



Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius. I. formule de la densité invariante

Guy Cirier

► To cite this version:

Guy Cirier. Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius. I. formule de la densité invariante. 2010. hal-00522882v2

HAL Id: hal-00522882

<https://hal.science/hal-00522882v2>

Preprint submitted on 16 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Première approche de la densité d'un opérateur de Perron Frobenius. I. formule de la densité invariante

Guy Cirier*

Abstract

First approach of invariant densities of a Perron Frobenius operator. Let $p = p_f$ an invariant density of Perron Frobenius operator defined by $p_f = \sum_v p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|$ where f is a polynomial application of a compact C of $\mathbb{R}^d$ in itself. Under this hypothesis with Laplace transform, the solution is given by the asymptotic distribution of the zeros of $e_f^n(a, y) = \partial^n [e^{ya} - e^{yf(a)}] / \partial a^n$ when $n \rightarrow \infty$ at the fixed point $a=0$ of f . That are the polynomials $y^n - H_n(y)$ with $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n |_{a=0}$. If theses zeros have an asymptotic distribution with a derivable d -dimensional density q , the invariant density is :

$$p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^\ell q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$$

Résumé

Soit la densité invariante $p = p_f$ de l'opérateur de Perron Frobenius défini par $p_f = \sum_v p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|$ où f est une application polynomiale d'un compact C de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même. Sous cette hypothèse et via la transformation de Laplace, la solution est obtenue à partir la distribution asymptotique des zéros réels de $e_f^n(a, y) = \partial^n [e^{ya} - e^{yf(a)}] / \partial a^n$ au point fixe $a=0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc des polynômes $y^n - H_n(y)$ avec $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n |_{a=0}$. Si ces zéros ont une distribution asymptotique de densité dérivable q d -dimensionnelle, la densité invariante sera de la forme sous réserve de convergence :

$$p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^\ell q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$$

Mots clés : Équation de Perron Frobenius, Résolvante de Laplace, Itération logistique et de Julia

Key words: Perron Frobenius equation, Résolvante of Laplace, Julia's and logistical Itérations

Introduction

La plupart des auteurs qui s'intéressent aux chaos présentent l'équation de Perron Frobenius sans la traiter à fond, car il s'agit de résoudre l'équation fonctionnelle $p_f = \sum_v p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|$ [6] peu facile à manipuler. Les mathématiciens passent rapidement, après quelques résultats théoriques, à des méthodes héritées de Poincaré : points homoclines, bifurcations [6]. Pourtant la donnée de la mesure invariante d'un système dynamique, même inconnue, permet de construire l'espace des fonctions de carré intégrable et de disposer alors de la théorie spectrale, comme l'avait remarqué Koopman en 1931 [9]. Des développements importants ont été obtenus depuis quelques dizaines d'années dans le domaine des dynamiques complexes [9] et [2]. Les physiciens, pour leur part, s'orientent davantage vers des résumés d'information du type Lyapounov ou dimension fractale. Toutefois, deux directions importantes émergent : les calculs sur les chaos quantiques [3] et la thermodynamique [7].

* guy.cirier@gmail.com

S'agissant de la résolution proprement dite de l'équation de Perron Frobenius, peu de progrès ont été faits depuis le célèbre résultat de Ulam et Von Neuman [8] dans le cas particulier de la logistique pour le paramètre $\lambda = 4$. Sa généralisation pour un paramètre quelconque a été obtenue récemment par Kawamura [5] à l'aide des C^* algèbres de Kunzt.

Si de nombreux travaux concernent le cas unidimensionnel [7], et en dehors des dynamiques complexes [4] ou de divers exercices sur ordinateur, la théorie reste mince. L'étude faite sur des difféomorphismes ne donne guère de résultats pratiques opérationnels [1].

Cet article est le premier d'une série de quatre qui se propose de prouver, via le théorème de densité énoncé ici, que les solutions de l'équation de Perron Frobenius donnent la géométrie de ce qui se passe. La formule est ici appliquée sur deux exemples : la logistique déjà extrêmement étudiée [6], et l'itération de Julia. Mais cette présentation donne le sens profond de cette théorie qui permet de mieux comprendre les chaos. Il sera suivi de trois articles traitant :

- 1- de l'approximation et de la dégénérescence des hessiennes donnant Les distributions des zéros ;
- 2- des applications qui semblent nombreuses. Certaines EDO ou EDP comme celle de Navier-Stokes ou de Lorenz, peuvent avoir des solutions aléatoires parfaitement définies ;
- 3- de la résonance.

I - Transformation de Laplace de l'équation de Perron Frobenius

1 – Notations, hypothèses, définitions et rappel de résultats connus

Hypothèses et notations sur l'application polynomiale f

H0- Soit f une application polynomiale d'un compact C de $\mathbb{R}^d$ (C^d considéré comme $\mathbb{R}^{2d}$) dans lui-même. De classe C^∞ , elle n'a qu'un nombre fini d'images réciproques et au moins un point fixe $\alpha = 0$ bien isolé dans C : $f(0) = 0$.

On note $Fix(f)$ cet ensemble de points fixes. Il peut y avoir des cycles d'ordre n pour l'itération $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$: les points de ces cycles $f^{(n)}(\alpha) = \alpha$ avec $f^{(k)}(\alpha) = \alpha_k \neq \alpha$ pour $k = 1, \dots, n-1$ peuvent d'ailleurs être considérés comme points fixes de $f^{(n)}$. On note $Fix(f^{(n)})$ cet ensemble de points et l'on pose $F \circ Fix(f) = \bigcup_{n \geq 1} Fix(f^{(n)})$.

