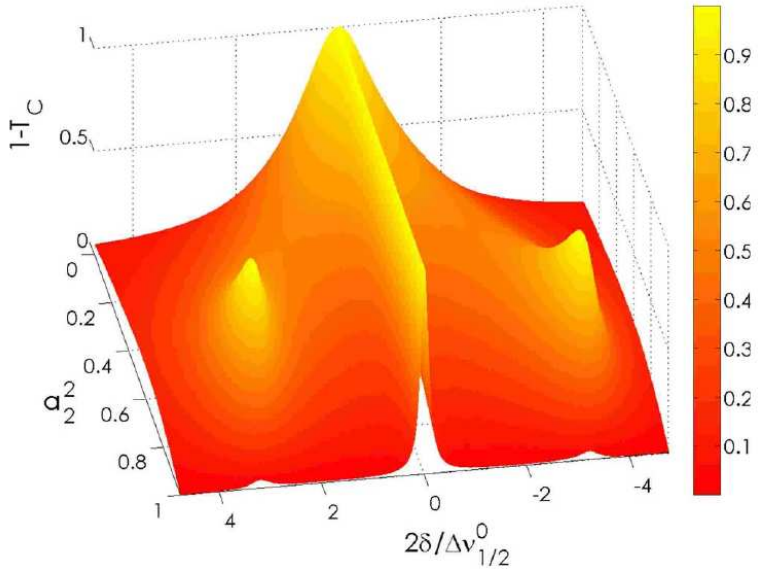


FIGURE 4.9 – Évolution de l'absorption $1 - T$ de la structure en fonction du taux de perte a_2^2.

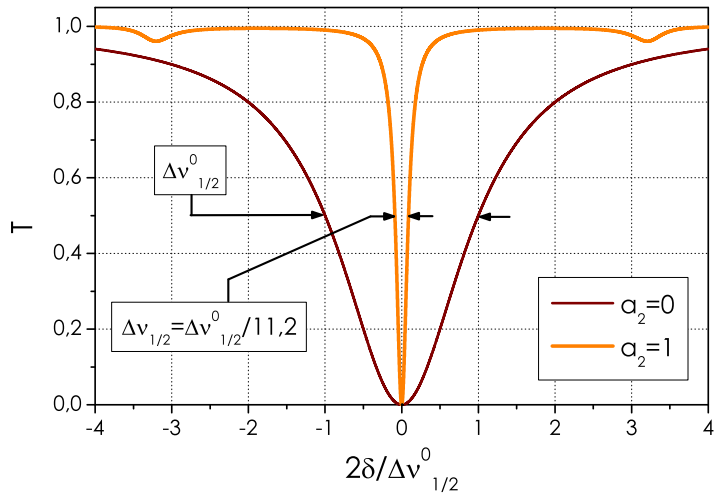
4.3.2.2 Ajustement du facteur de qualité du système

La figure 4.9 présente la fonction de transfert de la cavité 3, $T = |t_3|^2$ en fonction de a_2^2. La transmission à résonance reste constante, le résonateur conserve ses propriétés de couplage indépendamment de la valeur de a_2. La transmission s'annule, ce qui correspond bien à un résonateur en régime critique. Pour des valeurs de a_2 croissantes, la largeur à mi-hauteur de la cavité se réduit [Equ. (4.37)].

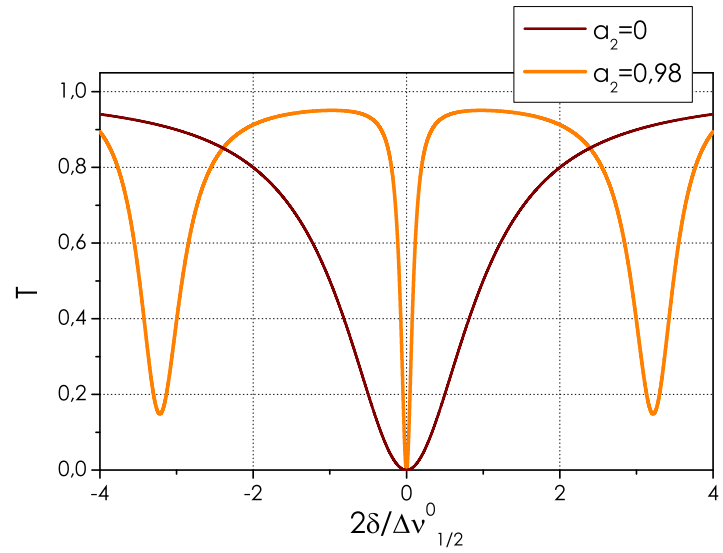
Figure 4.10(a) nous comparons les deux cas extrêmes $a_2 = 0$ et $a_2 = 1$ extraits de la figure 4.9. Il en ressort que la seule modification du paramètre a_2 permet de réduire la largeur de la résonance d'un facteur $11,2$. Le facteur de qualité global Q se trouve alors augmenté de la même valeur. La figure 4.10(b) compare le cas $a_2 = 0$ et un cas de faibles pertes $a_2 = 0,98$. Les pertes dans la cavité accentuent l'absorption aux deux résonances satellites provenant du couplage entre les trois cavités. Dans le cas général, un système de N cavités couplées présente un spectre de transmission à $N - 1$ résonances satellites.

4.4 Démonstrations expérimentales

La validation expérimentale des architectures présentées précédemment est réalisée à partir d'un système modèle à base de résonateurs à fibres. Le dispositif permettant de



(a) Spectres de transmission $T = |t_3|^2$ pour $a_2 = 0$ et $a_2 = 1$. Nous observons une réduction de la largeur de raie pour $a_2 = 1$ d'un facteur $11,2$. Pour autant, la cavité reste en couplage critique.



(b) Spectre de transmission $T = |t_3|^2$ pour $a_2 = 0$ et $a_2 = 0,98$. On observe la même réduction de la largeur de raie que pour la figure 4.10(a).Cependant, les deux pics latéraux, provenant du couplage entre les trois cavités, sont accentués par a_2.

FIGURE 4.10 – Spectre de transmission $T = |t_3|^2$ pour différentes valeurs de a_2. Les données sont extraites de la figure 4.9.

réduire la largeur de raie par couplage de résonateurs "sans pertes" [partie 4.3.1] est étudié dans un système de deux anneaux.

Dans un deuxième temps, nous présentons la configuration à trois anneaux permettant de contrôler dynamiquement le facteur de qualité par les pertes [partie 4.3.2].

4.4.1 Montage expérimental

Le montage expérimental est présenté sur la figure 4.11. De manière générale, le système d'étude est composé de N résonateurs à fibre dopée Erbium. En pratique, les valeurs des

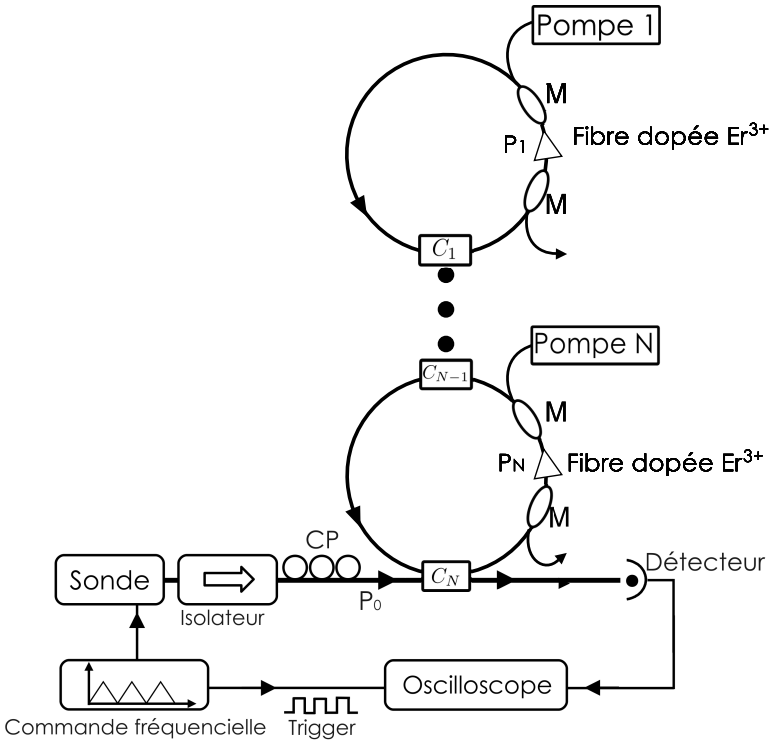


FIGURE 4.11 – Montage expérimental composé de N résonateurs actifs couplés à une ligne d'accès par le coupleur C_N. Le signal de sonde $P_0 = 1$ mW est précédé d'un isolateur et d'un contrôleur de polarisation (CP). Les multiplexeurs M permettent d'insérer les pompes de puissances P_i et de les extraire en sortie de fibre dopée ($i \in \{1; N\}$). Le signal de sonde a une largeur de raie de 150 kHz centrée à 1550 nm. Il est balayé linéairement sur 5 GHz. Le signal utile est collecté sur un détecteur puis observé sur un oscilloscope synchronisé sur la commande électrique du laser. Pour limiter les fluctuations thermiques, les anneaux à fibres sont placés dans un bac rempli d'eau.

coefficients de perte a_i pour $i \in [1; N]$ (définis dans la partie théorique) sont modifiées en pompant indépendamment la section de fibre dopée Er^{3+} introduite dans chaque résonateur. Par ailleurs, les coefficients de couplage sont fixés.
Nous utilisons le même dispositif de caractérisation de résonateurs que celui décrit dans la partie 2.3.1 (p. 32).

4.4.2 Exaltation du phénomène de *cavity ringdown* par couplage de résonateurs

Dans cette partie nous utilisons simplement deux anneaux. Le résonateur 2 constitue la cavité cible dont le facteur de qualité va être exalté par le résonateur 1 jouant le rôle

de milieu dispersif. La longueur des deux résonateurs est sensiblement la même à savoir $L_1 = 2,01$ m et $L_2 = 2,00$ m. Dans l'anneau 2, la section de fibre dopée Erbium fait 30 cm contre 1 m dans l'anneau 1. L'indice effectif de la fibre est de $n = 1,46$. Les coupleurs C_1 et C_2 sont tels que $\rho^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = 90\%$ et $\kappa^2 = \kappa_1^2 = \kappa_2^2 = 10\%$. Le taux de pompage $P_2 = 5,3$ mW est optimisé afin de placer en régime de couplage critique la cavité 2. Dans l'anneau 1, le taux de pompage est plus élevé, $P_1 = 22,8$ mW afin de compenser au mieux les pertes de cette cavité. De cette manière, la cavité 1 amène peu de pertes supplémentaires dans l'anneau 2.

Nous utilisons une vitesse $V_s = 0,4$ MHz/μs, ceci nous permet de mesurer la réponse sta-

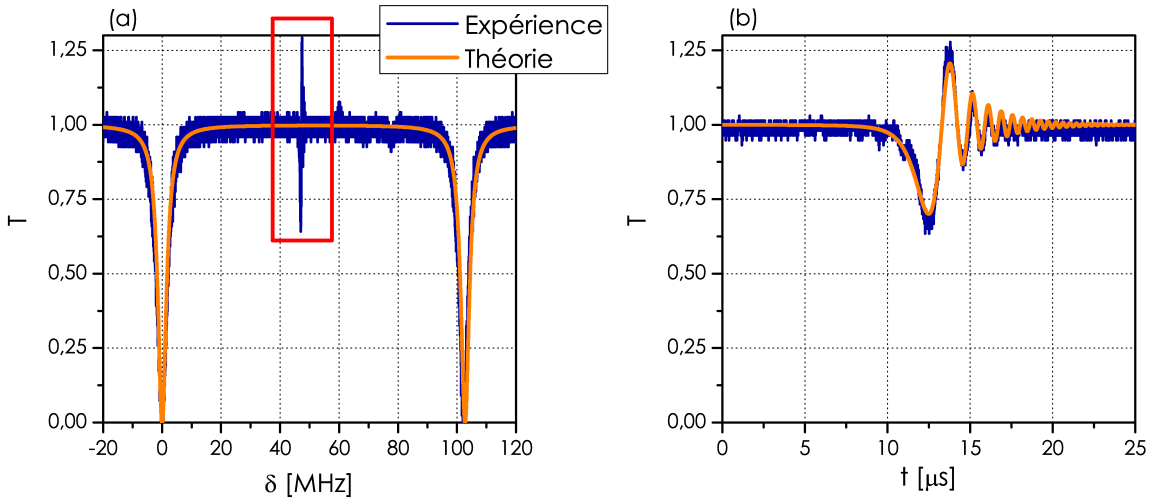


FIGURE 4.12 – Spectre expérimental de la transmission de la cavité 2 dans le cas $N = 2$. La figure (b) est un zoom de la zone encadrée sur la figure (a). Les courbes oranges correspondent au modèle théorique. (a) le modèle est superposé pour $a_2 = \rho_2 \approx 0,95$ dans le cas de l'anneau 2 seul. (b) l'ajustement théorique est réalisé à partir de la méthode des moindres carrés.

tionnaire du système. La calibration de la vitesse de balayage est réalisée en utilisant l'ISL de la cavité 2. Le spectre expérimental obtenu est présenté figure 4.12(a). Les deux résonances associées à la cavité 2 seule sont obtenues en $\delta = 0$ et $\delta = 103$ MHz. La réponse théorique de la cavité seule est superposée à cette courbe en utilisant les paramètres précédemment définis ($a_2 = \rho_2 = \sqrt{0,9} \approx 0,95$; $L_2 = 2,00$ m et $n = 1,46$). Le modèle théorique nous donne une largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}^0 \approx 3,4$ MHz ce qui correspond à un facteur de qualité $Q_0 = 5,7 \times 10^7$.

Exaltation du phénomène de "ringing"

Il apparaît entre ces deux résonances un signal très fin spectralement. C'est la signature de la résonance supplémentaire issue de l'interaction avec le résonateur 1. En effet, bien que la vitesse de balayage puisse être considérée comme lente pour les raies du résonateur 2, cette raie composite présente le phénomène de "ringing". Son apparition traduit la présence

d'une résonance très fine. La figure 4.12(b) présente un agrandissement des variations temporelles de ce signal.
En suivant la procédure de comparaison théorie/expérience décrite au chapitre 2 nous obtenons : $\tau_0 = 2,48$ μs pour le temps de vie intrinsèque et $\tau_e = 14,3$ μs pour le temps de vie externe. Ce qui nous donne un temps de vie global, $\tau = 2,11$ μs soit un facteur de qualité $Q = 1,3 \times 10^9$.
Le calcul réalisé dans le paragraphe 4.3.1.2 permettait d'envisager un facteur d'exaltation de 40. Expérimentalement, nous obtenons une augmentation du facteur de qualité de $Q/Q_0 \approx 23$. Le tableau 4.1 présente les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques. Dans la partie suivante nous discutons les différences entre les prévisions théoriques et les mesures expérimentales.

TABLE 4.1 – Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux. Les valeurs de $\Delta\nu^0_{1/2}$ et de Q_0 théoriques sont utilisées pour l'étape de comparaison théorie/expérience.

	$\Delta\nu^0_{1/2}$	$\Delta\nu_{1/2}$	Q_0	Q	Q/Q_0
Théorie	3,4 MHz	85 kHz	$5,7 \times 10^7$	$2,28 \times 10^9$	40
Expérience		148 kHz		$1,3 \times 10^9$	23

Analyse des résultats

Dans le cas d'un résonateur contenant un milieu dispersif, les relations liant le temps de vie intrinsèque à l'atténuation et le temps de vie externe au coefficient de transmission doivent être réécrites [Annexe A]. En effet, l'introduction d'un milieu dispersif dans un résonateur apporte un temps de parcours supplémentaire (τ_g) qui doit être pris en compte. L'expression du temps de vie intrinsèque d'un résonateur seul :

$$\tau_0 = \frac{\tau_L\sqrt{a}}{(1-a)},$$

devient,

$$\tau_0 = \frac{[\tau_L(\omega_0) + \tau_g(\omega_0)]\sqrt{a_0 a_D(\omega_0)}}{1 - a_0 a_D(\omega_0)}, \tag{4.38}$$

et l'expression du temps de vie externe initialement :

$$\tau_e = \frac{\tau_L\sqrt{\rho}}{(1-\rho)},$$

devient,

$$\tau_e = \frac{[\tau_L(\omega_0) + \tau_g(\omega_0)]\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \tag{4.39}$$

Pour ρ_2 on choisit la valeur nominale du coupleur ($\rho_2 = 0,95$), la valeur de a_2 est alors

TABLE 4.2 – Comparaison entre les valeurs théoriques et les données expérimentales. Les valeurs de ρ_2 et de a_2 théoriques sont utilisées pour l'étape de comparaison théorie/expérience.

	τ_g	ρ_1	a_1	ρ_2	a_2
Théorie	349 ns	$0,95$	1	0,95	0,95
Expérience	724 ns	$0,9735$	$0,9967$		

connue puisque nous sommes en régime de couplage critique. Ces valeurs sont utilisées dans le calcul superposé à la mesure expérimentale du spectre T [Fig. 4.12]. À partir des expressions (4.38) et (4.39) et en utilisant ces valeurs de a_2 et ρ_2 nous allons calculer les valeurs de $\tau_g(\omega_0), \rho_1$ et a_1 et vérifier la cohérence de notre analyse.

Calcul de τ_g Dans le cas présent, nous avons fixé $\rho = \rho_2 = 0,95$ et $\tau_L = nL_2/c \approx 9,7$ ns. De l'expression de τ_e [Equ. (4.39)] nous déduisons la valeur expérimentale du retard de groupe $\tau_g \approx 724$ ns.

Calcul de ρ_1 En supposant $a_1 \approx 1$ et $L = L_1 = L_2$ et en utilisant l'expression (4.16) [1], nous obtenons :

$$\tau_g = \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}\tau_L, \tag{4.40}$$

ce qui nous permet de calculer la valeur expérimentale du coefficient de transmission du résonateur 1 : $\rho_1 \approx 0,9735$.

Calcul de a_1 Suivant les notations utilisées pour décrire l'introduction d'un milieu purement dispersif dans un résonateur [Partie 4.2] nous avons $a_0 = a_2 \approx 0,95$. En introduisant les valeurs de a_0, τ_g, τ_L et τ_0 dans l'équation (4.38) nous en déduisons le coefficient de perte apporté par le milieu dispersif artificiel : $a_D(\omega_0) = |t_1| \approx 0,7832$. Enfin, à partir de l'expression (4.24) nous avons : $a_1 \approx 0,9967$ en accord avec l'hypothèse faite pour le calcul de ρ_1.
Le tableau 4.2 rappelle les valeurs des paramètres structurels théoriques et mesurés.

Bilan

La valeur de ρ_1 mesurée expérimentalement est légèrement supérieure à la valeur nominale. Ce qui conduit à une valeur expérimentale de τ_g bien supérieure à celle attendue. Néanmoins, le pompage ne permettant pas d'obtenir un résonateur 1 totalement transparent,

1. Dans notre cas ρ, le coefficient de couplage avec le milieu purement dispersif, correspond à ρ_1

les pertes résiduelles limitent l'augmentation du facteur de qualité. Ce résultat expérimental souligne une nouvelle fois le rôle crucial joué par les pertes dans la ligne dispersive.

4.4.3 Dispersion induite par couplage de résonateurs actifs

Pour démontrer expérimentalement le contrôle actif du facteur de qualité d'un résonateur à partir de l'ajustement dynamique des propriétés dispersives d'un CRIT nous connectons un troisième anneau de fibre au système utilisé dans la partie ci-dessus. Nous retrouvons alors la configuration présentée figure 4.6 où le résonateur 3 est la cavité de référence. Le CRIT joue alors le rôle de déphaseur.
Les caractéristiques des composants utilisés sont données dans le tableau 4.3. Les longueurs des sections de fibre dopée Er^{3+} sont de 30 cm dans les anneaux 1 et 3 et de 1 m de long pour l'anneau 2.
L'anneau 2 doit pouvoir être suivant les cas, totalement absorbant ($a_2 = 0$) ou présentant de faibles pertes ($a_2 \approx 1$). C'est pourquoi nous y insérons une plus grande section de fibre dopée. Sans pompage, l'absorption de la fibre est de $11,2$ dB ce qui est insuffisant pour obtenir $a_2 = 0$. Néanmoins, des pertes conséquentes supplémentaires au niveau des soudures entre les fibres dopées et les fibres standard dont les diamètres de coeur sont nettement différents (4 et 8 μm) nous permettent d'obtenir la condition $a_2 = 0$.
Afin de satisfaire les conditions de couplage proposées dans la partie 4.3.2 ($a_1 = \rho_1$)

Table 4.3 – Description des résonateurs utilisés dans la démonstration expérimentale de l'effet de dispersion induite intracavité. La boucle 3 correspond à la cavité cible. Les boucles 1 et 2 constituent le CRIT déphaseur.

Boucle 1	$L_1 = 1,41$ m	Coupleur C_1	$\rho_1^2 = 99\%$	$\kappa_1^2 = 1\%$
Boucle 2	$L_2 = 2,01$ m	Coupleur C_2	$\rho_2^2 = 90\%$	$\kappa_2^2 = 10\%$
Boucle 3	$L_3 = 2,00$ m	Coupleur C_3	$\rho_3^2 = 90\%$	$\kappa_3^2 = 10\%$

et compte tenu de notre configuration expérimentale particulière, nous devons choisir une puissance de pompe $P_1 = 18,6$ mW. Afin de placer le système en couplage critique la puissance de pompe dans l'anneau 3 est $P_3 = 8,3$ mW.
La figure 4.13 présente les résultats expérimentaux obtenus. La transmission du système $T = |t_3|^2$ est présentée dans les deux cas extrêmes abordés dans la partie théorique. À savoir $a_2 = 0$ ce qui correspond à un pompage nul $P_2 = 0$ mW [Fig. 4.13(a)] et un retard nul introduit par le CRIT. Nous obtenons alors la transmission du résonateur 3 "seul" avec les pertes résiduelles non maîtrisées. La figure 4.13(b) présente la transmission du système sous fort pompage de l'anneau 2 ($P_2 = 40,2$ mW). Dans ce régime de pompage le CRIT introduit alors un retard maximal permettant un affinement de la résonance de la cavité 3.

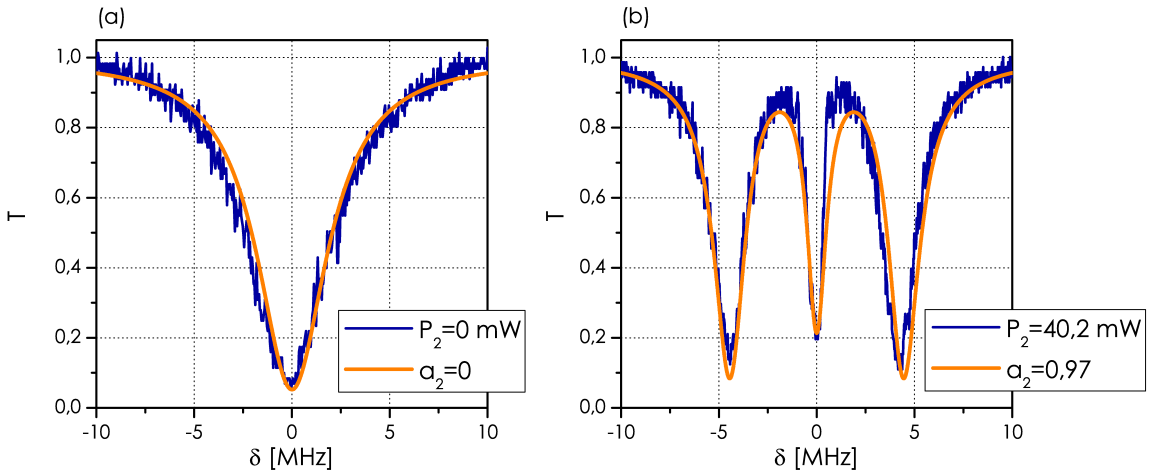


FIGURE 4.13 – Spectres expérimentaux de la transmission $T = |t_3|^2$ en régime stationnaire. Les paramètres utilisés pour les modèles théoriques sont : a) $a_1 = 0,985$; $\rho_1 = 0,995$; $a_2 = 0$; $\rho_2 = 0,97$ et $a_3 = \rho_3 = 0,95$ et b) $a_1 = 0,985$; $\rho_1 = 0,995$; $a_2 = 0,97$; $\rho_2 = 0,97$ et $a_3 = \rho_3 = 0,95$.

Remarque

L'accord de fréquence entre les trois résonateurs est obtenu par effet vernier. Le balayage de la sonde laser étant réalisé sur 5 GHz, nous décrivons un grand nombre d'ISL des 3 cavités. Il est donc possible de trouver des résonances concordantes pour les 3 résonateurs. Afin de limiter les dilatations des fibres, le système est placé dans un bac rempli d'eau. Notons que les résultats des figures 4.13(a) et 4.13(b) sont obtenus pour des fréquences de résonance différentes en valeurs absolues. En effet, le taux de pompage élevé du résonateur 2 entraîne une variation importante du chemin optique.

Analyse des résultats

La confrontation théorie/expérience est obtenue en tenant compte des considérations suivantes :

1. Estimation des taux de couplage : le coefficient de transmission de l'anneau 1 correspond à la valeur nominale $\rho_1 = 0,995$. Pour les coupleurs 2 et 3 nous prenons les valeurs expérimentales mesurées dans l'expérience précédente ($\rho_2 = 0,97$ et $\rho_3 = 0,95$). Notons que par rapport à l'expérience précédente le coupleur C_1 devient C_2 et que le coupleur C_2 devient C_3,
2. Les longueurs des anneaux ont été mesurées avec une règle, l'indice de la fibre est toujours $n = 1,46$.
3. Figure 4.13(a) - sans pompage - nous avons $a_2 = 0$, a_3 est ajusté afin d'approcher le couplage critique ($a_3 = 0,95$).
4. Figure 4.13(b) - avec pompage - nous gardons la valeur ajustée de a_3 précédemment puis, nous ajustons $a_2 = 0,97$ et $a_1 = 0,985$.

Les résultats de la confrontation théorie/expérience donnent $\Delta\nu^0_{1/2} = 4,3$ MHz ($Q = 4,5 \times 10^7$) pour $a_2 = 0$ et $\Delta\nu_{1/2} = 790$ kHz ($Q = 2,4 \times 10^8$) lorsque l'anneau 2 est pompé. La valeur de $\Delta\nu^0_{1/2}$ est obtenue en insérant les paramètres ajustés dans l'expression (4.10). Les prévisions théoriques nous permettaient d'envisager une réduction de la largeur de raie de $11,2$. Expérimentalement nous mesurons $5,4$. Une fois de plus, les performances du système sont limitées par les pertes résiduelles non-compensées en particulier dans l'anneau 1 ($a_1 < \rho_1$).

Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que le couplage de résonateurs permet d'augmenter le facteur de qualité d'une cavité de référence. Pour certaines configurations nous avons montré théoriquement et expérimentalement que l'utilisation de résonateurs actifs conduisait à un contrôle dynamique du facteur de qualité.
De manière générale, les résonateurs couplés co-résonants peuvent être utilisés pour exalter la sensibilité des interféromètres [82, 83]. En particulier, il est proposé d'utiliser un système de deux cavités co-résonantes en configuration CRIT pour augmenter la sensibilité de gyroscopes [121–123].

Troisième partie

Étude et caractérisation de résonateurs : Applications aux modes de galerie

Chapitre 5

Description des modes de galerie

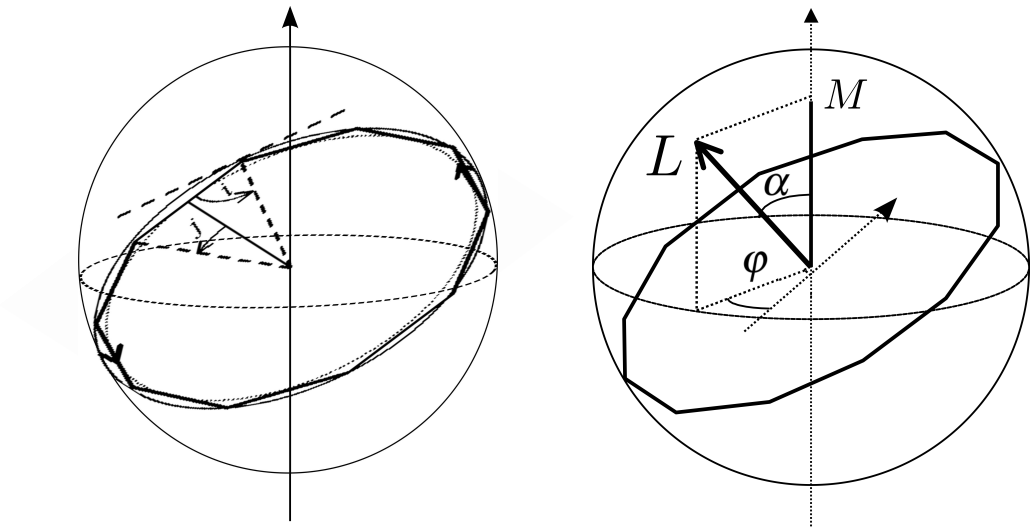
5.1 Approche géométrique

Une approche "optique géométrique" permet d'appréhender simplement la notion de mode de galerie. Considérons une sphère de diamètre a et d'indice de réfraction N, plongée dans de l'air [Fig. 5.1]. Comme dans toute approche géométrique nous faisons l'hypothèse que les dimensions de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde ($a \gg \lambda$). Prenons un rayon lumineux se propageant près de la surface interne de la sphère par réflexions totales ainsi son angle d'incidence s'écrit $i > i_c = \arcsin(1/N)$. Du fait de la symétrique sphérique du problème, les angles subséquents auront le même angle d'incidence et finalement le rayon sera confiné dans la sphère. Dans ce cas idéal, pour un milieu diélectrique totalement transparent la lumière peut "tourner" dans la sphère indéfiniment. En réalité, il subsiste toujours des pertes par absorption, diffusion et diffraction.
Sous incidence rasante ($i \approx \pi/2$) le rayon lumineux parcourt approximativement le périmètre $2\pi a$ de la cavité. Si un *tour* correspond exactement à un nombre de fois la longueur d'onde λ/N, le champ intracavité se retrouve en phase et interfère constructivement avec lui-même. Nous définissons alors la condition de résonance par :

$$2\pi a \approx \frac{\ell\lambda}{N}, \tag{5.1}$$

où ℓ correspond au nombre de réflexions totales internes subies par le rayon lumineux sur un tour de cavité. Introduisons le paramètre de taille $x = 2\pi a/\lambda$, utilisé dans la théorie de la diffusion, il correspond à un facteur d'échelle entre l'objet d'étude et la longueur d'onde de travail. L'expression (5.1) peut alors être réécrite : $x = 2\pi a/\lambda \approx \ell/N$.
Reprenons l'égalité (5.1) en considérant la lumière d'un point de vue corpusculaire. La lumière a une trajectoire circulaire autour du centre de la sphère. Pour une telle trajectoire nous pouvons définir un moment angulaire "orbital" $\overrightarrow{L}$ de norme $\left|\overrightarrow{L}\right|$:

$$\left|\overrightarrow{L}\right| \approx \hbar\ell'. \tag{5.2}$$



(a) (b)

FIGURE 5.1 – (a) Représentation géométrique de la propagation d'un rayon lumineux interférant constructivement avec lui même après un tour de cavité. (b) Moment angulaire L associé au champ électromagnétique se propageant dans un mode de galerie. M sa projection associée sur l'axe polaire.

D'autre part, nous savons que la norme du moment angulaire résulte du produit de a par son impulsion $p = \hbar k$ où k est la norme du vecteur d'onde :

$$\left|\overrightarrow{L}\right| = \hbar \frac{2\pi N a}{\lambda}, \tag{5.3}$$

ce qui donne, par identification des équations (5.2) et (5.3), $Nx \approx \ell' = \ell$. Ainsi nous voyons que ℓ s'identifie à la norme du moment angulaire du champ électromagnétique contenu dans le mode considéré.

