HAL
open science

Normalité projective des varétés magnifiques de rang 1

Alexis Tchoudjem

To cite this version:

Alexis Tchoudjem. Normalité projective des varétés magnifiques de rang 1. 2011. hal-00578637v2

HAL Id: hal-00578637

https://hal.science/hal-00578637v2

Preprint submitted on 25 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normalité projective des varétés magnifiques de rang 1
(Projective normality of rank one wonderful varieties)

Alexis TCHOUDJEM

Institut Camille Jordan

Université Claude Bernard Lyon I

Boulevard du Onze Novembre 1918

69622 Villeurbanne

FRANCE

tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Villeurbanne, le 25 mai 2011

Résumé : Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux faisceaux inversibles sur une variété projective X. On suppose que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont engendrés par leurs espaces de sections globales $\Gamma(\mathscr{L})$ et $\Gamma(\mathscr{L}')$. On démontre dans cet article que le morphisme :

$$\Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif, dans le cas où X est une variété magnifique de rang 1. En particulier, le cône au-dessus d'une variété magnifique X de rang 1 défini par un faisceau inversible très ample est toujours normal.

Abstract : Let $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}'$ be two invertible sheaves over a projective variety X. We suppose that $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}'$ are generated by their global section spaces $\Gamma(\mathscr{L})$ and $\Gamma(\mathscr{L}')$. We prove in this article that the morphism :

$$\Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

is surjective, in the case where X is a rank one wonderful variety. In particular, the cone over a rank one wonderful variety defined by a very ample invertible sheaf is always normal.

Introduction

D'après [5], si X est une variété projective obtenue comme la compactification magnifique d'un espace symétrique G/H (où G est un groupe semi-simple adjoint et H le sous-groupe des points fixes d'une involution θ de G), alors pour tous faisceaux inversibles et engendrés par leurs sections globales, le morphisme :

$$R \ : \ \Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') \tag{1}$$

induit par la restriction de $X \times X$ à sa diagonale Δ_X est surjectif (on note $\Gamma(-)$ ou $\Gamma(X, -)$ l'espace des sections globales d'un faisceau), *cf.* aussi [8], pour les compactifications magnifiques des groupes semi-simples adjoints.

Les variétés magnifiques (définies par exemple dans [9]) sont une généralisation des compactifications magnifiques des espaces symétriques. Les variétés magnifiques les plus simples, après celles de rang 0 qui sont les variétés de drapeaux (généralisées), sont les variétés magnifiques de rang 1. Nous démontrons ici (*cf.* le théorème 4.1) que le morphisme R de (1) est encore surjectif si X est une variété magnifique de rang 1.

La normalité du cône au-dessus de X défini par un faisceau inversible très ample sur X s'ensuit par un argument standard (*cf.* [6, II Ex.5.14 d)]).

Avant de démontrer le résultat principal, nous rappelons dans la section 1, la définition des variétés magnifiques de rang 1 et la notion d'induction parabolique. Pour une variété magnifique de rang 1 donnée, nous aurons besoin d'une description des faisceaux inversibles sur X et de l'espace de leurs sections globales (*cf.* la section 2) ainsi que de la grosse cellule de X, qui est un ouvert particulier isomorphe à un espace affine (*cf.* la section 3).

Dans toute la suite $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et G est un groupe linéaire algébrique, semi-simple et simplement connexe sur $\mathbf{k}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On choisit un sous-groupe de Borel B de G et $T \subseteq B$ un tore maximal. Soient B^- le sous-groupe de Borel de G opposé à B relativement à T. On note Φ le système de racines de (G, T), Φ^+ l'ensemble des racines positives, Δ la base de Φ associée à B et W le groupe de Weyl de (G, T). On notera w_0 l'élément de plus grande longueur de W.

1 Induction parabolique

Soit X une $G-$variété. Soit P un sous-groupe parabolique de G. S'il existe un morphisme $G-$équivariant $\pi : X \to G/P$, une $P-$variété Y et une immersion fermée $Y \to X$, $P-$équivariante d'image $\pi^{-1}(P/P)$, on dit que X s'obtient par induction parabolique de Y. On le note :

$$X = G \times^P Y \ .$$

Une $G-$variété magnifique de rang 1 est une $G-$variété projective lisse connexe avec deux $G-$orbites : une $G-$orbite ouverte : X_G^0 et une $G-$orbite fermée $F := X \setminus X_G^0$ de codimension 1.

Par exemple, la variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ munie de l'action diagonale du groupe $G = \mathrm{SL}_2$ est une variété magnifique de rang 1 (la diagonale et son complémentaires forment les deux $G-$orbites).

Une liste d'autres exemples est donnée par la table 1 de [10]. On dira que ces variétés magnifiques de la table 1 de [10] et la SL_2-variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont les variétés magnifiques *irréductibles* de rang 1 (*cf.* aussi [1] et [3]).

Toutes les autres variétés magnifiques de rang 1 s'obtiennent à partir des variétés irréductibles par induction parabolique :

Lemme 1.1 ([10, §2] ou [1] ou [3]) *Soit X une $G-$variété magnifique de rang 1. Alors, il existe un sous-groupe parabolique P de G, contenant B^-, tel que :*

$$X = G \times^P \widetilde{X}$$

où $\widetilde{X}$ est une P/P^r-variété magnifique irréductible.