Hypothèses et notations des valeurs propres de la partie linéaire de f au point fixe 0

Les valeurs propres λ de la partie linéaire de f au point fixe 0 jouent un rôle essentiel pour établir la convergence vers des invariants : points fixes, cycles ou vers des supports de distributions invariantes. Les cas de valeurs propres complexes ou ceux de leur multiplicité ne présentent pas de grandes difficultés théoriques, mais nous écartent du sujet principal, et ne seront donc pas étudiés ici. Il y a résonance lorsqu'il existe des entiers $n \in \mathbb{N}^d$ tels que $\lambda^n = 1$.

2- Définitions de l'opérateur de Perron Frobenius et de sa transformation de Laplace (rappels)

Soit p une densité de probabilité rapport la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ et f une application mesurable arbitraires. Sa transformée par l'opérateur de Perron Frobenius est $p_f = \sum_v p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|$.

Définition 1 (rappel)

Une densité p est dite invariante pour l'opérateur de Perron Frobenius si $p = p_f = \sum_v p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|$

Si f mesurable applique un compact dans lui-même, cette densité invariante existe [6]. L'équation fonctionnelle a alors une solution, mais se traite mal directement sous cette forme. Pour l'étudier, on préfère avoir recours à la transformation de Laplace plutôt qu'à celle de Fourier pour des raisons de notation malgré les avantages de généralité que présente cette dernière en calcul des probabilités.

La transformée de Laplace d'une densité de probabilité p à support contenu dans un compact C , s'écrit $\phi(y) = \int e^{ys} p(s) ds$ où l'on note à gauche le transposé d'un vecteur dans tout produit scalaire. Soit $\phi_f(y)$ la transformée de Laplace de p_f définie pour f polynomiale et p arbitraires. Son existence est assurée par la compacité de C qui rend l'ensemble $\Omega = \{y \mid \int p(s) e^{yf(s)} ds < \infty \cap \int e^{ys} p(s) ds < \infty\}$ non vide.

Lemme 1

Sous H_0 , $\phi_f(y)$ associée à l'itération f et à la densité p arbitraires est : $\phi_f(y) = \int p(s) e^{yf(s)} ds$

Par définition de p_f , $\phi_f(y)$ s'écrit : $\phi_f(y) = \int_{\Gamma} e^{yu} p_f(u) du = \sum_v \int_{\Gamma_v = f_v^{-1}(R^d)} e^{yu} p \circ f_v^{-1} |f_v^{-1}|'(u) du$ avec $\Gamma_v = f_v^{-1}(R^d)$ et $\Gamma = \bigcup_v \Gamma_v$. Le changement de variables $u = f(s)$ et le recollement des images réciproques donnent la formule. D'où, sous H_0 :

Définition 2

L'équation de Perron Frobenius se traduit par l'équation résolvante $\theta_f(\phi) = \phi_f(y) - \phi(y) = 0$

De plus, puisque le support de la distribution est contenu dans le compact C , $\phi(y)$ peut être représentée par une série analytique dans un poly-disque de convergence non vide. Donc $\phi(y) = \sum_n b_n y^n$ a un sens pour toute distribution arbitraire de densité p sur C . Encore faut-il traduire l'incidence de l'itération f sur cette série pour obtenir $\phi_f(y)$.

3- Hypothèses sur la répartition asymptotique des zéros de $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)} \Big|_{a=0}$

On va montrer ici que la densité invariante p dépend de la distribution asymptotique des zéros réels y_n de $e_f^n(y) = y^n - H_n(y)$ où $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)} \Big|_{a=0}$ au point fixe 0 quand $n \rightarrow \infty$. Selon un jeu de bascule entre y^n et $H_n(y)$ dépendant de λ^n coefficient du terme de plus haut degré de y dans $H_n(y)$, il faudra considérer asymptotiquement deux solutions : soit le point fixe 0 pour $y=0$, soit la distribution asymptotique des zéros de $H_n(y)$. Ceci étant, on doit formuler comme hypothèses des résultats de l'article suivant (on donnera quelques justifications au chapitre IV):

H1- Les indices n de dérivations de $H_n(y)$ tendent vers l'infini en respectant des directions asymptotiques $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n_\ell / \sum_\ell n_\ell$. ζ est déterminée par la manière dont on itère les composantes de f .

Sous H_1 , les hypothèses qui suivent présentent, en les simplifiant, les résultats du second article concernant les zéros réels y_n de $H_n(y)$:

H2- Après pondération de y par n : $s_\ell = y_\ell / n_\ell$ $\ell = 1, 2, \dots, d$, noté $y(a = y/n)$, les ensembles $S_n = \{s_n = y_n / n_\ell \in R^{+d} \mid H_n(y_n) = 0\}$ ont une adhérence S compacte et mesurable quand $n \rightarrow \infty$.

H3- il existe une densité $q(s)$ par rapport à la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle de la répartition limite des $s_n \in S_n$ quand $n \rightarrow \infty$: dans un élément de volume $dy = n^d ds$ de R^{+d} on a asymptotiquement $n^d q(s) ds$ zéros y_n .

II – Résultat principal : théorème de la densité

Théorème

I- Sous H_0 et sans résonance, la densité invariante de Perron Frobenius p par rapport à la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle devra être recherchée parmi les points réels y_n qui annulent l'écart $e_f^n(y) = y^n - H_n(y)$ au point fixe 0 quand $n \rightarrow \infty$.