5.2 Première approche ondulatoire

Une description plus rigoureuse des modes de galerie (WGM modes) nécessite la prise en compte du caractère ondulatoire des champs. Considérons une forme de champ scalaire :

$$E(r,t) \propto e^{-i\omega t} \exp[ik_0 N(r) r], \tag{5.4}$$

où ω est la fréquence angulaire du champ, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ le vecteur d'onde dans le vide, $N(r)$ l'indice du milieu et r la position du champ. La phase S du champ peut être définie par :

$$S(r) = \int_{r_0}^{r} k_0 N(s) ds, \tag{5.5}$$

où l'intégrale correspond au déphasage accumulé entre les points r_0 et r de telle sorte que $E(r) \propto e^{-i(\omega t - S)}$. Dans la limite où la variation de l'indice $N(r)$ est négligeable à l'échelle de

la longueur d'onde, l'onde est considérée localement plane. Nous sommes conduits à utiliser ce que l'on appelle l'approximation Eikonale. L'équation d'Helmoltz pour le champ scalaire $E(r)$ s'exprime comme :

$$\triangle E + N(r)^2 k_0^2 E = 0, \tag{5.6}$$

où le Laplacien prend la forme :

$$\triangle E \propto (-(\nabla S)^2 + i\triangle S)e^{iS}. \tag{5.7}$$

En injectant l'expression du Laplacien [Equ. (5.7)] dans l'équation (5.6) et en séparant les parties réelle et imaginaire nous obtenons l'équation dite "Eikonale" [41, 47, 48, 124] :

$$(\nabla S)^2 = N^2 k_0^2. \tag{5.8}$$

Dans le cas d'un champ se propageant dans une sphère, l'approximation de l'Eikonale peut être appliquée lorsque l'on considère des sphères avec un rayon a grand devant la longueur d'onde λ_0. Nous restons ainsi dans l'hypothèse de départ à savoir le caractère localement plan de la surface d'onde. Notre problème étant à symétrie sphérique l'expression (5.8) s'exprime en coordonnées polaires :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = N^2 k_0^2. \tag{5.9}$$

Le moment angulaire orbital $\overrightarrow{L}$ est défini comme étant le produit vectoriel entre l'impulsion de l'onde électromagnétique $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\nabla} S$ et le vecteur position :

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} = \begin{vmatrix} r & & \dfrac{\partial S}{\partial r} \\ 0 & \wedge & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial \theta} \\ 0 & & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial S}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{cases} L_r &= 0, \\ L_\theta &= -\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial S}{\partial \varphi}, \\ L_\varphi &= \dfrac{\partial S}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Nous appelons M la projection du moment orbital $\overrightarrow{L}$ suivant l'axe de quantification Oz tel que $\overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{u}_z = L_z$ [Fig. 5.1(b)]. En utilisant la matrice de passage de la base $\{\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}\}$ vers la base fixe $\{\hat{u}_x,\hat{u}_y,\hat{u}_z\}$, nous obtenons :

$$L_z = M = \frac{\partial S}{\partial \varphi}. \tag{5.12}$$

Cette dernière expression implique que $S = M\varphi$ et donc que le champ aura une dépendance en φ de la forme $e^{iM\varphi}$. L'angle azimutal φ étant une variable cyclique du problème, après

un tour de cavité le champ doit présenter un retour en phase tel que $S(\varphi) = S(\varphi + 2\pi)$. Par conséquent, M ne peut être qu'un entier.
D'autre part la sphère étant considérée parfaite, la norme du moment angulaire est une constante du mouvement décrite par :

$$L^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{M^2}{\sin^2\theta}. \tag{5.13}$$

Il est possible de montrer [124] que la méthode de séparation des variables peut être appliquée à l'expression (5.9). Dans ce cas, le champ électromagnétique se décompose de la manière suivante :

$$E(r,\theta,\varphi) = E_1 e^{iS_1(r)} E_2 e^{iS_2(\theta)} E_3 e^{iS_3(\varphi)}. \tag{5.14}$$

Par conséquent, la phase S se développe en $S(r,\theta,\varphi) = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi)$. On obtient ainsi un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_3}{\mathrm{d}\varphi} = M, & (a) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \dfrac{M^2}{\sin^2\theta} = L^2, & (b) \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \dfrac{L^2}{r^2} = N^2 k_0^2. & (c) \end{cases} \tag{5.15}$$

L'étude du système (5.15) permet d'appréhender le mouvement global du champ dans ce problème à symétrie sphérique. Ainsi, le mouvement angulaire décrit par l'onde, est composé d'une précession uniforme selon $S_3(\varphi)$ et d'une oscillation suivant $S_2(\theta)$ entre les valeurs $\theta = \pi/2 \pm \alpha$ avec $\alpha = \arccos(|M|/L)$. Le mouvement radial peut être perçu comme une oscillation entre 2 valeurs extrêmes à savoir la caustique interne :

$$r_1 = \frac{L}{k_0 N}, \tag{5.16}$$

et le rayon externe a_{eff} où se produit la réflexion totale. a_{eff} est défini en prenant en compte l'effet Goos-Hänchen [125, 126], auquel cas, l'onde traverse l'interface verre/air sur une distance δ_p telle que $a_{\text{eff}} = a + \delta_p$. Les sphères étant de grande taille, nous exprimons δ_p (terme dépendant de la polarisation) en fonction des formules de Fresnel [127, p. 48] :

$$r_p = e^{-2i\Theta_p}, \tag{5.17}$$

avec :

$$\tan\Theta_p = \frac{\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}{P \cos i}, \tag{5.18}$$

où P représente un rapport d'indice dépendant de la polarisation linéaire incidente. Nous considérons deux polarisations identifiées par rapport au plan d'incidence à savoir les polarisations parallèle $/\!/$ et perpendiculaire $\perp$. Dans le cas d'une sphère d'indice N plongée dans

de l'air, nous obtenons :

$$P = \begin{cases} N & \text{pour le mode } /\!/ \\ \dfrac{1}{N} & \text{pour le mode } \perp \end{cases} \tag{5.19}$$

δ_p vérifie la relation :

$$Nk_0\delta_p \cos i = \frac{\pi}{2} - \Theta_p. \tag{5.20}$$

Prise en compte des déphasages additionnels

Une correction doit être apportée à la phase accumulée par chaque composante de S. En effet, l'onde subit un déphasage additionnel de $-\pi/2$ à chaque réflexion sur les caustiques [128, p. 197]. Cela se produit deux fois suivant $S(\theta)$ en $\theta = \pi/2 \pm \alpha$ et une fois en r_1 suivant $S(r)$. Ces caustiques agissent comme des dioptres "virtuels" sur lesquels le champ électromagnétique se réfléchit totalement (sans perte) en accumulant un déphasage $(-\pi/2)$. De plus, à chaque réflexion totale interne, un déphasage dépendant de la polarisation s'ajoute. Ce déphasage, $\Delta\Phi_p = 2\Theta_p$, est directement pris en compte en calculant la phase accumulée entre r_1 et a_{eff}.
En résumé, les phases induites sur chaque période du champ sont exprimées en intégrant le système d'équations (5.15) et en prenant en compte les déphasages additionels tel que :

$$\begin{cases} \Delta S_1 = 2Lf(Nk_0a_{\text{eff}}/L) - 3\pi/2, & (a) \\ \Delta S_2 = 2\pi(L - |M|) - \pi, & (b) \\ \Delta S_3 = 2\pi|M|. & (c) \end{cases} \tag{5.21}$$

ΔS_1 est obtenu en intégrant le déphasage accumulé entre r_1 et a_{eff} tel que :

$$\Delta S_1 = 2\int_{r_1}^{a_{\text{eff}}} \sqrt{(Nk_0)^2 - (L/r)^2}dr, \tag{5.22}$$

à partir de l'expression :

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{1 - 1/y^2}dy = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5.23}$$

Quantification

La nature 2π-périodique du "mouvement" mène à une quantification individuelle des phases partielles du système (5.21). Chaque phase partielle doit vérifier la condition $\Delta S_k = 2\pi \times p$ avec $k \in 1, 2, 3$ et $p \in \mathbb{N}$.
Le moment cinétique angulaire est quantifié par les nombres entiers ℓ et m tel que :

$$\begin{cases} M = m, & (a) \\ L = \ell + \frac{1}{2}. & (b) \end{cases} \tag{5.24}$$

Enfin l'équation 5.21.(a) doit satisfaire la relation :

$$2\pi n = 2Lf(Nk_0a_{\text{eff}}/L) - \tfrac{3\pi}{2}, \tag{5.25}$$

ce qui donne pour expression de n :

$$n - \tfrac{1}{4} = \tfrac{L}{\pi} f(N k_0 a_{\text{eff}}/L). \tag{5.26}$$

Chaque mode, à polarisation donnée, est donc décrit par trois entiers n, ℓ, m permettant de connaître la position spectrale de leur résonance et leur distribution spatiale.
n prend les valeurs $1, 2, 3 \ldots$ et correspond aux nombres d'oscillations entre r_1 et a_{eff}. m est compris entre $-\ell < m < \ell$, il correspond à la projection sur l'axe de quantification $(0z)$ du moment angulaire orbital.
En prenant en compte l'effet Goos-Hänchen et en considérant la condition de réflexion totale telle que $i > i_c$ avec $\sin i_c = 1/N$, le rayon de la caustique interne r_1 prend des valeurs comprises entre a_{eff} et a_{eff}/N. À l'aide de l'équation (5.16) nous encadrons les valeurs permises de L par :

$$x_{\text{eff}} < \ell + \tfrac{1}{2} < N x_{\text{eff}}, \tag{5.27}$$

où le paramètre de taille effectif vaut $x_{\text{eff}} = 2\pi a_{\text{eff}}/\lambda_0$. Cette dernière expression peut être réécrite par : $1 < N k_0 a_{\text{eff}}/L < N$.
La fonction (5.23), étant croissante et $f(1) = 0$, l'indice radiale n voit ses valeurs vérifier :

$$0 < n - \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{N^2 - 1} - \arccos\frac{1}{N}\right). \tag{5.28}$$

Bilan

À une sphère donnée correspond un paramètre de taille calculé à partir des propriétés géométriques de la sphère. Il permet de quantifier les valeurs possibles de ℓ [Equ. (5.27)].
La résolution de l'équation Eikonale donne une bonne approximation des modes pouvant se propager dans la sphère. Connaissant les valeurs de ℓ, l'équation (5.28) nous donne l'encadrement des valeurs de n.
Par exemple pour une sphère de silice ($N \approx 1,45$) de 100 μm de diamètre à la longueur d'onde $\lambda = 1,55$ μm le paramètre de taille vaut $x \approx 293$. Les valeurs de ℓ sont alors comprises entre 203 et 304 . Le nombre d'oscillations dans le plan radial peut alors prendre des valeurs comprises entre les deux extrema : $n = 1$ et $n = 22$.
La quantité de modes de galerie pouvant exister dans la sphère est considérable. Suivant l'injection de la lumière dans le microrésonateur il est possible de sélectionner les modes que l'on souhaite exciter.

5.2.1 Spectre des modes de galerie dans l'approche Eikonale

5.2.1.1 Position des résonances dans une sphère parfaite

Dans le cas de la sphère parfaite, le système ne présente pas d'axe de rotation particulier. Pour l'étude de la position spectrale des résonances, nous définissons de manière arbitraire

l'axe Oz comme axe de quantification [Fig. 5.1(b)]. Ainsi, pour un L fixé, les $2\ell+1$ valeurs de m sont chacune placée sur un cercle de révolution de périmètre identique ($s \approx 2\pi a$). Elles présentent alors toutes la même fréquence de résonance.
En combinant les relations de quantification (5.24).(b) et (5.26) nous obtenons une expression analytique de la position des résonances en fonction du paramètre de taille effectif :

$$Nx_{\text{eff}} = \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right) f^{-1}\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)}{\ell+\frac{1}{2}}\right). \tag{5.29}$$

Pour une valeur de $\ell > 100$, cette expression nous donne une bonne approximation de la position des résonances. Pour les modes de faible ordre radial n et ℓ grand, la fonction f^{-1} autorise un développement limité au voisinage de 0 telle que : $f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{2}(3y)^{2/3} + \mathcal{O}(y)$. Nous obtenons alors, en première approximation, une expression de la position des résonances :

$$Nx \approx \ell + \tfrac{1}{2} + \left(\frac{\ell+\frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3}\left[\frac{3\pi}{2}\left(n-\tfrac{1}{4}\right)\right]^{2/3} - \frac{P}{\sqrt{N^2-1}} + \cdots \tag{5.30}$$

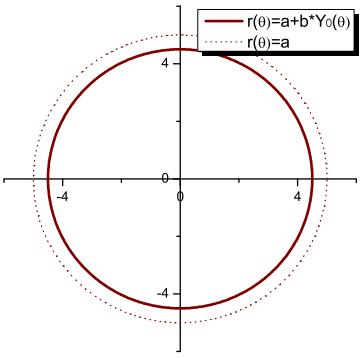
L'équation définissant la position des résonances dans le cas d'une sphère parfaite [Equ. (5.30)] ne fait naturellement pas intervenir le nombre quantique m. Regardons ce qu'il en est lorsque la sphère présente une légère ellipticité.

5.2.1.2 Effet d'une légère ellipticité sur le spectre des modes

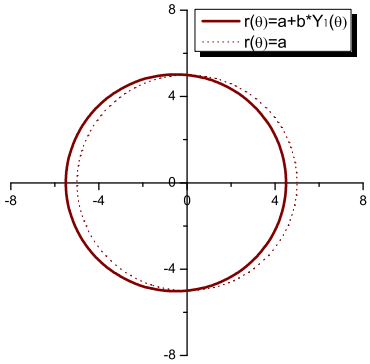
En présence d'une légère ellipticité, la symétrie sphérique est perdue et notre sphère peut être assimilée à un ellipsoïde de révolution.
Considérons une sphère présentant un faible "allongement" de son rayon suivant son axe de rotation (Oz) [Fig. 5.3]. Le rayon a de la sphère est alors légèrement perturbé. Nous définissons le rayon paramétrique de l'ellipsoïde par [129, 130, p.47] :

$$\overline{r}(\theta,\varphi) = a + \Delta\sqrt{4\pi}Y_q^0(\theta), \quad q \in [0;2] \tag{5.31}$$

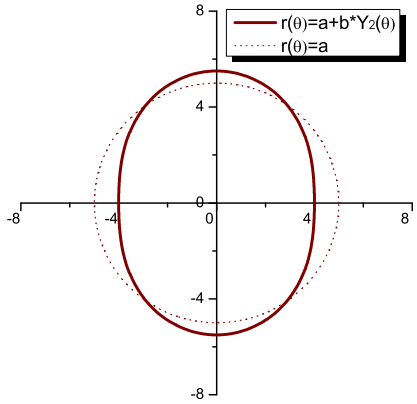
où Δ est un coefficient de déformation (en μm), $Y_q^0(\theta)$ le terme général des harmoniques sphériques et $\sqrt{4\pi}$ un terme de normalisation. Dans le cas d'un sphéroïde d'axe de rotation Oz, le mouvement est invariant suivant φ. La famille des harmoniques sphériques vérifiant cette dernière condition est décrite par $Y_q^0(\theta)$ (avec $p = 0$).
Le tableau 5.1 rassemble les premières harmoniques sphériques en fonction de q. Nous avons représenté sur les figures 5.2 l'influence des trois premiers termes sur le rayon paramétrique [Equ. (5.31)]. Les simulations sont réalisées pour un rayon paramétrique $\overline{r}(\theta) = a + bY_q(\theta)$ où a est le rayon de la sphère et b un terme proportionnel à $\Delta\sqrt{4\pi}$. La valeur de b doit respecter la condition : $b < a$.
Le premier terme $Y_0(\theta)$ n'apporte qu'une dilatation ($b > 0$) ou une compression ($b < 0$) [Fig. 5.2(a)]. Le deuxième terme de la série $Y_1(\theta)$ entraîne une déformation de la sphère accompagnée d'un décalage de son centre [Fig.5.2(b)]. Quand au terme quadrupolaire il



(a) $\overline{r}(\theta) \propto Y_0(\theta)$



(b) $\overline{r}(\theta) \propto Y_1(\theta)$



(c) $\overline{r}(\theta) \propto Y_2(\theta)$

FIGURE 5.2 – Représentations de la déformation de la sphère pour différents rayons paramétriques $\overline{r}(\theta)$ exprimés en fonction des harmoniques sphériques. Les simulations sont réalisées pour un rayon paramétrique $\overline{r}(\theta) = a + bY_q(\theta)$ où a est le rayon de la sphère et b un terme proportionnel à $\Delta\sqrt{4\pi}$. La valeur de b est telle que $b < 0 < a$.

correspond à l'ellipsoïde de révolution que nous souhaitons modéliser [Fig.5.2(c)]. Pour $b > 0$ nous avons un oblate et pour $b < 0$ un prolate. Dans notre cas nous choisissons : $b < 0 < a$. Pour approximer notre sphéroïde par un ellipsoïde de révolution nous ne conservons que le terme quadrupolaire Y_2^0 (pour $q = 2$, $p = 0$) telle que :

$$\overline{r}(\theta) = a + \frac{\Delta}{2}\sqrt{5}(3\cos^2\theta - 1). \tag{5.32}$$

Plutôt que d'utiliser Δ, le coefficient de déformation, il est préférable d'introduire l'ellipticité :

$$e = \frac{r_p - r_e}{a} = 3\sqrt{5}\frac{\Delta}{2a}, \tag{5.33}$$

où r_p et r_e sont respectivement les rayons polaire et équatorial. Finalement nous obtenons la forme paramétrique de la surface de révolution :

$$\overline{r}(\theta) = a\left[1 + \frac{e}{3}(3\cos^2\theta - 1)\right]. \tag{5.34}$$

La figure 5.3 présente la propagation de la lumière dans un sphéroïde. Le champ électro-

TABLE 5.1 – Premières harmoniques sphériques en fonction de q

$Y_q^0(\theta,\varphi)$	
Y_0^0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
Y_1^0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
Y_2^0	$\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$

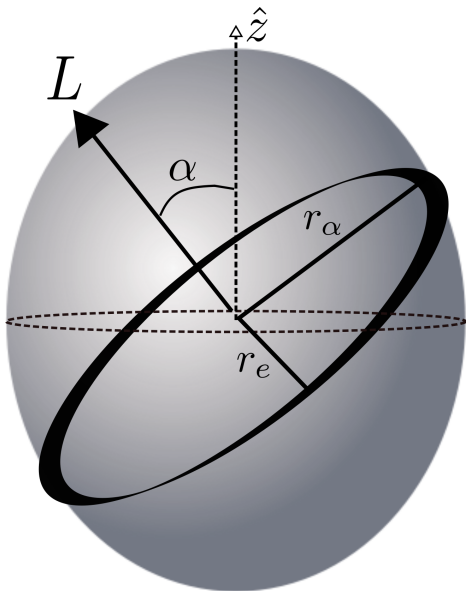


FIGURE 5.3 – Représentation d'un sphéroide de type prolate. Un champ électromagnétique le parcourt en décrivant une ellipse caractérisée par ses axes r_α et r_e et son angle d'inclinaison α.

magnétique suit un périmètre elliptique incliné d'un angle α. Cette ellipse est décrite par ses demi-axes :

$$\begin{cases} r_e &= \overline{r}(\pi/2), \\ r_\alpha &= \overline{r}(\pi/2 - \alpha). \end{cases} \tag{5.35}$$

À chaque ellipse inclinée d'un angle α, est attribué un périmètre différent et donc une fréquence de résonance différente. Swindal *et al.* [131] démontrent que pour un sphéroïde, la composante polaire du moment angulaire, L_z est conservée alors que L_x et L_y varient. Ainsi, lorsque $|L| \neq L_z$ le mouvement du moment angulaire résultera en une lente précession autour de l'axe $(0z)$. Lorsque la déformation est suffisament faible et pour $|m| \approx \ell$, la précession s'effectue lentement devant la période optique. Par exemple, pour une ellipticité typiquement observée de $0,1$ % la période de précession est 1000 fois plus grande que le temps nécessaire au champ pour faire un tour de cavité [41]. La trajectoire d'un rayon sur un tour peut alors être considérée comme plane, et assimilée à une ellipse inclinée d'un angle α.
Le périmètre de la bille sphérique, idéalement de $s_0 = 2\pi a$, est alors étiré d'une quantité Δs telle que :

$$s = s_0 \left(1 + \frac{\Delta s}{s_0}\right) \approx 2\pi a \left[1 + \frac{e}{6}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right)\right]. \tag{5.36}$$

Par analogie avec l'approche géométrique [partie 5.1], et pour un mode de n et ℓ fixé, il faut que le périmètre soit égal à un nombre entier de fois la longueur d'onde pour obtenir la condition de résonance. Ainsi pour un allongement relatif de la circonférence de l'ellipse $\frac{\Delta s}{s_0}$, la longueur d'onde subira une variation proportionnelle $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta s}{s_0}$. La fréquence du champ étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde ($\nu_{n,\ell,m} = c/\lambda$), le déplacement relatif de la fréquence pour une variation relative de la circonférence s'exprime comme :

$$\frac{\Delta\nu_{n,\ell,m}}{\nu^0_{n,\ell}} = -\frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{e}{6}\left(1 - 3\cos^2\alpha\right). \tag{5.37}$$

Finalement, il nous reste à relier l'angle α avec les valeurs propres du moment angulaire à savoir (ℓ, m). Le moment angulaire $\overrightarrow{L}$ étant perpendiculaire à l'ellipse décrite par le champ, nous obtenons :

$$L_z = L\cos\alpha, \tag{5.38}$$

avec $L = \ell + \frac{1}{2}$ nous en déduisons :

$$\cos^2\alpha = \frac{L_z^2}{L^2} = \left(\frac{|m|}{\ell + \frac{1}{2}}\right)^2. \tag{5.39}$$

En combinant les expressions (5.37) et (5.39) nous obtenons la variation relative en fréquence, pour un mode n, ℓ, m donné :

$$\frac{\Delta\nu_{n,\ell,m}}{\nu^0_{n,\ell}} = -\frac{e}{6}\left[1 - 3\left(\frac{|m|}{\ell + \frac{1}{2}}\right)^2\right]. \tag{5.40}$$

Ainsi, pour $\ell \gg \ell - |m|$, la séparation en fréquence entre deux modes qui ne diffère que d'une unité de m, est donnée par :

$$\frac{\Delta\nu_{n,\ell,m}}{\Delta|m|} = \frac{e}{\ell}\nu_0. \tag{5.41}$$

Une légère ellipticité entraîne une levée de dégénérescence en m. Contrairement, au cas de la sphère parfaite, l'agencement spatial du champ dans un sphéroïde influe sur la position des résonances.
Toutefois il subsiste la dégérescence dite de Kramers entre les modes $\pm m$. La symétrie de révolution étant conservée, le champ ne circule que dans un sens. Nous verrons cependant dans le chapitre 6 qu'un mécanisme de rétrodiffusion de la lumière permet de lever cette dégénérescence résiduelle.

5.2.1.3 Positions des résonances dans un sphéroïde

Finalement, nous obtenons l'expression générale de la position des résonances en apportant à l'expression (5.30) une correction due à l'ellipticité :

$$Nx^P_{n,\ell,m} \approx \left[\ell + \tfrac{1}{2} + \left(\frac{\ell+\frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3}\left[\frac{3\pi}{2}\left(n-\tfrac{1}{4}\right)\right]^{2/3} - \frac{P}{\sqrt{N^2-1}}\right] \times \left[1+\frac{e}{3}\left(1-3\frac{\ell-|m|}{\ell}\right)\right] \tag{5.42}$$

Cette expression nous permet de dégager les principales caractéristiques du spectre des modes de galerie. Par analogie avec un interféromètre de Fabry-Perot nous définissons un pseudo-intervalle spectral libre (ISL) par :

$$ISL = \Delta\nu^{\Delta\ell}_{n,\ell} = c\frac{x_{n,\ell+1} - x_{n,\ell}}{2\pi a}, \tag{5.43}$$

ce qui correspond à l'intervalle entre deux modes de même polarisation et de même n mais séparés d'une unité suivant le nombre azimuthal ℓ (équivalent à l'ordre d'interférence longitudinal). Ce qui nous donne en première approximation :

$$\Delta\nu^{\Delta\ell}_{n,\ell} \approx \frac{c}{2\pi N a}. \tag{5.44}$$

De l'expression (5.42) nous pouvons déduire l'écart entre deux modes successifs polarisés $/\!/$ et $\perp$ et présentant un même n et ℓ par :

$$\Delta\nu^{/\!/,\perp}_{n,\ell} \approx \frac{c}{2\pi N a}\frac{\sqrt{N^2-1}}{N}. \tag{5.45}$$

Enfin, pour de petites ellipticités, la levée de dégénérescence en m donne naissance à une nouvelle famille de modes dont les résonances sont séparées [Equ. (5.41)] d'une fraction proportionelle au pseudo-ISL :

$$\Delta\nu^{\Delta m}_{n,\ell} = e \times \Delta m \ : \Delta\nu^{\Delta\ell}_{n,\ell}. \tag{5.46}$$

La figure 5.4 présente la distribution spatiale du vecteur de Poynting pour trois modes de polarisation $/\!/$ dans le cas d'une sphère parfaite et d'un sphéroïde d'un diamètre de 100 μm et d'indice $N \approx 1,45$ ($\ell = 287$). Sont représentés : le mode fondamental ($\ell - |m| = 0$) et les deux premières dégénérescences ($\ell - |m| = 1$, $\ell - |m| = 2$). Dans le cas de la sphère parfaite la position des résonances est indépendante de m. La figure 5.4.(g) présente la dégénérescence

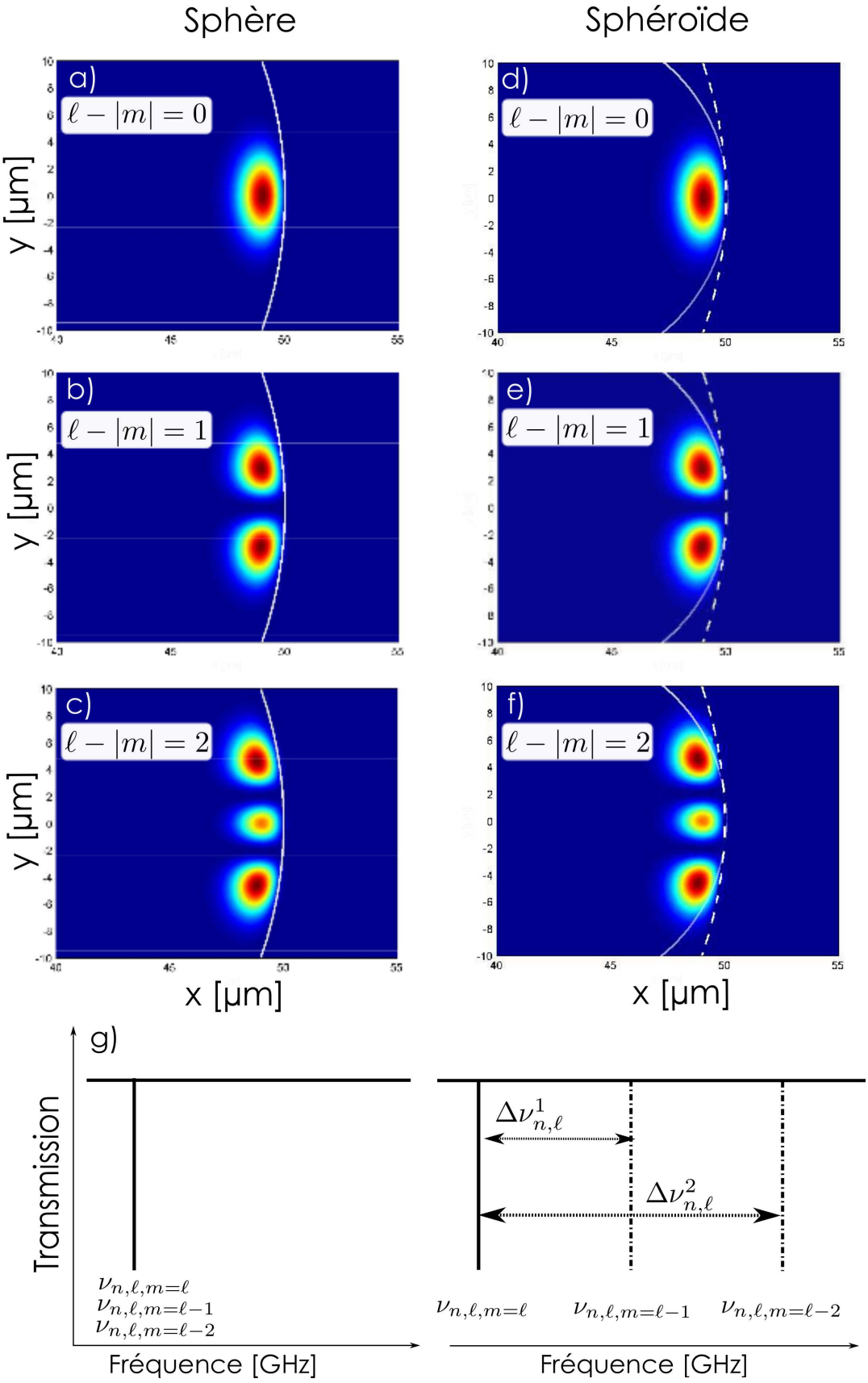


FIGURE 5.4 – Calcul de la distribution modale du vecteur de Poynting pour une sphère parfaite ($\phi = 100$ μm, $N = 1,45$ et $\ell = 287$) et une polarisation // [Fig. a)-b)-c)]. Adaptation de cette distribution modale pour un sphéroïde oblate de faible ellipticité [Fig. d)-e)-f)]. Sur la figure ci-dessus l'ellipticité est volontairement exagérée.
Fig. g) : répartition des fréquences de résonance dans chacun des cas.

en fréquence qui en résulte.
En revanche, dans le cas du sphéroide [Fig. 5.4.(d)-(e)-(f)], nous avons vu que le périmètre diffère en fonction de l'inclinaison du mode par rapport à l'axe Oz. Pour un oblate, l'axe Oz étant plus court que l'axe Ox, un mode incliné aura un périmètre plus court donc une fréquence de résonance plus grande [Equ. (5.37)]. Cet écart fréquentiel par rapport au mode fondamental (n, ℓ, ℓ) est quantifié par l'équation (5.46). Ainsi, pour le mode $(n, \ell, \ell - 1)$, $\Delta m = 1$, pour le mode $(n, \ell, \ell - 2)$, $\Delta m = 2$, etc. La figure 5.4.(g) présente la levée de dégénérescence en fréquence obtenue. Ainsi dans le cas de l'oblate, les modes de $m > \ell$ verront leur fréquence de résonance augmenter, tandis que dans le cas d'un prolate leur fréquence de résonance diminuerait. À partir de l'expression (5.42) nous calculons la position des résonances dans un tel sphéroïde ($\phi = 100$ μm, $N = 1,45$, $a = 50$ μm, $\ell = 286$, $\lambda \approx 1,55$ μm). Ce qui nous donne comme écart en fréquence : 36,8 GHz entre le mode fondamental et la première dégénérescence, et 6,84 GHz entre les deux premières dégénérescences. Expérimentalement, cette mesure a été réalisée par J.C. Knight *et al.* [132].
Nous pouvons noter qu'une même approche basée sur la résolution de l'Eikonale permet la généralisation au cas d'un ellipsoïde. Gorodetsky et Fomin [133–135] ont déterminé la propagation du champ électromagnétique et la position des résonances dans un tel résonateur où il n'existe pas d'axes de symétrie hormis les deux perpendiculaires aux plans cycliques.

5.3 Le problème électromagnétique

Les modes de galerie d'une sphère peuvent être décrits de manière exacte à partir des équations de Maxwell. On obtient alors l'expression vectorielle des champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ en considérant leurs conditions aux limites imposées par l'interface sphère / milieu extérieur. Le champ $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$, oscillant à la fréquence angulaire ω vérifie l'équation d'Helmoltz vectorielle :

$$\triangle \overrightarrow{V} + N(r)^2 k_0^2 \overrightarrow{V} = 0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 0, \tag{5.47}$$

où k_0 correspond au vecteur d'onde dans le vide, l'indice $N(r)$ est homogène et vaut N à l'intérieur de la sphère ($r < a$) et 1 à l'extérieur ($r > a$). Nous traitons le cas d'une sphère plongée dans de l'air.
Les solutions exactes de l'équation (5.47) dans le cas d'un problème à symétrie sphérique, sont développées dans de nombreux ouvrages classiques traitant de l'électromagnétisme [126, 136, 137].
Nous rappelons ici les éléments essentiels nous permettant de décrire les modes électromagnétiques se propageant dans la sphère.
La méthode de Hansen [138–140] est détaillée dans l'ouvrage de J.A. Stratton [136]. Elle permet, dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, d'obtenir les solutions de l'équation d'Helmoltz vectorielle à partir de l'équation scalaire :

$$\triangle \psi(\overrightarrow{r}) + N(r)^2 k_0^2 \psi(\overrightarrow{r}) = 0. \tag{5.48}$$

La description angulaire du champ étant naturellement décrite à partir des harmoniques sphériques, deux nombres quantiques ℓ et $m = -\ell, \cdots, 0, \cdots, \ell$ doivent être introduits (le signe de m correspondant au sens de circulation de l'onde autour de l'axe de quantification Oz). Les solutions en coordonnées sphériques de l'équation (5.48) permettent la séparation des variables, ainsi :

$$\psi(\overrightarrow{r}) = \frac{f(r)}{r} Y_\ell^m(\hat{r}) \tag{5.49}$$

où $\hat{r}$ représente le vecteur unitaire dans la direction radiale et Y_ℓ^m est le terme général des harmoniques sphériques.

5.3.1 La distribution radiale du champ

La fonction $f(r)$ doit satisfaire une équation différentielle de Riccati-Bessel [141] de la forme :

$$f''(r) + \left[N^2 k_0^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f(r) = 0. \tag{5.50}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} f_\ell(r) &= \psi_\ell(N k_0 r) & \text{pour } r < a, \\ f_\ell(r) &= \alpha \psi_\ell(k_0 r) + \beta \chi_\ell(k_0 r) & \text{pour } r > a, \end{cases} \tag{5.51}$$

où $\psi_\ell(\rho)$ est la solution *régulière* telle que $\psi_\ell(0) = 0$ et $\chi_\ell(\rho)$ la solution *irrégulière* pour laquelle $\chi_\ell(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} -\infty$. Elles sont reliées aux fonctions de Bessel sphériques ou cylindriques par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \psi_\ell(\rho) &= \rho j_\ell(\rho) &= \sqrt{\dfrac{\pi\rho}{2}} J_{\ell+1/2}(\rho), \\ \\ \chi_\ell(\rho) &= \rho n_\ell(\rho) &= \sqrt{\dfrac{\pi\rho}{2}} N_{\ell+1/2}(\rho), \end{cases} \tag{5.52}$$

où $J_{\ell+1/2}$ et j_ℓ sont les fonctions de Bessel (de première espèce) cylindrique et sphérique et $N_{\ell+1/2}$ et n_ℓ, les fonctions de Neumann (ou de Bessel de deuxième espèce) cylindrique et sphérique.

Notons que l'équation (5.50) régissant la distribution radiale du champ correspond à l'équation de Schrödinger (5.53) avec un pseudo-potentiel en cuvette V_{eff} dépendant de l'énergie $E = k_0^2$ dû à la discontinuité de l'indice de réfraction à la surface de la sphère et de l'effet "centrifuge" induit par le moment angulaire $\overrightarrow{L}$:

$$-f''(r) + V_{\text{eff}}(r) f(r) = E f(r), \tag{5.53}$$

$$\text{avec } V_{\text{eff}}(r) = k_0^2 \left[1 - N^2(r) \right] + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \tag{5.54}$$

Cette approche en fonction du pseudo-potentiel a été introduite par Nussenzveig [142] pour l'étude de la diffusion par des particules sphériques. Elle permet de décrire les propriétés

radiales des modes de galerie. La figure 5.5 représente les potentiels effectifs et leur fonction radiale associée pour E_1 ($n = 1$) et E_7 ($n = 7$) dans le cas d'un mode de polarisation TE se propageant dans une sphère en silice de rayon $a = 10$ μm et d'indice $N = 1,45$ ($\ell = 100$). L'axe des ordonnées est normalisé par rapport à l'énergie du mode $n = 1$. L'axe des abscisses représente la position par rapport au centre de la sphère.
Les modes de galerie contenus dans le puits de potentiel peuvent être assimilés à des états quasi-liés du rayonnement. La distribution spatiale du champ se décompose en quatre parties. Dans le cas du mode de plus basse énergie ($n = 1$) : (i) la partie du champ placée à gauche du point **r1** [Fig. 5.5] est totalement évanescente, (ii) entre le point **r1** et la surface physique de la sphère le champ est radiatif (iii) entre la surface et le point **r2** le champ est de nouveau évanescent, (iii) au delà de **r2** le champ redevient radiatif. Cette dernière partie du champ correspond à un terme de perte. C'est pour cela que les modes de galerie sont ce que l'on appelle des modes à fuite. Par analogie, la même description peut être appliquée pour le niveau d'énergie E_7 on considère alors les rayons **r1'** et **r2'**.
Pour des valeurs de n faibles ($n \approx 1$), le champ est bien confiné dans le puits de potentiel, la partie radiative externe est donc très faible. Pour $n = 7$, le mode est de plus haute énergie et se retrouve sur le haut du puit de potentiel. Le champ est alors très peu confiné dans la cavité et peut facilement s'en extraire. Cela se traduit par un rayon **r2'** plus faible et donc une partie radiative externe plus grande.
Pour les modes les plus confinés (n faible et ℓ élevé), le champ électromagnétique est principalement contenu dans le puits de potentiel ce qui leur confère un haut facteur de qualité. Rappelons que dans l'approche Eikonale, le nombre quantique n, correspond au nombre d'oscillations du champ entre la caustique interne (correspondant ici à **r1** ou **r1'**) et la surface de la sphère. La caustique externe correspond alors au rayon **r2** (ou **r2'**). Dans le cas présent, il se rapporte au nombre de lobes de la distribution radiale du champ à l'intérieur de la sphère [Fig. 5.5].