2 Groupe de Picard

On rappelle quelques faits sur le groupe de Picard de X. Soit H un sous-groupe d'isotropie d'un point de l'orbite ouverte de X. Quitte à changer H en un de ses conjugués, on suppose que BH/H est ouvert dans G/H. Soit λ un poids dominant. Soit V_λ le $G-$module simple de plus au poids λ. On suppose que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$ *i.e.* il existe $0 \neq v_H \in V_\lambda$ un $H-$vecteur propre. Comme la variété X est magnifique, le morphisme $gH \mapsto [g.v_H] \in \mathbb{P}(V_\lambda)$ se prolonge en un morphisme :

$$i_\lambda : X \to \mathbb{P}(V_\lambda) \ .$$

On pose :

$$\mathscr{L}_\lambda := i_\lambda^*(\mathscr{O}(1))$$

c'est un faisceau inversible et $G-$linéarisé sur X (qui *a priori* dépend non seulement de λ mais aussi du choix d'un $H-$vecteur propre dans V_λ). Soit $l_\lambda \in V_\lambda^*$ un $B-$vecteur propre (de poids $-w_0\lambda$). On notera σ_λ l'image de $l_\lambda \in V_\lambda^* = \Gamma(\mathbb{P}(V_\lambda), \mathscr{O}(1))$ dans $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$.

Soit maintenant D un diviseur premier et $B-$stable de G/H. Soit $\overline{D}$ son adhérence dans X. Soit $p : G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Il existe $f_D \in \mathbf{k}[G]$ tel que $p^{-1}(D) = (f_D)$ comme diviseurs de G. Comme D est $B-$stable, il existe un $G-$module simple V_{λ_D}, de plus haut poids λ_D dominant, $l_D \in V_{\lambda_D}^*$ un $B-$vecteur propre et $v_H \in V_{\lambda_D}$ un $H-$vecteur propre tels que :

$$f_D = l_D \otimes v_H$$

i.e. : $f_D(g) = l_D(gv_H)$ pour tout $g \in G$. Alors, on peut montrer que :

$$\mathscr{L}_{\lambda_D} \simeq \mathscr{O}_X(\overline{D})$$

(en particulier, le faisceau $\mathscr{O}_X(\overline{D})$ est engendré par ses sections globales).

De plus, le groupe de Picard de X, $\mathrm{Pic}(X)$, est un réseau dont les classes des faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda_D}$ forment une base.

On note $\mathbf{z}$ l'unique point fixe de B^- dans X et Q son stabilisateur dans G. Alors Q est un sous-groupe parabolique de G contenant B^-. On note $P := w_0 Q w_0$ le sous-groupe parabolique de G opposé à Q. Tout caractère λ de P induit un faisceau inversible (et $G-$linéarisé) sur G/Q : $\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$ (*cf.* [7, I §5.8]). On prendra pour convention que la fibre au-dessus de Q/Q, $\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)\Big|_{Q/Q}$, est la droite affine où le groupe Q agit via le caractère $\lambda^* := -w_0\lambda$.

Avec cette convention et en identifiant la $G-$orbite fermée F de X avec G/Q, si λ est un poids dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$, alors $\mathscr{L}_\lambda|_F = \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$.

Lemme 2.1 *Soit F l'unique $G-$orbite fermée de X. On suppose que X n'est pas une induction parabolique de la variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ munie de l'action diagonale de SL_2. Alors le morphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(F)\,,\ \mathscr{L} \mapsto \mathscr{L}|_F$$

est injectif de plus, un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est engendré par ses sections globales si et seulement si le faisceau $\mathscr{L}|_F$ est engendré par ses sections globales sur F.

Démonstration : On identifie la $G-$orbite fermée F avec G/Q.

Soient $D_1, ...D_p$ les diviseurs premiers $B-$stables de la $G-$orbite ouverte de X. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les caractères correspondants. Les classes des faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda_1}, ..., \mathscr{L}_{\lambda_p}$ forment une base de $\mathrm{Pic}(X)$, et pour tout i, $\mathscr{L}_{\lambda_i}\Big|_{G/Q} = \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda_i)$.

Si X est une variété magnifique de rang 1 irréductible, alors $p = 1$ (et le lemme est vrai dans ce cas) ou, d'après le tableau 1 de [10, table 1], $p = 2$ et λ_1, λ_2 sont des poids fondamentaux distincts et le lemme est encore vrai dans ce cas.

Pour le cas général, on a $X = G \times^{Q_1} X_1$ pour un certain sous-groupe parabolique Q_1 de G contenant B^- et X_1 une Q_1/Q_1^r-variété magnifique irréductible de rang 1.