2- Sous H_0 , si $\varphi(y)$ est solution de l'équation $\theta_f(\varphi) = 0$ pour la densité $q(a)$ et $p(a)$ la densité invariante de Perron-Frobenius, alors $p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^d q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$

3- Sous H_0 et H_2 , chaque itération de la coordonnée f_ℓ de f agit asymptotiquement comme une dérivation $\partial / \partial a_\ell$ sur l'écart $e_f^n(a, y)$ quand $n \rightarrow \infty$. La fréquence des indices de dérivation n_ℓ de n $z_\ell = n_\ell / \sum n_\ell$ doit alors tendre vers une direction asymptotique $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} z_\ell$ correspondant à la fréquence $(z_\ell) = (n_\ell) / \sum (n_\ell)$ des itérations de la coordonnée f_ℓ . Le cas traditionnel est celui où chaque coordonnée f_ℓ est itérée un même nombre de fois : $\zeta_\ell = 1/d$,

4- Sous H_0 , H_1 et H_2 , Sous réserve de non résonance, si $\prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} < 1$ $p(a) = \delta$ Dirac en 0.

si $\prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} > 1$ alors, le processus peut tendre vers tout autre point attractif de $F \circ \text{Fix}(f)$. Sinon, Sous H_0 , H_1 , H_2 et H_3 il existe une solution asymptotique $q(a)$ répartition asymptotique des zéros y_n / n , et sous réserve de convergence, $p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^d q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$

Le cas général est celui de l'itération traditionnelle où $\zeta_\ell = 1/d$, la condition devient $\prod_\ell |\lambda_\ell| > 1$.

Le point 1 du théorème résulte du lemme 2, le point 2 résulte de la proposition 2, le point 3 résulte de la proposition 4, le point 4 résulte de la proposition 5.

Mais avant tout, il convient de trouver l'expression analytique de la transformée de Laplace de $\phi_f(y)$.

III- Effet d'un changement d'origine sur l'expression analytique de $\phi_f(y)$

1- Notations

Observons les effets d'un changement d'origine défini par un vecteur $a : s = u + a$: l'itération

$$\begin{array}{llll} f & \text{devient} & f_a(u) = f(u + a) - a, & \\ p(s) & \text{devient} & p(u) = p(s - a), & p_f(s) \text{ devient } p_f(s - a), \\ \phi(y) & \text{devient} & \phi_a(y) = \phi(y, a) = \phi(y) e^{ya}, & \phi_f(y) \text{ devient } \phi_f(y, a), \\ \theta_f(\phi) & \text{devient} & \theta_f(\phi_a) = \phi_f(y, a) - \phi(y, a). & \end{array}$$

Par analogie aux polynômes d'Hermite, on choisit la notation : $H_n(y, a) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)}$ et au point fixe $a = 0$, $H_n(y) = H_n(y, 0) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)} \big|_{a=0}$.

Proposition 1

- Soit $\phi(y) = \sum_n b_n y^n$ la transformée de Laplace d'une distribution arbitraire p . Sous H_0 , l'itération f transforme alors chaque terme $y^n e^{ya}$ de $\phi_a(y) = \phi(y) e^{ya}$ en $H_n(y, a) e^{yf(a)} = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n$.

La transformée de Laplace de l'opérateur de Perron Frobenius associée à f polynomiale et à p est :

$$\boxed{\phi_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n}$$

- La densité invariante a pour équation résolvante : $\theta_f(\phi) = \sum_n b_n (y^n - H_n(y)) = 0$ et, quelque soit $a \in C$, $\theta_f(\phi_a) = \sum_n b_n \partial^n (e^{xa} - e^{yf(a)}) / \partial a^n = 0$. Si $\alpha \in \text{Fix}(f)$, $\phi(y) = \sum_n b_n H_n(y, \alpha)$.

Comme $\phi_f(y, a) = \int p(s - a) e^{yf(s)} ds$ et que la densité $p(s - a)$ peut être considérée comme

l'inverse de Laplace de $\phi(x, a)$, on a : $\phi_f(y, a) = \int \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(x, a) e^{yf(s) - xs} dx ds$

Or, l'expression $\phi(x, a) = \phi(x) e^{xa} = \sum_n b_n \partial^n e^{xa} / \partial a^n$ implique :

$$\phi_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n \left(\int \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{x(a-s)} dx \right\} e^{yf(s)} ds \right) / \partial a^n$$

On reconnaît entre les crochets du milieu la distribution de Dirac $\delta(a-s)$.

$$\phi_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n \left(\int \delta(a-s) e^{yf(s)} ds \right) / \partial a^n = \sum_n b_n \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n .$$

D'où, l'équation résolvante : $\theta_f(\phi_a) = \phi(y, a) - \phi_f(y, a) = \sum_n b_n \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n = 0$ qui s'écrit en $a = 0$, $\theta_f(\phi) = \sum_n b_n (y^n - H_n(y)) = 0$. On observe également que $\theta_f(\phi_a) = 0$ implique $\phi(y) = (\sum_n b_n H_n(y, a)) e^{y(f(a)-a)}$. On a le dernier résultat si $a = \alpha \in \text{Fix}(f)$.