5.3.2 La distribution angulaire du champ

D'après la méthode de Hansen [136, p. 444], les solutions de l'équation d'Helmoltz vectorielle sont déterminées à partir de la solution scalaire $\psi(r)$ en posant les vecteurs :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M} = & \overrightarrow{\nabla} \times (\hat{r}\psi), \\ \overrightarrow{N} = & \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}, \end{cases} \tag{5.55}$$

vérifiant les relations :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{M} = 0, \tag{5.56}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{N} = 0, \tag{5.57}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M} = -\frac{\partial \overrightarrow{N}}{\partial t}. \tag{5.58}$$

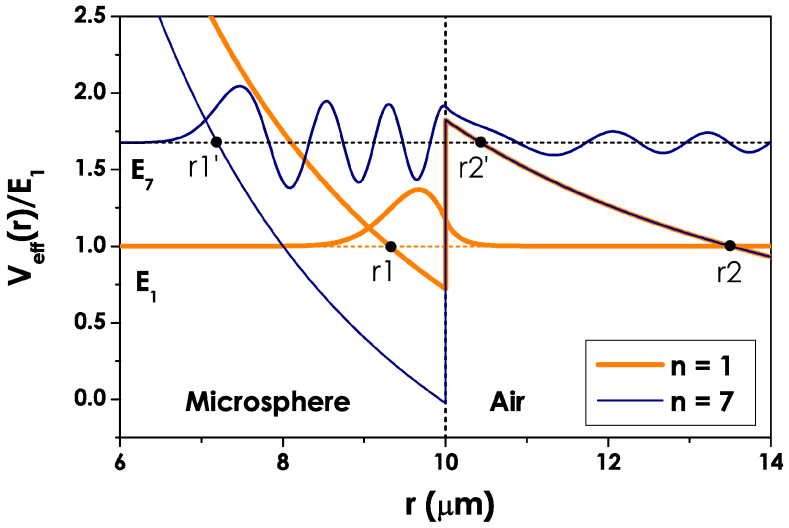


FIGURE 5.5 – Représentation des potentiels effectifs et de leur fonction radiale associée pour E_1 ($n = 1$) et E_7 ($n = 7$) dans le cas d'un mode TE ($\ell = 100$) se propageant dans une sphère en silice de rayon $a = 10$ μm et d'indice $N = 1,45$.

Le champ $\overrightarrow{M}$ étant orthoradial, il représentera le champ électrique des modes TE dont le champ magnétique variera comme $\overrightarrow{N}$ (et inversement pour les modes TM).
Ces solutions peuvent se décomposer dans la base des harmoniques sphériques vectorielles décrites par J. Jackson [126] :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{Y}}^{(\mathrm{m})}_{\ell m} &= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\,\overrightarrow{\nabla} Y^m_\ell \times \overrightarrow{r} \quad \text{noté } \overrightarrow{\mathrm{X}}^m_\ell \\ \overrightarrow{\mathrm{Y}}^{(\mathrm{e})}_{\ell m} &= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\, r\,\overrightarrow{\nabla} Y^m_\ell \quad \text{noté } \overrightarrow{\mathrm{Y}}^m_\ell \\ \overrightarrow{\mathrm{Y}}^{(\mathrm{o})}_{\ell m} &= Y^m_\ell\,\hat{r} \quad \text{noté } \overrightarrow{\mathrm{Z}}^m_\ell \end{cases} \tag{5.59}$$

Dans les définitions, les indices (m) et (e) correspondent à la nature du champ rayonné soit magnétique ou électrique. L'indice (o) dénote la nature radiale du champ.
Les solutions exactes du problème prennent la forme :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}^{\mathrm{TE}}_{\ell m}(\overrightarrow{r}) = E_o \dfrac{f_\ell(r)}{k_o r}\overrightarrow{X}^m_\ell(\theta,\varphi) \\ \overrightarrow{B}^{\mathrm{TE}}_{\ell m}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{E_o}{ic}\left[\dfrac{f'_\ell(r)}{k_o^2 r}\overrightarrow{Y}^m_\ell(\theta,\varphi) + \sqrt{\ell(\ell+1)}\dfrac{f_\ell(r)}{k_o^2 r^2}\overrightarrow{Z}^m_\ell(\theta,\varphi)\right] \end{cases} \tag{5.60}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}^{\mathrm{TM}}_{\ell m}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{E_o}{N^2}\left[\dfrac{f'_\ell(r)}{k_o^2 r}\overrightarrow{Y}^m_\ell(\theta,\varphi) + \sqrt{\ell(\ell+1)}\dfrac{f_\ell(r)}{k_o^2 r^2}\overrightarrow{Z}^m_\ell(\theta,\varphi)\right] \\ \overrightarrow{B}^{\mathrm{TM}}_{\ell m}(\overrightarrow{r}) = -\dfrac{iE_o}{c}\dfrac{f_\ell(r)}{k_o r}\overrightarrow{X}^m_\ell(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{5.61}$$

où les $f_\ell(r)$ correspondent aux solutions radiales du champ [Equ. (5.51)].

5.4 Propriétés des modes de galerie

5.4.1 Positions des résonances

D'après les équations (5.51) nous savons que le champ à l'intérieur de la sphère est une fonction radiale oscillante donnée par la fonction de Riccati $\psi_\ell(Nk_0r)$, tandis qu'à l'extérieur de la sphère le champ est une combinaison linéaire des fonctions $\chi_\ell(k_0r)$ et exponentiellement décroissantes $\psi_\ell(k_0r)$ [Fig. 5.5].
Les conditions de continuité des composantes tangentielles du champ à la surface de la sphère imposent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \psi_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi_\ell(k_0a) + \beta\chi_\ell(k_0a) \\ \\ P\psi'_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi'_\ell(k_0a) + \beta\chi'_\ell(k_0a) \end{cases} \tag{5.62}$$

avec $P = N$ pour les modes TE et $P = N^{-1}$ pour les modes TM. Les solutions exactes du système (5.62) impliquent la détermination des constantes α et β. La résolution de ce problème donne pour solution un terme de fréquence complexe prenant en compte les pertes radiatives du système. Nous proposons, en première approximation, de considérer nulle la partie radiative du champ à l'extérieur de la sphère ($\alpha = 0$). Dans ce cas, la barrière de potentiel est infinie et les modes se propageant dans la sphère sont tous dans un état lié. Cette hypothèse est d'autant plus valable que le nombre radial n est petit [Fig. 5.5]. En effet, le confinement du mode est meilleur pour n petit, la barrière de potentiel semble relativement grande, tandis que pour de grandes valeurs de n la partie du champ interne peut facilement s'échapper de la cavité, le mode est dans ce cas pratiquement dans un état libre.
Compte tenu de cette hypothèse, le système (5.62) donne pour condition de résonance en fonction du paramètre de taille $x = 2\pi a/\lambda$:

$$P\frac{\psi'_\ell(Nx)}{\psi_\ell(Nx)} = \frac{\chi'_\ell(x)}{\chi_\ell(x)} \tag{5.63}$$

que l'on peut également écrire à partir des fonctions de Bessel et de Neumann cylindriques [Equ. (5.52)] :

$$P\frac{J'_\nu(Nx)}{J_\nu(Nx)} = \frac{N'_\nu(x)}{N_\nu(x)} \tag{5.64}$$

avec $\nu = \ell + \frac{1}{2}$. La condition de résonance décrite par l'équation (5.64) relie les valeurs de x (associées aux positions de résonances) aux caractéristiques de la cavité (N et a). Cette expression n'est que formellement simple et ne peut être résolue que de manière numérique. Cependant, une approximation supplémentaire développée dans l'approche de Lam *et al.* [143] permet d'obtenir une expression analytique. Cette méthode consiste à ne traiter que les sphères de grande taille et à faire un développement limité en faisant tendre ν vers l'infini.
Par analogie avec la méthode de l'Eikonale, le moment angulaire orbital ν vaut $\nu = Nx\sin i$.

La géométrie du problème impose à la lumière de subir une réflexion totale à l'interface verre/air ce qui mène à un encadrement des valeurs de ν : $x \leq \nu \leq Nx$. Ainsi, pour $x \gg 1$, ν et x sont du même ordre de grandeur ($\nu/x \approx 1$). D'autre part, pour des modes de galerie bien confinés, c'est à dire $i \approx \pi/2$, on s'attend à ce que $|Nx - \nu|$ soit faible. En pratique, cette différence s'exprime en $\nu^{1/3}$. L'expression approchée de la position des résonances s'écrit alors :

$$Nx = \nu + t\nu^{1/3}, \tag{5.65}$$

avec $t = \mathcal{O}(1)$. Nous pouvons maintenant développer les fonctions de Bessel et de Neumann contenues dans l'équation (5.64) en séries de puissance $-\frac{1}{3}$ de ν [141] :

$$J_\nu(Nx) \approx \frac{2^{1/3}}{\nu^{1/3}}\mathrm{Ai}(-2^{1/3}t)\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)/\nu^{2j/3}\right] + \frac{2^{2/3}}{\nu}\mathrm{Ai}'(-2^{1/3}t)\sum_{j=0}^{\infty} g_j(t)/\nu^{2j/3}, \tag{5.66}$$

$$N_\nu(x) \approx -\frac{e^{\nu(\beta-\tanh\beta)}}{\sqrt{\pi\nu\tanh\beta/2}} \times \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{u_j(\coth\beta)}{\nu^j}\right]. \tag{5.67}$$

Procédons de la même manière pour les dérivées :

$$J'_\nu(Nx) \approx -\frac{2^{2/3}}{\nu^{2/3}}\mathrm{Ai}'(-2^{1/3}t)\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(t)/\nu^{2j/3}\right] + \frac{2^{1/3}}{\nu^{4/3}}\mathrm{Ai}(-2^{1/3}t)\sum_{j=0}^{\infty} l_j(t)/\nu^{2j/3}, \tag{5.68}$$

$$N'_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\sinh 2\beta}{\pi\nu}}e^{\nu(\beta-\tanh\beta)} \times \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{u_j(\coth\beta)}{\nu^j}\right]. \tag{5.69}$$

Dans les expressions précédentes, Ai est la fonction d'Airy [141] et $f_j(t)$, $g_j(t)$, $h_j(t)$, $l_j(t)$ ainsi que $u_j(t)$ sont des polynômes et $\cosh\beta = \nu/x$. Les expressions de ces différentes fontions sont présentées dans le *Handbook of mathematical functions* [141].
Au premier ordre, les termes de l'équation (5.64) s'écrivent :

$$\frac{PJ'_\nu(Nx)}{J_\nu(Nx)} \approx -P\frac{2^{1/3}}{\nu^{1/3}}\frac{Ai'(-2^{1/3}t)}{Ai(-2^{1/3}t)}, \tag{5.70}$$

$$\frac{N'_\nu(x)}{N_\nu(x)} \approx -|\sinh\beta| = -\sqrt{\mu^2 - 1} \tag{5.71}$$

Par suite, la méthode développée par Lam, mène à considérer l'évolution de l'équation (5.70) pour $\nu \to \infty$, ce qui revient à traiter uniquement le cas des sphères de grande taille. La puissance 1/3 de ν ne peut être compensée que si $\mathrm{Ai}(-2^{-1/3}t) = \mathcal{O}(\nu^{-1/3})$, en d'autres termes, il faut que $2^{1/3}t$ soit très proche d'une racine de la fonction d'Airy $\mathrm{Ai}(-z)$ telle que :

$$2^{1/3}t = \alpha_n + \mathcal{O}(\nu^{-1/3}). \tag{5.72}$$

En substituant ce résultat dans l'équation (5.65) nous obtenons une expression approchée des résonances au premier ordre :

$$Nx_{\ell,n} = \nu + 2^{-1/3}\alpha_n \nu^{1/3} + \mathcal{O}(1), \tag{5.73}$$

avec $\nu = \ell + \frac{1}{2}$. En utilisant un développement d'ordre supérieur [47,143] nous obtenons une expression tenant compte de la correction due à la polarisation :

$$Nx_{\ell,n} = \ell + \tfrac{1}{2} + \left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3} \alpha_n - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} + \cdots \tag{5.74}$$

Ce développement est détaillé dans la thèse de M$^{\text{lle}}$ Arnaud [47]. Nous retrouvons une expression similaire à celle obtenue par l'approche Eikonale [Equ. (5.30)]. Formellement, le terme $\left[\frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}$ est remplacé par le n$^{\text{ième}}$ zéro de la fonction d'Airy Ai$(-z)$.
F. Treussart [41] a montré par comparaison des deux approches pour des ordres radiaux n compris entre 1 et 10 que les résultats différenciaient au maximum de 1%.

5.5 Les différentes contributions au facteur de qualité

Le champ contenu dans le mode (n, ℓ, m) se propageant dans une sphère subit irrémédiablement des pertes. Afin de quantifier ces pertes, nous introduisons le facteur de qualité de la sphère isolée :

$$Q = \omega_0 \frac{\text{énergie stockée}}{\text{puissance dissipée}}, \tag{5.75}$$

où ω_0 est la fréquence angulaire du champ. Au cours de sa propagation, l'énergie du champ décroît [1] suivant une loi exponentielle telle que $I(L_{\text{att}}) = I_0 e^{-\alpha L_{\text{att}}}$ où L_{att} est la longueur typique d'atténuation et α représente le coefficient de perte optique en nepers par mètre. Ce dernier terme rassemble les différentes contributions aux pertes et peut se décomposer suivant la somme :

$$\alpha = \alpha_{\text{rad}} + \alpha_{\text{mat}} + \alpha_{\text{surf}} + \alpha_{\text{cont}}. \tag{5.76}$$

Nous identifions dans cette dernière expression les coefficients :

- α_{rad} : lié à la courbure de la surface de la sphère. D'un point de vue énergétique, la puissance dissipée correspond à la fuite d'énergie à travers la barrière de potentiel résultant de la différence d'indice à la surface [Fig. 5.5]. Dans le cas d'une résolution exacte du problème électromagnétique [Partie 5.3], α_{rad} correspond à la partie réelle de la fréquence complexe. Intuitivement, pour un mode de galerie très confiné (par exemple $n = 1$), le facteur de qualité lié à la diffraction sera donc grand,
- α_{mat} intègre les pertes liées à l'absorption du matériau et à la diffusion Rayleigh. Ces pertes proviennent des inhomogénéités d'indice et des impuretés résiduelles contenues dans le matériau,

1. Nous ne considérons pas le régime non-linéaire.

- α_{surf} représente le fait que l'état de surface d'une sphère n'est jamais totalement parfait. Il subsiste toujours une rugosité provenant du refroidissement non uniforme de la silice fondue après l'étape de fabrication [144] ce qui entraîne des pertes par diffusion.
- α_{cont} : toujours pendant ce processus de fabrication [partie 5.6], la fusion de la silice entraîne l'adsorption d'une fine couche d'eau provoquant l'absorption de lumière dans le moyen infrarouge [145].

Introduisons le temps caractéristique d'atténutation de l'énergie $\tau_{\text{att}} = L_{\text{att}}/(c/N)$. L'expression du facteur de qualité en fonction du temps τ_{att} s'écrit :

$$Q_0 = \omega_0 \tau_{\text{att}} = \frac{2\pi N}{\lambda \alpha}. \tag{5.77}$$

En insérant l'expression (5.76) dans l'équation (5.77), il vient :

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{mat}}} + \frac{1}{Q_{\text{surf}}} + \frac{1}{Q_{\text{cont}}}. \tag{5.78}$$

Q_{rad} - Les pertes par diffraction

Dans le cas de la sphère "idéale", le facteur de qualité Q_0 ne dépend que des pertes par diffraction. Par une approche semi-classique, F. Treussart [41], exprime le facteur de qualité ultime, Q_{rad}, en fonction de l'armortissement de la partie évanescente du champ dans la barrière de potentiel. En fonction du paramètre de taille x, Q_{rad} s'estime comme :

$$Q_{\text{rad}} \approx x \exp\left[2(\ell + \tfrac{1}{2}) g\left(\frac{x}{\ell + \frac{1}{2}}\right)\right], \tag{5.79}$$

avec $g(y) = -\sqrt{1-y^2} + \text{argch}(1/y)$.
En ne considérant que les ordres radiaux faibles (dans ce cas $x/\ell \approx 1/N$), g peut être remplacé par sa tangente et nous obtenons :

$$Q_{\text{rad}} \approx \frac{\ell}{N} \exp\left[2\ell \ : g\left(\frac{1}{N}\right)\right] \times \exp\left[-2\sqrt{N^2-1}\frac{Nx-\ell}{N}\right]. \tag{5.80}$$

Par insertion de l'équation de dispersion $Nx_{n,\ell}$ [Equ. (5.74)], nous pouvons faire apparaître de manière explicite la dépendance en n et en polarisation. La dépendance en n du Q_{rad} s'exprime alors comme :

$$Q_{\text{rad}} \propto \exp\left[-2\frac{\sqrt{N^2-1}}{N}\left(\frac{\ell+\frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3} \alpha_n\right], \tag{5.81}$$

ainsi lorsque n augmente la valeur de Q_{rad} diminue.
De même le facteur de qualité lié aux pertes par diffraction a une dépendance à la polarisation en :

$$Q_{\text{rad}} \propto \exp\left[\frac{2P}{N}\right]. \tag{5.82}$$

Par conséquent, pour un mode (n, ℓ, m) fixé, le facteur de qualité associé à la polarisation TE $(P = N)$ est plus élevé que son homologue TM $(P = 1/N)$. En effet, la répartition spatiale du champ diffère d'une polarisation à l'autre [systèmes (5.60) et (5.61)], il s'avère que le mode TE dispose d'une composante radiale plus petite que le TM ce qui lui offre un meilleur confinement dans la cavité.
D'après l'équation (5.80), en prenant $Nx_{n,\ell} \approx \ell + 1/2$ et $N = 1,5, \lambda = 1,55$ μm nous obtenons pour une sphère de 100 μm de diamètre ($\ell = 294$) et une sphère de 40 μm de diamètre ($\ell = 117$), un facteur de qualité lié à la courbure de la sphère de :

$$\begin{cases} Q_{\text{rad}} &= 2,51 \times 10^{57}, \quad \text{pour } D = 100 \ \mu\text{m} \\ \\ Q_{\text{rad}} &= 4,24 \times 10^{23}, \quad \text{pour } D = 40 \ \mu\text{m} \end{cases} \tag{5.83}$$

Les microsphères que nous utilisons ne sont évidemment pas limitées par le Q_{rad}. Il est d'usage de considérer que la contribution radiative au facteur de qualité est limitante lorsque la condition :

$$\frac{D}{\lambda} \geq 15, \tag{5.84}$$

n'est plus respectée [145, 146]. Le facteur Q_{rad} est alors inférieur à 10^{11} autrement dit plus faible que le facteur de qualité Q_{mat} lié au matériau.

Q_{mat} - Les pertes liées au matériau

Nous traitons le cas de la silice, materiau utilisé pour la réalisation de nos sphères passives. Au cours des dernières décennies la silice a été le sujet de nombreuses études pour la réalisation de fibre dans le domaine des télécommunications optiques. La recherche dans ce domaine permet aujourd'hui d'avoir un matériau présentant une fenêtre de transparence autour de 1,55 μm. Cependant, il subsite toujours une absorption et une diffusion. Le terme d'atténuation résultant est estimé en utilisant l'expression de α_{mat} donnée en fonction de la longueur d'onde par [147, 148] :

$$\alpha_{\text{mat}} \approx \quad [0,7/\lambda^4 \ + \ 1,1 \times 10^{-3} \exp(4,6/\lambda) \tag{5.85}$$

$$+4 \times 10^{12} \exp(-56/\lambda)], \tag{5.86}$$

où α_{mat} s'exprime en dB/km et λ en μm. Pour $\lambda = 1,55$ μm, nous prenons la valeur de l'atténuation donnée pour nos fibres silices, $\alpha_{\text{mat}} \approx 0,17$ dB/km. Le passage entre le α_{mat} en nepers (Np) et les α_{mat} en décibels (dB) s'obtient avec :

$$\alpha_{\text{mat}}(\text{Np}) = \frac{\ln 10}{10} \alpha_{\text{mat}}(\text{dB}) = \frac{\alpha_{\text{mat}}(\text{dB})}{4,34}, \tag{5.87}$$

ce qui donne pour le facteur de qualité lié à l'atténuation du matériau :

$$Q_{\text{mat}} = \frac{2\pi N}{\lambda} \frac{4,3 \times 10^3}{\alpha_{\text{mat}}(\text{dB})}. \tag{5.88}$$

TABLE 5.2 – Résultats expérimentaux de la mesure de la rugosité de surface sur une sphère en silice. Mesure réalisée par AFM (*Atomic Force Microscopy*) par Vernooy *et al.* [150].

	σ [nm]	B [nm]
Mesures	$1,7$	5

Dans une sphère de silice ce facteur Q_{mat} est de l'ordre de $1,5 \times 10^{11}$. Cette contribution au facteur de qualité est bien plus limitante que celle due à la structure (Q_{rad}).

Les pertes liées à l'état de surface

Jusqu'à présent nous avons considéré la surface de la sphère parfaitement lisse, en réalité, il existe toujours une inhomogénéité de surface. Dans la littérature, de nombreux modèles ont été proposés afin d'estimer les pertes induites par la diffusion de surface. Le modèle proposé par Gorodetsky *et al.* en 2000 [43] semble être le plus abouti d'entre eux. Nous présentons historiquement les différents modèles développés dans le cas particulier des microsphères, en estimant pour chaque modèle le facteur de qualité dans le cas d'une sphère de 100 μm et de 40 μm de diamètre.

En 1989, Braginsky *et al.* [35] proposent un modèle dérivé de l'optique planaire [149]. Ce modèle ne prend en compte que la hauteur moyenne du motif défini sur la figure 5.6 par σ. Le facteur Q_{surf} se définit alors par :

$$Q_{\text{surf}} \approx \frac{3\lambda^2 \ell^{10/3}}{16\pi^5 \sigma^2 N^2 n^{5/2}}. \tag{5.89}$$

Nous remarquons que le Q_{surf} augmente conjointement avec le diamètre du fait de sa dépendance en $\ell^{10/3}$. Pour comparer les différents modèles du Q_{surf}, nous utilisons les résultats expérimentaux obtenus par Vernooy *et al.* [150]. En 1998, Ils réalisent une mesure expérimentale de la rugosité de surface sur une sphère de silice par une mesure AFM (*Atomic Force Microscopy*) sur une surface de 20 × 20 nm et une résolution de 0,01 nm. Ils obtiennent une mesure de $\sigma = 1,7$ nm et de $B = 5$ nm. Les résultats expérimentaux sont rapportés dans le tableau 5.2.

Nous considérons le mode le plus confiné $(1, \ell, \ell)$. Dans le cas de deux sphères de 100 μm et 40 μm de diamètre pour une longueur d'onde de travail $\lambda = 1,55$ μm nous obtenons :

$$\begin{cases} Q_{\text{surf}} = 3,82 \times 10^{10}, & \text{pour } D = 100 \ \mu\text{m} \\ \\ Q_{\text{surf}} = 1,77 \times 10^{9}, & \text{pour } D = 40 \ \mu\text{m} \end{cases} \tag{5.90}$$

En 1996, Gorodetsky *et al.* [145] définissent un nouveau modèle basé sur la diffusion de

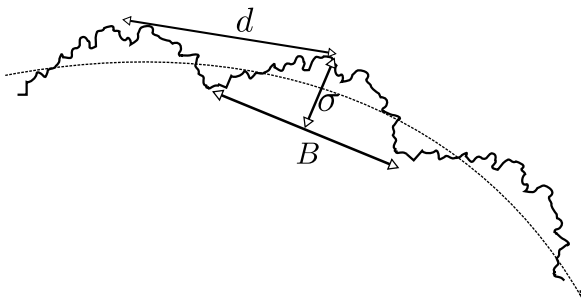


FIGURE 5.6 – Représentation schématique de la rugosité de surface d'une microsphère. σ correspond à la hauteur moyenne des diffuseurs, B est la longueur de corrélation et d la distance entre deux diffuseurs.

Rayleigh de molécules déposées en surface pour un champ en incidence rasante sous réflexion totale. Aucun détail n'est associé à la définition de cette expression :

$$Q_{\text{surf}} = \frac{\lambda^2 D}{2\pi^2 \sigma^2 B}. \tag{5.91}$$

Cette expression pondère différemment l'influence des variables. Le rayon de la sphère intervient de manière linéaire contrairement à l'équation (5.89) où a intervient par l'intermédiaire de $\ell \approx 2\pi aN/\lambda$ en puissance $\frac{10}{3}$. Notons tout de même que le modèle s'affine dans le sens où la répartition spatiale des diffuseurs est prise en compte par le coefficient B correspondant à la longueur de corrélation des diffuseurs [150] [Fig. 5.6].
La valeur obtenue par Vernooy *et al.* [150] est $B = 5$ nm, ce qui donne pour les Q_{surf} :

$$\begin{cases} Q_{\text{surf}} &= 8,4 \times 10^8, \quad \text{pour } D = 100\ \mu\text{m} \\ \\ Q_{\text{surf}} &= 3,3 \times 10^8, \quad \text{pour } D = 40\ \mu\text{m} \end{cases} \tag{5.92}$$

L'impact de la rugosité semble surestimé au regard des autres résultats obtenus. Notons également l'absence de dépendance en N dans l'expression (5.91), cette variable semble pourtant avoir un rôle influent sur la valeur des pertes par diffusion.
En se basant sur la perte d'énergie imposée par la diffusion en surface Vernooy *et al.* définissent un modèle basé sur le rapport volumétrique entre la couche composée des diffuseurs et le volume du mode. En supposant, que la taille des diffuseurs est plus petite que la longueur d'onde ($\sigma B^2 \ll \lambda^3$) ils obtiennent :

$$Q_{\text{surf}} \approx \frac{3N^2(N^2+2)^2}{(4\pi)^3(N^2-1)^{5/2}} \frac{\lambda^{7/2} D^{1/2}}{\sigma^2 B^2}, \tag{5.93}$$

où N est l'indice du milieu. En appliquant, ce modèle dans le cas des deux sphères considérées nous avons :

$$\begin{cases} Q_{\text{surf}} &= 2,25 \times 10^{10}, \quad \text{pour } D = 100\ \mu\text{m} \\ \\ Q_{\text{surf}} &= 1,42 \times 10^{10}, \quad \text{pour } D = 40\ \mu\text{m} \end{cases} \tag{5.94}$$

TABLE 5.3 – Synthèse des différentes contributions au facteur de qualité intrinsèque pour une sphère en silice. Les valeurs rapportées sont obtenues pour une sphère de 100 μm et 40 μm de diamètre. L'indice du matériau est de 1,5, le mode de polarisation TE considéré est le plus confiné $(1, \ell, \ell)$.

	Q_{rad}	Q_{mat}	Q_{surf} [43]	Q_{cont}
Sphère 100 μm ($\ell = 294$)	$2,51 \times 10^{57}$	1.5×10^{11}	$4,81 \times 10^{10}$	qcq 10^8
Sphère 40 μm ($\ell = 117$)	$4,24 \times 10^{23}$	1.5×10^{11}	$1,92 \times 10^{10}$	qcq 10^8

En 2000, Gorodetsky *et al.* [43] redéfinissent le terme d'atténuation α_{surf} en assimilant cette granularité de la sphère à des fluctuations de la constante diélectrique. Ce modèle prend en compte l'aspect modal n, ℓ ($|m| = \ell$) ainsi que la polarisation P du mode de galerie considéré. Nous ne considérons ici que la polarisation TE. Elle est introduite dans l'expression du Q_{surf} par le coefficient K_{TE} correspondant au rapport entre la puissance totale diffusée dans toutes les directions et la puissance diffusée suivant un angle inférieur à l'angle critique. Le modèle repose sur l'évaluation du rapport entre l'intensité initiale et l'intensité rétrodiffusée du mode considéré. Tout calcul fait, il en ressort une expression apparemment simple du Q_{surf} :

$$Q_{\text{surf}} = \frac{K_{\text{TE}}}{K_{\text{TE}} + 1} \cdot \frac{3\lambda^3 a}{8N\pi^2 B^2 \sigma^2}. \tag{5.95}$$

En suivant la même démarche, cette expression du Q_{surf} peut être réécrite pour la polarisation TM. Notons que les nombres n et ℓ n'apparaissent pas de manière explicite dans cette expression de Q_{surf}. Toujours avec les mêmes valeurs de σ et B et pour $K_{\text{TE}} = 2,8$ dans le cas de la silice, nous obtenons pour les deux sphères :

$$\begin{cases} Q_{\text{surf}} &= 4,81 \times 10^{10}, \quad \text{pour } D = 100\ \mu\text{m} \\ \\ Q_{\text{surf}} &= 1,92 \times 10^{10}, \quad \text{pour } D = 40\ \mu\text{m} \end{cases} \tag{5.96}$$

À l'heure actuelle cette expression du facteur Q_{surf} semble être la plus aboutie. Elle est notamment utilisée dans les références [144, 151, 152] pour d'autres matériaux.

La figure 5.7 représente les différentes évolutions du facteur de qualité lié à l'état de surface en fonction de σ. Le modèle de Gorodetsky *et al.* [43] de 2000 apparaît comme étant le modèle le plus favorable [Equ. (5.96)]. Le facteur de qualité intrinsèque d'une sphère en silice semble donc être limité par la rugosité de surface.

Cependant, les travaux menés par Gorodetsky *et al.* [145] montrent que l'étape de fusion de la silice entraîne l'adsorption d'ions OH^- permettant à une couche d'eau de se déposer sur la surface des billes. Une heure après fabrication, le facteur de qualité se trouve limité à quelques 10^8 à $\lambda = 1550$ nm par absorption de la lumière [Fig. 5.7]. Les différentes contributions au facteur de qualité que nous venons de discuter sont reportées dans le

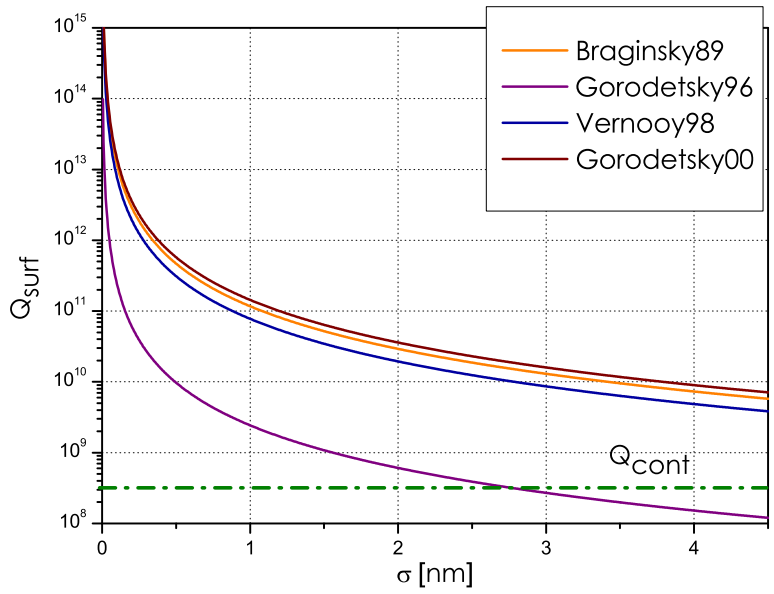


FIGURE 5.7 – Évolution des différents modèles du facteur de qualité liés à l'état de surface en fonction de σ, la hauteur moyenne des diffuseurs. Les valeurs fixées sont : $B = 5$ nm, $N = 1,45$, $a = 50$ μm, $\ell = 293$. Nous considérons le mode le plus confiné $(1, \ell, \ell)$ polarisé TE.

tableau 5.3.
Le facteur de qualité intrinsèque à notre longueur d'onde de travail ($\lambda = 1550$ nm) est donc limité par l'absorption de surface due à l'adsoption des ions OH^-. Un travail sous atmosphère contrôlée permettrait de s'affranchir de cette limitation [145, 150].

5.6 Fabrication des sphères

Il existe plusieurs méthodes de fabrication de sphère et généralement les procédés sont simples à mettre en oeuvre. De manière générale, à chaque matériau correspond un procédé de fabrication adapté. Pour obtenir des microrésonateurs sphériques en matériau vitreux, la fusion est la technique la plus simple. Pour des sphères passives nous utilisons la silice compte tenu des propriétés décrites précédemment. Pour les microsphères actives nous utilisons des matrices vitreuses hôtes (oxydes ou fluorées) dopées en ions terres rares Erbium. La thèse de L. Ghişa [48] présente une revue des différentes techniques de fabrication de ce type de résonateurs microsphèriques. Nous ne rappellerons ici que les deux techniques utilisées dans cette thèse, à savoir un procédé de fusion par arc électrique pour les sphères passives et par fusion dans une torche plasma microonde pour la réalisation de sphères actives.

Propriétés essentielles du procédé de fabrication par fusion

Le procédé de fabrication doit répondre à trois critères :
- La source de chaleur doit être chimiquement inerte pour ne pas modifier la composition des verres.
- La durée du processus de fusion doit être assez long pour permettre un transfert d'énergie.
- Le dépôt de chaleur doit se faire progressivement pour éviter toute évaporation de matière.

5.6.1 Fusion par arc électrique

Les sphères en verre oxyde de type verre silicate peuvent être fabriquées par fusion de l'extrémité d'une baguette de diamètre approprié du matériau retenu. Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé des tiges de verre homogène c'est-à-dire ne présentant pas de structure cœur-gaine optique. Notre choix s'est porté sur un verre de même nature que celui utilisé pour la fabrication des fibres optiques monomodes. Ce verre présente une très faible concentration en impuretés ($< 0,3$ ppm) et en ions OH^- ($< 0,2$ ppm) et son atténuation optique est minime ($\approx 0,2$ dB/km à 1550 nm).