Si on note $\pi : X \to G/Q_1$ et $i : X_1 \to X$, alors on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}(G/Q_1) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Pic}(X_1) \to 0\ .$$

En effet, si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X tel que $\mathscr{L}|_{X_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}$, alors on peut montrer que le faisceau $\pi_*\mathscr{L}$ est inversible sur G/Q_1 et que $\pi^*\pi_*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$; pour la surjectivité de i^*, on remarque que la $B-$orbite ouverte BQ_1/Q_1 de G/Q_1 est isomorphe à un espace affine, que l'ouvert de X, $\Omega := \pi^{-1}(BQ_1/Q_1)$ est isomorphe à $BQ_1/Q_1 \times X_1$ d'où un morphisme surjectif et un isomorphisme : $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\Omega) \simeq \mathrm{Pic}(X_1)$.

Donc si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X tel que $\mathscr{L}\big|_{G/Q} \simeq \mathscr{O}_{G/Q}$, alors la restriction de $\mathscr{L}$ à F_1, l'orbite fermée de X_1 est triviale : $\mathscr{L}|_{F_1} \simeq \mathscr{O}_{F_1}$. Donc $\mathscr{L}|_{X_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}$ d'après le premier cas. Mais alors, $\mathscr{L}$ est de la forme $\pi^*\mathscr{M}$ pour un certain faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur G/Q_1. Si on note π_1 la restriction de π à G/Q, $\pi_1^*\mathscr{M} \simeq \mathscr{O}_{G/Q}$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & G/Q_1 \\
F_1 \arrow[r] & G/Q \arrow[ur, "\pi_1"] &
\end{tikzcd}$$

Or, $Q \subseteq Q_1$ et π_1 est aussi la surjection canonique $G/Q \to G/Q_1$. Comme le morphisme :

$$\mathrm{Pic}(G/Q_1) \overset{\pi_1^*}{\to} \mathrm{Pic}(G/Q)$$

est injectif, le faisceau inversible $\mathscr{M}$ est trivial et $\mathscr{L} = \pi^*\mathscr{M}$ aussi.

Soit D un diviseur de X tel que le faisceau :

$$\mathscr{O}_X(D)|_F$$

est engendré par ses sections globales. Le diviseur D est équivalent à un diviseur $n_1\overline{D_1} + ... + n_r\overline{D_r}$ pour certains entiers n_i. Pour montrer que $\mathscr{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales, il suffit de montrer que $n_i \geq 0$ pour tout i.

Quitte à renuméroter les D_i, on peut supposer que pour un certain $r \leq p$, $D_1, ..., D_r \subseteq X \setminus \Omega$ et que $D_i \cap \Omega \neq \emptyset$ si $i > r$. Soient $E_1, ..., E_r$ les diviseurs premiers $B-$invariants de G/Q_1 tels que $\pi^{-1}(E_i) = \overline{D_i}$. Soient δ_i, $i > r$ les diviseurs premiers $B \cap Q_1-$invariants de X_1 tels que $\overline{D_i} = \overline{BQ_1/Q_1 \times \delta_i}$.

Avec ces notations, les poids $\lambda_1^*, ..., \lambda_r^*$ sont des poids fondamentaux (deux à deux distincts) qui se prolongent en des caractères de Q_1 et les poids $\lambda_{r+1}^*, ..., \lambda_p^*$ sont des caractères triviaux sur Q_1^r.

Comme $\mathscr{O}_X(D)|_F$ est engendré par ses sections globales, le poids $n_1\lambda_1^* + ... + n_p\lambda_p^*$ est dominant. Donc :

$$\forall\, 1 \leq i \leq r,\ n_i \geq 0\ .$$

Notons F_1 la Q_1-orbite fermée de X_1. Le faisceau

$$\mathscr{O}_X(D)|_{F_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}(\sum_{i>r} n_i\delta_i)|_{F_1}$$

est engendré par ses sections globales donc, d'après le cas irréductible, le faisceau $\mathscr{O}_{X_1}(\sum_{i>r} n_i\delta_i)$ est aussi engendré par ses sections globales d'où :

$$\forall\, i > r,\ n_i \geq 0\ .$$

Q.e.d.

Remarque : si $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $F = \Delta_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathbb{P}^1$ *et le morphisme* $\mathrm{Pic}X = \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Pic}F = \mathbb{Z}$ *ne peut pas être injectif de plus, dans ce cas, le faisceau* $\mathscr{O}(1)\boxtimes\mathscr{O}(-1)$ *n'est pas engendré par ses sections globales alors que sa restriction* $\mathscr{O}(1)\boxtimes\mathscr{O}(-1)\Big|_{\Delta_{\mathbb{P}^1}} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ *l'est.*

Excepté ce cas et ses inductions paraboliques, on obtient en particulier que pour tout poids dominant λ*, le faisceau inversible* $\mathscr{L}_\lambda$ *défini précedemment ne dépend que de* λ *car* $\mathscr{L}_\lambda|_F \simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$.

Si X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on en déduit :

Corollaire 2.1.1 *Si* $\mathscr{L}$ *est un faisceau inversible sur* X *engendré par ses sections globales, alors il existe* λ *un poids dominant tel que*

$$(*)\ \ V_\lambda^{(H)} \neq 0$$

et $\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_\lambda$*. Si* λ, μ *sont deux poids dominants qui vérifient* $(*)$*, alors* $\lambda + \mu$ *vérifie aussi* $(*)$ *et* $\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}$.