Corollaire 1

Les polynômes $H_n(y, a)$ vérifient les équations de récurrence matricielles :

- $H_{n+1}(y, a) = \partial H_n(y, a) / \partial a + H_n(y, a) y \partial f(a) / \partial a$
- $\partial H_n(y, a) / \partial y = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k H_{n-k}(y, a) \partial^k f(a) / \partial a^k$ (en nombre fini de termes car f est de degré fini).
- En $a = 0$, le terme de plus haut degré de $H_n(y)$ est $(\lambda y)^n$ et le polynôme $\lambda^{-n} H_n(y)$ peut donc être considéré comme « unitaire » en y .

La première relation de récurrence découle de la définition des polynômes $H_n(y, a)$.

La dérivée $\partial H_n(y, a) / \partial y$ par rapport à y s'obtient en appliquant la formule de Leibniz dimensionnelle à $f(a) e^{yf(a)}$ dans : $\partial \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n \partial y = \partial^n \partial e^{yf(a)} / \partial y \partial a^n = \partial^n f(a) e^{yf(a)} / \partial a^n$.

2 - Exemple de calcul pour la logistique dans $\mathbf{R}$: $f(a) = \lambda(a - a^2)$

Au voisinage du point fixe 0, l'image réciproque de $f(a)$ a 2 branches $f_{\pm}^{-1}(t) = 1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - t/\lambda}$. L'intégration donne pour toute distribution arbitraire ayant une

transformée de Laplace $\phi(y)$: $\phi_f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \phi(\alpha y + it\sqrt{2\alpha y}) dt$. En outre :

$H_n(y) = \lim_{a \rightarrow 0} H_n(a, y) e^{yf(a)} = H_n(\sqrt{\lambda y/2}) (\sqrt{2\lambda y})^n$ où H_n (lu « H droit » pour le distinguer) est le polynôme d'Hermite d'ordre n défini par les probabilistes : $H_n(x) e^{-x^2/2} = d^n e^{-x^2/2} / dx^n$.

3- Relation entre la solution de la résolvante et celle de la densité invariante

Soient $\varphi(y)$ la solution de l'équation $\theta(\varphi) = 0$ de densité $q(s)$, et $\phi(y)$ celle de l'équation de Perron-Frobenius de densité $p(s)$. Allégeons les notations en posant : $\partial^1 / \partial y^1 = \partial^d / \partial y_1 \dots \partial y_\ell \dots \partial y_d$, $\partial^1 \partial^1 / \partial y^1 \partial a^1 = \partial^2 / \partial y^1 \partial a^1$, $y^1 = y_1 \dots y_\ell \dots y_d$ et $s^1 = s_1 \dots s_\ell \dots s_d$.

Proposition 2

Sous $H0$, $\phi(y, a) = \partial^2 \varphi(y, a) / \partial y^1 \partial a^1 = \partial^1 (y^1 \varphi(y, a)) / \partial y^1$, donc, $p(s) = (-s)^1 \partial^1 q(s) / \partial s^1$

Supposons connue une solution $\varphi(y)$ de $\theta_f(\varphi) = 0$; les b_n sont donc fixés et l'on peut construire $\varphi_a = \varphi(y, a)$ et $\theta_f(\varphi_a) = 0$. Mais, pour que φ_a soit solution de Perron Frobenius, $\theta_f(\varphi_a) = 0$ devra être une identité quelque soient y et a , donc toutes les dérivées devront être nulles. In fine : $\theta(\partial^2 \varphi_a / \partial y^1 \partial a^1) = 0$ et $\theta(\partial^2 \varphi_a / \partial y^1 \partial a^1) = \partial^2 \theta(\varphi_a) / \partial y^1 \partial a^1 = 0$. Donc $\phi(y, a) = \partial^2 \varphi_a / \partial y^1 \partial a^1$.

Comme $\varphi(y, a) = e^{ya} \int q(s) e^{ys} ds$, on a $\phi(y, a) = \partial^2 (e^{ya} \varphi(y)) / \partial y^1 \partial a^1 = \partial^1 (y^1 \varphi(y, a)) / \partial y^1$.

IV- Estimation de la solution $q(s)$

1- Définitions et justification des hypothèses

Définition 3

On appelle écart résolvant la quantité $e_f^n(y, a) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n$ calculée au point fixe $a = 0$, c'est-à-dire $e_f^n(y) = e_f^n(y, 0) = y^n - H_n(y)$ qui est un polynôme en y de degré n .

Lemme 2

Sous H0 et sans résonance ($1 \neq \lambda^n$), la condition $\theta(\varphi) = 0$ ne peut être réalisée que pour les points y_n annulant l'écart résolvant $e_f^n(a, y)|_{a=0} = e_f^n(y) = y^n - H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$. Et inversement.

Pour toute fonction analytique arbitraire $\psi(y)$, on peut toujours former la fonction $\theta(\psi) = \psi - \psi_f$ où $\psi_f(y)$ est la transformée par f obtenue en remplaçant y^n par $H_n(y)$ dans le développement analytique de ψ . Mais la solution de la résolvante φ doit vérifier $\theta(\varphi) = 0$. Prenons au voisinage de la solution φ , une fonction analytique arbitraire de la forme $\psi_n(y) = \varphi(y) + \delta b_n y^n$ perturbée par le monôme $\delta b_n y^n$. La transformée ψ_{fn} par f s'écrira avec la modification $\delta b_n y^n$ par rapport à la solution φ : $\psi_{fn} = \varphi_f + \delta b_n H_n(y)$ et $\theta(\psi) = \delta b_n (y^n - H_n(y))$. S'il n'y a pas de résonance, le coefficient du terme de plus haut degré de $y^n - H_n(y)$ est $\delta b_n (1 - \lambda^n) \neq 0$.