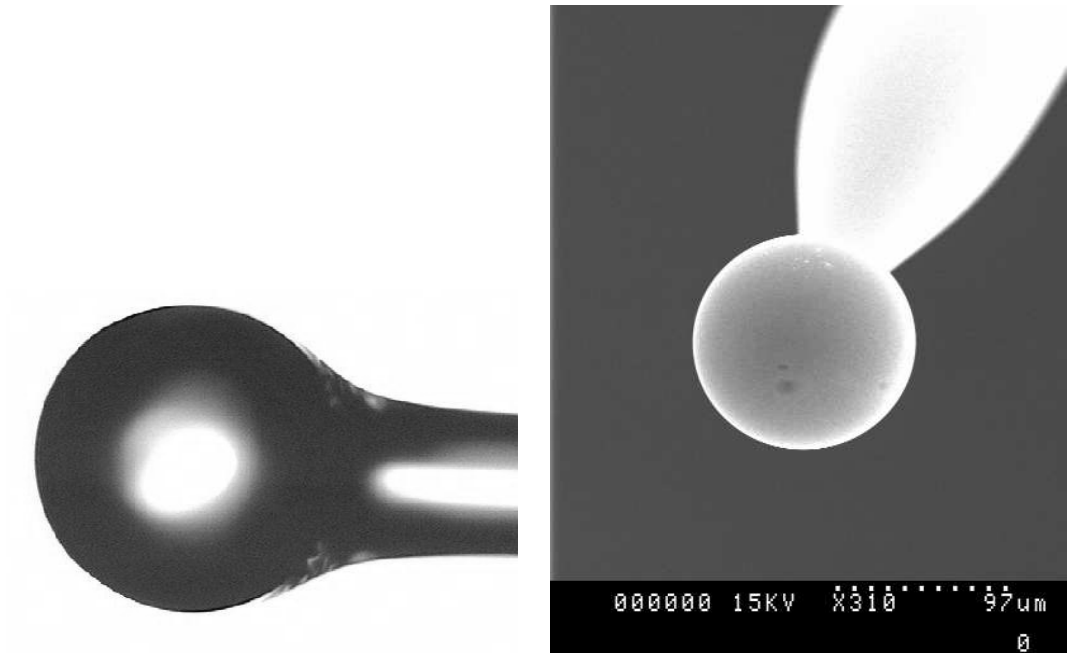
Nettoyage de l'ébauche

Le protocole de nettoyage de la tige est le même quel que soit le diamètre de résonateur recherché. La tige est préalablement nettoyée à l'aide d'acétone et d'éthanol, pour enlever toute trace de dépôt organique. Il est important de ne pas nettoyer cette ébauche après fabrication. Cela ne peut qu'ajouter des impuretés et diminuer les facteurs de qualité. Si un doute existe quant à la pureté de la tige, il est préférable d'en fabriquer une nouvelle.

Protocole de fabrication

La fusion de l'ébauche est aisément obtenue en utilisant un arc électrique. Cette technique produit une très faible quantité de suie qui en se déposant sur la surface de la sphère aurait un effet désastreux sur les pertes de la cavité. Dans notre cas, l'arc électrique est produit par une soudeuse à fibres optiques programmable (ERICSSON FSU 925). Un tel dispositif obéit par construction aux critères de fabrication que nous nous sommes fixés. Cet appareil permet un positionnement de l'ébauche et un transfert d'énergie de haute qualité ce qui donne une reproductibilité élevée en taille et forme des résonateurs sphériques. Pendant la fabrication, une fois la température de fusion de la silice atteinte, les forces de tension superficielle donne naturellement une forme sphéroïdale au matériau. Si la source de chaleur est supprimée la solidification est quasi-instantanée. Avec un tel protocole, et en ne procédant qu'à une seule fusion nous obtenons aisément des résonateurs de diamètres doubles à celui du diamètre de

la tige utilisée, par exemple avec une ébauche de diamètre initial 125 μm nous obtenons des résonateurs de diamètres compris entre 250 et 280 μm [Fig. 5.8(a)].
Il est possible d'agir sur la forme du sphéroïde pendant la fabrication. Pour cela nous utilisons deux actions différentes, à savoir la rotation de la sphère et l'augmentation de la quantité de verre à fondre. Ainsi, si nous voulons obtenir des diamètres plus importants, nous pouvons refondre la microsphère déjà obtenue. Chaque fusion supplémentaire augmente le diamètre total d'environ 40 μm. Ces fusions successives sont effectuées après rotation (manuelle avec cette soudeuse) de la tige. Au bout de cinq fusions consécutives, nous atteignons un diamètre maximal de 400 μm. Sans rotation de la sphère entre chaque étape de fusion, le résonateur est au final fortement déformé.
Nous pouvons noter que cette technique de fusion par arc électrique permet également d'obtenir des sphères de diamètre relativement réduit (<150 μm). Dans ce cas, avant de procéder à la fusion nous devons faire subir un étirage à l'ébauche. Cette étape a pour but d'obtenir une ébauche de diamètre de quelques dizaines de microns, à partir de laquelle la microsphère sera fabriquée. On part pour cela d'une baguette de silice de 125 μm de diamètre et de quelques centimètres de longueur. Un programme permet de réaliser l'étape de fusion/étirage menant à une ébauche amincie de diamètre compris entre 20 et 60 μm. Le diamètre de l'ébauche étirée dépend de la quantité de silice qui est fondue et de la vitesse d'étirage. Avec un tel protocole en utilisant des tiges étirées on obtient des sphères de diamètres inférieurs à 140 μm [Fig. 5.8(b)].



(a) (b)

FIGURE 5.8 – a) Microsphère de diamètre 277 μm, vue obtenue au microscope. b) Microsphère de diamètre 120 μm, vue obtenue au Microscope Électronique à Balayage (MEB).

Contrôle optique

Lors de la fabrication des résonateurs, leur validation et leur sélection sont assurées par visualisation directe. Le contrôle visuel "classique" sous binoculaire ou microscope permet de s'assurer de l'absence de défauts importants, à savoir : microbulles internes, dépôts surfaciques ou rayures voire félures. Ce test est toujours effectué. Il permet entre-autres une première approximation du diamètre de résonateur obtenu.

5.6.2 Fusion par torche plasma

Pour la réalisation de sphères dopées, la méthode de fusion par arc électrique n'est pas la plus appropriée notamment par son manque de flexibilité en terme de réglage de la température de fusion suivant le verre dopé utilisé. De plus, la technique de fusion par arc électrique nécessiterait une étape supplémentaire consistant à réaliser une ébauche pour chaque couple verre/dopant, suivant différents taux de dopage.
Nous utilisons une autre solution, qui consiste à fabriquer les sphères à partir de poudres. Il suffit dans ce cas de se procurer des morceaux de verre, puis de les concasser. Nous faisons ensuite passer en *chute libre* ces poudres dans un plasma de gaz ionisés (mélange d'argon et d'oxygène) [153]. Les forces de tension superficielle du matériau leur donnent une forme de sphère. La forme sphéroïdale est figée par la transition brutale entre la sortie de la flamme et l'atmosphère ambiante. Cette trempe est nécessaire à la conservation d'une structure amorphe. La température au sein du plasma est fonction des débits d'oxygène et d'argon, ainsi que la puissance du signal micro-onde excitateur. Elle est ajustée pour chaque type de verre. Ce dispositif offre la possibilité de régler la température entre 800 °C et $\approx$ 2300 °C, ce qui offre la possibilité de manipuler des matériaux aussi différents que des verres fluorés, caractérisés par de basses températures de fusion, ou des verres oxydes comme les verres silicates associés à de très hautes températures de fusion.
La fabrication de microsphères à partir de poudres, offre une plus grande flexibilité au niveau du choix du couple verre/dopant que la méthode de "fibre fondue". De plus, les sphères produites peuvent dans le meilleur des cas présenter une ellipticité inférieure à 0,01 % pour des sphères de 50 μm de diamètre et inférieure à 0,1 % pour des sphères de 100 μm de diamètre.
Les sphères n'ont pas de support propre pour les manipuler aisément, aussi faut-il posséder les techniques permettant d'attraper les sphères une à une, de les manipuler pour ensuite les coller sur un support afin de les insérer dans le montage optique [146]. Pour des verres fluorés de type ZBLA les diamètres maximum atteignables (pour des sphères de bonnes qualités) sont de l'ordre de 200 μm. Cependant, pour nos applications [chapitre 7], cette gamme de diamètres convient parfaitement.

5.7 Le couplage par ondes évanescentes

L'intérêt principal des résonateurs à modes de galerie est de présenter un fort confinement du champ électromagnétique par réflexions totales internes conférant, au mode considéré, un très haut facteur de qualité intrinsèque. Par réciprocité, le couplage de lumière dans ces modes de hautes surtensions ne peut se faire que par l'intermédiaire d'ondes evanescentes. Pour cela : le système d'insertion/extraction (le coupleur) doit permettre un recouvrement des champs évanescents du résonateur et du coupleur et réaliser un accord de phase modal entre les deux composants [Fig. 5.10].

Très sommairement quatre systèmes de couplage sont principalement utilisés [Fig. 5.9].

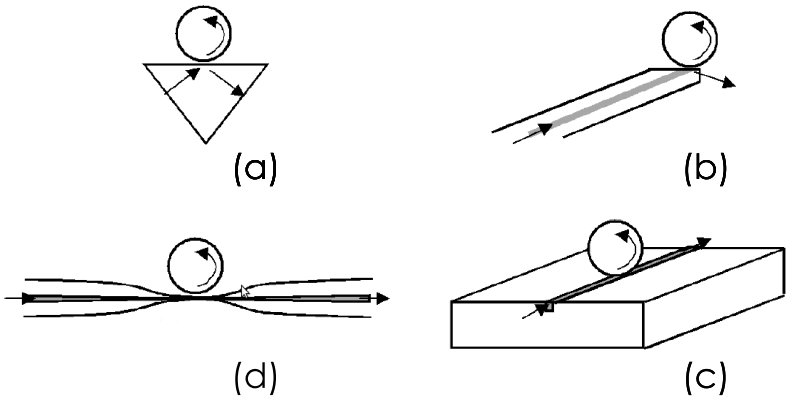


FIGURE 5.9 – Représentation schématique de configurations de couplage par ondes evanescentes. Sont représentés : a) le prisme - b) la fibre bizeautée - c) la fibre polie - d) le taper biconique. Cette figure est très largement inspirée de graphiques publiés dans la référence [154].

En 1989, Braginsky *et al.* introduisent la technique de couplage[2] de sphères en silice par prisme [35, 156–159] [Fig. 5.9.(a)]. Un faisceau laser injecté dans un prisme, subit une réflexion totale frustrée sur une des faces produisant une onde evanescence sur la partie externe du dioptre. L'accord de phase entre les champs évanescents de la sphère et du prisme est réalisé en ajustant l'angle d'incidence. La fibre bizeautée [160], est une déclinaison de la méthode de couplage par prisme [Fig. 5.9.(b)] présentant l'avantage d'être connectorisée par fibre optique. On s'affranchit ainsi de l'étape d'alignement du laser à l'entrée du prisme. Le principe du couplage par guide [Fig. 5.9.(c)] se décline en différents dispositifs comme la fibre polie [161–163] ou le guide enterré. Notons également le couplage par guide multicouches permettant de réaliser un meilleur accord de phase. Cette structure de guide SPARROW "*Strip-line pedestal antiresonant reflecting waveguides*" permet d'obtenir un couplage robuste, et par là même d'envisager des systèmes intégrés [154, 164].

La technique de couplage que nous utilisons est le couplage par taper biconique [163, 165–169]. Cette technique présentée la première fois par J.C. Knight *et al.* [165] offre différents

2. Auparavant le couplage se réalisait en focalisant un laser sur la sphère [155]. Cette technique présente une très faible efficacité et ne permet pas l'accès aux modes les plus confinés.

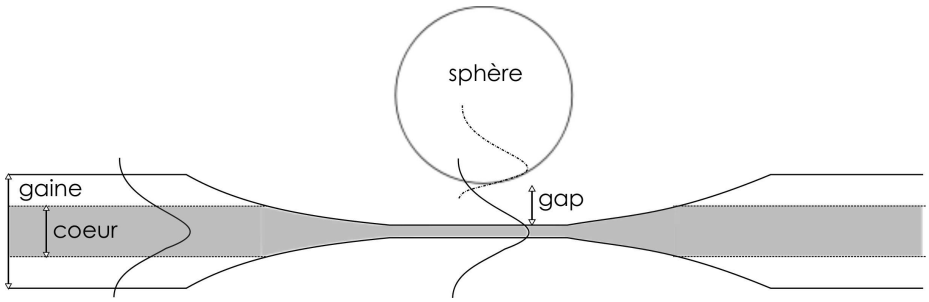


FIGURE 5.10 – Représentation du recouvrement des champs évanescents pour une sphère couplée à un taper biconique.

avantages. Le taper est fabriqué par fusion-étirage d'une fibre. Une fibre passive monomode à 1,55 μm de type SMF 28 de diamètre total (coeur + gaine) de 250 μm peut voir ainsi son diamètre réduit à moins d'1 μm sur 1 cm de long [170]. Le mode fondamental, initialement très confiné, présente alors une partie évanescente importante permettant d'obtenir un accord de phase pour un "gap" sphère/taper compris entre 0 et 2 μm [Fig. 5.10]. Ces tapers présentent quatre principaux avantages :

- Ils peuvent présenter de très faibles pertes ($< 0,5$ dB),
- Une efficacité de couplage optimal, auquel cas 99,99 % de la puissance injectée dans le taper est couplée dans la sphère. Ce résultat a été obtenu par Spillane *et al.* [168],
- Non seulement ils permettent d'exciter les modes de la sphère mais aussi l'extraction du signal,
- Pour une même position relative du taper, il est possible, dans le cas d'expérience pompe/sonde, d'obtenir l'accord de phase pour au moins deux longueurs d'onde différentes [167, 171].

Nous utilisons dans nos expériences deux types de tapers :

- Des tapers biconiques de section amincie inférieure à 2 μm [Fig. 5.10] fabriqués au CNR IFAC (équipe du Pr. G. C. Righini),
- Des demi-tapers, fabriqués au sein du laboratoire. Ils consistent en un demi-taper biconique. Pour des applications laser [167,172] ce système de couplage est très efficace. Il permet à partir du même demi-taper d'injecter le signal de pompe et de mesurer le signal laser généré dans le sens contrapropagatif.

Chapitre 6

Le couplage modal par diffusion Rayleigh

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les phénomènes dynamiques dans des résonateurs couplés. Afin de modéliser le couplage des résonateurs, nous nous servons du modèle des modes couplés de H.A. Haus [49] présenté dans le chapitre 1. Ce modèle théorique est ensuite confronté à des résultats expérimentaux obtenus dans des microsphères de silice de haute finesse $\mathcal{F} > 10^5$ présentant du couplage modal dû à la rétrodiffusion Rayleigh. En utilisant la même procédure que dans le cas du résonateur unique, l'ajustement du modèle sur les courbes expérimentales nous permet, non seulement de mesurer τ_0 et τ_e, mais aussi de caractériser le couplage γ entre les 2 résonateurs [173].

6.2 La diffusion Rayleigh en microcavité

Comme nous l'avons vu précédemment, les sphères que nous utilisons ne présentent jamais une symétrie parfaite. On parle alors d'ellipsoïde pouvant être soit un oblate soit un prolate (dépendant de l'axe de révolution). Dans de telles sphéroïdes, nous observons une levée de dégénérescence en m. À valeur absolue de m fixée, il subsiste une dégénérescence dites de Kramers en $\pm m$ correspondant aux modes propagatif CW "*clockwise*" et contrapropagatif CCW "*counterclockwise*" [131].
Cette dégénérescence peut être levée lorsque qu'une partie de l'énergie contenue dans le mode CW, initialement excité, vient peupler le mode CCW. Par exemple, dans des sphères en silice de grande finesse $\mathcal{F} > 10^5$, la présence de rétrodiffusion Rayleigh permet d'observer cette levée de dégénérescence [43, 174, 175]. Le champ contenu dans le mode CW (n, ℓ, m) rencontre sur son parcours une multitude de diffuseurs répartis de manière homogène dont l'origine est principalement les inhomogénéités du matériau, les défauts de la matrice $< \lambda$,

la rugosité de surface, les diffuseurs en surface, les dopants du matériau, etc. [43, 175]. Ces diffuseurs rayonnent une partie du champ dans toutes les directions et en particulier dans le mode CCW caractérisé par $(n, \ell, -m)$. L'énergie diffusée par les défauts dans les modes radiatifs ou de ℓ, n et m différents est prise en compte dans le terme de perte τ_0. Une intensité de rétrodiffusion Rayleigh de 10^{-10} par tour [176] est suffisante pour que le mode CCW s'établisse. L'observation de ce processus nécessite toutefois que le temps de mise en place du mode CCW soit inférieur au temps de vie des photons τ dans la cavité. C'est pourquoi le dédoublement des modes initialement dégénérés ne se manifeste que dans des résonateurs de haut facteur de qualité associé à une grande finesse $\mathcal{F} > 10^5$. Le mode de profil intialement Lorentzien se transforme en un doublet de résonances [176, 177]. De manière générale, ce dédoublement en fréquence ayant pour origine la rétrodiffusion apparaît dans divers types de microcavités comme les microsphères [59,176–180], les microdisques [151,181,182] et dans des microtores [183, 184].

La figure 6.1 présente le cas d'une sphère sans couplage modal et le cas d'une sphère où ce phénomène (dû à la rétrodiffusion) provoque la séparation en fréquence. Les simulations sont réalisées dans le cas d'une sphère de facteur de qualité de $3,6 \times 10^8$. En absence de couplage, la dégénérescence de Kramers est conservée, on observe une résonance Lorentzienne (courbe en pointillés). En présence de rétrodiffusion, le profil de transmission fait apparaître deux nouvelles fréquences de résonance. Leurs positions sont fixées par la nature, la quantité et dans certains cas la position des diffuseurs dans le résonateur [179, 185].

Lorsque le couplage entre les modes CW et CCW est suffisamment important, nous observons

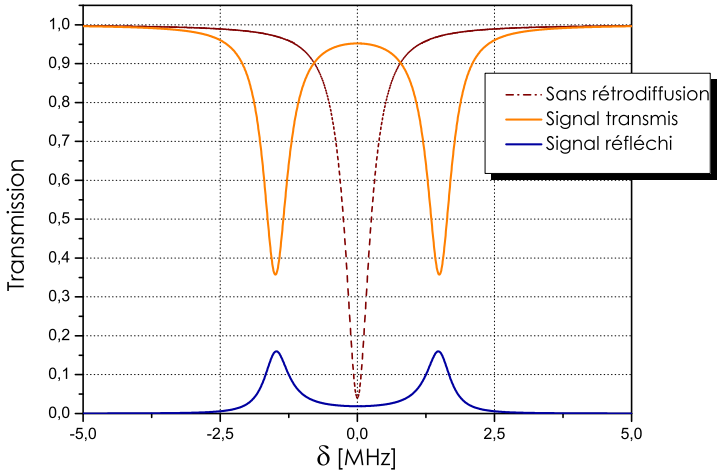


FIGURE 6.1 – Représentation spectrale des modes d'une microcavité ($Q = 3,6 \times 10^8$) en absence et en présence de couplage modal. Le signal réfléchi est représenté uniquement dans le cas de la rétrodiffusion Rayleigh.

sur le port d'entrée un signal réfléchi présentant sensiblement les mêmes caractéristiques

spectrales que le signal transmis (courbe bleue). Les cavités présentant un fort couplage entre les modes co- et contra-propagatifs rentrent dans un régime où le signal d'excitation est presque totalement réfléchi [178].

6.3 La méthode hybride spectrale/temporelle appliquée au couplage de modes

Avant de traiter le cas spécifique du couplage modal dans un microrésonateur, nous présentons, de manière générale, un modèle d'évolution temporelle dans le cas de deux cavités couplées. Le modèle décrit ci-dessous est une extension du modèle théorique appliqué à un résonateur unique (étudié dans les chapitres 1 et 2). Nous avons choisi ce modèle qui semble beaucoup plus adapté que le traitement de cette configuration par une approche "sommation des champs partiels" dans laquelle il serait impossible de prendre en compte la totalité des chemins possibles.

6.3.1 Modèle d'évolution temporelle dans le cas de cavités couplées

La figure 6.2 présente un schéma du système composé de deux cavités couplées monomodes résonant respectivement à ω_1 et ω_2. La force du couplage entre les deux cavités est caractérisée par le temps de vie γ. Le couplage des cavités avec leur ligne d'accès est décrit par τ_{e1} et τ_{e2}, leur temps de vie externe. Les cavités, de diamètres quelconques, sont caractérisées par leur temps de vie intrinsèque τ_{01} et τ_{02}. Nous supposerons que le signal de sonde $s_{in}(t) = s_0 e^{j\theta(t)}$ est couplé dans le résonateur 2. La cavité 1 n'est donc pas excitée directement.

Les champs monomodes se propageant dans les cavités 1 et 2 sont respectivement nommés $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Considérons dans un premier temps les deux cavités non-couplées, d'après H.A. Haus, l'évolution du champ dans la cavité s'écrit :

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \left(j\omega_i - \frac{1}{\tau_{0i}}\right) u_i(t), \quad i \in \{1;2\} \tag{6.1}$$

où $j\omega_i$ fait référence au mode résonant, et $1/\tau_{0i}$ aux pertes intrinsèques de chaque cavité. Le couplage entre les deux cavités est pris en compte en définissant les temps de vie : (i) γ_{12} pour le couplage du champ u_2 au champ u_1 et (ii) γ_{21} pour le couplage du champ u_1 au champ u_2. En considérant que le couplage entre les deux cavités n'apporte pas de pertes supplémentaires, l'expression (6.1) s'écrit sous forme du système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= \left(j\omega_1 - \frac{1}{\tau_{01}}\right) u_1(t) + \dfrac{1}{2\gamma_{12}} u_2(t), \\ \dot{u_2} &= \left(j\omega_2 - \frac{1}{\tau_{02}}\right) u_2(t) + \dfrac{1}{2\gamma_{21}} u_1(t). \end{cases} \tag{6.2}$$

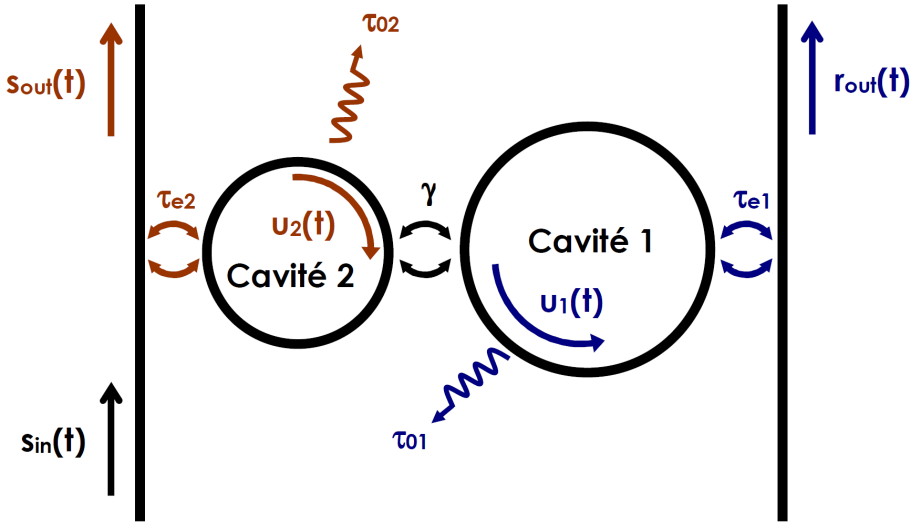


FIGURE 6.2 – Représentation schématique de deux cavités monomodes couplées. La cavité 2 est couplée à la ligne d'accès, tandis que la cavité 1 est uniquement couplée à un port de sortie.

Le principe de conservation de l'énergie appliqué au système (6.2) donne :

$$\frac{d}{dt}(|u_1|^2 + |u_2|^2) + |u_1|^2 \frac{1}{\tau_{01}} + |u_2|^2 \frac{1}{\tau_{02}} = 0, \tag{6.3}$$

ce que l'on développe en :

$$u_1 \frac{du_1^*}{dt} + u_1^* \frac{du_1}{dt} + u_2 \frac{du_2^*}{dt} + u_2^* \frac{du_2}{dt} + |u_1|^2 \frac{1}{\tau_{01}} + |u_1|^2 \frac{1}{\tau_{02}} = 0, \tag{6.4}$$

ce qui se réduit à la condition suivante :

$$\frac{1}{2\gamma_{12}^*} u_1 u_2^* + \frac{1}{2\gamma_{12}} u_1^* u_2 + \frac{1}{2\gamma_{21}^*} u_2 u_1^* + \frac{1}{2\gamma_{21}} u_2^* u_1 = 0. \tag{6.5}$$

Cette dernière relation est satisfaite lorsque les temps de vie relatifs au couplage entre les deux cavités vérifient :

$$\gamma_{12} = -\gamma_{21}^* \tag{6.6}$$

en choisissant γ_{12} et γ_{21} imaginaires purs, c'est à dire $\gamma_{12} = -j\gamma$. Le couplage est alors symétrique. Le système d'équations différentielles (6.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= \left(j\omega_1 - \dfrac{1}{\tau_{01}}\right) u_1(t) + \dfrac{j}{2\gamma} u_2(t), \\ \dot{u_2} &= \left(j\omega_2 - \dfrac{1}{\tau_{02}}\right) u_2(t) + \dfrac{j}{2\gamma} u_1(t). \end{cases} \tag{6.7}$$

Le modèle peut être généralisé en insérant dans les expressions un terme de perte réel négatif dû au couplage [179]. Le signal d'entrée $s_{in}(t)$ est couplé à la cavité 2, le système d'équations

s'écrit alors [176, 178] :

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= a_1 u_1(t) + b u_2(t), \\ \\ \dot{u_2} &= a_2 u_2(t) + b u_1(t) + f(t), \end{cases} \tag{6.8}$$

où pour $i \in \{1;2\}$, nous avons $a_i = j\omega_i - \tau_i^{-1}$, $\tau_i^{-1} = \tau_{0i}^{-1} + \tau_{ei}^{-1}$, $b = \frac{j}{2\gamma}$ et $f(t) = \sqrt{2/\tau_{e2}} s_{in}(t)$.
Les signaux de sortie sont exprimés à partir de l'expression des champs intracavités par :

$$\begin{cases} s_{out}(t) &= -s_{in}(t) + \sqrt{\dfrac{2}{\tau_{e2}}} u_2(t), \\ \\ r_{out}(t) &= \sqrt{\dfrac{2}{\tau_{e1}}} u_1(t). \end{cases} \tag{6.9}$$

À partir de ces champs nous exprimons les coefficients de transmission et de réflexion en amplitude $t = s_{out}/s_{in}$ et $r = r_{out}/s_{in}$ ainsi que les coefficients $T = |t|^2$ et $R = |r|^2$ de transmission et de réflexion en intensité . La figure 6.1 présente la transmission et la réflexion en intensité obtenues dans un cas particulier par ce modèle.

6.3.1.1 Résolution du système

La résolution du système d'équations couplées (6.8) passe par la détermination de ses valeurs propres :

$$\Lambda_\pm = j\omega_M \pm \frac{\sqrt{\eta^2 + 4b^2}}{2}, \tag{6.10}$$

où $j\omega_M = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ et $\eta = a_2 - a_1$. Les modes propres associés $u_\pm$ s'expriment à partir d'une combinaison linéaire de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ telle que :

$$u_\pm(t) = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4b^2}}{2b} u_1(t) + u_2(t). \tag{6.11}$$

La nouveau système devient alors :

$$\frac{du\pm}{dt} = \Lambda_\pm u_\pm + f(t). \tag{6.12}$$

À partir de cette dernière expression nous sommes capables de définir les réponses en transmission t et en réflexion r du système pour n'importe quel signal de sonde $f(t)$. Pour un signal d'entrée de la forme $s_{in}(t) = e^{j\omega t}$ nous obtiendrons la réponse stationnaire du système. Nous étudierons également, la réponse temporelle pour un signal d'entrée dont la fréquence instantanée est modulée linéairement.

6.3.2 Application au couplage modal

Nous avons vu dans la partie 6.2 que l'origine du phénomène de séparation des modes symétrique et antisymétrique dans les cavités de haute finesse [176, 181] pouvait provenir, entre-autres, de la rétrodiffusion Rayleigh. Cette séparation provient de la levée de dégénérescence des modes se propageant dans des sens opposés. La figure 6.3 représente le couplage modal dans une cavité unique, le mode propagatif CW est associé au champ u_2 tandis que le mode contrapropagatif CCW correspond à u_1.

Le couplage modal étant un cas particulier du modèle développé précédemment, certaines

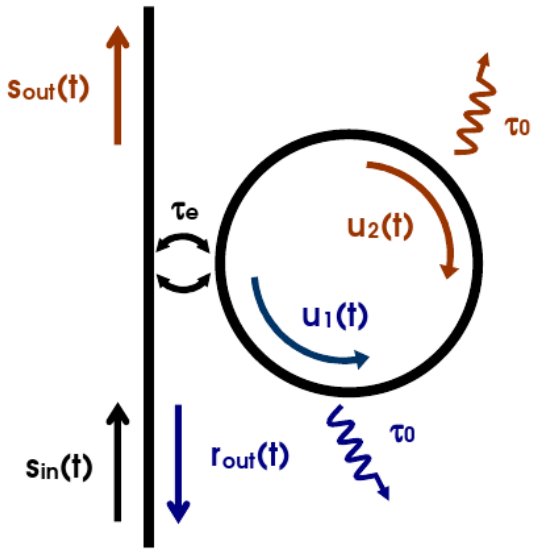


FIGURE 6.3 – Représentation schématique du couplage modal dans une cavité sous l'effet de la rétrodiffusion.

simplifications s'appliquent. La dégénérescence de Kramers, implique que les modes u_1 et u_2 empruntent le même chemin optique ce qui conduit à $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$. Les deux modes subissent les mêmes pertes dans la cavité et traversent le même dispositif de couplage ainsi, $\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_0$ et $\tau_{e1} = \tau_{e2} = \tau_e$. Par conséquent nous avons : $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ et $a_1 = a_2 = a$.
La diagonalisation du système (6.8) se simplifie, ce qui donne : $\omega_M = \omega_0$, $\eta = 0$, $\Lambda_\pm = a \pm b$.
Ainsi, les modes propres s'écrivent :

$$u_\pm = u_2(t) \pm u_1(t). \tag{6.13}$$

Ces modes résultent des combinaisons symetrique et anti-symétrique des modes dégénérés u_2 (n, ℓ, m) et u_1 $(n, \ell, -m)$. Notons que la présence du couplage modal fait perdre aux modes propres leur propriété d'onde progressive naturellement donnée par la dépendance azimuthal du champ en $\Psi^{u_1,u_2} \propto e^{\pm im\phi}$. Nous considérons le cas où les amplitudes des modes u_1 et u_2 sont identiques, ainsi les modes propres du système correspondent à deux ondes stationnaires typiquement en $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$.

À partir de l'expression (6.13), la relation (6.12) se simplifie :

$$\frac{du_{\pm}}{dt} = (a \pm b)u_{\pm}(t) + f(t). \tag{6.14}$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir facilement l'expression des champs intracavités car :

$$\begin{cases} u_2 &= \dfrac{u_+ + u_-}{2}, \\ \\ u_1 &= \dfrac{u_+ - u_-}{2}. \end{cases} \tag{6.15}$$

6.3.2.1 Régime stationaire

En régime stationnaire, le signal d'excitation prend la forme :

$$s_{in}(t) = s_0 e^{j\omega t}. \tag{6.16}$$

La solution avec second membre de l'équation (6.14) est :

$$u_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} . \frac{s_0 e^{j\omega t}}{j\omega - a \mp b}. \tag{6.17}$$

À partir de cette dernière expression nous pouvons déterminer les coefficients complexes de transmission et de réflexion, t et r. En reportant la solution (6.17) dans le système (6.9) nous obtenons pour coefficient de transmission :

$$t(\omega) = \frac{b^2 - (j\omega - a)^2 + 2(j\omega - a)/\tau_e}{(j\omega - a)^2 - b^2}, \tag{6.18}$$

le coefficient de réflexion quant à lui s'écrit :

$$r(\omega) = \frac{2b/\tau_e}{(j\omega - a)^2 - b^2}. \tag{6.19}$$

6.3.2.2 Position des nouvelles fréquences propres

Notons D le dénominateur de l'équation (6.19). L'annulation de la dérivée de $|D|$ en δ_C nous donne la position des deux nouvelles fréquences propres :

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial |D|}{\partial \delta}\bigg|_{\delta_C} = 0, \tag{6.20}$$

ce qui donne :

$$2\delta_C = \frac{1}{2\pi\gamma}\sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma}{\tau}\right)^2}, \tag{6.21}$$

où $2\delta_C$ correspond à l'écart entre les deux nouvelles fréquences sur le signal de réflexion. Ce couplage n'a lieu que pour $\gamma < \tau/2$, c'est à dire lorsque le temps nécessaire pour coupler les modes u_1 et u_2 est plus court que le temps de vie des champs dans la structure. Lorsque $\gamma \ll \tau/2$ l'équation (6.21) peut être remplacée par sa forme approchée :

$$2\delta_C = \frac{1}{2\pi\gamma}. \tag{6.22}$$

Dans ce cas la mesure de l'écart spectral $2\delta_C$ suffit à déterminer la force du couplage modal.

6.3.2.3 Le couplage modal dans des sphères de silice

Nous proposons ici de simuler l'influence de la rétrodiffusion Rayleigh sur la répartition de l'énergie pour 3 sphères en silice supposées parfaites de 40 μm, 80 μm et 100 μm de diamètre. Pour chaque sphère le facteur de qualité intrinsèque vaut $Q_0 \approx 5 \times 10^8$. On suppose que $\tau \gg \gamma$. La force du couplage modal est définie par [130, p. 111] :

$$\frac{1}{2\pi\gamma} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{\rho_{sc}\overline{\alpha}^2}{\mathcal{V}}}, \tag{6.23}$$

où ρ_{sc} est la densité de diffuseurs, $\overline{\alpha}$ leur polarisabilité et $\mathcal{V}$ le volume du mode de galerie considéré. Dans le cas général, le volume du mode s'écrit [144, 155] :

$$\mathcal{V} = 3,4\pi^{3/2}\left(\frac{\lambda}{2\pi N}\right)^3 \ell^{11/6}\sqrt{2(\ell - |m|) + 1}, \tag{6.24}$$

avec ℓ la norme du moment angulaire définie par :

$$\ell \approx \frac{\pi D N}{\lambda}, \tag{6.25}$$

et $N \approx 1,45$. La sphère étant considérée parfaite, nous avons $|m| = \ell$. Considérons le mode le plus confiné à savoir $(1, \ell, \ell)$, l'expression (6.24) devient :

$$\mathcal{V} = 3,4\,\pi^{3/2}\left(\frac{\lambda}{2\pi N}\right)^3 \ell^{11/6}. \tag{6.26}$$

Pour les trois sphères considérées, les volumes respectifs des modes varient de 580 μm^3 pour la plus petite à 3097 μm^3 pour la plus grande [Tab. 6.1].