Démonstration : Soient λ, μ des poids dominants qui vérifient $(*)$. Soient $v_H \in V_\lambda$ et $v'_H \in V_\mu$ deux $H-$vecteurs propres. Comme BH/H est un ouvert dense de G/H, le vecteur v_H a une composante non nulle de $T-$poids $w_0\lambda$ et le vecteur v'_H une composante non nulle de $T-$poids $w_0\mu$. Donc le $H-$vecteur propre $v_H \otimes v'_H$ a une composante non nulle de $T-$poids $w_0(\lambda+\mu)$ dans $V_\lambda \otimes V_\mu$. Donc en considérant la projection $G-$équivariante : $V\lambda \otimes V_\mu \to V_{\lambda+\mu}$, on trouve un $H-$vecteur propre dans $V_{\lambda+\mu}$.

Or :

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu)\Big|_{G/Q} &\simeq \mathscr{L}_\lambda\Big|_{G/Q} \otimes \mathscr{L}_\mu\Big|_{G/Q}\\ &\simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda) \otimes \mathscr{L}_{G/Q}(\mu)\\ &\simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda+\mu)\\ &\simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}\Big|_{G/Q}\ .\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{L}_{\lambda+\mu} \simeq \mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu$.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible engendré par ses sections globales.

Notons $D_1, ..., D_p$ les diviseurs premiers $B-$invariants de G/H. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les poids correspondants (tels que $\mathscr{L}_{\lambda_i} \simeq \mathscr{O}_X(\overline{D_i})$ pour tout i). Les poids λ_i sont dominants.. De plus, il existe des entiers $n_1, ..., n_p$ tels que :

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_{\lambda_1}^{n_1} \otimes ... \otimes \mathscr{L}_{\lambda_p}^{n_p}$$

$$\simeq \mathscr{L}_{n_1\lambda_1+...+n_p\lambda_p}$$

d'après la première partie de cette démonstration. Or, $\mathscr{L}\Big|_{G/Q} \simeq \mathscr{L}_{G/Q}(n_1\lambda_1+ ... + n_p\lambda_p)$ est aussi engendré par ses sections globales donc $n_1\lambda_1 + ... + n_p\lambda_p$ est dominant. **Q.e.d.**

Notations : On notera $\mathrm{pic}^+(X)$ les caractères λ dominants tels que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}^+(X)$, $\mathscr{L}_\lambda$ un faisceau inversible et $G-$linéarisé sur X correspondant (*i.e.* défini comme au début de la section 2) (si X est une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et seulement dans ces cas, il peut y avoir deux faisceaux $\mathscr{L}_\lambda$ non isomorphes).

3 Grosses cellules

On note P^u le radical unipotent du sous-groupe parabolique P de G et L son sous-groupe de Levi contenant le tore T (on rappelle que, relativement au tore T, P est le sous-groupe parabolique opposé à Q le stabilisateur de $\mathbf{z}$ l'unique point fixe de B^- dans X).

Proposition 3.1 ([4, th. 1.4 et cor. 1.5]) *Il existe un voisinage ouvert affine $P-$stable de $\mathbf{z}$ dans X, noté X_0, une sous-variété fermée A de X_0, $L-$ stable, $L-$isomorphe à une droite affine (qui est une représentation de L) et un isomorphisme de $P-$variétés algébriques :*

$$P^u \times A \to X_0 \ , \ (u, a) \mapsto u.a$$

où P agit sur le membre de gauche par :

$$(xl).(u, a) := (xlul^{-1}, l.a)$$

pour tous $x, u \in P^u$, $l \in L$, $a \in A$.

L'ouvert de X_0 est la grosse cellule de X (on peut l'obtenir comme la cellule ouverte d'une décomposition cellulaire de Bialynicki-Birula de X associée à un sous-groupe à un paramètre dominant générique de T).

Remarque : Comme X n'a qu'une seule orbite fermée : $F = G.\mathbf{z}$, et comme $X \setminus \bigcup_{g\in G} gX_0$ est un fermé de X ne contenant pas $\mathbf{z}$, on a forcément $\bigcup_{g\in G} gX_0 = X$.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section 3, on suppose que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soient λ un poids dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$, $\mathscr{L}_\lambda$ le faisceau inversible sur X correspondant et $\sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ sa section de plus haut poids (définie à multiplication par un scalaire près). Alors on a :

$$\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda) = \mathbf{k}[X_0]\sigma_\lambda \ .$$

De plus, comme d'après la remarque ci-dessus, X est l'unique ouvert $G-$stable de X contenant X_0, l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ est le plus grand sous-$G-$module rationnel du $\mathfrak{g}-$module $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$.

On a : $\mathbf{k}[X_0] = \mathbf{k}[P^u] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[A]$. Soit y un générateur de l'algèbre $\mathbf{k}[A]$ qui est un $L-$vecteur propre. Le poids de y est $-\gamma$ où γ est la *racine sphérique* de X et on a :

$$\mathbf{k}[X_0] = \oplus_{m \geq 0} \mathbf{k}[P^u] y^m$$

et les fonctions y^m sont, à multiplication par une constante non nulle près, les $B-$vecteurs propres dans le $B-$module $\mathbf{k}[X_0]$.