On ne pourra pas annuler ce coefficient avec des polynômes de la forme $u_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n'} d_k y^k$ avec $n' < n$ car leurs transformés par f seront tous $u_{fn}(y) = \sum_{k=0}^{k=n'} d_k H_k(y)$ de degré $n' < n$. On ne peut l'annuler qu'en prenant un polynôme de degré supérieur à n . Mais là encore, le terme de plus degré de ce polynôme ne peut être annulé que par un polynôme de degré supérieur, et ainsi de suite. Par induction, seuls conviendront les y annulant $y^n - H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Inversement, supposons que la condition $y^n - H_n(y) = 0$ soit réalisée pour $n \rightarrow \infty$. Posons $H_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n} c_{n,k} y^k$. On peut alors construire une suite de polynômes de degré décroissant en éliminant le terme de degré $n-1$ avec $d_{n-1} y^{n-1}$ pour que le terme de plus haut degré y^{n-1} de $d_{n-1} (y^{n-1} - H_{n-1}(y))$ vérifie : $d_{n-1} (1 - \lambda^{n-1}) + c_{n,n-1} = 0$. On recommence en $n-2$ et ainsi de suite. En théorie, $\varphi_n(y) = \sum_{k=0}^{k=n-1} d_k y^k$ répond à la question quand $n \rightarrow \infty$ pour les y_n annulant $y^n - H_n(y)$.

Remarques

- Tout polynôme de degré quelconque au lieu de $\delta b_n y^n$ mène à la même impossibilité d'identification.
- Dans le cas résonant, il existe des $n \in \zeta_R = \{n \mid 1 = \lambda^n\}$ où le terme de plus haut degré de $H_n(y)$ est y^n et l'on peut appliquer la méthode d'identification pour tous les $n \in \zeta_R$ et construire des b_n annulant l'écart résolvant. Mais on verra des méthodes plus performantes dans le quatrième article.

Hypothèses H1, H2 et H3 des zéros réels de $H_n(y) = \partial^n e^{yf(a)} / \partial a^n e^{-yf(a)}|_{a=0}$ (justifications)

Hormis le cas résonant, cet écart résolvant s'annule selon que λ^n est supérieur ou inférieur à 1 dans la direction ζ : si cette quantité est plus petite que 1, $y = 0$ et on a le point fixe, sinon la solution de la résolvante nécessite une connaissance de l'ensemble limite des zéros réels de $H_n(y)$ quand $n \rightarrow \infty$. Ce sera l'objet de l'article suivant. Si l'on pondère convenablement ces zéros y_n de $H_n(y) = 0$ par n , précisément : $s_\ell = y_\ell / n$, $\ell = 1, 2, \dots, d$, noté $(s_n = y_n / n)$, on verra que ces pondérés tendent en général vers un ensemble compact avec une bonne densité d'un aléa p -dimensionnel. Autrement dit, on a des variétés aléatoires. Or, les techniques utilisées pour étudier ces zéros n'ont rien à voir avec la problématique de la densité invariante de l'opérateur de Perron Frobenius et, avec le recul, cette question aurait dû être traitée en premier. Pour ne pas embrouiller la démonstration de considérations secondaires, on prend un aléa d -dimensionnel, quitte élargir ensuite le champ d'investigation. La nature des raisonnements de la présente étude ne semble pas modifiée si l'on prend une distribution p ou d -dimensionnelle. Pour cette raison, on utilisera ici comme hypothèse des résultats simplifiés en dimension d . On s'inspire des propriétés des zéros des polynômes d'Hermite.

2- Construction d'un estimateur $\varphi_n(y)$ de $\varphi(y)$

On a alors n^d points y_n . Soit $\varphi_n(y) = \frac{1}{n^d} \sum_n e^{yy_n}$

Proposition 3

Sous l'hypothèse H0, H1, H2 et H3, la densité de Perron Frobénius est asymptotiquement

$$p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^d q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_\ell \dots \partial a_d$$

où $q(s)$ est la densité par rapport à la mesure de Lebesgue d - dimensionnelle de la répartition limite des s_n vérifiant $H_n(ns_n) = 0$ quand $n \rightarrow \infty$,

Posons $t = y / n$. Sous H0, H1, H2 et H3, $\varphi_n(tn) = \frac{1}{n^d} \sum_n e^{ts_n} n^d q(s_n) ds_n \rightarrow \varphi(t) = \int e^{ts} q(s) ds$

VI- Ergodisme multidimensionnel et itération traditionnelle

L'itération f d - dimensionnelle, de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_\ell, \dots, f_d)$ se traduit concrètement par d applications f_ℓ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$: $a_{1\ell} = f_\ell(a)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$. L'itération est notée $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$. Traditionnellement, cela signifie que chaque coordonnée de f est itérée un même nombre de fois dans le même ordre d'application. À ma connaissance, personne ne se pose la question de savoir laquelle des fonctions f_ℓ de f choisir en premier, puis, celle en second, etc., et si tout cela commute.

Si la question ne se pose pas en dimension 1, le problème apparaît dès la dimension 2. Par exemple, soit $f = (f_1, f_2)$: si l'on itère f_1 sans itérer f_2 , on a une distribution asymptotique relative à f_1 . Faut-il itérer f_2 avant f_1 , ou l'inverse ? Que se passe-t-il si on itère (p) fois $f_1^{(p)}$ pour (q) fois $f_2^{(q)}$?