Le coefficient d'atténuation α_s par diffusion Rayleigh [41, 186] est donné par :

$$\alpha_s = \frac{8\pi^3}{3}\frac{\rho_{sc}\overline{\alpha}^2}{\lambda^4}. \tag{6.27}$$

L'atténuation dans une fibre en silice est d'environ 0,2 dB/km à 1550 nm. En supposant que les dipôles responsables de cette atténuation soient aussi à l'origine de la rétrodiffusion nous pouvons estimer la levée de dégénérescence γ entre les modes u_+ et u_- d'une sphère. En reportant dans l'expression (6.27) la valeur mesurée de l'atténuation à la longueur d'onde de travail (1550 nm) nous obtenons $\rho_{sc}\overline{\alpha}^2 \approx 2.10^{-12}\mu$m^3. Nous en déduisons la valeur du couplage pour chaque sphère. Les valeurs sont rassemblées dans le tableau 6.1.

Il apparaît que le temps γ nécessaire pour que le mode contrapropagatif s'établisse, diminue lorsque le diamètre de la sphère se réduit [Equ. (6.23)]. La force du couplage, augmente ce qui se traduit par un écart plus grand entre les fréquences propres.

Afin d'étudier les différents régimes de fonctionnement, introduisons deux nouveaux paramètres normalisés [178]. Le paramètre de couplage modal défini par :

$$\Gamma = \frac{\tau_0}{2\gamma}, \tag{6.28}$$

TABLE 6.1 – Paramètres de structure pour l'étude du couplage modal par effet Rayleigh dans trois microsphères de diamètre 40, 80 et 100 μm. Leur coefficient de couplage modal est respectivement de 30, 15 et 10.

	$\mathcal{V}$ [μm^3]	γ [ns]	$\frac{1}{2\pi\gamma}$ [MHz]	τ_0 [ns]	Q_0	Γ
Sphère 100 μm	3097	32,4	4,91	648	$3,92 \times 10^8$	10
Sphère 80 μm	2074	26,4	6,03	792	$4,79 \times 10^8$	15
Sphère 40 μm	580	14,0	11,37	840	$5,08 \times 10^8$	30

sert d'indicateur sur la qualité de la sphère et sur la force du couplage γ.
Pour quantifier le régime de couplage de la microsphère, on détermine le paramètre de couplage normalisé :

$$K = \frac{\tau_0}{\tau_e}. \tag{6.29}$$

Dans le cas où la rétrodiffusion est absente ($b = 0$), en régime critique ($t(\omega_0) = 0$) le paramètre de couplage normalisé vaut $K = 1$.
Comme pour le résonateur simple, le point de couplage critique est toujours déterminé pour une transmission nulle [Equ.(6.18)] le paramètre de couplage normalisé prend alors la forme :

$$K = \sqrt{1 + \Gamma^2}. \tag{6.30}$$

6.3.2.4 Simulation en régime stationnaire

Régime de couplage pour $K = 1/3$

Les figures 6.4 présentent les spectres des signaux en transmission et en réflexion pour chaque sphère. Les différentes figures présentent l'influence du Γ pour un point de fonctionnement donné ($K = 1/3$). Dans le cas d'une sphère de petit diamètre (Γ grand) et pour $K < \sqrt{1 + \Gamma^2}$ le doublet apparaît clairement sur le spectre de transmission [Fig. 6.4.(a)]. Pour une sphère de plus gros diamètre (b), (c), la force du couplage entre les modes contra-propagatifs décroît (Γ diminue) ce qui se traduit par un rapprochement fréquentiel des modes propres. Pour des petites valeurs de K (typiquement $K < 1$), la sphère est très peu couplée au taper, le signal réfléchi $R(\delta)$ est alors faible. Il présente cependant des propriétés spectrales proches du signal de transmission. Lorsque le doublet peut être clairement identifié, une simple mesure en régime stationnaire permet d'obtenir deux informations. D'une part, la valeur de $2\delta_C$, permettant de remonter au temps de vie γ [Equ. (6.21)] et d'autre part, le facteur de qualité global $Q = \omega\tau/2$ associé à chaque résonance, obtenu en mesurant leur largeur mi-hauteur.
La figure 6.5 présente un résultat expérimental typique obtenu en régime stationnaire par

Kippenberg *et al.* [178]. Les résultats sont obtenus sur une sphère de 70 μm de diamètre présentant un $\Gamma = 30$. Cette valeur de Γ est estimée en mesurant, d'une part le $\tau/2$, on considère le résonateur très sous-couplé ce qui donne $\tau \approx \tau_0$. Et d'autre part en mesurant $2\delta_C$, en supposant $\tau \gg 2\gamma$ on obtient la valeur de γ à partir de l'expression (6.21).

Une mesure en régime stationnaire permet, en considérant certaines estimations, de carac-

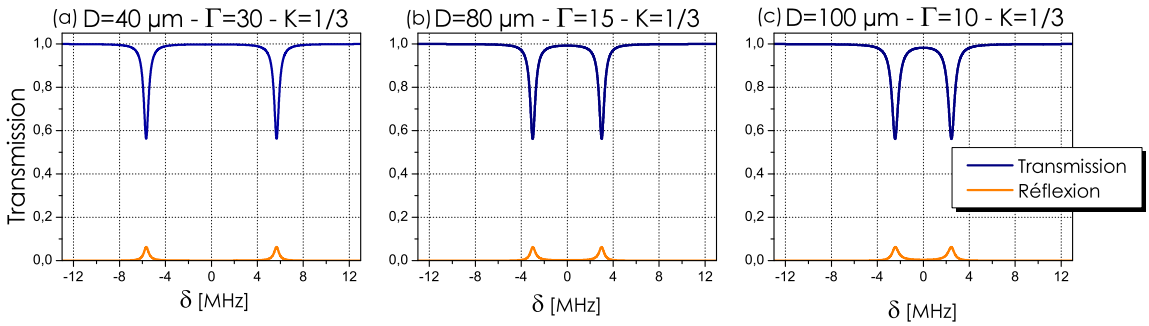


FIGURE 6.4 – Simulations du couplage modal dans 3 sphères de diamètres 40 μm, 80 μm et 100 μm pour $K = 1/3$. La valeur du Γ est de respectivement 30, 15 et 10.

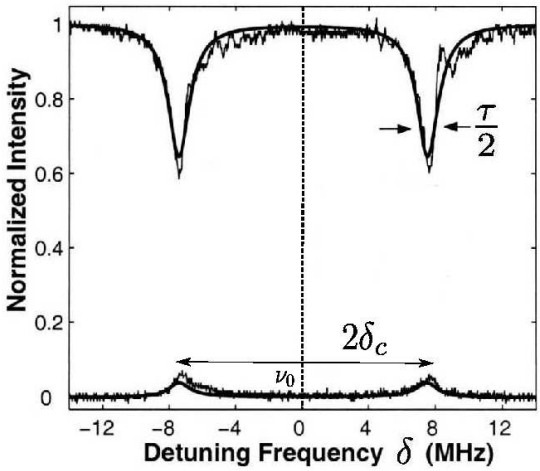


FIGURE 6.5 – Mesures expérimentales en régime stationnaire de T et R pour un couplage modal de $\Gamma = 10$. Le facteur de qualité intrinsèque Q_0 est estimé par une mesure de $\tau/2$. On considère le résonateur très sous-couplé ce qui donne $\tau \approx \tau_0$. Ces mesures ont été réalisées par Kippenberg *et al.* [178].

tériser une sphère du point de vue de son facteur de qualité intrinsèque et de la force du couplage modal γ. Notons que les mesures présentent tout de même des signaux fortement perturbés. Un début d'oscillations se manifeste sur le front montant des résonances, ce qui nécessiterait déjà la prise en compte de la dynamique du système.

Le couplage critique $K = \sqrt{1+\Gamma^2}$

Les figures 6.6 présentent le point critique, déterminé par la valeur de Γ [Tab. 6.1] pour chaque microsphère. La détermination des propriétés linéaires du résonateur en régime critique est plus compliquée dans le cas d'un résonateur présentant de la rétrodiffusion Rayleigh que dans le cas d'un résonateur simple [Chap. 1].
Dans le cas du résonateur unique, le couplage est critique lorsque toute l'énergie électromagnétique apportée par le signal d'excitation est couplée dans la microsphère. L'annulation de la transmission vient des interférences destructives entre le signal d'entrée et le signal sortant de la sphère. Cette condition est obtenue pour $\tau_0 = \tau_e$ soit $K = 1$. En présence de rétrodiffusion Rayleigh une partie du signal peut s'évacuer par le port de réflexion. Il en résulte un déplacement du régime critique.
Pour des valeurs de Γ décroissantes et en présence de pertes [Fig. 6.6.(c)], la largeur à mi-

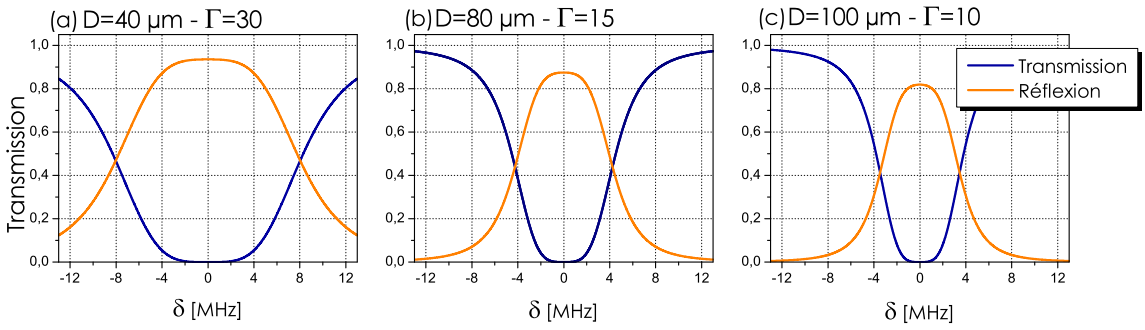


FIGURE 6.6 – Simulations du couplage modal dans 3 sphères de diamètres 40 μm, 80 μm et 100 μm pour $K = \sqrt{1+\Gamma^2}$. La valeur du Γ est de respectivement 30, 15 et 10.

hauteur de la résonance est réduite tout en présentant une diminution d'intensité du signal réfléchi.
La transmission $T(0)$ et la réflexion $R(0)$ en fonction de K sont représentées sur la figure 6.7 dans le cas d'une microsphère de 40 μm de diamètre. Sans rétrodiffusion (courbe marron), le régime critique intervient pour $K = 1$. Il n'y a alors pas de signal réfléchi. Cette courbe correspond exactement au cas étudié dans le chapitre 1 [Fig. 1.3(b)]. En présence de rétrodiffusion, le signal réfléchi varie lorsque le couplage avec la sphère augmente. Il apparaît que le signal retrodiffusé est maximum au couplage critique, dans notre cas $\Gamma = 30$. En régime de fort couplage, nous observons simultanément une réflexion presque totale du signal d'entrée et un élargissement de la résonance. Ce régime de fonctionnement est utilisé comme filtre sélectif en réflexion ou encore comme signal de contre-réaction pour les lasers de hautes puretés spectrales [187–189].

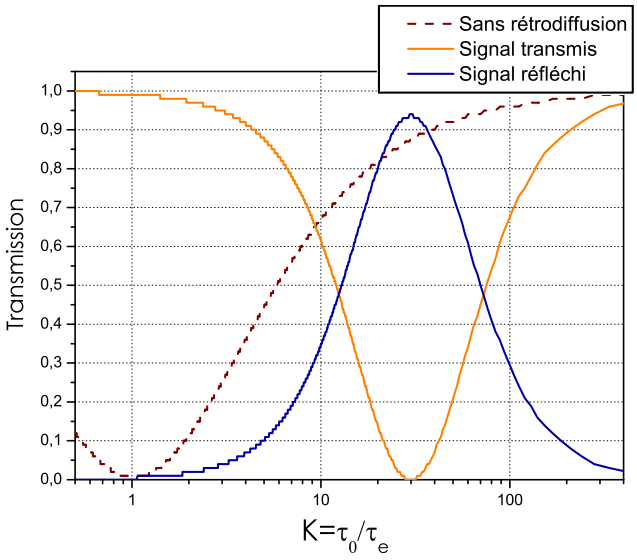


FIGURE 6.7 – Évolution de la transmission $T(0)$ et réflexion $R(0)$ en fonction du couplage normalisé K dans une sphère de 40 μm de diamètre. La valeur du paramètre de couplage modal est fixée ($\Gamma = 30$).

6.3.2.5 Régime dynamique

Nous allons étudier l'effet d'un balayage rapide de la fréquence d'excitation sur la réponse du système de résonateurs couplés. La fréquence angulaire du signal d'excitation est balayée linéairement avec une vitesse $V_s = 2\pi\tilde{V}_s$. La phase du signal d'entrée, $s_{in}(t)$, prend alors la forme :

$$\theta(t) = \omega_i t + \frac{V_s}{2} t^2, \tag{6.31}$$

où ω_i est la fréquence angulaire initiale à $t = 0$. La fréquence angulaire instantanée vaut :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_i + V_s t. \tag{6.32}$$

L'expression du signal d'entrée prend alors la forme $s_{in}(t) = s_0 e^{\omega_i t + \frac{V_s}{2} t^2}$. La résolution de l'équation différentielle (6.14) donne l'expression des modes propres en régime dynamique dans laquelle $f(t) = s_{in}(t)$:

$$u_{\pm}(t) = \left(A_{\pm} + \int_0^t f(t') e^{-(a \pm b)t'} \, dt' \right) e^{(a \pm b)t}, \tag{6.33}$$

où $A_{\pm}$ est obtenu en utilisant la solution stationnaire donnée par l'équation (6.17) pour la fréquence angulaire ω_i :

$$A_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} \cdot \frac{s_0}{j\omega_i - a \mp b}, \tag{6.34}$$

et

$$\int_0^t f(t') e^{-(a \pm b)t'} \, dt' = g_{\pm}(t) - g_{\pm}(0), \tag{6.35}$$

où $g_{\pm}(t)$ peut être analytiquement exprimé à partir de la fonction erreur complexe erf(z) ($z \in \mathbb{C}$) :

$$g_{\pm}(t) = -s_0\sqrt{\frac{j\pi}{\tau_e V_s}}\exp\left(\frac{j(a \pm b - j\omega_i)^2}{2V_s}\right) \times \mathrm{erf}\left(-\frac{j(a \pm b) + V_s t + \omega_i}{\sqrt{2jV_s}}\right). \tag{6.36}$$

Étudions à présent, par le biais de simulations, différents cas caractéristiques. Nous comparons pour différentes vitesses de balayage la réponse du système. Comme dans le chapitre 2, les vitesses $\tilde{V_s}$ sont comparées à la vitesse normalisée $\tilde{V_0} = 2/(\pi\tau^2)$. Cette vitesse normalisée est définie pour le balayage d'une résonance de largeur $1/(\pi\tau)$ en un temps $\tau/2$.

Cas du couplage critique

Pour étudier le cas du régime critique nous choisissons, de manière totalement arbitraire, un résonateur présentant un $\Gamma = 15$. Le temps de vie externe τ_e est ajusté de sorte que le résonateur soit en régime de couplage critique ($K = \sqrt{1+\Gamma^2} \approx 15$). La figure 6.8.(a) présente la réponse du résonateur pour une vitesse de balayage $\tilde{V_s} = 0,01\tilde{V_0}$. On obtient alors la réponse du résonateur à une excitation stationnaire. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, en régime critique la transmission à résonance est nulle, pour un signal de réflexion maximum [178].

Lorsque la vitesse de balayage augmente [Fig. 6.8.(b) et.(c)], des oscillations apparaissent. Cette manifestation de l'effet du *cavity ringdown* intervient lorsque le signal d'excitation traverse la résonance en un temps plus court que le temps de vie de la cavité. C'est exactement le même phénomène que nous observons dans un résonateur unique (partie 2.2.1, p. 29). Pour une vitesse de balayage plus rapide ($\tilde{V_s} = 12\tilde{V_0}$) [Fig. 6.8.(d)] le signal présente une sur-modulation de l'amplitude du signal de *ringdown* due aux battements entre les résonances du doublet.

En régime critique, la réponse stationnaire ne fait pas apparaître la levée de dégénérescence due au couplage modal. En revanche, l'observation détaillée de la réponse du résonateur pour un balayage rapide révèle un battement, signature de cet éclatement de fréquence.

Cas $\Gamma > 1$ et $K < 1$

Pour illustrer cette configuration prenons un cas particulier de faible couplage $\Gamma = 7$ et $K = 1/3$. La force du couplage modal peut être considérée comme relativement faible. La figure 6.9.(a) présente le régime quasi-stationnaire obtenu pour un balayage lent ($\tilde{V_s} = 0,01\tilde{V_0}$). Comme Γ est nettement plus grand que K l'éclatement de la résonance apparaît clairement. À résonance le signal de transmission est supérieur à 50% tandis que le signal en réflexion, du fait d'un faible couplage modal ($\Gamma = 7$), est inférieur à 10%.

Le régime quasi-stationnaire simulé ci-dessus correspond typiquement à la mesure présentée sur la figure 6.5. Lorsque l'on augmente la vitesse de balayage [figure 6.9.(b)], les résonances prises individuellement présentent un profil transitoire semblable à celui d'un résonateur en régime de sous-couplage ($K < 1$). Pour des vitesses très élevées ($\tilde{V_s} = 12\tilde{V_0}$) [figures 6.9.(c)

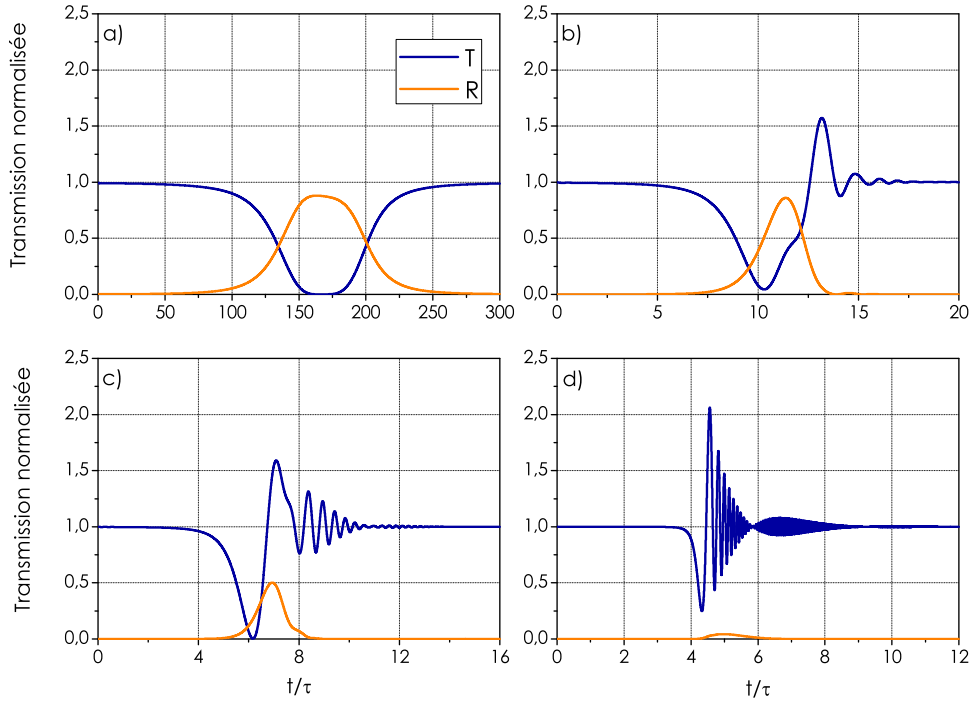


FIGURE 6.8 – Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage critique pour $\Gamma = 15$. La fréquence du signal d'excitation $s_{in}(t)$ varie linéairement : a) $\tilde{V}_s = 0,01\tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = \tilde{V}_0$ et d) $\tilde{V}_s = 12\tilde{V}_0$. L'axe des abscisses est normalisé par τ.

et .(d)] le battement entre les champs résonant aux deux fréquences disctinctes apparaît nettement.

Cas $\Gamma \gg 1$ et $K > 1$

Nous choisissons maintenant un résonateur de très bonne qualité $K > 1$ on prendra ici $K = 10$ ($\tau_0 = 10\ \tau_e$). Afin de conserver un éclatement de fréquence visible nous prenons une valeur de Γ élevée en l'occurrence $\Gamma = 50$.

En régime quasi-stationnaire [Fig. 6.10.(a)], $\tilde{V}_s = 0,01\ \tilde{V}_0$, le signal de transmission T se compose de deux résonances de transmission nulle. Du fait de son fort couplage modal, le signal de réflexion est élevé et dépasse les 75%. Pour $\tilde{V}_s = 0,3\ \tilde{V}_0$ [Fig. 6.10.(b)], nous obtenons en régime transitoire un profil temporel caractéristique de deux résonances surcouplées. Comme pour les deux régimes présentés précédemment, l'amplitude du signal de réflexion (qui représente l'image du champ intracavité) diminue lorsque l'on augmente la vitesse de balayage. En effet, lorsque les résonances sont balayées plus rapidement, le résonateur accumule moins d'énergie et la puissance emmagasinée diminue.

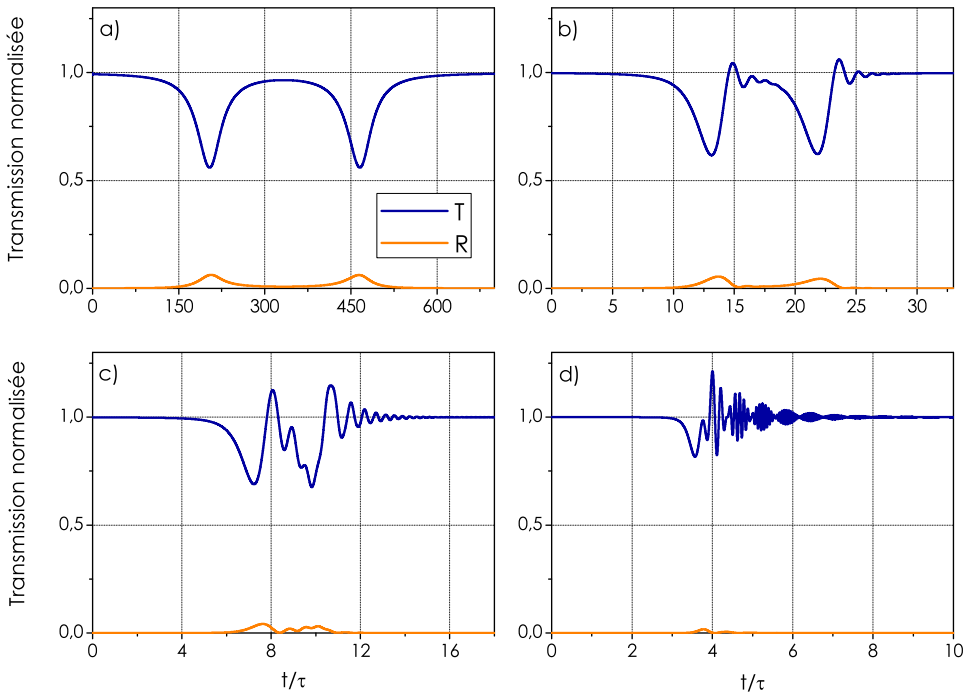


FIGURE 6.9 – Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage modal pour $\Gamma = 7$ et $K = 1/3$. La fréquence du signal d'excitation $s_{in}(t)$ varie linéairement : a) $\tilde{V}_s = 0,01\tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = \tilde{V}_0$ et d) $\tilde{V}_s = 12\tilde{V}_0$. L'axe des abscisses est normalisé par τ.

6.4 Validation expérimentale

Une mesure en régime stationnaire ne donne accès qu'à une mesure de τ et de δ_C. Ces informations donnent l'ensemble des paramètres linéaires du résonateur mais de manière indirecte. Nous montrons expérimentalement que la méthode hybride spectrale/temporelle permet de caractériser entièrement un système de deux résonateurs couplés en régime linéaire.

Nous proposons dans cette partie, une validation expérimentale du modèle dynamique appliqué aux résonateurs couplés. Dans cette série d'expériences nous allons utiliser le couplage modal dans une microsphère en silice pour obtenir un système équivalent à deux résonateurs couplés [Partie 6.3.2.3]. Le protocole de fabrication par arc électrique des sphères est présenté dans la partie 5.6, p. 133. Le couplage est réalisé par ondes évanescentes par l'intermédiaire d'un taper biconique [cf. page 137]. Ce taper permet la mesure simultanée du signal en transmission et en réflexion. Dans le cas d'un résonateur passif, le seul paramètre accordable est le couplage (par conséquent τ_e). Il peut être ajusté en variant la position du taper par rapport à la sphère. Les paramètres τ_0 et γ sont dépendants des propriétés intrinsèques de la sphère, ils ne sont donc pas modifiables.

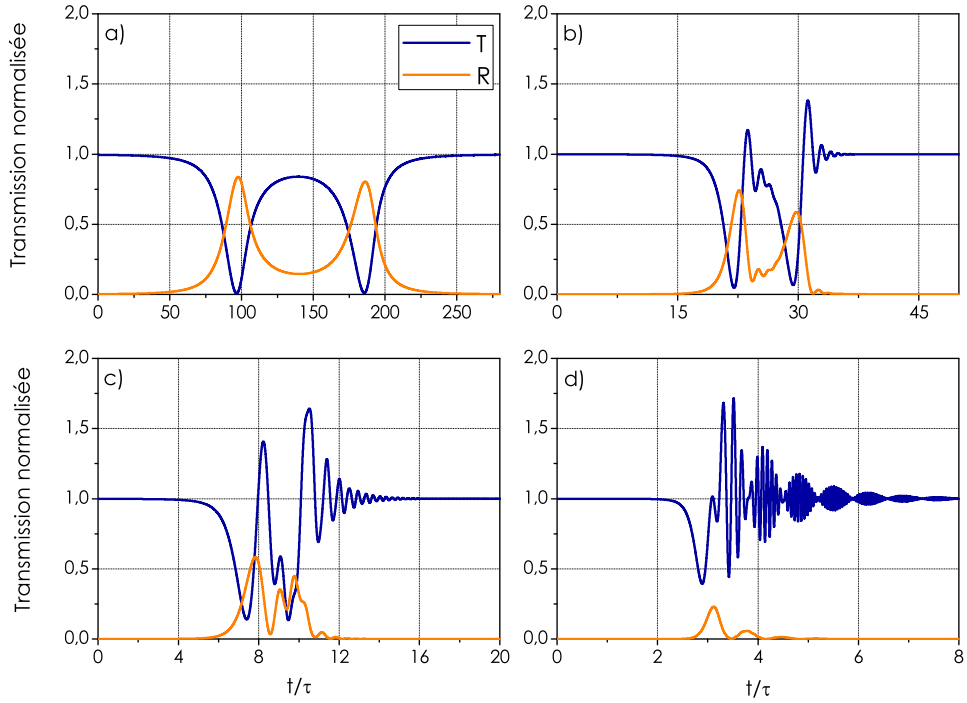


FIGURE 6.10 – Simulation de la transmission T et de la réflexion R pour un résonateur en régime de couplage modal pour $\Gamma = 50$ et $K = 10$. La fréquence du signal d'excitation $s_{in}(t)$ varie linéairement : a) $\tilde{V}_s = 0,01\tilde{V}_0$, b) $\tilde{V}_s = 0,3\ \tilde{V}_0$, c) $\tilde{V}_s = \tilde{V}_0$ et d) $\tilde{V}_s = 12\tilde{V}_0$. L'axe des abscisses est normalisé par τ.

6.4.1 Montage et protocole expérimentaux

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 6.11. La partie amont est composée d'un laser de sonde d'une largeur de raie de 150 kHz balayable en longueur d'onde autour de 1550 nm. Le décalage linéaire de la fréquence laser est piloté par un signal de commande électrique périodique de type triangulaire d'une amplitude de 8 Volts et de fréquence ajustable. L'amplitude du signal électrique détermine l'excursion spectrale du laser, sa fréquence détermine la vitesse de balayage fréquentielle. La puissance optique du signal en entrée du taper (P_0) varie entre 200 μW et 600 μW suivant l'expérience réalisée. Comme pour la validation expérimentale du CRDM dans un résonateur unique, le régime quasi-stationnaire est obtenu pour un balayage lent de la résonance par rapport au temps de vie $\tau/2$, tandis que la réponse transitoire est obtenue pour un balayage rapide. Comme nous l'avons vu dans la partie 5.7 nous avons fait le choix d'un couplage de la microsphère à partir d'un taper biconique de diamètre minimum 4 μm. Nous présentons des résultats obtenus sur trois sphères de diamètres 120 μm, 110 μm et 80 μm.

Les signaux en transmission T et en réflexion R sont collectés grâce au taper puis mesurés

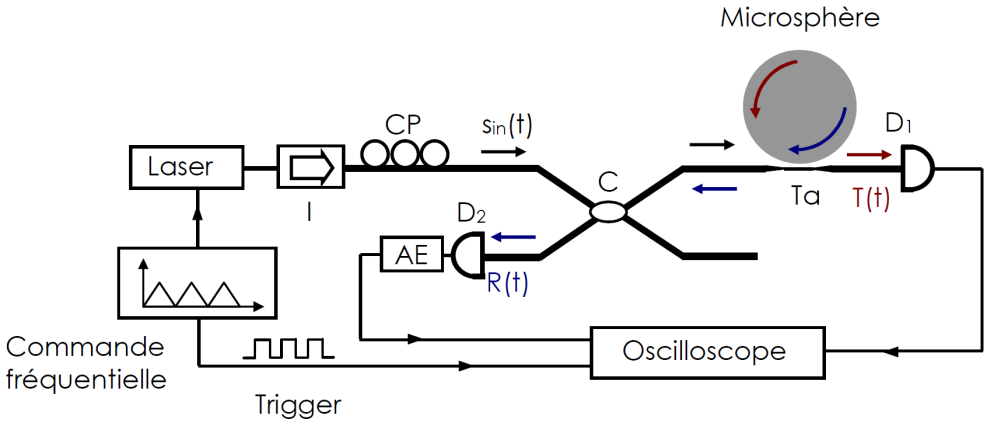


FIGURE 6.11 – Montage expérimental utilisé pour caractériser les microsphères en silice. Le signal d'excitation est un laser balayable en longueur d'onde autour de 1550 nm et de largeur de raie 150 kHz. Le composant I est un isolateur optique, CP sont des contrôleurs de polarisation, C est un coupleur 3 dB et AE est un amplificateur électrique. D_1 et D_2 sont deux détecteurs de bande passante environ égale à 10 MHz. Le signal d'entrée $s_{in}(t)$ est couplé à la microsphère par l'intermédiaire d'un taper biconique de diamètre $d \approx 4$ μm.

sur les détecteurs D_1 (T) et D_2 (R). Les traces temporelles des signaux sont ensuite observées sur un oscilloscope synchronisé sur la commande électrique du laser de sonde. Le signal de transmission est normalisé par rapport au niveau de puissance hors résonance.
En suivant le protocole mis en place pour la mesure de CRDM dans le cas d'un résonateur unique, nous superposons le modèle théorique T_{theo} à la mesure expérimentale de la transmission T_{mes} en ajustant les paramètres τ_0, τ_e, $\tilde{V}_s$ et le paramètre supplémentaire γ par la méthode des moindres carrés :

$$\sigma^2\left(\tau_0, \tau_e, V_s, \gamma\right) = \sum_{i=1}^{N} \left[T_{mes,i} - T_{theo,i}\left(\tau_0, \tau_e, V_s, \gamma\right)\right]^2, \tag{6.37}$$

où N est le nombre de points d'échantillonnage de la trace temporelle. La valeur de σ^2 est minimisée par un ajustement adéquat des quatre paramètres afin d'obtenir la meilleure superposition.

6.4.2 Résultats Expérimentaux

Dans un premier temps, dans une expérience en balayage rapide nous mesurons simultanément les signaux de réflexion et de transmission. Une analyse détaillée de ces signaux nous permet de nous assurer de l'existence d'un couplage modal entre les modes CW et CCW dans les sphères que nous avons fabriquées. Ensuite, la robustesse de notre protocole expérimental sera éprouvée en comparant une mesure en régime dynamique à une mesure en régime quasi-stationnaire. Nous vérifions la bonne évolution du temps de vie externe τ_e mesuré en fonction de la distance entre la sphère et le taper. Enfin, nous montrons qu'une mesure

par la méthode hybride spectrale/temporelle peut prendre en compte les effets thermiques. Considérés comme un effet néfaste lors de mesures en régime stationnaire, les effets non-linéaires et en particulier l'effet thermo-optique, ne sont pas aussi limitants pour caractériser les microsphères en régime de balayage rapide [190].

6.4.2.1 Mesures simultanées de T et R

Les premières mesures sont réalisées avec une sphère d'un diamètre de 120 μm. Nous mesurons simultanément les signaux de transmission et de réflexion afin de vérifier la consistance du modèle. Après avoir trouvé dans le spectre, un mode présentant un doublet de pics de résonance nous mesurons en balayage rapide les signaux T et R. Nous ajustons le modèle théorique à la mesure expérimentale de T à partir de l'expression (6.37). Nous en déduisons les caractéristiques linéaires de la sphère, à savoir : $\tau_0 = 267$ ns, $\tau_e = 1309$ ns, $\tilde{V}_s = 4,47$ MHz/μs et $1/(2\pi\gamma) = 2,38$ MHz.