Le lemme suivant est une adaptation d'un résultat plus général sur les variétés sphériques quelconques, *cf.* [2, pro. du §3.3]. On en donne néanmoins une démonstration *ad hoc*. On suppose que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On rappelle que $\lambda^* = -w_0\lambda$.

Lemme 3.2 *Soit λ dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$. Si $m \geq 0$ est un entier tel que le poids $\lambda^* - m\gamma$ est dominant, alors le $\mathfrak{g}-$sous-module de $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$ engendré par $y^m\sigma_\lambda$, que nous noterons*

$$U(\mathfrak{g})y^m\sigma_\lambda \ ,$$

est un sous-$G-$module irréductible de l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ et on a la décomposition suivante en somme directe de $G-$modules irréductibles :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g})y^m\sigma_\lambda \ .$$

Démonstration : Le $G-$module $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ est engendré par ses $B-$vecteurs propres. Or les $B-$vecteurs propres de l'espace $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$ sont de la forme $y^m\sigma_\lambda$ (à un scalaire près). Or dans un $G-$module les $B-$vecteurs propres sont de poids dominants donc :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \subseteq \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g})y^m\sigma_\lambda \ .$$

Pour l'autre inclusion, on remarque que le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_F$ qui définit l'orbite fermée est un faisceau inversible $G-$linéarisé et que le tore T agit sur la fibre $\mathscr{I}_F|_{\mathbf{z}}$ via le caractère $-\gamma$. On en déduit donc que pour tout

$m \geq 0$ tel que $\lambda^* - m\gamma$ est dominant, le faisceau $\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{I}_F^m$ est engendré par ses sections globales (*cf.* le lemme 2.1) et que :

$$\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{I}_F^m \simeq \mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*} \ .$$

D'où un morphisme injectif de faisceaux $G-$linéarisés :

$$\mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*} \to \mathscr{L}_\lambda \ .$$

Mais alors, le $G-$module $\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*})$ a une image non nulle dans $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$. Or, l'image de $\sigma_{\lambda - m\gamma^*}$ est $y^m \sigma_\lambda$ (à multiplication par un scalaire non nul près) donc $y^m \sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$. **Q.e.d.**

4 Surjectivité de la multiplication

Théorème 4.1 *Soient $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ deux faisceaux inversibles engendrés par leurs sections globales sur une $G-$variété magnifique de rang 1. Alors le morphisme :*

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif.

Démonstration :

On notera γ la racine sphérique de X.

Supposons pour commencer que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soient λ, μ des poids dominants tels que :

$$V_\lambda^{(H)} \neq 0 \, , \ V_\mu^{(H)} \neq 0, \ \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_\lambda \text{ et } \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_\mu \ .$$

On a alors $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}$. Notons $R_{\lambda,\mu}$ ou R s'il n'y a pas d'ambiguïté le morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_\mu) \to \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda+\mu}) \ .$$

Cas où X est une variété magnifique irréductible

Dans ce cas, d'après [1], la variété X est soit isomorphe à une variété de drapeaux (un espace projectif $\mathbb{P}^n$, une quadrique $Q(n)$ d'équation $x_0^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$, une variété grassmannienne $\mathrm{Gr}(2n, 2)$ (variété des $2-$plans dans $\mathbf{k}^{2n}$), un produit d'espace projectis $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, ou une variété homogène pour le groupe adjoint de type E_6) soit isomorphe à une des variétés numérotées $9B$, $9C$, 15 dans le tableau 1 de [10, tab.1].

— Lorsque X est une variété de drapeaux, le morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif car c'est un morphisme non nul et l'espace $\Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$ est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de X (théorème de Borel-Weil).

— Si X est la variété numéro $9B$ (*resp.* $9C$) dans le tableau 1 de [10, tab.1], alors il existe $n \geq 2$ tel que $G = \mathrm{Spin}_{2n+1}$ (*resp.* $G = \mathrm{Sp}_{2n}$). Notons $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines simples et $\omega_1, ..., \omega_n$ les poids fondamentaux correspondants. Il existe $p, q \geq 0$ tels que $\lambda = p\omega_1, \mu = q\omega_1$, (*resp.* $\lambda = p\omega_2, \mu = q\omega_2$) et on a : $\gamma = \omega_1$ (*resp.* $\gamma = \omega_2$). Remarquons que dans les deux cas, on a $\lambda^* = \lambda$ et $\mu^* = \mu$.

Soit $m \geq 0$ tel que $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant. Cette condition est équivalente à :

$$0 \leq m \leq p + q \ .$$

On pose $m_1 := \max\{m - q, 0\}$ et $m_2 := m - m_1$. On a alors : $0 \leq m_1 \leq p$, $0 \leq m_2 \leq q$ et $m = m_1 + m_2$ *c-à-d* : $\lambda - m_1\gamma$, $\mu - m_2\gamma$ dominants. Donc d'après le lemme 3.2 :

$$y^{m_1}\sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \text{ et } y^{m_2}\sigma_\mu \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\mu) \ .$$

Or, $R(y^{m_1}\sigma_\lambda \otimes y^{m_2}\sigma_\mu) = y^m\sigma_{\lambda+\mu}$.