Soit $(z_\ell) = (n_\ell) / (n)$ la fréquence de l'itération f_ℓ . La notion de direction de l'itération (ζ) définie par $(\zeta_\ell) = \lim_{(n) \rightarrow \infty} (z_\ell)$ où est (n) l'indice d'itération prend un sens précis. De même, les dérivations de l'écart résolvant $z_\ell = n_\ell / \sum_\ell n_\ell$ respectent ici des fréquences asymptotiques $\zeta_\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n_\ell / \sum_\ell n_\ell$ dans la direction ζ . On se propose ici d'établir que asymptotiquement $\zeta = (\zeta)$ s'il n'y a pas résonance.

On distingue ici les mots : itération et application. Soit l'application f_ℓ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$: $a \mapsto a_{1\ell} = f_\ell(a)$. Posons $a = (a_\ell, a'_\ell)$ où a'_ℓ désigne les coordonnées fixées autres que a_ℓ .

Définition 4

On appelle itération partielle $f_\ell(a)$, $\ell = 1, 2, \dots, d$, notée encore f_ℓ , l'injection canonique f_ℓ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ associée à l'application f_ℓ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, où les a'_ℓ restent fixées. Une itération traditionnelle f sera donc la composée des d itérations partielles f_ℓ .

Proposition 4

- Sous H0 et H2, l'itération partielle $a_{1\ell} = f_\ell(a)$ agit asymptotiquement, en général, comme une dérivation partielle $\partial / \partial a_\ell$ sur l'écart résolvant $e_f^n(nt, a)$: quand $n_\ell \rightarrow \infty$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} e_f^n(nt, f^p(a)) / (1 - \lambda)^p a^p = e_f^{n+p}(nt, 0) \text{ pour tout multi indice } p = (p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_d). \quad \zeta = (\zeta).$$

- L'itération traditionnelle se traduit en fin de compte par une fréquence $\zeta_\ell = 1 / d$.

L'itération partielle $a_{1\ell} = f_\ell(a)$ va transformer la densité p en p_{f_ℓ} , p_f en $p_{f \circ f_\ell}$ et l'écart résolvant $e_f^n(y, a) = \partial^n (e^{ya} - e^{yf(a)}) / \partial a^n$ en $e_{f \circ f_\ell}^n(y, a)$. Si $a = (a_\ell, a'_\ell)$, où les a'_ℓ sont fixées, appliquons la formule de la moyenne à l'écart en posant $y = ns$:

$$e_f^n(ns, f_\ell(a)) - e_f^n(ns, a) = \int_{a_\ell}^{f_\ell(a)} \partial e_f^n(ns, x, a'_\ell) / \partial a_\ell dx = (f_\ell(a) - a_\ell) \partial e_f^n(ns, x_\ell, a'_\ell) / \partial a_\ell$$

où $x_\ell \in (a_\ell, f_\ell(a))$.

Choisissons $s \in S$. Si S est l'adhérence des S_n , étant donné $\varepsilon > 0$, pour tout $n > n_\varepsilon$: il existe $s_n = y_n / n$ tel que $|s_n - s| < \varepsilon$, donc $e_f^n(s_n) = 0$. Prenons $a'_\ell = 0'_\ell$ et $a_\ell \rightarrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitraire : $e_f^n(ns, f_\ell(a)) / (\lambda_\ell - 1)a_\ell \rightarrow \partial e_f^n(y, 0) / \partial a_\ell = e_f^{n+1_\ell}(y, 0)$. Ainsi f_ℓ agit, en général, du point de vue des zéros du polynôme H_n comme une dérivation $\partial / \partial a_\ell$ sur $\partial^n e^{vsf(a)} / \partial a^n$ en $a = 0$. De plus, comme les dérivations commutent, asymptotiquement les itérations commutent. Itérons les f_ℓ avec des fréquences entières $(p) = (p_\ell)$ indépendamment de $n > n_\varepsilon$ fixé. Si S est l'adhérence, on peut à chaque étape trouver un s_{n+k} $k = (1), \dots, (p)$ dans le voisinage de s annulant $e_f^{n+k}(s)$ et répéter ainsi l'opération. Tout se passe alors comme si l'on dérivait p fois par rapport à a : $H_n(s, f^{(p)}(a)) / (\lambda - 1)^p a^p \rightarrow H_{n+p}(s, a)|_{a=0}$. Itérons f de sorte que les dérivations $z_\ell = p_\ell / \sum_\ell p_\ell$ respectent des fréquences asymptotiques $\zeta_\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} p_\ell / \sum_\ell p_\ell$ et faisons tendre p vers l'infini. $\zeta_\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} (p_\ell + n_\ell) / \sum_\ell (p_\ell + n_\ell)$. Ainsi, l'itération traditionnelle se traduit par des dérivations avec une fréquence égale par rapport à chaque composante de a : $\zeta_\ell = 1 / d$.