Ces paramètres sont injectés dans l'expression de $u_\pm$ [Equ. (6.33)] afin d'obtenir la forme

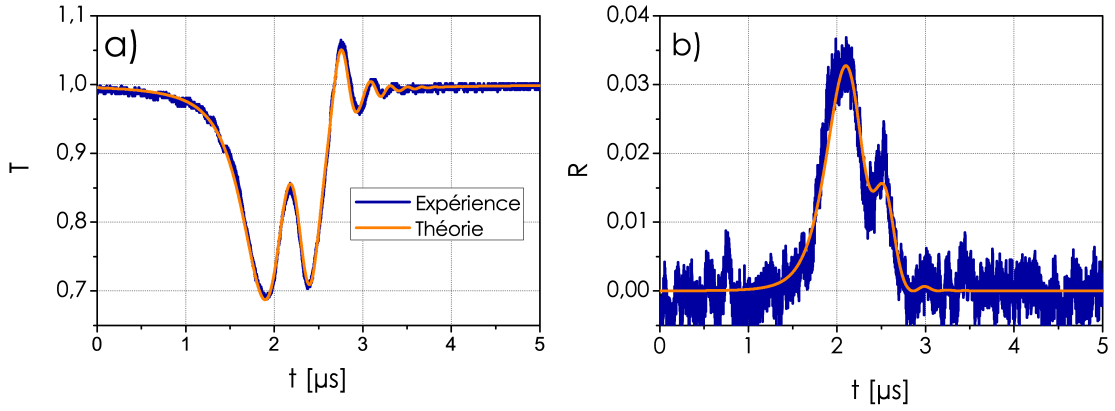


FIGURE 6.12 – Signal de transmission a) et de réflexion b) pour une sphère de 120μm de diamètre. De l'ajustement de a) avec le modèle théorique nous déduisons les valeurs : $\tau_0 = 267$ ns, $\tau_e = 1309$ ns, $\tilde{V}_s = 4,47$MHz/μs et $1/(2\pi\gamma) = 2,38$ MHz. À partir de ces paramètres, nous superposons le modèle théorique sur b).

de $u_1 = (u_+ - u_-)/2$ dont dépend le signal de réflexion :

$$r_{out}(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} u_1(t). \tag{6.38}$$

Nous comparons ainsi à la mesure expérimentale de la réflexion R_{mes}, le signal de réflexion obtenu à partir de paramètres expérimentaux R_{theo} :

$$R_{theo} = |r|^2, \tag{6.39}$$

où $r = r_{out}/s_{in}$. L'amplitude du signal de réflexion est le seul paramètre ajusté artificiellement. En effet, la mesure que nous obtenons est dépendante de la sensibilité du détecteur D_2

mais surtout des pertes que nous avons dans le taper. Les pertes peuvent difficilement être évaluées avec précision sur la section qui nous intéresse, à savoir la partie du taper placée avant la sphère. En transmission, le problème ne se pose pas car les pertes sont prises en compte lors de la normalisation avec le signal hors-résonance.
Au regard des résultats présentés sur la figure 6.12 nous pouvons conclure sur une bonne adéquation entre les signaux de transmission et de réflexion. Les signaux réfléchis étant de très faibles puissances, une amplification électrique supplémentaire est placée derrière le détecteur ce qui explique le niveau de bruit en excès sur le signal de réflexion R.

6.4.2.2 Comparaison avec le régime stationnaire

Dans une deuxième expérience nous comparons les paramètres obtenus à partir d'une mesure dans le domaine temporel et un balayage rapide ($\tilde{V}_s > 3$ MHz/μs) avec une mesure en régime stationnaire observée pour un balayage lent $\tilde{V}_s \approx 0,5$ MHz/μs. Les mesures sont effectuées sur une sphère de 110 μm de diamètre.
La figure 6.13.(a) présente une acquisition en régime de balayage rapide d'un doublet de

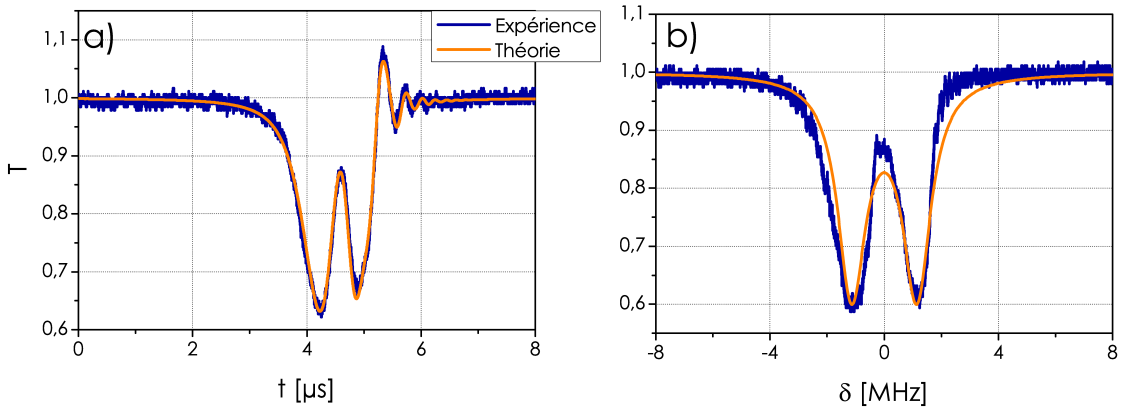


FIGURE 6.13 – Signal de transmission T en balayage rapide a) et lent b) pour une sphère de 110 μm de diamètre. De la superposition de a) avec le modèle théorique nous déduisons les valeurs : $\tau_0 = 338$ ns, $\tau_e = 1243$ ns, $\tilde{V}_s = 3,15$ MHz/μs et $1/(2\pi\gamma) = 2,26$ MHz. À partir de ces paramètres, nous superposons le modèle théorique sur b) la réponse en régime stationnaire.

fréquence dû à la rétrodiffusion Rayleigh. La figure 6.13.(b) présente le même doublet mais cette fois-ci pour un balayage lent. La mesure de CRDM est ajustée au modèle théorique par la méthode des moindres carrés. Nous obtenons les valeurs de τ_0, τ_e et γ que nous injectons dans l'équation (6.18) modélisant la transmission en régime stationnaire. Puis, les courbes théorique et expérimentale sont superposées [Fig. 6.13.(b)].
Rappelons, que l'un des avantages de cette méthode par rapport à une simple mesure en balayage lent est d'obtenir directement la valeur de γ et non pas l'écart spectral $2\delta_c$ que nous obtiendrions par une mesure en régime stationnaire. Nonobstant, étant donné que la

vitesse en balayage lent peut difficilement être mesurée avec précision, nous pouvons utiliser la valeur de γ pour calibrer l'axe des abscisses en fréquence. En effet, γ et $2\delta_c$ sont reliés par l'expression (6.21).
Notons tout de même, que la mesure en balayage lent que nous reportons ci-dessus est la meilleure obtenue parmi une dizaine d'acquisitions. En effet, pour les autres mesures lors de la comparaison nous sommes obligés de modifier la valeur de τ_e injectée dans le modèle théorique stationnaire afin de trouver un bon accord. Toutefois, les mesures des paramètres intrinsèques τ_0 et γ restent cohérentes pour chaque mesure. Ces fluctuations de τ_e proviennent certainement des variations de position du taper vis à vis de la sphère entre les différentes acquisitions.

6.4.2.3 Influence du couplage

Le caractère autoconsistant de la méthode a également été testé en modifiant volontairement les paramètres de couplage. Pour ce faire, nous mesurons en balayage rapide le régime transitoire d'un doublet de Rayleigh pour différentes positions du taper par rapport à la sphère (diamètre 110 μm). La puissance en entrée du taper est telle que $P_0 = 440$ μW. Les mesures sont reportées figure 6.14. De a) vers c) la distance entre le taper et la sphère diminue et par conséquent le couplage augmente. En appliquant sur ces trois acquisitions la méthode des moindres carrés, nous obtenons les paramètres τ_0, τ_e, γ et $\tilde{V}_s$. L'ensemble des résultats est rassemblé dans le tableau 6.2. Pour une diminution de l'écart entre la sphère et le taper, la valeur de τ_e diminue ce qui est qualitativement correct. Pour autant, les paramètres intrinsèques à la sphère τ_0 et γ sont constants. Leurs valeurs ne sont influencées ni par le changement significatif du taux de couplage ni par la méthode de mesure. Une variation de moins de 5 % est observée sur les valeurs des paramètres intrinsèques. Ces résultats sont comparables avec des mesures sur le couplage modal réalisées par la méthode de scan (balayage lent) dans des conditions expérimentales similaires [178]. On notera également que la vitesse de balayage déduite reste constante lors des trois expériences.

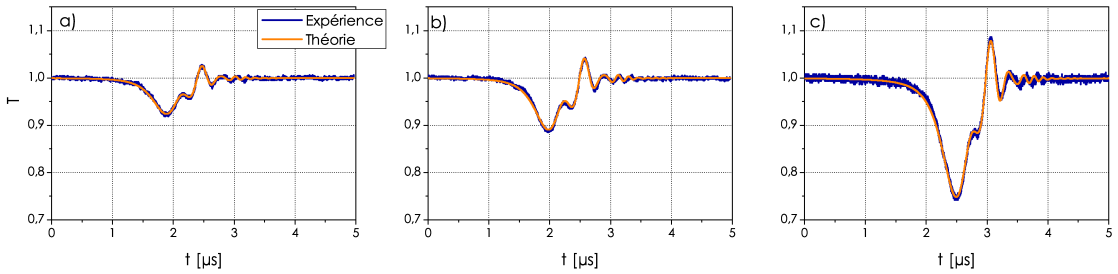


FIGURE 6.14 – Transitoires temporels pour un même doublet d'une sphère de 110 μm de diamètre. De a) à c) la distance entre la sphère et le taper diminue, par conséquent le couplage augmente. Les valeurs des paramètres obtenues par ajustement du modèle théorique sont rassemblées dans le tableau 6.2.

TABLE 6.2 – Récapitulatif des valeurs obtenues à partir de la superposition du modèle théorique avec les mesures expérimentales de la figure 6.14 pour les positions du taper a), b) et c).

Position du taper	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	$1/(2\pi\gamma)$ [MHz]	$\Gamma = \tau_0/(2\gamma)$	$\tilde{V}_s$ [MHz/μs]
a)	308	7996	1,51	1,51	4,81
b)	334	5649	1,52	1,59	4,71
c)	318	2286	1,45	1,45	4,88

6.4.2.4 Influence des effets thermiques

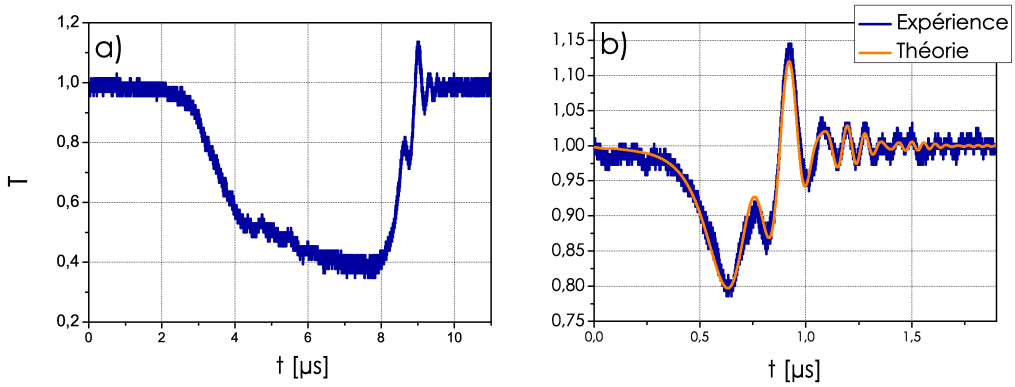


FIGURE 6.15 – Profils temporels de doublet de Rayleigh dans une sphère de 120 μm de diamètre dans laquelle nous observons des effets thermiques. a) lorsque la dérive thermique et le balayage évoluent dans le même sens . b) lorsque la dérive thermique et le balayage évoluent en sens contraire.

La présence d'effets thermiques dans la sphère peut modifier considérablement l'allure temporelle des signaux [144, 191]. Les effets thermiques introduisent une dérive de la fréquence de résonance de la microsphère dont l'amplitude est fonction de la puissance introduite dans la cavité. La sphère étudiée présente un diamètre de 120 μm. Nous augmentons ici la puissance en entrée du taper : $P_0 = 600$ μW.
Pour une méthode de caractérisation en balayage rapide deux cas de figure peuvent se présenter :
1/ Si la raie du laser de sonde est balayée dans le même sens que la dérive thermique du mode, nous observons un élargissement de la résonance [144, 192]. [Fig. 6.15.(a)]
2/ Par contre si la raie du laser est balayée dans le sens contraire à la dérive, la vitesse instantanée de balayage apparaît *artificiellement* élevée. Nous avons déjà vu que la méthode de *cavity ringdown* permet de connaître précisément la vitesse de balayage. Nous sommes donc capables d'analyser le transitoire obtenu dans cette configuration [Fig. 6.15.(b)]. Pour

un même facteur de qualité intrinsèque ($\tau_0 = 232$ ns), nous observons plus de périodes de battement que dans les cas précédents. Ceci peut être attribué à une vitesse de balayage relativement élevée par rapport aux vitesses habituellement utilisées. La superposition par la méthode des moindres carrés nous donne, $\tilde{V}_s = 19,5$ MHz/μs. Pour cette mesure nous avons balayé deux fois plus vite la fréquence du laser de sonde ($\tilde{V}_s \approx 8$ MHz/μs). Cependant, l'augmentation d'un facteur 2,5 de la vitesse instantanée ne semble pouvoir s'expliquer que par la dérive en fréquence causée par les effets thermiques.

6.4.2.5 Discussion sur les mesures expérimentales de γ

Nous avons vu dans la partie 6.3.2.3, page 146 que le paramètre de couplage modal est fortement lié au volume du mode par la relation :

$$\frac{1}{2\pi\gamma} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{\rho_{sc}\overline{\alpha}^2}{\mathcal{V}}}, \tag{6.40}$$

nous savons également que le rapport entre le volume du mode et le volume de la sphère

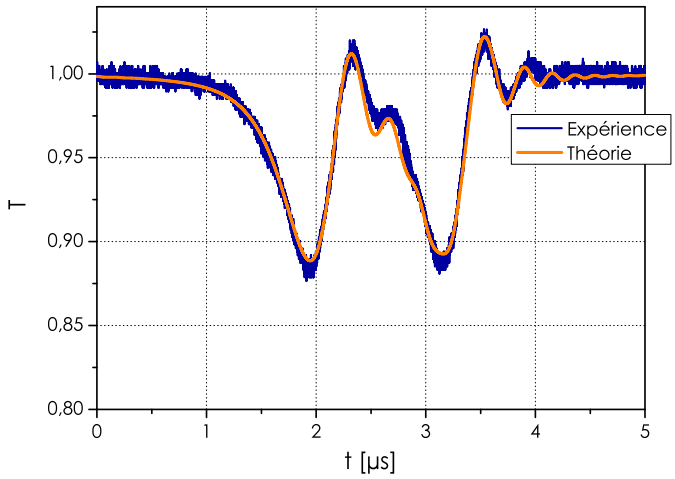


FIGURE 6.16 – Profil temporel en transmission pour une sphère de 80 μm de diamètre. Les paramètres linéaires obtenus par superposition du modèle nous donne : $\tau_0 = 282$ ns, $\tau_e = 3829$ ns, $\tilde{V}_s = 3,7$ MHz/μs et $1/(2\pi\gamma)$=4,49 MHz.

augmente lorsque le diamètre de la sphère diminue. C'est tout naturellement que nous observons dans une sphère de plus petit diamètre un éclatement de mode plus grand [Tab. 6.1]. La figure 6.16 présente le résultat d'un balayage rapide dans une sphère de 80 μm de diamètre. Nous obtenons une valeur de $1/(2\pi\gamma)$ plus grande que celles observées dans les sphères de 110 et 120 μm.

Comparons les valeurs expérimentales et théoriques de γ. En suivant le même protocole de calcul développé page 146, nous définissons ℓ, $\mathcal{V}$ puis $1/(2\pi\gamma)$ pour chaque sphère. Nous supposons en première approche que le mode excité est le plus confiné à savoir celui caractérisé

par $n = 1$, ℓ et $|m| = \ell$. Les valeurs sont rassemblées dans le tableau 6.3. Nous trouvons un bon accord qualitatif entre les valeurs théoriques et expérimentales. Notons cependant que les valeurs expérimentales présentent systématiquement une valeur de $1/(2\pi\gamma)$ plus faible. Les modes excités sont certainement de $|m| < \ell$, dans ce cas, le volume modal augmente ce qui diminue l'écart fréquenciel $2\delta_c$.

TABLE 6.3 – Paramètres structurels et valeurs théoriques et expérimentales associés à l'éclatement fréquentiel dans les sphères étudiées.

D	80 μm	110 μm	120 μm
ℓ	235	323	353
$\mathcal{V}$	2070 μm^3	3720 μm^3	4360 μm^3
$1/(2\pi\gamma)$ [theo]	6 MHz	4,5 MHz	4,1 MHz
$1/(2\pi\gamma)$ [expe]	4,49 MHz	1,45 – 2,26 MHz	2,38 – 3,1 MHz

Remarque

Considérons non plus le mode $(1, \ell, \ell - |m| = 0)$ mais le mode correspondant à la première dégénérescence en m à savoir $(1, \ell, \ell - |m| = 1)$. Le volume modal devient [Equ. (6.24)] :

$$\mathcal{V}_{\ell-|m|=1} = \mathcal{V}_0\sqrt{3}, \tag{6.41}$$

où $\mathcal{V}_0$ correspond au volume du mode le plus confiné. En reportant cette valeur dans l'équation (6.40) nous obtenons :

$$\left.\frac{1}{2\pi\gamma}\right|_{l-|m|=1} = \frac{1}{2\pi\gamma_0}\frac{1}{[3]^{\frac{1}{4}}}, \tag{6.42}$$

où γ_0 correspond à la force du couplage pour le mode le plus confiné.
Dans le cas de la sphère de 80 μm de diamètre nous avons :

$$\left.\frac{1}{2\pi\gamma}\right|_{l-|m|=1} [\text{theo}] = 4,56 \text{ MHz}. \tag{6.43}$$

Cette valeur est très proche de la mesure expérimentale [Tab. 6.3]. Il en est de même pour la sphère de 120 μm. Dans ce cas nous avons :

$$\left.\frac{1}{2\pi\gamma}\right|_{l-|m|=1} [\text{theo}] = 3,115 \text{ MHz}, \tag{6.44}$$

et nous mesurons 3,1 MHz.
Dans ces deux cas, il semblerait que les mesures de γ correspondent au mode $(1, \ell, \ell - |m| = 1)$.

6.4.2.6 Contribution au facteur de qualité intrinsèque

Intéressons nous à la contribution de la rétrodiffusion Rayleigh au facteur de qualité intrinsèque Q_0 dans nos microsphères. Nous avons déjà étudié les différents termes contribuant à Q_0 (cf. partie 5.5) :

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{mat}}} + \frac{1}{Q_{\text{surf}}} + \frac{1}{Q_{\text{cont}}}.$$

Nous savons que la contribution ayant pour origine la diffraction est totalement négligeable, $Q_{\text{rad}} > 10^{34}$ pour les diamètres de sphère que nous utilisons. Le terme Q_{mat} traduit les pertes dues à l'absorption du matériau ainsi que celle dues à la diffusion Rayleigh. Nous avons vu que dans nos sphères en silice $Q_{\text{mat}} \approx 1,5 \times 10^{11}$. Si on ne considère que la contribution de la diffusion Rayleigh (cf. page 146 et Ref. [176]), le facteur-Q_{mat} devient :

$$Q_{\text{mat}} = \frac{3N\lambda^3}{4\pi^2 \rho_{sc} \overline{\alpha}^2}, \tag{6.45}$$

ce qui nous donne $Q_{\text{mat}} = 2 \times 10^{11}$. Sachant que les $Q_0 = \pi c \tau_0 / \lambda$ mesurés sont compris entre $1,4 \times 10^8$ et $2,1 \times 10^8$, la contribution de la rétrodiffusion Rayleigh au facteur de qualité Q_0 est minime.

Si le facteur de qualité intrinsèque était limité par le facteur de qualité de surface ($Q_0 = Q_{\text{surf}}$, la rétrodiffusion provenant des impuretés situées en surface provoqueraient un éclatement de fréquence beaucoup plus important que celui que nous observons expérimentalement [178,184]. Par conséquent, le facteur de qualité intrinsèque est limité par les contaminants comme les ions OH^- et les molécules d'eau adsorbées à la surface de la sphère.

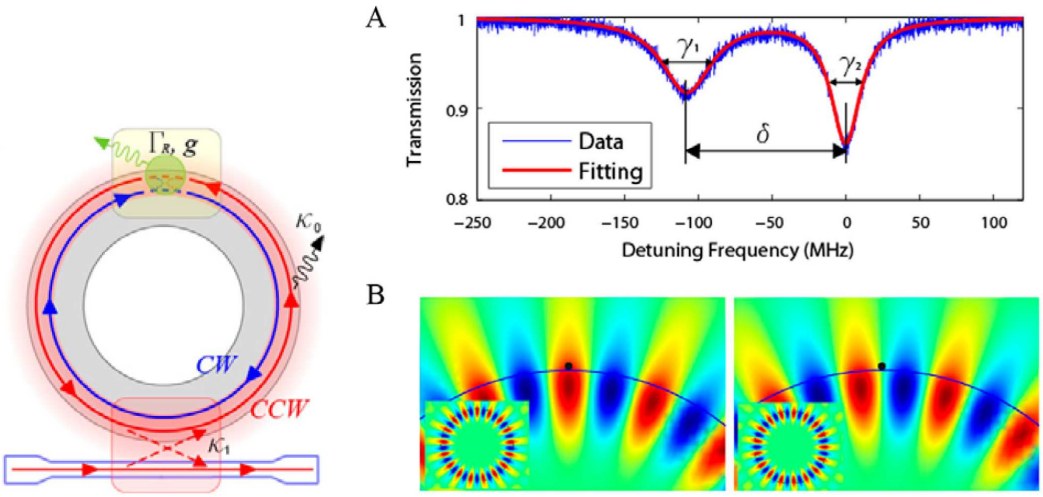
Conclusion

L'utilisation de la méthode spectrale/temporelle, basée sur l'analyse du signal de *ringing*, permet de caractériser le couplage modal dans un résonateur de grande finesse et plus généralement tout système de deux résonateurs couplés.

Cette méthode permet non seulement de mesurer τ_0, τ_e et $\tilde{V}_s$, mais également d'obtenir la valeur du paramètre de couplage γ. Du fait de sa grande sensibilité, la procédure de post-traitement permet de mesurer avec précision de très faibles valeurs de γ. En comparaison, une mesure en régime quasi-stationnaire présenterait, pour des valeurs très faibles de γ, une réponse similaire à celle obtenue avec un résonateur unique.

Finalement, notons que cette dernière propriété présente un intérêt pour des applications comme capteur pour le dimensionnement de nanoparticules comme proposé par J. Zhu *et al.* [185].

La figure 6.17(a) présente le couplage d'une nanoparticule et d'un mode de galerie d'un microtoroïde. Lorsque le mode de galerie CCW est excité le couplage de ce dernier avec la nanoparticule induit un signal de rétrodiffusion dans toutes les directions et notamment dans le mode CW associé. Ce couplage modal provoque un éclatement de fréquence à résonance caractérisé par Γ_R le taux d'amortissement et g (proportionnel à γ dans notre modèle) la



(a) (b)

FIGURE 6.17 – a) illustration du couplage entre une nanoparticule et un mode de galerie. κ_0 est un terme relatif aux pertes intrinsèques, κ_1 au couplage entre le résonateur et la ligne d'accès. Γ_R correspond au taux d'amortissement et g au taux de couplage introduits par la nanoparticule. b)-A Résultat de mesure en régime stationnaire après dépôt d'une nanoparticule sur un microtoroïde. b)-B Distribution des champs u_+ et u_- suivant la position de la nanoparticule (point noir). Ces figures proviennent de la référence [185].

force du couplage. De la mesure de ces deux paramètres nous déduisons les dimensions de la nanoparticule à partir de l'expression de son rayon R :

$$R = \left[\frac{(3\lambda^3/8\pi^2) \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)/\delta}{4\pi(n_p^2 - 1)/(n_p^2 + 2)} \right]^{\frac{1}{3}} \tag{6.46}$$

où $2\Gamma_R = \gamma_1 - \gamma_2$, $\delta = 2g$ et n_p correspond à l'indice de réfraction de la particule. La figure 6.17(b)-A présente un résultat de mesure obtenu par J. Zhu *et al.* [185]. Les pertes subies par les modes u_+ et u_- dépendent de la position de la nanoparticule sur la surface du microtoroïde [Fig 6.17(b)-B], ce qui implique que les deux nouvelles résonances aient une largeur à mi-hauteur γ_1 et γ_2 différentes [6.17(b)-A].
Dans ce contexte la méthode hybride spectrale/temporelle permettrait d'obtenir en une mesure la valeur de g et de Γ_R et donc de dimensionner facilement la nanoparticule. Cette technique de caractérisation serait notamment utile pour mesurer les faibles valeurs de couplage modal non accessible par une mesure en régime stationnaire.

Chapitre 7

Amplification sélective en microsphère active

Dans ce chapitre expérimental, nous présentons nos derniers résultats obtenus dans une microsphère active dopée Erbium. Sans pompage optique, la cavité présente un "faible" facteur de qualité ($Q < 10^6$) due à l'absorption du signal par les ions terres rares. Lorsque le milieu à gain est pompé optiquement le résonateur affiche un haut facteur de qualité $Q > 10^8$ associé à une grande finesse $\mathcal{F} > 10^5$. Dans ce cas nous montrons que ce dispositif permet d'observer le régime d'amplification sélective. Ce régime de fonctionnement du résonateur est caractérisé par la méthode hybride spectrale/temporelle décrite et étudiée tout au long de ce manuscrit.
Après avoir décrit le dispositif sous test - à savoir la microsphère active - nous présentons le protocole expérimental utilisé. Nous discutons ensuite les résultats obtenus en régime d'amplification sélective qui pourrait être utilisé comme filtre amplificateur sélectif dans des applications opto-hyperfréquences.
Ces travaux sur les sphères actives sont dans la continuité de ceux menés par F. Lissillour [153], C. Arnaud [47], L. Ghişa [48] et L. Xiao [172]. Ces travaux portaient sur l'effet Laser en microcavité. Dans notre cas nous étudions l'amplification sous ce seuil laser.

7.1 Le résonateur sous test

Les microsphères actives que nous utilisons sont réalisées dans un verre fluoré ZBLALiP (ZrF_4-BaF_2-LaF_3-AlF_3-LiF-PbF_2) fabriqué par l'équipe de M. Mortier [193] au LCMCP (CNRS UMR 7574). Ce verre fluorozirconate est une matrice hôte appropriée pour accueillir des ions terres rares et notamment dans notre cas l'Erbium. Ces sphères sont réalisées suivant le processus de fusion par torche plasma [Partie 5.6.2]. Chaque sphère choisie est ensuite fixée à l'extrémité d'une fibre amincie (typiquement de l'ordre de 30 μm de diamètre) afin d'être facilement manipulée. Les résultats que nous présentons ont été obtenus avec des sphères d'environ 100 μm de diamètre dopée $0,1$mol% en ions Er^{3+} et d'indice $N = 1,5$. Le verre

Er^{3+} :ZBLALiP permet d'observer une émission de fluorescence et donc de l'amplification sur une gamme spectrale allant de 1530 nm à 1570 nm.

La figure 7.1 présente le schéma du microrésonateur couplé à une ligne d'accès. Comme

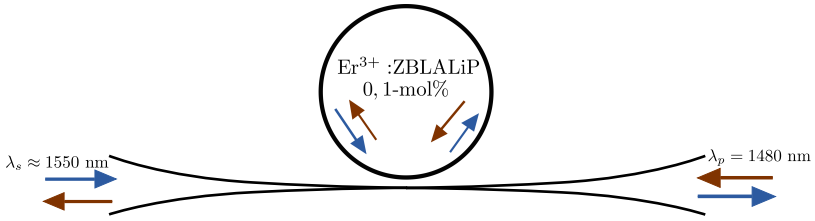


FIGURE 7.1 – Schéma de la microsphère active Er^{3+} :ZBLALiP dopée à 0, 1-mol% et couplée à un taper biconique d'environ 2 μm de diamètre. λ_s est la longueur d'onde du signal de sonde et λ_p correspond au signal de pompe.

pour les expériences précédentes [Chap. 6], les signaux de pompe et de sonde sont injectés et extraits de la sphère par un taper biconique d'environ 2 μm de diamètre [Partie 5.7]. Nous disposons de différentes longueurs d'onde de pompage pour l'Erbium à savoir 810 nm, 975 nm et 1480 nm. Nous avons choisi celle à 1480 nm car elle permet un recouvrement optimal entre les modes de pompe et de sonde dans la microsphère. De plus, ces deux sources sont suffisamment proches spectralement (1520 $\pm$ 50 nm) pour que l'adaption des constantes de propagation dans le taper et dans la sphère soit réalisée pour ces deux longueurs d'onde [167]. Il est alors possible d'insérer et d'extraire les deux signaux de la microsphère en utilisant le même taper. Notons également que le pompage et l'excitation de la cavité sont réalisés de manière contrapropagative [Fig. 7.1].

7.2 Montage expérimental

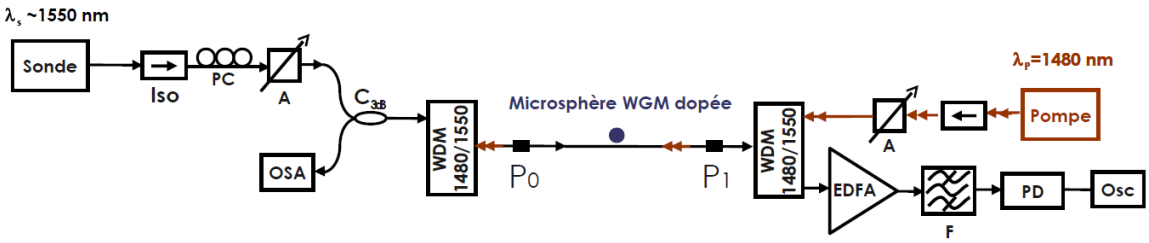


FIGURE 7.2 – Dispositif expérimental de mesure de l'amplification sélective dans une microsphère active.

La figure 7.2 présente le montage expérimental permettant la mesure du régime d'amplification sélective. Ci-dessous nous présentons : (i) le dispositif d'excitation de la microsphère permettant de mettre en forme les signaux de sonde et de pompe et (ii) la chaîne d'acquisition du signal. Notons que l'étape d'acquisition des signaux utiles (qcq nW) doit être particulièrement soignée.

7.2.1 Système d'excitation

Nous utilisons le même dispositif d'excitation que dans les chapitres précédents [Partie 2.3.1]. Il est composé d'un laser accordable dont la raie d'émission (150 kHz) est balayée sur une étendue spectrale de 5 GHz. La longueur d'onde centrale du laser de sonde est accordable sur une plage de 100 nm autour de 1550 nm ce qui permet de sélectionner les modes de galerie les plus résonants du spectre d'émission. Un atténuateur variable est utilisé pour ajuster la puissance P_0 du laser de sonde en entrée du taper. Les expériences sont réalisées pour de faibles puissances de sonde ($P_0 < 300$ nW). De cette manière, nous travaillons en régime "petit signal" ce qui limite la saturation du gain interne.
Un multiplexeur (1480/1550 nm) est placé de part et d'autre du dispositif sous test pour séparer ou coupler les signaux de pompe et de sonde. Le coupleur 3 dB permet d'observer la superposition du spectre de fluorescence et du signal de sonde. Nous pouvons ainsi sélectionner un mode de galerie efficace. Le signal de pompe est caractérisé par sa puissance maximale en entrée du taper $P_1 \approx 25$ mW et par sa largeur spectrale d'environ 5 nm. La puissance P_1 est également ajustée à l'aide d'un atténuateur variable.

7.2.2 Chaîne d'acquisition

La chaîne de détection du signal en transmission comprend :
- un amplificateur optique EDFA (*Erbium doped fiber amplifier*) de 40 dB de gain en régime de "petit signal". La puissance du signal utile en sortie du multiplexeur étant de quelques nanowatt, une étape de ré-amplification est indispensable à la mesure,
- un filtre passe-bande de 3,4 nm de largeur à mi-hauteur permet de filtrer la majeure partie de l'émission spontanée provenant de l'EDFA,
- une photodiode et un oscilloscope constituent le dispositif d'acquisition du signal.

7.3 Amplification sélective

Le régime d'amplification sélective a déjà été traité théoriquement et expérimentalement dans le cas d'un résonateur modèle à base de fibres [Partie 2.6 p. 46]. Cette étude préliminaire nous a permis de dégager les principales caractéristiques linéaires de ce régime de couplage. Il présente une transmission à résonance supérieure $T(0) > 1$ qui s'obtient lorsque $\tau_0 < -\tau_e$. L'étude du régime d'amplication sélective dans une microsphère en verre actif est plus complexe. Tout d'abord, les microsphères étudiées possèdent une grande finesse. À cette grande finesse est associé un très haut facteur de surtension. Il convient donc d'utiliser de faibles signaux d'entrée pour éviter une saturation du gain par le signal à l'intérieur de la sphère. De plus, l'aspect très multimode des microsphères [Chap. 5] nous oblige à choisir dans un large spectre les modes de galerie très confinés qui sont les plus susceptibles de présenter de l'amplification sélective.
Le phénomène de "ringing" est observé pour un balayage rapide ($\tilde{V}_s \approx 5$ MHz/μs) de la

raie du laser de sonde. Nous ajustons ensuite le modèle analytique linéaire à nos courbes expérimentales par la méthode des moindres carrés :

$$\sigma^2\left(\tau_0,\tau_e,\tilde{V}_s,\eta\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[T_{mes,i}-T_{theo,i}\left(\tau_0,\tau_e,\tilde{V}_s,\eta\right)\right]^2, \tag{7.1}$$

Outre les paramètres τ_0,τ_e et $\tilde{V}_s$ évoqués auparavant, le schéma expérimental utilisé ici, pour l'amplification dans les microsphères, nécessite l'insertion du paramètre supplémentaire η permettant la normalisation de la transmission. Sa valeur correspond au niveau de l'émission amplifiée (provenant de l'EDFA) détectée.
Jusqu'à présent, les signaux de transmission expérimentaux étaient normalisés par la valeur de la transmission du signal hors résonance. L'utilisation de l'amplification optique (EDFA) dans la chaîne d'acquisition augmente artificiellement le niveau du signal détecté. Dans ce cas, la transmission ne peut pas être aussi simplement normalisée. Le paramètre η, correspondant à l'émission spontanée dans la bande passante du filtre, rentre dans l'optimisation numérique comme un paramètre ajustable.

Remarque

Dans le cas où la détection du signal ne nécessite pas l'utilisation de l'EDFA il est possible de traiter les résultats sans le paramètre η. On retrouve alors la configuration précédente utilisée dans les chapitres 2, 4 et 6.

7.3.1 Mesure d'un faible gain

Nous présentons sur la figure 7.3 le résultat de la confrontation théorie/expérience obtenue sur une mesure en régime transitoire. Ce résultat est observé dans une microsphère de 125 μm de diamètre pour un signal de sonde P_0=285 nW et une puissance de pompe $P_1 = 17,75$ mW. Il faut noter que les puissances de pompe et de sonde en entrée du taper ne correspondent en aucun cas aux puissances effectivement injectées dans la microsphère. À l'heure actuelle nous ne sommes pas capables de déterminer les puissances (pompe et sonde) contenues dans le mode que nous étudions.
L'analyse numérique donne $\tau_0 = -1338$ ns, $\tau_e = 317$ ns et $\tilde{V}_s = 5,6$ MHz/μs. On retrouve bien la condition $\tau_0 < -\tau_e$ qui définie le régime d'amplification sélective. L'ensemble des résultats est rassemblé dans le tableau 7.1.