Donc l'image de R est un sous $G-$module de $\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda+\mu})$ qui contient tous les $y^m\sigma_{\lambda+\mu}$ tels que $m \geq 0$ et $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant. On en déduit donc que R est surjectif.

— Si X est la variété numéro 15 dans le tableau 1 de [10, tab.1], alors G est le groupe semi-simple et simplement connexe de type G_2. On prend les notations standards : α_1, α_2 pour les racines simples, ω_1, ω_2 pour les poids fondamentaux correspondants. On a $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ et il existe des entiers $p, q, p', q' \geq 0$ tels que $\lambda = p\omega_1 + q\omega_2, \mu = p'\omega_1 + q'\omega_2$. On a : $\lambda^* = \lambda$, $\mu^* = \mu$.

Soit $m \geq 0$ un entier tel que $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant.

Comme $\lambda + \mu - m\gamma = (p + p' + m)\omega_1 + (q + q' - m)\omega_2$, on a : $0 \leq m \leq q + q'$.

On pose : $m_1 := \max\{m - q', 0\}$ et $m_2 := m - m_1$. On a $0 \leq m_1 \leq q$, $0 \leq m_2 \leq q'$ et $m = m_1 + m_2$. Donc : $\lambda - m_1\gamma$ et $\mu - m_2\gamma$ sont dominants,

$$y^{m_1}\sigma_\lambda \text{ et } y^{m_2}\sigma_\mu \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \ .$$

Or : $R(y^{m_1}\sigma_\lambda \otimes y^{m_2}\sigma_\mu) = y^{m_1+m_2}\sigma_{\lambda+\mu}$.

On en déduit donc que R est encore surjectif dans ce cas.

Cas général

Comme on l'a rappelé au début, il existe un sous-groupe parabolique Q contenant B^- tel que $X = G \times^Q X_1$ pour une certaine Q/Q^r-variété magnifique irréductible. Soit $p : X \to G/Q$ la projection associée.

Notons L le sous-groupe de Levi de G contenant T tel que $Q = Q^u L$. On notera Δ_1 la base du système de racines associé à (L, T) contenue dans Δ.

Soit $B \cap Q/Q^r \subseteq P_1 \subseteq Q/Q^r$ le sous-groupe parabolique associé à la variété magnifique X_1. La grosse cellule $(X_1)_0$ de X_1 vérifie :

$$(X_1)_0 \simeq P_1^u \times A_1$$

pour une certaine sous-variété fermée P_1/P_1^u-stable A_1 de X_1. Si on note Q^+ le sous-groupe parabolique de G opposé à Q (relativement à T), alors la grosses cellule X_0 de X est isomorphe à

$$(Q^+)^u \times (X_1)_0 \simeq (Q^+)^u \times P_1^u \times A_1 \ .$$

Soit $y \in \mathbf{k}[X_0]$ un P_1/P_1^u-vecteur propre tel que $\mathbf{k}[A_1] = \mathbf{k}[y]$. Alors y est de poids γ, la racine sphérique de X. En particulier, γ est un caractère de T/Q^r et donc comme $Q^r = \left(\bigcap_{\delta \in \Delta_1} \ker \delta\right)^\circ$, $\gamma \in \mathbb{Q}\Delta_1$.

On a une décomposition des poids λ^* et μ^* :

$$\lambda^* = \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta_1} \lambda_\alpha \omega_\alpha}_{=:\lambda_1^*} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_1} \lambda_\alpha \omega_\alpha}_{=:\lambda_2^*}$$

$$\mu^* = \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta_1} \mu_\alpha \omega_\alpha}_{=:\mu_1^*} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_1} \mu_\alpha \omega_\alpha}_{=:\mu_2^*}$$

pour certains poids dominants $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$.

Comme $\langle \lambda_2^*, \alpha^\vee \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_1$, le caractère λ_2^* se prolonge en un caractère de Q. Donc $\lambda_2 \in \mathrm{pic}^+(X)$ et $\mathscr{L}_{\lambda_2} \simeq p^* \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda_2)$. On en déduit aussi que $\lambda_1 \in \mathrm{pic}^+(X)$ avec $\mathscr{L}_{\lambda_1} \simeq \mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_{\lambda_2}^{-1}$.

De même, μ_2^* se prolonge en un caractère de Q et $\mu_1 \in \mathrm{pic}^+(X)$.

On pose $L' := (L, L)$ et on choisit un tore maximal T' de L' contenu dans T.

Si ν est un caractère de T, on notera ν' sa restriction à T'.

Si $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, alors, le morphisme de restriction :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}|_{X_1})$$

est surjectif.