Proposition 5

Sous réserve de non résonance, si $\prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} < 1$ $p(a) = \delta$ Dirac en 0.

si $\prod_\ell |\lambda_\ell|^{\zeta_\ell} > 1$ alors, le processus peut tendre vers tout autre point attractif de $F \circ \text{Fix}(f)$. Sinon, il existe une solution asymptotique $q(a)$ répartition asymptotique des zéros y_n / n , et sous réserve de convergence, $p(a) = \prod_{\ell=1}^{\ell=d} (-a_\ell) \partial^d q(a) / \partial a_1 \dots \partial a_d$

Soit $H_{n,n}(s, \lambda)$ le polynôme obtenu en posant $y = ns$ dans $H_n(y)$ et en mettant λ^n en facteur : $H_{n,n}(s, \lambda) = (\lambda n)^{-n} H_n(ns)$. Considérons l'écart $n^{-n} e_f^n(s) = s^n - \lambda^n H_{n,n}(ns)$ qui doit tendre vers 0 quelque soit l'indice n du développement analytique. Asymptotiquement, $\lambda^n \sim \lambda^{\zeta k}$ où k est un nombre $\rightarrow \infty$

- Si tous les $|\lambda|^\zeta < 1$, comme $H_{n,n}(s, \lambda)$ reste borné, $\lambda^n H_{n,n}(s, \lambda) \rightarrow 0$ et $s^n \rightarrow 0$.
- Si tous les $|\lambda|^\zeta > 1$, $(s / \lambda)^n$ est négligeable devant le polynôme $H_{n,n}(s, \lambda)$ « unitaire » (corollaire 1) et $(s / \lambda)^n - H_{n,n}(s, \lambda)$ a par continuité des racines mêmes zéros à l'infini que $H_{n,n}(s, \lambda)$. Mais il se peut qu'un point de $F \circ \text{Fix}(f)$ soit attractif.

Remarques

- La distribution des zéros de $H_n(y)$ va dépendre de ces fréquences ζ_ℓ mais en général, $\zeta_\ell = 1 / d$.
- Le fait que des points de $F \circ \text{Fix}(f)$ puissent être attractifs lorsque 0 est répulsif ne pose pas de problème de compréhension : ainsi, même si tous ces cycles sont répulsifs jusqu'à l'ordre n , le cycle d'ordre $n+1$ peut être attractif et « masquer » ces distributions intrinsèques comme on le constate pour la logistique. En première analyse, ces distributions intrinsèques ne deviendront apparentes que lorsque tous les cycles d'ordre quelconque seront répulsifs où lorsque l'on rencontre des variétés aléatoires. En revanche, on n'a pas ici les éléments permettant de préciser comment s'organisent entre elles toutes les distributions aléatoires attachées à chaque point de $F \circ \text{Fix}(f)$. On esquissera des relations de domination entre ces distributions dans le prochain article. Dans cet ordre d'idées que l'on n'a pas encore approfondies, on présente un raisonnement heuristique concernant les points des cycles : itérons (n) fois f : $f^{(2)}$ sera itéré $(\lfloor n / 2 \rfloor)$ fois, ..., $f^{(p)}$ sera itéré $(\lfloor n / p \rfloor)$ fois. Donc, même s'ils ne sont pas masqués, ces points d'ordre p et leurs distributions attachées n'apparaîtront qu'avec des fréquences décroissantes $\lfloor n / p \rfloor / \sum_p \lfloor n / p \rfloor \sim 1 / p \ln n$. Mais des situations plus compliquées liées à des dégénérescences peuvent survenir. Ces questions seront examinées dans articles suivants.

Reste enfin le cas où aucun point de $F \circ \text{Fix}(f)$, aucune distribution attachée à un point de $F \circ \text{Fix}(f)$, n'est attractif : il semble que l'hypothèse de compacité doive être remise en question.

VI- Exemples d'application

1- La logistique $f = \lambda(a - a^2)$ en dimension 1. Si $4 \geq \lambda \geq 1$, f applique le compact $[f(\lambda/4), \lambda/4]$ dans lui-même. Formons l'écart relatif à $f : e_f^n(y)|_{a=0} = y^n - H_n(y)$ où $H_n(y) = H_n(\sqrt{\lambda y/2})(\sqrt{2\lambda y})^n$ avec H_n polynôme d'Hermite d'ordre n . Or, la distribution des zéros de H_n , notée t , est asymptotiquement la loi semi-circulaire de Wigner: $q(t)dt = k\sqrt{1-t^2}dt$. $q(1) = q(-1) = 0$. Donc $t = c\sqrt{y}/v$ avec $c = \sqrt{\lambda/2}$ et $v = \sqrt{2n+1}$ suit la loi semi-circulaire. La distribution $p_1(s)$ de la variable $s = y/2n+1$ devra vérifier : $t = r\sqrt{s}$ et : $p_1(s)ds = -(dq(t)/dt)dt = kr / \left(2s\sqrt{s(1-r^2s)}\right)ds$ et $p(s) = sp_1(s)$. La densité de la mesure

invariante est donc une bêta $\beta(1/2, 1/2)$: $p(s) = \frac{k'}{\sqrt{s(1-r^2s)}}$, formule obtenue par Kawamura [5] à

l'aide des algèbres de Cuntz-Krieger et qui généralise le célèbre résultat de Ulam et Von Neuman. Mais cette distribution sera masquée tant qu'il existera des cycles attractifs pour les valeurs de λ .

2- Approche sommaire de l'itération de Julia

Prévenons d'abord le lecteur que cet exemple n'a pas la prétention de caractériser les ensembles de Julia pour lesquels des travaux considérables ont déjà été faits. On ne se préoccupe ici ni des cycles ni des résonances.

Soit l'itération de Julia $f(z) = z^2 + 1/4 - \alpha^2$ dans $\mathbb{C}$. Elle a 2 points fixes : $a_0 = 1/2 + \alpha$ et $a'_0 = 1/2 - \alpha$. On note ici en « gras » les vecteurs de R^2 associés aux nombres complexes $\mathbf{a} = (a, b)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \beta)$ $\mathbf{a}_0 = (a_0, b_0) = 1/2 + \boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{a}'_0 = (a'_0, b'_0) = 1/2 - \boldsymbol{\alpha}$.