7.3.1.1 Gain et retard de groupe à résonance

Des temps de vie τ_0 et τ_e nous déduisons le gain à résonance [Equ. (1.35)] :

$$T(0)=\left(\frac{\tau_e-\tau_0}{\tau_e+\tau_0}\right)^2=4,2\text{ dB}$$

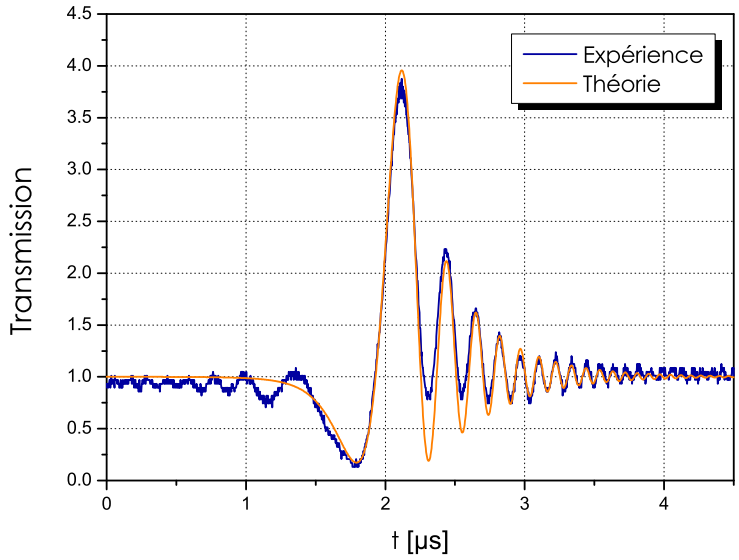


FIGURE 7.3 – Mesure en balayage rapide dans une microsphère Er^{3+} :ZBLALiP. L'ajustement du résultat dynamique permet d'identifier le régime d'amplification sélective $\tau_0 = -1338$ ns, $\tau_e = 317$ ns. La vitesse de balayage mesurée est de $\tilde{V}_s = 5,6$ MHz/μs. Le signal à résonance présente un gain de $T(0) = 4,2$ dB et un retard de groupe $\tau_g(0) = 1,35$ μs.

et le retard de groupe associé [Equ. (1.44)] :

$$\tau_g(0) = 2\frac{\tau_e \tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau_e^2} = 1,35 \ \mu\text{s}$$

Nous avons, dans ce cas de figure, une ligne à retard intégrée équivalente à 270 m de fibre optique et amplifiant le signal de 4,2 dB. Ce résultat est comparable à ceux de Totsuka *et al.* [78]. Ils obtiennent une amplification de 4 dB dans une microsphère de 63 μm à 1064 nm.

TABLE 7.1 – Caractéristiques linéaires d'une microsphère dopée Erbium en régime d'amplification sélective. Le tableau rassemble les résultats des figures 7.3 et 7.4.

	τ_0 [ns]	τ_e [ns]	a	$T(0)$ [dB]	$\tau_g(0)$ [μs]
Fig. 7.3	-1338	317	$1,000001465$	$4,2$	$1,35$
Fig. 7.4	-287	234	$1,000006829$	$19,8$	$1,4$

7.3.1.2 Gain sur un tour

L'expression associant le temps de vie intrinsèque τ_0 au gain a sur un tour de cavité s'exprime comme [Equ. (A.10)] :

$$\tau_0 = \frac{\tau_L \sqrt{a}}{(1-a)}$$

Pour obtenir la valeur du gain sur un tour à partir de la mesure expérimentale de τ_0 il faut résoudre le polynôme du second ordre suivant :

$$a^2\tau_0^2 - a(2\tau_0^2 + \tau_L^2) + \tau_0^2 = 0 \tag{7.2}$$

dont la solution est :

$$a \approx 1 - \frac{\tau_L}{\tau_0} \tag{7.3}$$

Le temps de parcours de la cavité $\tau_L = 2\pi NR/c$ vaut dans le cas présent 1,96 ps. Ce qui nous donne pour a :

$$a = 1 - \frac{1,96 \cdot 10^{-12}}{-1338.10^{-9}} = 1,000001465. \tag{7.4}$$

Dans les microrésonateurs à modes de galerie de grande finesse (ici $\mathcal{F} = 3,3 \cdot 10^5$), le champ intracavité est très résonant. Bien que l'efficacité du gain sur un tour soit faible ($a = 1,000001465$), le champ effectue environ $5 \cdot 10^5$ passages dans la cavité. Ce qui permet d'obtenir un gain externe important (($T(0) = 4,2$ dB) pour un gain interne assez faible.

Remarque

Cette évolution exponentielle de la transmission $T(0)$ dans le cas d'une sphère présentant un faible gain est aussi vrai lorsque a est légèrement inférieure à 1. Dans ce cas le résonateur présente rapidement un pic d'absorption important.

7.3.2 Mesure d'un grand gain

Dans la même microsphère mais pour une configuration de couplage et une puissance de pompe ($P_1 = 20,5$ mW) différentes nous obtenons le résultat présenté sur la figure 7.4. La puissance du signal d'excitation est toujours de 275 nW. Le profil des oscillations est différent par rapport à ceux observés jusqu'à présent. Dans le cas où la puissance du champ issue de la cavité est nettement plus importante que la puissance du signal d'entrée, le signal de sortie suit une évolution semblable à celle du champ intracavité. Le traitement numérique nous donne dans ce cas $\tau_0 = -287$ ns, $\tau_e = 234$ ns et une vitesse $\tilde{V}_s = 2,4$ MHz/μs. Nous en déduisons un gain $T(0) = 19,8 \pm 1$ dB et un retard de groupe de $\tau_g(0) = 1,4$ μs. En procédant à l'analyse numérique du paragraphe 7.3.1.2 nous obtenons un gain sur un tour $a = 1,000006829$.

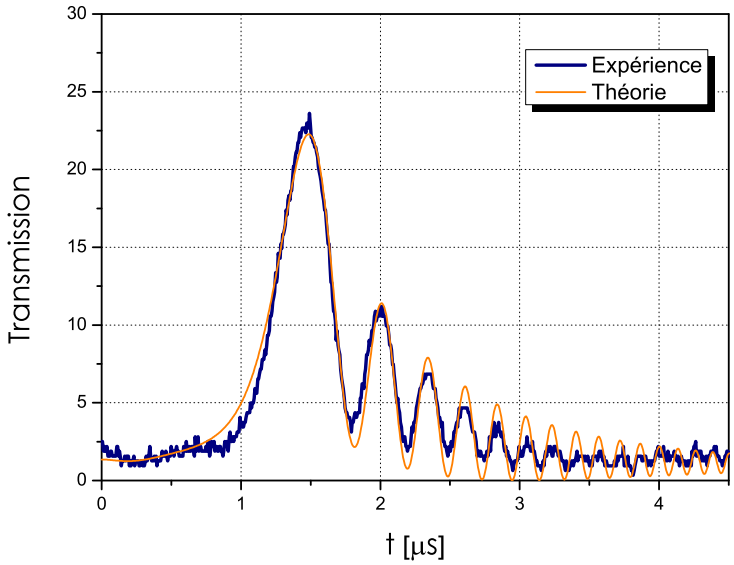


FIGURE 7.4 – Mesure du régime d'amplification sélective dans une microsphère Er^{3+} :ZBLALiP. Le traitement numérique donne $\tau_0 = -287$ ns, $\tau_e = 234$ ns. La vitesse de balayage mesurée est de $\tilde{V}_s = 2,4$ MHz/μs. Le signal à résonance présente un gain de $T(0) = 19,8 \pm 1$ dB et un retard de groupe $\tau_g(0) = 1,4$ μs.

Remarque

Dans ce cas précis, nous n'avons pas accès à la transmission hors résonance du fait de l'émission spontanée apportée par l'EDFA. La valeur initiale du paramètre η peut alors influencer les valeurs des paramètres de sortie en particulier τ_0 et τ_e, $\tilde{V}_s$ et par là même la transmission $T(0)$ et son retard de groupe associé.

Nous présentons sur les graphiques de la figure 7.5 l'évolution des paramètres τ_0, τ_e, η, $\tilde{V}_s$ et $T(0)$ en fonction de la valeur initiale de η. Les valeurs de η pour lesquelles l'optimisation numérique ne donne pas de résultat ne sont pas traitées. Pour un intervalle de $-0,1$ à $0,1$, nous obtenons une très faible dispersion des valeurs des paramètres d'optimisation [Fig. 7.5]. On associe alors à la mesure de $T(0)$ - dans le cas d'un grand gain - une incertitude de ± 1 dB. Nous nous donnons dans ce cas un intervalle 10 fois plus large que la valeur de η obtenue après optimisation numérique.

Conclusion

Nous avons caractérisé une microsphère en verre actif en régime d'amplification sélective par la méthode hybride/spectrale temporelle. Malgré les difficultés apportées par la chaîne d'acquisition d'une part et les propriétés inhérentes aux microrésonateurs à modes de galerie d'autre part le modèle analytique linéaire peut se superposer aux mesures expérimentales. Nous avons pu mesurer des gains externes de 20 dB et des retards de groupe d'environ 1,5

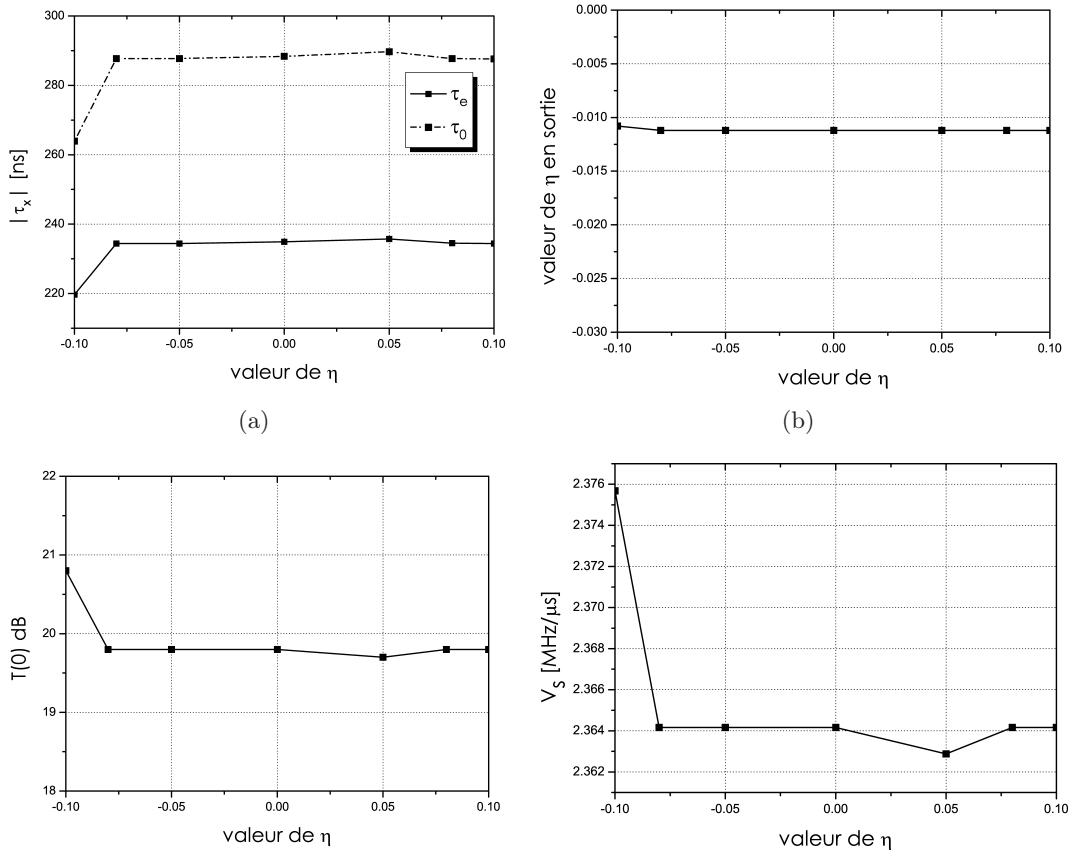


FIGURE 7.5 – Résultats de l'optimisation numérique pour différentes valeurs du paramètre η. Les valeurs de sortie sont : a) $|\tau_0|$ et τ_e - b) valeur relative du η de sortie - c) $T(0)$ et d) vitesse normalisée $\tilde{V}_s$.

μs. Ce dispositif compact pourrait être utilisé dans des applications opto/hyperfréquence comme ligne à retard, filtre ou amplificateur sélectif.

Conclusion

La caractérisation de résonateurs de facteurs de surtension très élevés ($> 10^8$) est difficilement réalisée à partir des méthodes expérimentales conventionnelles en régime stationnaire. C'est à partir de ce constat, qu'au sein du groupe microsphère-GPL, nous avons développé une méthode hybride spectrale/temporelle, conjuguant les avantages des méthodes de scan et de *cavity ringdown*, pour la caractérisation en régime linéaire du régime de couplage et des propriétés dispersives de résonateurs de haut facteur de qualité. Cette méthode associée à un modèle analytique (méthode dérivée de la *dynamical mode amplitude method* de H. Haus) permet, à partir d'une simple mesure, de déterminer le facteur de surtension global et la discrimination, de manière univoque, des facteurs Q_0 intrinsèque (résonateur) et Q_e extrinsèque (coupleur) du dispositif. De ces mesures, nous en déduisons le régime de couplage, la transmission et les différents termes de l'équation de dispersion et en particulier le retard de groupe τ_g.

Dans un premier temps, cette méthode a été appliquée à un résonateur modèle à fibre pour validation. Les différents régimes de couplage tels que le sous-couplage, le couplage critique, le sur-couplage, la transparence et l'amplification sélective d'un résonateur en régime linéaire ont été étudiés et caractérisés. Par la suite, nous avons utilisé cette méthode pour caractériser des microrésonateurs à modes de galerie passifs : microdisque en MgF_2 et microsphère de silice fondue puis à des résonateurs actifs tels que les microsphères en verre fluoré dopé Erbium de type Er^{3+} :ZBLALiP. Dans ces cavités actives, nous avons observé un régime d'amplification caractérisé par des gains de l'ordre de 20 dB associé à des retards de groupe à résonance d'environ 1,5 μs. Ces systèmes peuvent alors être utilisés comme lignes à retard amplificatrices et spectralement très sélectives ($\approx$ 114 kHz). De part leurs caractéristiques, ces microrésonateurs actifs sont de bons candidats pour remplir le rôle de ligne à retard dans la boucle de contre-réaction des oscillateurs opto-hyperfréquences. Fort de ces résultats, à l'avenir, une étude plus approfondie doit être menée afin de déterminer le gain et le retard de groupe atteignables et de définir, entre-autres, pour de tels applications la stabilité et le bruit de phase du signal.

Il pourrait être intéressant de coupler les effets de ralentissement de la lumière induits par des structures photoniques (microsphère) avec des effets cohérents de la matière comme par exemple l'OCP (*Oscillation Coherent Population*). Cet effet est susceptible d'exalter le facteur de qualité *à froid* d'une microsphère active (10^6) d'un facteur 10^7. Se pose alors la

question de la mesure: comment caractériser un résonateur présentant une largeur de raie de 20 Hz ($Q = 10^{13}$) ? Notre procédé expérimental permet à l'heure actuelle de déterminer des facteurs-Q globaux de 10^{10} (20 kHz). Une des perspectives de ce travail viserait à améliorer la sensibilité de la méthode pour la mesure de très grand facteur-Q.
Ce modèle temporel simple a été adapté aux cas des cavités couplées permettant ainsi de caractériser les microsphères de hautes finesses ($>10^5$). Dans ce type de cavité, il est courant de rencontrer une levée de dégénérescence entre les modes contra-propagatifs de la cavité. Cet effet provenant principalement de la diffusion Rayleigh induit un couplage entre les modes anti-horaires. La manifestation spectrale de ce phénomène de couplage modal est un éclatement de la résonance en un doublet dont l'écart en fréquence est une signature de l'efficacité de la rétrodiffusion. Expérimentalement, la méthode permet de caractériser de très faibles valeurs de couplage modal (<1 MHz), là où, une mesure en régime stationnaire ne le ferait pas apparaître de manière explicite.

Le domaine de validité de cette méthode peut être étendu aux fonctionnements en régime non-linéaire. Pour des puissances intracavités élevées, les effets non-linéaires (notamment la dérive spectrale initiée par les effets thermiques) ne peuvent plus être négligés. Des résultats expérimentaux préliminaires ont été obtenus dans des microsphères passives et actives. Ils demandent cependant à être confirmés et confrontés au modèle analytique enrichi des termes relatifs aux effets non-linéaires. Une fois éprouvée, la méthode permettrait de caractériser les coefficients non-linéaires associés aux phénomènes observés mais aussi de mesurer la valeur du champ intracavité ce qui n'est pas réalisable aujourd'hui par une mesure directe.

Parallèlement, nous avons proposé différentes architectures à base de cavités couplées permettant d'augmenter le contrôle de la dispersion dans ce type de système. À partir d'un modèle analytique, nous avons étudié la transparence induite par couplage de résonateurs dans des structures dites CRIT (*Coupled Resonator Induced Transparency*) pour la réalisation d'états de lumière lente. Dans cet équivalent classique de l'EIT (*Electromagnetically Induced Transparency*), le couplage de résonateurs crée une séparation des fréquences de résonance (analogue au *Rabi splitting* de l'EIT) et diminue considérablement l'absorption autour de la fréquence centrale (avant couplage). Nous avons montré expérimentalement que les limites imposées par les pertes intrinsèques des résonateurs (systèmes passifs) pouvaient être contournées par l'utilisation de résonateurs actifs (sur un système test à base de résonateurs en fibres optiques dopés et couplés). Les pertes résiduelles dans les deux résonateurs peuvent être modifiées indépendamment et la transparence peut être optimisée par le choix des taux de pompage de chacun des résonateurs sans que l'émission spontanée ajoute du bruit dans les mesures (i.e. le CRIT actif reste un phénomène cohérent). Nous mesurons optiquement (mesures simultanées de la transmission et interférométrique) la dispersion du système (mesure du retard de groupe) et avons montré que le paramètre supplémentaire lié au caractère actif des résonateurs offre un potentiel d'applications en tant que ligne à

retard ajustable sur une gamme de quelques ns à environ 90 ns tout en conservant une transparence du système d'environ 90%. De plus, le contrôle actif des résonateurs permet une mise en forme (un contrôle) des différents ordres de dispersion du dispositif, offrant la possibilité de retarder des signaux spectralement plus larges.

Sur les aspects de contrôle dynamique de cavités, nous avons proposé et démontré expérimentalement l'augmentation du facteur de qualité par la dispersion induite par couplage de résonateurs actifs. Nous avons étudié le cas de N résonateurs couplés et plus particulièrement les cas $N = 2$ et $N = 3$. Dans le cas $N = 2$, nous utilisons un résonateur pour augmenter artificiellement le chemin optique d'un second jouant le rôle de cavité cible. Dans ce cas, il est possible d'améliorer sensiblement (évolution exponentielle) le facteur de qualité du second résonateur. Expérimentalement, nous avons obtenu une augmentation du facteur de qualité d'un coefficient 23. Dans le cas $N = 3$, l'insertion d'un CRIT actif dans un résonateur sous couplage critique montre que le facteur Q de ce résonateur peut être augmenté et modulé par le gain dans les résonateurs actifs. Le test expérimental a été effectué sur un système modèle à boucles de fibres optiques dopées Er^{3+} et couplées. Dans ce cas, le facteur Q passe de 4×10^7 à $2,5 \times 10^8$. La démonstration expérimentale de ce principe montre la possibilité d'ingénierie du facteur Q par l'utilisation de structures photoniques artificielles actives.

Les phénomènes physiques démontrés dans ces systèmes de résonateurs couplés à fibre doivent être appliqués dans des dispositifs intégrés à base de microrésonateurs comme par exemple dans des structures à cristaux photoniques ou de manière plus générale dans le domaine de l'optique planaire. Outre des dimensions réduites, les larges bandes passantes associées à ces cavités photoniques permettraient la réalisation de fonctions optiques complexes tels que des modules de compensation de dispersion reconfigurables, ou encore l'obtention d'effets non-linéaires à très faibles seuils.
Du point de vue de la fabrication, la méthode hybride spectrale/temporelle permettrait, après réalisation des échantillons, de déterminer expérimentalement les valeurs des coefficients de couplage et des pertes intrinsèques à chaque résonateur. Connaissant les principales sources de pertes, il est alors possible d'optimiser le procédé de fabrication.
Toujours dans cette perspective d'intégration, une première étape consisterait à redémontrer les effets permettant l'ingénierie du facteur de qualité dans des mailles élémentaires constitués de 2 ou 3 microcavités. Ensuite, comme récemment proposé [100, 114], il peut être envisagé de mutualiser les effets de couplage et le contrôle dynamique des pertes (ou du gain) dans des dispositifs complexes de résonateurs agencés de manière matricielle. Il est ainsi possible de façonner, en module et en phase, la fonction de transfert de tels dispositifs en vue d'un traitement tout optique de l'information.
Ces systèmes offriraient par exemple la possibilité de réaliser du stockage d'impulsions tout en contournant la limitation du produit retard×bande passante imposée par le caractère

résonant des lignes à retard optiques constituées de résonateurs.

Annexe A

Lien entre l'approche stationnaire et l'approche dynamique

La description du régime stationnaire d'un résonateur couplé à une ligne d'accès unique est présenté dans le chapitre 3 page 60. Nous présentons ici le lien qui peut être fait avec le modèle dynamique de H.A. Haus [cf. chapitre 1].

Le régime stationnaire Dans l'approche stationnaire l'expression de la transmission est :

$$T(\omega) = \frac{\rho^2 - a^2 - 2a\rho\cos\varphi(\omega)}{1 + a^2\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi(\omega)}, \tag{A.1}$$

où $\varphi(\omega) = \omega nL/c$ est la phase accumulée sur un tour de cavité. a est le terme de perte et ρ est le coefficient de transmission en champ du coupleur. Il est relié à κ, le coefficient de couplage dans le cas d'un coupleur sans perte par : $\rho^2 + \kappa^2 = 1$.
En supposant un résonateur de bonne qualité ($a\rho$ proche de 1), la largeur à mi-hauteur des résonances de la cavité est définie (dans l'espace des phases) par :

$$\delta\varphi = \frac{2(1 - a\rho)}{\sqrt{a\rho}}, \tag{A.2}$$

que l'on peut exprimer dans l'espace des fréquences en notant que :

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\delta\omega, \tag{A.3}$$

ce qui conduit à :

$$\delta\varphi = \frac{L}{c}\left(n + \omega\frac{\partial n}{\partial\omega}\right)\delta\omega = \frac{L}{c}n_g\delta\omega. \tag{A.4}$$

Finalement nous pouvons définir la largeur à mi-hauteur des résonances en transmission par :

$$\delta\omega = \frac{2c(1 - a\rho)}{n_g L\sqrt{a\rho}}. \tag{A.5}$$

Le facteur de qualité global de la cavité étant défini par $Q = \omega_0/\delta\omega$, nous avons :

$$Q = \frac{\omega\tau_L\sqrt{a\rho}}{2(1-a\rho)}, \tag{A.6}$$

où $\tau_L = n_g L/c$ est le temps nécessaire à un photon pour parcourir le périmètre de la cavité.

Le régime dynamique Nous avons vu [cf. chapitre 1] que, dans le modèle dynamique, le facteur de qualité global est défini par :

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2}. \tag{A.7}$$

Par analogie nous avons exprimé le facteur de qualité intrinsèque par $Q_0 = \omega_0\tau_0/2$ et le facteur de qualité externe par $Q_e = \omega_0\tau_e/2$.

Le lien entre les deux approches Le lien entre les deux approches peut être fait en comparant la largeur à mi-hauteur obtenue par les deux méthodes à savoir $\delta\omega = \omega_0/Q$ d'une part et $\delta\omega = \frac{2}{\tau}$ d'autre part.
On peut alors définir le facteur de qualité intrinsèque Q_0 (Equ. A.6) limité par les pertes du résonateur ($\rho = 1$) :

$$Q_0 = \frac{\omega_0\tau_L\sqrt{a}}{2(1-a)} = \frac{\omega_0\tau_0}{2}, \tag{A.8}$$

et le facteur de qualité interne Q_e limité par le coupleur ($a = 1$) :

$$Q_e = \frac{\omega_0\tau_L\sqrt{\rho}}{2(1-\rho)} = \frac{\omega_0\tau_e}{2}. \tag{A.9}$$

Finalement le lien entre les deux approches est obtenu par les expressions :

$$\tau_0 = \frac{\tau_L\sqrt{a}}{(1-a)} \quad \text{et} \quad \tau_e = \frac{\tau_L\sqrt{\rho}}{(1-\rho)}. \tag{A.10}$$

Annexe B

Publications et conférences relatives à ce travail de thèse

Articles dans des revues internationales à comité de Lecture

R.1 *"Measurement of the dispersion induced by a slow-light system based on coupled active-resonator-induced transparency"*
Y. Dumeige, T. K. N. Nguyên, L. Ghişa, **S. Trebaol**, P. Féron,
Phys. Rev. A 78, pp. 013818-1/5 (2008)

R.2 *"Glass microspherical lasers"*
G. Nunzi Conti, S. Soria, S. Berneschi, M. Brenci, F. Cosi, S. Pelli, C. Armellini, A. Chiappini, A. Chiasera, Y. Jestin, M. Ferrari, E. Moser, L. Ghişa, **S. Trebaol**, Y. Dumeige, P. Féron, G. C. Righini,
Advances in Science and Technology 55, pp. 46-55 (2008)

R.3 *"Determination of coupling regime of high-Q resonators and optical gain of highly selective amplifiers"*
Y. Dumeige, **S. Trebaol**, L. Ghişa, T. K. N. Nguyên, H. Tavernier, P. Féron,
J. Opt. Soc. Am. B 25 (12), pp. 2073-2080 (2008)

R.4 *"Intracavity coupled-active-resonator-induced dispersion"*
Y. Dumeige, **S. Trebaol**, P. Féron,
Phys. Rev. A 79, pp. 013832-1/10 (2009)

R.5 *"Artificial dispersion of active optical coupled resonator systems"*
S. Trebaol, T. K. N. Nguyên, H. Tavernier, L. Ghişa, Y. Dumeige, P. Féron,

C.R. Physique 10, pp. 964-979 (2009)

R.6 *"Miniaturized optical microwave source using a dual-wavelength whispering gallery mode laser"*
L. Xiao, **S. Trebaol**, Y. Dumeige, Z.P. Cai, M. Mortier, P. Féron,
Photon. Technol. Lett. 22, pp. 559-561 (2010)

R.7 *"Ringing phenomenon in coupled cavities : Application to modal coupling in whispering gallery-mode resonators"*
S. Trebaol, Y. Dumeige, P. Féron,
Phys. Rev. A 81 pp. 043828 (2010)

Communications dans des conférences à comité de Lecture

C.1 *"Optical measurement of the phase shift introduced by a slow light medium based on coupled erbium doped fiber resonators"*
Y. Dumeige, L. Ghişa, **S. Trebaol**, T. K. N. Nguyên, P. Féron,
Proc. of SPIE Vol. **6904**, 690407-1 - 690407-9 (2008)

C.2 *"Photonic properties of erbium activated coated microspheres"*
Y. Jestin, C. Armellini, A. Chiappini, A. Chiasera, Y. Dumeige, M. Ferrari, P. Féron, L. Ghişa, G. Nunzi Conti, **S. Trebaol**, G. C. Righini,
Proc. of SPIE Vol. **6904**, 690407-1 - 690407-9 (2008)

C.3 *"Slow-light medium based on coupled erbium-doped fiber resonators : optical measurement of the phase shift"*
T. K. N. Nguyên, **S. Trebaol**, L. Ghişa, Y. Dumeige, P. Féron,
SEDWAL Workshop (2008) (Sensitized Er doped waveguide amplifier/laser), Levico Terme, Italy, 13-15 April 2008 – book of abstracts

C.4 *"Méthode hybride spectrale/temporelle de mesure de grands facteurs de qualité et de gains sélectifs"*
S. Trebaol, Y. Dumeige, L. Ghişa, H. Tavernier, T. K. N. Nguyên, P. Féron,
JNOG (2008), Recueil des communications pp. 122-124

C.5 *"Dispersion properties of high-Q passive and active single or coupled resonators"*

Y. Dumeige, **S. Trebaol**, L. Ghişa, T. K. N. Nguyên, H. Tavernier, P. Féron,
Proceedings of SPIE, Vol. **7226**, pp.7226OS 1-13 (2009) **invited paper**

C.6 *"Dual Wavelength Er^{3+} : ZBLALiP Whispering Gallery Mode Laser"*
L. Xiao, **S. Trebaol**, Y. Dumeige, Z. P. Cai, M. Mortier, P. Féron,
Proceedings of IEEE Catalog Number : CFP09485-USB ISBN : 978-1-4244-4827-2 - ICTON 2009 - Tu.D4.5, pp.1-4 (2009)

C.7 *"Oscillations monomodes simultanées à deux longueurs d'onde dans un résonateur à modes de galerie en Er :ZBLALiP"*
L. Xiao, **S. Trebaol**, Y. Dumeige, Y. G. Boucher, Z. P. Cai, M. Mortier, P. Féron,
COLOQ'11 (2009) - Nice, 7 au 9 septembre 2009 - Recueil des communications pp.61

C.8 *"Simultaneous Oscillation of Wavelength-Tunable Single-Mode Lasers Using Er :ZBLALiP Whispering Gallery Mode Resonator"*
P. Féron, L. Xiao, **S. Trebaol**, Y. Dumeige, Y. G. Boucher, Z. P. Cai, M. Mortier,
Frontiers in Optics (2009) October 11-15, 2009 San Jose, California, USA conference FiO 6 : Quantum Electronics - session 6.2 : Microcavity Devices, OSA/FiOTechnical Digest ISBN 978-1-55752-878-0 paper FTh03 **invited paper**

C.9 *"High-Q passive and active microresonators for dispersion and delay line applications"*
Y. Dumeige, **S. Trebaol**, P. Féron,
SPIE : Photonics West 2010, San Francisco, January 23-28, (2010), conference 7612 : Advances in Slow and Fast Light III – session 7 : Slow Light in Microresonators and Semiconductor Structures, Proceedings of SPIE, Vol. **7612** 0P (2010), SPIE Photonics West, **invited paper**

Actes de conférence

A.C.1 *"Measurements of high quality factor and selective gain by hybrid spectral/temporal method"*
S. Trebaol, Y. Dumeige, P. Féron,
CMOS Photonics 15-21 March (2009), Book of abstracts. **Best poster price**

A.C.2 *"Active coupled resonators delay lines"*
Y. Dumeige, **S. Trebaol**, P. Féron,

Dasan conference on "Ultraslow light", Jeju Island, Korea 4-6 november (2009) **invited paper**

Bibliographie

[1] J. B. Khurgin and R. S. Tucker, editors. *Slow Light*. CRC Press, 2009.

[2] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electrischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern*. Teubner, 1906.

[3] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons*. Dover, 1952.

[4] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoğlu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, 64(10):1107–1110, Mar 1990.

[5] S. E. Schwartz and T. Y. Tan. Wave interactions in saturable absorbers. *Applied Physics Letters*, 10:4, 1967.

[6] L. W. Hillman, R. W. Boyd, J. Krasinski, and C. R. Stroud. Observation of a spectral hole due to population oscillations in a homogeneously broadened optical absorption line. *Optics Communications*, 45:416, 1983.

[7] M. S. Bigelow, N. N. Lepeshkin, and R. W. Boyd. Observation of ultraslow light propagation in a ruby crystal at room temperature. *Physical Review Letters*, 90:113, 2003.

[8] M. S. Bigelow, N. N. Lepeshkin, and R. W. Boyd. Superluminal and slow light propagation in a room-temperature solid. *Science*, 301:200, 2003.

[9] P. C. Ku, F. Sedgwick, C. J. Chang-Hasnain, P. Palinginis, T. Li, H. Wang, S. W. Chang, and S. L. Chuang. Slow light in semiconductor quantum wells. *Optics Letters*, 29:2291, 2004.

[10] A. Schweinsberg, N. N. Lepeshkin, M. S. Bigelow, R. W. Boyd, and S. Jarabo. Observation of superluminal and slow light propagation in erbium-doped optical fiber. *Europhysics Letters*, 73:218, 2006.

[11] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Reviews of Modern Physics*, 77(2):633, 2005.

[12] B. Ham, P. Hemmer, and M. Shahriar. Efficient Electromagnetically Induced Transparency in a rare-earth doped crystal. *Optics Communications*, 144(4-6):227 – 230, 1997.

[13] S. E. Harris and L. V. Hau. Nonlinear optics at low light levels. *Physical Review Letters*, 82(23):4611–4614, Jun 1999.

[14] L. V. Hau, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and S. E. Harris. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 397:594–598, 1999.

[15] Y. Akahane, T. Asano, B.-S. Song, and S. Noda. High-Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal. *Nature*, 425:944, 2003.

[16] B.-S. Song, S. Noda, T. Asano, and Y. Akahane. Ultra-high-Q photonic double-heterostructure nanocavity. *Nature Materials*, 4:207, 2005.

[17] T. Tanabe, M. Notomi, E. Kuramochi, A. Shinya, and H. a. Taniyama. Trapping and delaying photons for one nanosecond in an ultrasmall high-Q photonic-crystal nanocavity. *Nature Photonics*, 1:49, 2007.

[18] A. Ashkin and J. Dziedzic. Optical levitation by radiation pressure. *Applied Physics Letters*, 19:283, 1971.

[19] A. Ashkin and J. Dziedzic. Observation of resonances in radiation pressure on dielectric spheres. *Physical Review Letters*, 38:1351, 1977.

[20] P. Chylek, J. T. Kiehl, and M. K. W. Ko. Optical levitation and partial-wave resonances. *Physical Review A*, 18(5):2229–2233, Nov 1978.

[21] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Observation of optical resonances of dielectric spheres by light scattering. *Applied Optics*, 20:1803–1814, 1981.

[22] P. Chylek, V. Ramaswamy, A. Ashkin, and J. M. Dziedzic. Simultaneous determination of refractive index and size of spherical dielectric particles from light scattering data. *Applied Optics*, 22:2302–2307, 1983.

[23] J. F. Owen, P. W. Barber, B. J. Messinger, and R. K. Chang. Determination of optical-fiber diameter from resonances in the elastic scattering spectrum. *Optics Letters*, 6:272–274, 1981.

[24] R. E. Benner, P. W. Barber, J. F. Owen, and R. K. Chang. Observation of structure resonances in the fluorescence-spectra from microspheres. *Physical Review Letters*, 44:475–478, 1980.