En effet, si $\sigma_{\lambda_1} \in \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1})$ est un vecteur propre de plus haut poids λ_1 et si on pose :$\sigma'_{\lambda_1} := \sigma_{\lambda_1}|_{X_1}$ et $y' := y\Big|_{(X_1)_0}$, alors daprès le lemme 3.2, on a :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda_1^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g}) y^m \sigma_{\lambda_1}$$

$$\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1'}) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ (\lambda_1^*)' - m\gamma' \text{ dominant}}} U(\mathfrak{l}') y'^m \sigma'_{\lambda_1}$$

où $\mathfrak{l}'$ est l'algèbre de Lie de L'.

Or, comme $\gamma \in \mathbb{Q}\Delta_1$ et comme $\lambda_1^* \in \langle \omega_\delta : \delta \in \Delta_1 \rangle$, $\lambda_1^* - m\gamma$ est dominant si et seulement si $(\lambda_1^*)' - m\gamma'$ est dominant. D'où la surjectivité.

De même, le morphisme de restriction :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}|_{X_1})$$

est surjectif.

Or, d'après le cas particulier des variétés magnifiques irréductibles, le morphisme :

$$\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1+\mu_1})$$

est surjectif.

Pour montrer la surjectivité de R, il suffit de montrer que si $m \geq 0$ est tel que $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$ est dominant, alors :

$$y^m \sigma_{\lambda_1+\mu_1} \in \operatorname{Im} R \ .$$

Considérons donc $m \geq 0$ tel que $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$ est dominant. On a alors $\lambda_1' + \mu_1' - m\gamma'$ dominant.

Puisque le morphisme R commute avec la restriction à X_1 :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1}) \arrow[r, "R"] \arrow[d, two heads] & \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1+\mu_1}) \arrow[d, two heads] \\
\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}) \arrow[r, two heads] & \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1+\mu_1})
\end{tikzcd}$$

il existe $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1})$ tel que :

$$R(\sigma)|_{X_1} = y^m \sigma_{\lambda_1+\mu_1}|_{X_1} \ .$$

Dans le diagramme ci-dessus, les morphismes sont $\operatorname{diag}(T)-$équivariants (car X_1 est une sous-variété $Q-$stable de X). On peut donc choisir σ comme un $\operatorname{diag}(T)-$vecteur propre de poids $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$.

Nous allons voir qu'alors $R(\sigma) = y^m \sigma_{\lambda_1+\mu_1}$.

En effet, $R(\sigma) = h\sigma_{\lambda_1+\mu_1}$ pour un certain $T-$vecteur propre $h \in \mathscr{O}(X_0)$ tel que $h\Big|_{(X_1)_0} = y^m\Big|_{(X_1)_0}$.

En particulier, $h = y^m + h'$ où h' est un $T-$vecteur propre de $\mathscr{O}(X_0)$ tel que $h'\Big|_{(X_1)_0} = 0$.

Or on a des isomorphismes $T-$équivariants de variétés :

$$X_0 \simeq (Q^+)^u \times P_1^u \times A_1 \text{ et } (X_1)_0 \simeq \{1\} \times P_1^u \times A_1$$

donc si on note $u_1, ..., u_p$ un système de coordonnées $T-$équivariantes de $(Q^+)^u$, $v_1, ..., v_q$ un système de coordonnées $T-$équivariantes de P_1^u, alors h' est une combinaison $\mathbf{k}-$linéaire de monômes :

$$u_1^{m_1} ... u_p^{m_p} v_1^{n_1} ... v_q^{n_q} y^k$$

où $m_1, ..., m_p, n_1, ..., n_q, k$ sont des entiers ≥ 0 et au moins un des m_i est non nul (car $h'\Big|_{(X_1)_0} = 0$).

Mais si $-\alpha_1, ..., -\alpha_p$, $-\beta_1, ..., -\beta_q$ sont les $T-$poids des coordonnées u_i, v_j, alors :

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_p\} = \Phi^+ \setminus \langle \Delta_1 \rangle \text{ et } \{\beta_1, ..., \beta_q\} \subseteq \langle \Delta_1 \rangle \ .$$

Comme h' est de $T-$poids $-m\gamma$, les monômes qui apparaissent dans la décomposition de h' doivent vérifier :

$$-m_1\alpha_1 - ... - m_p\alpha_p - n_1\beta_1 - ... - n_q\beta_q - k\gamma = -m\gamma$$

$$\Leftrightarrow (m-k)\gamma - n_1\beta_1 - ... - n_q\beta_q = m_1\alpha_1 + ... + m_p\alpha_p$$

ce qui est impossible : le membre de gauche est dans $\mathbb{Q}\Delta_1$ alors que dans le membre de droite apparaît au moins un coefficient non nul suivant une racine simple $\delta \in \Delta \setminus \Delta_1$ car tous les α_i sont dans $\Phi^+ \setminus \Delta_1$ et $m_i > 0$ pour au moins un indice i.

On en déduit que $h' = 0$.