Considérons la fonction $f(z)$ centrée au point fixe $\mathbf{a}_0$; elle s'écrit en posant $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0$: $\mathbf{f} = (a^2 - b^2 + 2a_0a - 2b_0b, 2ab + 2a_0b + 2b_0a)$. On suppose qu'elle applique un compact C dans lui-même.

Soient $\mu_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\gamma = \sqrt{(\mu + x)/2\mu}$ et $\delta = \sqrt{(\mu - x)/2\mu}$.

On note les matrices orthogonales :

$$\mu_0 \mathbf{O}_0 = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \mu_y \mathbf{O}_y = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Pour éviter toute confusion, le signe t désigne ici la transposition. On note que : $^t \mathbf{O} \mathbf{O}_0 \mathbf{O} = \mathbf{O}_0$

Le théorème principal conduit à considérer la fonction : $^t \mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = 2 ^t \mathbf{y} \mathbf{L}(\mathbf{a}) + ^t \mathbf{y} \mathbf{Q}(\mathbf{a})$:

- la partie linéaire $^t \mathbf{y} \mathbf{L}(\mathbf{a}) = x(a_0a - b_0b) + y(a_0b + b_0a) = \mu_0^t \mathbf{y} \mathbf{O}_0 \mathbf{a}$ où $\mathbf{O}_0$ est orthogonale.

- la hessienne est orthogonale $^t \mathbf{y} \mathbf{Q}(\mathbf{a}) = xa^2 - xb^2 + 2yab = \mu_y ^t \mathbf{a} \mathbf{O}_y \mathbf{a}$.

Les valeurs propres de la partie linéaire sont a_0 et $\overline{a_0}$, ce qui redonne l'itération complexe initiale et sa conjuguée. Ces deux valeurs propres sont supposées ici supérieures à 1 en module, donc sans résonance.

La hessienne de $^t \mathbf{y} \mathbf{Q}(\mathbf{a})$ a pour équation caractéristique $x^2 + y^2 - \mu^2 = 0$ avec deux valeurs propres, l'une positive μ , l'autre négative $-\mu$. En posant $\mathbf{y} = \mathbf{O} \mathbf{s}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{O} \mathbf{u}$ avec $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{s} = (r, s)$: $^t \mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = 2\mu_0 ^t \mathbf{s} ^t \mathbf{O} \mathbf{O}_0 \mathbf{O} \mathbf{u} + \mu \mu^2 - \mu v^2 = 2r(a_0u - b_0v) + 2s(a_0v + b_0u) + \mu u^2 - \mu v^2$

donc : ${}^t \mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (2ra_0 + 2tb_0)u + \mu_y u^2 + (2ta_0 - 2rb_0)v - \mu_y v^2$. De même : ${}^t \mathbf{y} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{s} \mathbf{u}$. Dans les sous espaces propres orthogonaux, l'application se décompose alors en deux itérations indépendantes : $(2ra_0 + 2sb_0)u + \mu u^2$ et $(2ta_0 - 2rb_0)v - \mu v^2$. Comme $\mathbf{O}$ est orthogonale : $\mu = \sqrt{r^2 + s^2}$. L'écart résolvant donne deux polynômes d'Hermite : $H_n((2ra_0 + 2sb_0)/i\sqrt{2\mu})(i\sqrt{2\mu})^n$ et $H_n((2sa_0 - 2rb_0)/\sqrt{2\mu})(\sqrt{2\mu})^n$. Le premier reste toujours positif. Les zéros du second suivent asymptotiquement une loi semi-circulaire. Donc, $(2s_1a_0 - 2r_1b_0)/\sqrt{2\mu}$ ($r_1 = r/\sqrt{2n+1}$ et $s_1 = s/\sqrt{2n+1}$) suit une loi semi circulaire. La transformation $s_1\sqrt{2n+1} = s$ permet, via le théorème de la densité, de déterminer la distribution pour l'application initiale. Le calcul en $\mathbf{a}'_0$ agit comme un changement d'origine des coordonnées sans modifier la distribution, mais il est intéressant de remarquer peuvent ne pas être masqués.

Bibliographie

- [1] G. Cirier, *Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius dans le cas de difféomorphismes à points fixes*, Pub. Inst. Stat. Univ.Paris XLIX, fasc.1,2004, 35 à 64.
- [2] A. Douady et J. H. Hubbard, *Etude dynamique des polynômes complexes I , II* , Publ. Math. Orsay 84-02 et 85-05, (1984/85).
- [3] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical & quantum mechanics*, IAM 1, Springer-Verlag (1990).
- [4] J. H. Hubbard, *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz*, Topological Methods in Modern Mathematics, ed. Goldberg (1993). 53:1120, (1947).
- [5] K. Kawamura, *The Perron-Frobenius operators, invariant measures and representations of the Cuntz-Krieger algebras* , J. Math. Phys. **46**, 083514 (2005).
- [6] A.Lasota and M.C.Mackey, *Chaos, Fractals and Noise* , Second Edition, Springer-Verlag (1991).
- [7] D. Ruelle, *formalisme thermodynamique*, Lect. notes in mathematics, Vol. 567, Springer(1977)
- [8] S.M.Ulam and J.von Neumann, *On combination of stochastic and deterministic processes*, Bull. AMS,
- [9] J.-C. Yoccoz, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cours 2003-2004 au Collège de France.