[25] S. C. Hill, R. E. Benner, C. K. Rushforth, and P. R. Conwell. Structural resonances observed in the fluorescence emission from small spheres on substrates. *Applied Optics*, 23:1680–1683, 1984.

[26] S. C. Hill, R. E. Benner, C. K. Rushforth, and P. R. Conwell. Sizing dielectric spheres and cylinders by aligning measured and computed resonance locations: Algorithm for multiple orders. *Applied Optics*, 24:2380–2390, 1985.

[27] R. Thurn and W. Kiefer. Raman-microsampling technique applying optical levitation and radiation pressure. *Appl. Spectrosc.*, 38:78–83, 1984.

[28] S.-X. Qian, J. B. Snow, and R. K. Chang. Coherent Raman mixing and coherent anti-Stokes Raman scattering from individual micrometer-size droplets. *Optics Letters*, 10:499–501, 1985.

[29] J. Snow, S. Qian, and R. Chang. Stimulated Raman scattering from individual water and ethanol droplets at Morphology Dependant Resonances. *Optics Letters*, 10:37, 1985.

[30] H. Tzeng, K. Wall, M. Long, and R. Chang. Laser emission from individual droplets at wavelength corresponding to Morphology Dependant Resonances. *Optics Letters*, 11:614, 1984.

[31] S. Qian, J. Snow, H. Tzeng, and R. Chang. Lasing droplets: highlighting the liquid-air interface by laser emission. *Science*, 231:486, 1986.

[32] H. Lin, A. Huston, B. Justus, and A. Campillo. Some characteristics of a droplet Whispering-Gallery-Mmode laser. *Optics Letters*, 11:614, 1986.

[33] A. Campillo, J. Eversole, and H. Lin. Cavity quantum electrodynamics enhancement of stimulated emission in microdroplets. *Physical Review Letters*, 67:437, 1991.

[34] V. B. Braginsky and F. I. Khalili. *Zh. Eksp. Theor. Fiz.*, 78, 1980.

[35] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137:393–397, 1989.

[36] B. Lu, Y. Wang, Y. Li, and Y. Liu. Cavity modified spontanéous emission rate in Nd glass microsphère. *SPIE laser and photonics*, 1979:166, 1992.

[37] Y. Wang, B. Lu, Y. Li, and Y. Liu. Observation of cavity quantum electrodynamic effects in Nd:glass microsphere. *Optics Letters*, 20:770, 1995.

[38] L. Collot, V. Lefèvre-Seguin, B. Brune, J. Raimond, and S. Haroche. Very high-Q WGM resonances observed on fused silica microspheres. *Europhysics Letters*, 23:327, 1992.

[39] N. Dubreuil. *Excitation par fibre optique et cartographie en champ proche des modes de galerie de microsphères de silice.* Université de Rennes I, 1997.

[40] V. Sandoghdar, F. Treussart, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J. M. Raimond, and S. Haroche. Very low threshold whispering-gallery-mode microsphere laser. *Physical Review A*, 54(3):R1777–R1780, Sep 1996.

[41] F. Treussart. *Étude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions néodyme.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1997.

[42] W. V. Klitzing, E. Jahier, R. Long, F. Lissillour, V. Lefèvre-Seguin, J. Hare, J. M. Raimond, and S. Haroche. Very low threshold lasing in Er^{3+} doped ZBLAN microsphere. *Electronics Letters*, 35(20):1745, 1999.

[43] M. L. Gorodetsky, A. D. Pryamikov, and V. S. Ilchenko. Rayleigh scattering in high-Q microspheres. *Journal of Optical Society of America B*, 17(6):1051–1057, 2000.

[44] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, V. S. Ilchenko, and L. Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Optics Express*, 15(11):6768–6773, 2007.

[45] A. Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 9:919– 933, 1973.

[46] A. Yariv. Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides. *Electronics Letters*, 36:321–322, 2000.

[47] C. Arnaud. *Étude de fonctions actives et/ou passives à base de micro-résonateurs à modes de galerie*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2004.

[48] L. Ghişa. *Couplage de micro-résonateurs, applications aux fonctions optiques de traitement du signal*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2008.

[49] H. A. Haus. *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.

[50] F. Gires and P. Tournois. Interféromètre utilisable pour la compression d'impulsions lumineuses modulées en fréquence. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258:6112–6115, 1964.

[51] N. Uehara and K. Ueda. Accurate measurement of ultralow loss in a high-finesse Fabry-Perot interferometer using the frequency response functions. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 61:9–15, 1995.

[52] B. J. J. Slagmolen, M. B. Gray, K. G. Baigent, and D. E. McClelland. Phase-sensitive reflection technique for characterization of a fabry-perot interferometer. *Applied Optics*, 39(21):3638–3643, 2000.

[53] J. Heebner, V. Wong, A. Schweinsberg, R. Boyd, and D. Jackson. Optical transmission characteristics of fiber ring resonators. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 40(6):726–730, June 2004.

[54] G. S. Pandian and F. Seraji. Optical pulse response of a fibre ring resonator. *IEE Proceedings*, 138:235–239, 1991.

[55] K. Totsuka and M. Tomita. Slow and fast light in a microsphere-optical fiber system. *Journal of Optical Society of America B*, 23(10):2194–2199, 2006.

[56] Y. Dumeige, L. Ghisa, and P. Féron. Integrated all-optical pulse restoration with coupled nonlinear microring resonators. *Optics Letters*, 31(14):2187–2189, 2006.

[57] S. Pereira, P. Chak, and J. E. Sipe. Gap-soliton switching in short microresonator structures. *Journal of Optical Society of America B*, 19(9):2191–2202, 2002.

[58] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki. White-light whispering gallery mode resonators. *Optics Letters*, 31(1):92–94, 2006.

[59] T. J. A. Kippenberg. *Nonlinear optics in ultra-high-Q whispering-gallery optical microcavities*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2004.

[60] Z. K. Ioannidis, P. M. Radmore, and I. P. Giles. Dynamic response of an all-fiber ring resonator. *Optics Letters*, 13(5):422, 1988.

[61] H. Schmitt and H. Zimmer. Fast sweep measurements of relaxation times in superconducting cavities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*, 14:206–207, 1966.

[62] Z. Li, R. G. T. Bennett, and G. E. Stedman. Swept-frequency induced optical cavity ringing. *Optics Communications*, 86:51–57, 1991.

[63] G. Rempe, R. J. Thompson, H. J. Kimble, and R. Lalezari. Measurement of ultralow losses in an optical interferometer. *Optics Letters*, 17(5):363–365, 1992.

[64] K. An, C. Yang, R. R. Dasari, and M. S. Feld. Cavity ring-down technique and its application to the measurement of ultraslow velocities. *Optics Letters*, 20(9):1068–1070, 1995.

[65] J. Poirson, F. Bretenaker, M. Vallet, and A. L. Floch. Analytical and experimental study of ringing effects in a Fabry–Perot cavity. application to the measurement of high finesses. *Journal of Optical Society of America B*, 14(11):2811–2817, 1997.

[66] M. J. Lawrence, B. Willke, M. E. Husman, E. K. Gustafson, and R. L. Byer. Dynamic response of a fabry–perot interferometer. *Journal of Optical Society of America B*, 16(4):523–532, 1999.

[67] L. Matone, M. Barsuglia, F. Bondu, F. Cavalier, H. Heitmann, and N. Man. Finesse and mirror speed measurement for a suspended Fabry-Perot cavity using the ringing effect. *Physics Letters A*, 271(5-6):314 – 318, 2000.

[68] A. Matsko and V. Ilchenko. Optical resonators with whispering-gallery modes-part I: basics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 12:3, 2006.

[69] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, M. Mohageg, and L. Maleki. Ringdown spectroscopy of stimulated raman scattering in a whispering gallery mode resonator. *Optics Letters*, 32(5):497–499, 2007.

[70] Z. Li, G. E. Stedman, and H. R. Bilger. Asymmetric response profile of a scanning Fabry-Perot interferometer. *Optics Communications*, 100:240–246, 1993.

[71] J. M. Choi, R. K. Lee, and A. Yariv. Control of critical coupling in a ring resonator–fiber configuration: application to wavelength-selective switching, modulation, amplification, and oscillation. *Optics Letters*, 26(16):1236–1238, 2001.

[72] L. F. Stokes, M. Chodorow, and H. J. Shaw. All-single-mode fiber resonator. *Optics Letters*, 7(6):288–290, 1982.

[73] B. Crosignani, A. Yariv, and P. D. Porto. Time-dependent analysis of a fiber-optic passive-loop resonator. *Optics Letters*, 11(4):251–253, 1986.

[74] J. Kringlebotn, P. Morkel, C. Pannell, D. Payne, and R. Laming. Amplified fibre delay line with 27 000 recirculations. *Electronics Letters*, 28(2):201–202, 1992.

[75] J. Morville, D. Romanini, M. Chenevier, and A. Kachanov. Effects of laser phase noise on the injection of a high-finesse cavity. *Applied Optics*, 41(33):6980–6990, 2002.

[76] J. E. Heebner and R. W. Boyd. Enhanced all-optical switching by use of a nonlinear fiber ring resonator. *Optics Letters*, 24(12):847–849, 1999.

[77] G. Lenz, B. Eggleton, C. Madsen, and R. Slusher. Optical delay lines based on optical filters. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 37(4):525–532, Apr 2001.

[78] K. Totsuka and M. Tomita. Optical microsphere amplification system. *Optics Letters*, 32(21):3197–3199, 2007.

[79] Y. Dumeige, S. Trebaol, L. Ghişa, T. K. N. Nguyên, H. Tavernier, and P. Féron. Determination of coupling regime of high-Q resonators and optical gain of highly selective amplifiers. *Journal of Optical Society of America B*, 25(12):2073–2080, 2008.

[80] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.

[81] G. M. Stéphan, T. T. Tam, S. Blin, P. Besnard, and M. Têtu. Laser line shape and spectral density of frequency noise. *Physical Review A*, 71(4):043809, Apr 2005.

[82] Z. Shi, R. W. Boyd, R. M. Camacho, P. K. Vudyasetu, and J. C. Howell. Slow-light fourier transform interferometer. *Physical Review Letters*, 99(24):240801, 2007.

[83] Z. Shi, R. W. Boyd, D. J. Gauthier, and C. C. Dudley. Enhancing the spectral sensitivity of interferometers using slow-light media. *Optics Letters*, 32(8):915–917, 2007.

[84] X. Yao and L. Maleki. High frequency optical subcarrier generator. *Electronics Letters*, 30:1525, 1994.

[85] X. Yao and L. Maleki. Optoelectronic oscillator for photonic systems. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 32:1141, 1996.

[86] P.-H. Merrer. *Élaboration de sources hyperfréquences à haute pureté spectrale à base de résonnateurs optiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2009.

[87] E. D. Palik. *Handbook of optical constants of solids II*. Academic Press, 1991.

[88] D. D. Smith, H. Chang, and K. A. Fuller. Whispering-gallery mode splitting in coupled microresonators. *Journal of Optical Society of America B*, 20(9):1967–1974, 2003.

[89] Y. Dumeige, T. K. N. Nguyên, L. Ghişa, S. Trebaol, and P. Féron. Measurement of the dispersion induced by a slow-light system based on coupled active-resonator-induced transparency. *Physical Review A*, 78(1):013818, 2008.

[90] J. Capmany and M. Muriel. A new transfer matrix formalism for the analysis of fiber ringresonators: compound coupled structures for fdma demultiplexing. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 8:1904–1919, 1990.

[91] J. Poon, J. Scheuer, S. Mookherjea, G. Paloczi, Y. Huang, and A. Yariv. Matrix analysis of microring coupled-resonator optical waveguides. *Optics Express*, 12(1):90, 2004.

[92] D. D. Smith, H. Chang, K. A. Fuller, A. T. Rosenberger, and R. W. Boyd. Coupled-resonator-induced transparency. *Physical Review A*, 69(6):063804, Jun 2004.

[93] D. D. Smith, N. Lepeshkin, A. Schweinsberg, G. Gehring, R. Boyd, Q.-H. Park, H. Chang, and D. Jackson. Coupled-resonator-induced transparency in a fiber system. *Optics Communications*, 264:163–168, 2006.

[94] D. D. Smith and H. Chang. Coherence phenomena in coupled optical resonators. *Journal of Modern Optics*, 51(16):2503 – 2513, 2004.

[95] A. Naweed, G. Farca, S. I. Shopova, and A. T. Rosenberger. Induced transparency and absorption in coupled whispering-gallery microresonators. *Physical Review A*, 71(4):043804, 2005.

[96] J. B. Khurgin. Optical buffers based on slow light in electromagnetically induced transparent media and coupled resonator structures: comparative analysis. *Journal of Optical Society of America B*, 22(5):1062–1074, 2005.

[97] A. Melloni, F. Morichetti, and M. Martinelli. Linear and nonlinear pulse propagation in coupled resonator slow-wave optical structures. *Optical and Quantum Electronics*, 35:365–379, 2003.

[98] J. K. Poon, L. Zhu, G. A. DeRose, and A. Yariv. Transmission and group delay of microring coupled-resonator optical waveguides. *Optics Letters*, 31(4):456–458, 2006.

[99] A. Melloni and M. Martinelli. Synthesis of direct-coupled-resonators bandpass filters for wdm systems. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 20(2):296, 2002.

[100] Y. Dumeige. Time-domain analysis of resonator array buffers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 21:435–437, 2009.

[101] L. Y. Mario and M. K. Chin. Optical buffer with higher delay-bandwidth product in a two-ring system. *Optics Express*, 16(3):1796–1807, 2008.

[102] M. Xiao, Y. Li, S.-z. Jin, and J. Gea-Banacloche. Measurement of dispersive properties of electromagnetically induced transparency in rubidium atoms. *Physical Review Letters*, 74(5):666–669, Jan 1995.

[103] R. Tripathi, G. Pati, M. Messall, K. Salit, and M. Shahriar. Experimental constraints of using slow-light in sodium vapor for light-drag enhanced relative rotation sensing. *Optics Communications*, 266(2):604 – 608, 2006.

[104] M. Tomita, M. Okishio, T. Matsumoto, and K. Totsuka. Observation of normal and anomalous dispersions in a microsphere taper fiber system. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78(3):035001, 2009.

[105] A. Savitzky and G. M.J.E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, 36:1627–1639, 1964.

[106] M. Digonnet. *Rare earth doped fiber lasers and amplifiers*. Dekker, Marcel, inc., 1993.

[107] L. Maleki, A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, and V. S. Ilchenko. Tunable delay line with interacting whispering-gallery-mode resonators. *Optics Letters*, 29(6):626–628, 2004.

[108] D. Strekalov, D. Aveline, N. Yu, R. Thompson, A. B. Matsko, and L. Maleki. Stabilizing an optoelectronic microwave oscillator with photonic filters. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 21(12):3052, 2003.

[109] S. Poinsot, H. Porte, J.-P. Goedgebuer, W. T. Rhodes, and B. Boussert. Continuous radio-frequency tuning of an optoelectronic oscillator with dispersive feedback. *Optics Letters*, 27(15):1300–1302, 2002.

[110] V. Van. Circuit-based method for synthesizing serially coupled microring filters. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 24:2912–2919, 2006.

[111] Q. Xu, P. Dong, and M. Lipson. Breaking the delay-bandwidth limit in a photonic structure. *Nature Physics*, 3:406–410, 2007.

[112] M. F. Yanik and S. Fan. Stopping light all optically. *Physical Review Letters*, 92(8):083901, Feb 2004.

[113] M. F. Yanik and S. Fan. Stopping and storing light coherently. *Physical Review A*, 71(1):013803, Jan 2005.

[114] Y. Dumeige. Stopping and manipulating light using a short array of active microresonators. *Europhysics Letters*, 86(1):14003, 2009.

[115] G. Müller, M. Müller, A. Wicht, R.-H. Rinkleff, and K. Danzmann. Optical resonator with steep internal dispersion. *Physical Review A*, 56(3):2385–2389, Sep 1997.

[116] M. D. Lukin, M. Fleischhauer, M. O. Scully, and V. L. Velichansky. Intracavity Electromagnetically Induced Transparency. *Optics Letters*, 23(4):295–297, 1998.

[117] H. Wang, D. J. Goorskey, W. H. Burkett, and M. Xiao. Cavity-linewidth narrowing by means of Electromagnetically Induced Transparency. *Optics Letters*, 25(23):1732–1734, 2000.

[118] I. Golub. Distributed exponential enhancement of phase sensitivity and intensity by coupled resonant cavities. *Optics Letters*, 31(4):507–509, 2006.

[119] L. Y. M. Tobing, D. C. S. Lim, P. Dumon, R. Baets, and M.-K. Chin. Finesse enhancement in silicon-on-insulator two-ring resonator system. *Applied Physics Letters*, 92(10):101122, 2008.

[120] W. Yang, A. Joshi, and M. Xiao. Enhancement of the cavity ringdown effect based on Electromagnetically Induced Transparency. *Optics Letters*, 29(18):2133–2135, 2004.

[121] C. Peng, Z. Li, and A. Xu. Optical gyroscope based on a coupled resonator with the all-optical analogous property of electromagnetically induced transparency. *Optics Express*, 15(7):3864–3875, 2007.

[122] C. Peng, Z. Li, and A. Xu. Rotation sensing based on a slow-light resonating structure with high group dispersion. *Applied Optics*, 46(19):4125–4131, 2007.

[123] Y. Zhang, N. Wang, H. Tian, H. Wang, W. Qiu, J. Wang, and P. Yuan. A high sensitivity optical gyroscope based on slow light in coupled-resonator-induced transparency. *Physics Letters A*, 372:5848–5852, 2008.

[124] P. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2nd edition, 1980.

[125] F. Goos and H. Hänchen. Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Ann. Phys.*, 1:333, 1947.

[126] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics,*. John Wiley & sons, INC, 3rd edition, 1998.

[127] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light 6nd edition.* 1980.

[128] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie des champs,* volume 2 de *Cours de physique théorique.* Mir, Moscou, quatrième edition, 1969.

[129] H. Lai, P. Leung, K. Young, P. Barber, and S. Hill. Time-independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open systems with application to resonances in microdroplets. *Physical Review A*, 41(9):5187, 1990.

[130] R. K. Chang and A. J. Campillo. *Optical processes in microcavities.* 1996.

[131] J. C. Swindal, D. H. Leach, R. K. Chang, and K. Young. Precession of morphology-dependent resonances in nonspherical droplets. *Optics Letters*, 18(3):191–193, 1993.

[132] J. C. Knight, N. Dubreuil, V. Sandoghdar, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J. M. Raimond, and S. Haroche. Mapping whispering-gallery modes in microspheres with a near-field probe. *Optics Letters*, 20(14):1515–1517, 1995.

[133] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Geometrical theory of whispering-gallery modes. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 12:33, 2006.

[134] M. Gorodetsky and A. Fomin. Eigenfrequencies and Q factor in the geometrical theory of whispering-gallery modes. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 37:167, 2007.

[135] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Whispering gallery modes in axisymmetric resonators. *Proceedings of SPIE*, 7009:70090I–1, 2008.

[136] J. Stratton. *Théorie de l'électromagnetisme.* Dunod, Paris, 1961.

[137] K. Budden. *The wave-guide mode theory of wave propagation.* Academic Press, 1961.

[138] W. W. Hansen. A new type of expansion in radiation problems. *Physical Review*, 47(2):139, 1935.

[139] W. W. Hansen. Directional characteristics of any antenna over a plane earth. *Physics*, 7:460, 1936.

[140] W. W. Hansen. Transformations useful in certain antenna calculations. *Journal of Applied Physics*, 8:282, 1937.

[141] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables.* Courier Dover Publications, 1965.

[142] H. M. Nussenzveig. *Diffraction effects in semiclassical scattering.* Cambridge University Press, 1992.

[143] C. Lam, P. Leung, and K. Young. Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in mie scattering. *Journal of Optical Society of America B*, 9:1585, 1992.

[144] I. Grudinin, V. Ilchenko, and L. Maleki. Ultrahigh optical Q factors of crystalline resonators in the linear regime. *Physical Review A*, 74(6):63806, 2006.

[145] M. L. Gorodetsky, A. A. Savchenkov, and V. S. Ilchenko. Ultimate Q of optical microsphere resonators. *Optics Letters*, 21(7):453, 1996.

[146] A. Chiasera, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, Y. Jestin, G. N. Conti, S. Pelli, S. Soria, and G. Righini. Spherical whispering-gallery-mode microresonators. *Laser & Photonics Reviews*, page 1, 2009.

[147] F. Tosco. *Fibre Optic Communication Handbook*. TAB Books, New York, 1990.

[148] M. E. Lines. Scattering losses in optic fiber materials. i. a new parametrization. ii numerical estimates. 55:4052, 1984.

[149] P. K. Tien. Light waves in thin films and integrated optics. *Applied Optics*, 10(11):2395–2413, 1971.

[150] D. Vernooy, V. Ilchenko, H. Mabuchi, E. Streed, and H. Kimble. High-Q measurements of fused-silica microspheres in the near infrared. *Optics Letters*, 23(3):247, 1998.

[151] M. Borselli, T. J. Johnson, and O. Painter. Beyond the rayleigh scattering limit in high-Q silicon microdisks: theory and experiment. *Optics Express*, 13:1515–+, March 2005.

[152] A. Matsko. *Practical Applications of Microresonators in Optics and Photonics*. CRC Pres, 2009.

[153] F. Lissillour. *L'effet laser dans des microsphères de verre fluoré dopé Neodyme et Erbium: étude expérimentale de differents couplages et de largeur de raie*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2000.

[154] B. E. Little, J.-P. Laine, D. R. Lim, H. A. Haus, L. C. Kimerling, and S. T. Chu. Pedestal antiresonant reflecting waveguides for robust coupling to microsphere resonators and for microphotonic circuits. *Optics Letters*, 25(1):73–75, 2000.

[155] V. B. Braginsky and V. S. Ilchenko. Properties of optical dielectric microresonators. *Soviet Physics Doklady*, 32:306, 1987.

[156] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. High-Q optical whispering-gallery microresonators: precession approach for spherical mode analysis and emission patterns with prism couplers. *Optics Communications*, 113:133, 1994.

[157] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes. *Journal of Optical Society of America B*, 16(1):147–154, 1999.

[158] S. Schiller and R. L. Byer. High-resolution spectroscopy of whispering gallery modes in large dielectric spheres. *Optics Letters*, 16(15):1138–1140, 1991.

[159] F. Treussart, V. Ilchenko, J.-F. Roch, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Evidence for intrinsic kerr bistability of high-Q microsphere resonators in superfluid helium. *The European Physical Journal D*, 1:235–238, 1998.

[160] V. S. Ilchenko, X. S. Yao, and L. Maleki. Pigtailing the high-Q microsphere cavity: a simple fiber coupler for optical whispering-gallery modes. *Optics Letters*, 24(11):723–725, 1999.

[161] N. Dubreuil, J. C. Knight, D. K. Leventhal, V. Sandoghdar, J. Hare, and V. Lefèvre. Eroded monomode optical fiber for whispering-gallery mode excitation in fused-silica microspheres. *Optics Letters*, 20(8):813–815, 1995.

[162] G. Griffel, S. Arnold, D. Taskent, A. Serpengüzel, J. Connolly, and N. Morris. Morphology-dependent resonances of a microsphere-optical fiber system. *Optics Letters*, 21(10):695–697, 1996.

[163] B. E. Little, J.-P. Laine, and H. A. Haus. Analytic theory of coupling from tapered fibers and half-blocks into microsphere resonators. *IEEE Journal of Lightwave Technology*, 17(4):704, 1999.

[164] J.-P. Laine, B. Little, D. Lim, H. Tapalian, L. Kimerling, and H. Haus. Microsphere resonator mode characterization by pedestalanti-resonant reflecting waveguide coupler. *IEEE Photonics Technology Letters*, 12:1004, 2000.

[165] J. C. Knight, G. Cheung, F. Jacques, and T. A. Birks. Phase-matched excitation of whispering-gallery-mode resonances by a fiber taper. *Optics Letters*, 22(15):1129–1131, 1997.

[166] M. Cai, O. Painter, and K. J. Vahala. Observation of critical coupling in a fiber taper to a silica-microsphere whispering-gallery mode system. *Physical Review Letters*, 85(1):74, Jul 2000.

[167] F. Lissillour, D. Messager, G. Stéphan, and P. Féron. Whispering-gallery-mode laser at 1.56 μm excited by a fiber taper. *Optics Letters*, 26(14):1051–1053, 2001.

[168] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, O. J. Painter, and K. J. Vahala. Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, 91(4):043902, Jul 2003.

[169] M. Borselli. *High-Q Microresonators as Lasing Elements for Silicon Photonics*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2006.

[170] F. Orucevic, V. Lefèvre-Seguin, and J. Hare. Transmittance and near-field characterization of sub-wavelength tapered optical fibers. *Optics Express*, 15(21):13624–13629, 2007.

[171] M. Cai and K. Vahala. Highly efficient hybrid fiber taper coupled microsphere laser. *Optics Letters*, 26(12):884–886, 2001.

[172] L. Xiao, S. Trebaol, Y. Dumeige, Z. Cai, M. Mortier, and P. Feron. Miniaturized optical microwave source using a dual-wavelength whispering gallery mode laser. *IEEE Photonics Technology Letters*, 22:559 – 561, 2010.

[173] S. Trebaol, Y. Dumeige, and P. Féron. Ringing phenomenon in coupled cavities: Application to modal coupling in whispering-gallery-mode resonators. *Physical Review A*, 81(4):043828, Apr 2010.

[174] B. E. Little and S. T. Chu. Estimating surface-roughness loss and output coupling in microdisk resonators. *Optics Letters*, 21(17):1390–1392, 1996.

[175] B. E. Little, J.-P. Laine, and S. T. Chu. Surface-roughness-induced contradirectional coupling in ring and disk resonators. *Optics Letters*, 22(1):4–6, 1997.

[176] D. S. Weiss, V. Sandoghdar, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Splitting of high-Q mie modes induced by light backscattering in silica microspheres. *Optics Letters*, 20(18):1835–1837, 1995.

[177] V. Ilchenko and M. Gorodetsky. Thermal nonlinear effects in optical whispering gallery microresonators. *Laser Physics 2*, 2:1004, 1992.

[178] T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala. Modal coupling in traveling-wave resonators. *Optics Letters*, 27(19):1669–1671, 2002.

[179] A. Mazzei, S. Götzinger, L. de S. Menezes, G. Zumofen, O. Benson, and V. Sandoghdar. Controlled coupling of counterpropagating whispering-gallery modes by a single Rayleigh scatterer: A classical problem in a quantum optical light. *Physical Review Letters*, 99(17):173603, 2007.

[180] X.-W. Wu, C.-L. Zou, J.-M. Cui, Y. Yang, Z.-F. Han, and G.-C. Guo. Modal coupling strength in a fibre taper coupled silica microsphere. *Journal of Physics B*, 42(8):085401–+, April 2009.

[181] M. Borselli, K. Srinivasan, P. E. Barclay, and O. Painter. Rayleigh scattering, mode coupling, and optical loss in silicon microdisks. *Applied Physics Letters*, 85(17):3693–3695, 2004.

[182] K. Srinivasan and O. Painter. Mode coupling and cavity–quantum-dot interactions in a fiber-coupled microdisk cavity. *Physical Review A*, 75(2):023814, 2007.

[183] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala. Ultra-high-q toroid microcavity on a chip. *Nature*, 421:925–928, 2003.

[184] T. J. Kippenberg, A. L. Tchebotareva, J. Kalkman, A. Polman, and K. J. Vahala. Purcell-factor-enhanced scattering from si nanocrystals in an optical microcavity. *Physical Review Letters*, 103(2):027406, 2009.

[185] J. Zhu, S. K. Ozdemir, Y.-F. Xiao, L. Li, L. He, D.-R. Chen, and L. Yang. On-chip single nanoparticle detection and sizing by mode splitting in an ultrahigh-Q microresonator. *Nature Photonics*, 4:46, 2010.

[186] L. Rayleigh. On the light from the sky, its polarization and colour. *Phil. Mag*, 41:107–120, 1871.

[187] V. V. Vassiliev, V. L. Velichansky, V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, L. Hollberg, and A. V. Yarovitsky. Narrow-line-width diode laser with a high-Q microsphere resonator. *Optics Communications*, 158:305–312, 1998.

[188] K. Kieu and M. Mansuripur. Active Q switching of a fiber laser with a microsphere resonator. *Optics Letters*, 31(24):3568–3570, 2006.

[189] K. Kieu and M. Mansuripur. Fiber laser using a microsphere resonator as a feedback element. *Optics Letters*, 32(3):244, 2007.

[190] C. Dong, C. Zou, J. Cui, Y. Yang, Z. Han, and G. Guo. Ringing phenomenon in silica microspheres. *Chin. Opt. Lett.*, 7(4):299–301, 2009.

[191] C. Schmidt, A. Chipouline, T. Pertsch, A. Tünnermann, O. Egorov, F. Lederer, and L. Deych. Nonlinear thermal effects in optical microspheres at different wavelength sweeping speeds. *Optics Express*, 16(9):6285–6301, 2008.

[192] A. A. Savchenkov, V. S. Ilchenko, A. B. Matsko, and L. Maleki. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities. *Physical Review A*, 70(5):051804, Nov 2004.

[193] M. Mortier, P. Goldner, P. Féron, G. M. Stephan, H. Xu, and Z. Cai. New fluoride glasses for laser applications. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 326-327:505–509, 2003.

VU :

Le Directeur de Thèse

VU :

Le Responsable de l'École Doctorale

VU pour autorisation de soutenance

Rennes, le

Le Président de l'Université de Rennes 1

Bertrand FORTIN

VU après soutenance pour autorisation de publication :

Le Président du Jury,

Abstract

In this thesis, we present a theoretical and experimental study on the dispersive properties of photonic structures based on microresonators.
First, we develop a cavity ringdown based method who fully describe the linear properties of microcavities such as coupling regime and group delay. This homodyne method is successfully applied on a cristalline microdisk (MgF_2) and passive and active microspherical resonators to characterize various types of phenomena. In the case of doped microspherical whispering gallery modes resonators, we demonstrate selective amplification filter by combining high spectral selectivity and below threhold laser amplification (gain up to 20 dB at 1.55 μm). In passive high-Q microspheres with high finesse ($\mathcal{F} > 10^5$), we could observe a lift of degeneracy between counter propagating modes. This effect originates from Rayleigh scattering that couples these two modes. This phenomenom is observed in the spectral domain by a splitting of the resonance.
In a second step, we study the dispersive properties of coupled-resonator architectures. The coupling of two cavities leads to a splitting of the resonance and a notable decrease in the absorption around the resonance. We experimentally show that it is possible to circumvent limitation imposed by the intrinsic losses of passive resonators using active resonators. This effect can be seen as the classical counter part of Electromagnetically Induced Transparency (EIT). Moreover, we demonstrate that Coupled-*Active*-Resonator-Induced Transparency is a promising alternative in optical delay line since we can dynamically adjust the delay from a few ns to tens of ns ($\approx$ 90 ns) without any change in the transparency of the system. Furthermore, we propose and experimentally demonstrated tunable cavity-linewidth narrowing based on the strong dispersion induced by the coupling of two resonators. In the case of three resonators, we propose a coupling scheme allowing the Q-factor of a critically coupled resonator to be increased and actively modulated by using two additional coupled resonators. We experimentally validate the principle by means of a model system consisting of Er^{3+}-doped fiber coupled resonators. We successfully show a growth of the Q-factor from 4×10^7 up to $2{,}5\times10^8$. These experimental results demonstrate the means of Q-factor tailoring using active artificial photonic media.

Keywords

Microresonators
Induced transparency
Modal coupling
Coupled resonators
Slow light
Induced dispersion
Selective amplification
Whispering gallery modes

Résumé

Ce travail porte sur l'étude expérimentale et théorique des propriétés dispersives de structures photoniques à base de micro-résonateurs. La caractérisation de la fonction de transfert de résonateurs de facteurs de surtension très élevés ($> 10^8$) est difficilement réalisée à partir des méthodes expérimentales conventionnelles en régime stationnaire. Nous proposons une méthode hybride spectrale/temporelle associée à un modèle analytique permettant la mesure du facteur de surtension global et la discrimination, de manière univoque, des facteurs Q_0 intrinsèque (résonateur) et Q_e extrinsèque (coupleur) du dispositif. Par cette simple mesure, nous déterminons le régime de couplage et les propriétés dispersives du système sous test. Cette méthode est appliquée avec succès sur des résonateurs à fibre, des micro-disques MgF_2 et des microsphères passives et actives. Dans les résonateurs microsphériques à modes de galerie (haut facteur de qualité et grande finesse : $\mathcal{F} \approx 10^5$) nous avons notamment étudié leur capacité à réaliser un filtre amplificateur de haute sélectivité (gain supérieur à 20 dB à $1,55$ μm et de largeur spectrale: 115 kHz) ainsi que la levée de dégénérescence entre les modes contra-propagatifs de la cavité. Ce dernier effet, induit par la diffusion Rayleigh, se manifeste par un doublet de résonances dont l'écart en fréquence est une signature de l'efficacité de la rétrodiffusion.

Parallèlement, nous proposons différentes architectures à base de cavités couplées dans le but de contrôler la dispersion dans ces systèmes. Nous avons étudié la transparence induite par couplage de résonateurs dans des structures dites CRIT (équivalent classique de l'EIT) pour la réalisation d'états de lumière lente. Les limites imposées par les pertes intrinsèques des résonateurs peuvent être contournées par l'utilisation de résonateurs actifs. Le paramètre supplémentaire lié au caractère actif des résonateurs offre un potentiel d'application en tant que ligne à retard ajustable tout en conservant une transparence du système d'environ 90% et permet une mise en forme (un contrôle) des différents ordres de dispersion du dispositif. Nous démontrons également l'augmentation du facteur de qualité par la dispersion induite par couplage de résonateurs actifs. Ainsi, dans le cas N = 2, nous utilisons un résonateur pour augmenter artificiellement le chemin optique d'un second jouant le rôle de cavité cible. Expérimentalement, nous avons obtenu une augmentation du facteur de qualité d'un coefficient 23. Dans le cas N = 3, l'insertion d'un CRIT actif dans un résonateur sous couplage critique montre que le facteur Q de ce résonateur peut être augmenté et modulé par le gain dans les résonateurs actifs. Dans le test expérimental effectué sur un système modèle à boucles de fibres optiques dopées Er^{3+}, le facteur Q passe de 4×10^7 à $2,5 \times 10^8$. La démonstration expérimentale de ce principe montre la possibilité d'ingénierie du facteur Q par l'utilisation de structures photoniques artificielles actives.

Mots-clés

Microrésonateurs	Lumière lente
Transparence induite	Dispersion induite
Couplage modal	Amplification sélective
Résonateurs couplés	Modes de galerie