Pour le cas général si λ_2 ou μ_2 n'est pas forcément nul, on utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_2}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_2}) \arrow[r, "R_{\lambda_1,\mu_1} \otimes R_{\lambda_2,\mu_2}"] \arrow[d, "R_{\lambda_1,\lambda_2} \otimes R_{\mu_1,\mu_2}"'] & \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\mu_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_2+\mu_2}) \arrow[d, "R_{\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2}"] \\
\Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\lambda_2}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_1+\mu_2}) \arrow[r, "R_{\lambda,\mu}"] & \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2})
\end{tikzcd} \ .$$

Pour montrer que $R_{\lambda,\mu}$ est surjectif, il suffit donc de montrer que

$$R_{\lambda_1,\lambda_2}, R_{\mu_1,\mu_2}, R_{\lambda_2,\mu_2}, R_{\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2}$$

sont surjectifs (car on sait déjà que R_{λ_1,μ_1} est surjectif).

Or, pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}^+(X)$ et tout caractère dominant μ_2 de Q, le morphisme R_{λ,μ_2} est surjectif. En effet, si $m \geq 0$ et si $\lambda^* + \mu_2 - m\gamma$ est dominant, alors $\lambda^* - m\gamma$ est aussi dominant puisque l'on a :

$$\delta \in \Delta_1 \Rightarrow \langle \mu_2, \delta^\vee \rangle = 0 \text{ et } \delta \in \Delta \setminus \Delta_1 \Rightarrow \langle \gamma, \delta^\vee \rangle \leq 0 \ .$$

Donc dans ce cas, $y^m \sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ et $y^m \sigma_{\lambda+\mu_2} = R_{\lambda,\mu_2}(y^m \sigma_\lambda \otimes \sigma_{\mu_2})$.

On termine avec le cas particulier où X est une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Il existe Q un sous-groupe parabolique de G contenant B^- tel que $Q/Q^r \simeq \mathrm{PGL}_2$ ou SL_2 et $\pi : X \to G/Q$ un morphisme $G-$équivariant tel que :

$$\pi^{-1}(Q/Q) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

(isomorphisme PGL_2-équivariant (pour l'action diagonale de PGL_2 sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$)). On notera $X_1 := \pi^{-1}(Q/Q)$.

Notons f et m les morphismes suivants :

$$\begin{tikzcd} G \times X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"] & G/Q \times X_1 \\ X & \end{tikzcd}$$

$f : (g, x) \mapsto (gQ, x)$, $m : (g, x) \mapsto g.x$. Pour tout λ caractère de Q et tous k_1, k_2 entiers, on note $\mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2}$ le faisceau $m_* f^* \left(\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(k_1, k_2)\right)$ sur X.

Les faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2}$ sont inversibles (il suffit de le vérifier au-dessus de l'ouvert $\pi^{-1}(BQ/Q)$ de X qui est isomorphe à $BQ/Q \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) et tous les faisceaux inversibles sur X sont de cette forme à isomorphisme près à cause de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}(G/Q) \overset{\pi^*}{\to} \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_1) \to 0$$

(*cf.* la démonstration du lemme 2.1).

Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ des faisceaux inversibles sur X engendrés par leurs sections globales. Soient λ, μ des caractères de Q, k_1, k_2, l_1, l_2 des entiers tels que :

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2} \text{ et } \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\mu,l_1,l_2} \ .$$

On a alors :

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu,k_1+k_2,l_1+l_2} \ .$$

Puisque $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont engendrés par leurs sections globales, les poids λ, μ sont des caractères de T dominants (relativement à B) et on a : $k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 0$.

Si $s \geq 0$ est entier, on note $\mathbf{k}[X, Y]_s$ est l'espace des polynômes homogènes de degré s en les deux variables X, Y. On a :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \simeq V_{\lambda^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{k_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{k_2}$$

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \simeq V_{\mu^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{l_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{l_2}$$

$$\Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') \simeq V_{\lambda^*+\mu^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{k_1+l_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X, Y]_{k_2+l_2} \ .$$

La surjectivité du morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

résulte alors directement de la surjectivité des morphismes :

$$V_{\lambda^*} \otimes V_{\mu^*} \to V_{\lambda^*+\mu^*}$$

et

$$\mathbf{k}[X, Y]_{k_i} \otimes \mathbf{k}[X, Y]_{l_i} \to \mathbf{k}[X, Y]_{k_i+l_i} \ .$$

Q.e.d.

Références

[1] D. Akhiezer : Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors. *Ann. Global Anal. Geom.*, 1(1):49–78, 1983.

[2] M. Brion : Groupe de picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2):397–424, 1989.

[3] M. Brion : On spherical varieties of rank one. *in Group actions and invariant theory (Montreal, PQ, 1988)*, pages 31–41, 1989.

[4] M. Brion, D. Luna et Th. Vust : Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3):617–632, 1986.

[5] R. Chirivi et A. Maffei : Projective normality of complete symmetric varieties. *Duke Math. J.*, 122(1):93–123, 2004.

[6] R. Hartshorne : *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[7] J.C. Jantzen : *Representations of algebraic groups.* Pure and Applied Mathematics, 131. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[8] S. S. Kannan : Projective normality of the wonderful compactification of semisimple adjoint groups. *Math. Z.*, 239(4):673–682, 2002.

[9] D. Luna : Toute variété magnifique est sphérique. *Transform. Groups*, 3(3):249–258, 1996.

[10] B. Wasserman : Wonderful varieties of rank two. *Transform. Groups*, 1:375–403, 1996.