Commande basée vision d'écoulements fluides

R. Tatsambon Fomena, Christophe Collewet

▶ **To cite this version:**

R. Tatsambon Fomena, Christophe Collewet. Commande basée vision d'écoulements fluides. 20ème congrès français de mécanique, Aug 2011, besançon, France. inria-00629839

HAL Id: inria-00629839
https://inria.hal.science/inria-00629839

Submitted on 6 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commande basée vision d'écoulements fluides

R. Tatsambon Fomena, C. Collewet

Cemagref, 17 avenue de Cucillé, 35 044 Rennes Cedex
Inria Rennes-Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu, 35 042 Rennes Cedex

Résumé :

Cet article propose une nouvelle approche de commande en boucle fermée d'un écoulement fluide. Cette approche permet de s'affranchir de la synthèse d'un observateur. Pour ce faire, un dispositif de visualisation est utilisé, il permet de remonter au champ de vitesses des particules via des techniques de flot optique. Nous montrons très nettement les bénéfices d'utilisation d'une telle approche en présence du bruit de mesures par rapport aux approches classiques utilisant le frottement pariétal. Ces dernières approches sont également surpassées dans le cas d'une mauvaise initialisation de leur observateur nécessaire à la loi de commande.

Abstract:

This paper introduces a new approach for closed-loop control of a fluid flow. This approach does not require the use of an observer to estimate the flow state. Indeed, dense flow velocity maps can be obtained via mature optical flow techniques dedicated to flow visualization. Using a 2D plane Poiseuille flow, we prove that this new control approach is of great improvements for flow control in comparison with the standard control solutions which use a limited number of available shear stress measurements.

Mots clefs : **commande, vision, écoulements**

1 Introduction

La majorité des travaux en commande d'écoulements est dédiée à la commande de la transition entre les états laminaire et turbulent. Retarder, accélérer ou modifier cette transition est d'un grand intérêt économique pour certaines applications industrielles. Par exemple, il a été montré pour un engin aéronautique que la réduction de la traînée peut être obtenue en augmentant la portance, ce qui par conséquent limite la consommation de carburant.

La commande d'un écoulement peut être effectuée soit de manière passive soit de manière active. La commande passive consiste à agir de manière constante sur le système. La plupart du temps, cela revient à un problème d'optimisation de forme [2]. La commande active quant à elle nécessite un apport d'énergie extérieur pour agir sur l'écoulement. Citons par exemple les techniques de soufflage et d'aspiration [6]. Cependant, dans la grande majorité des cas, la commande active est utilisée en boucle ouverte [4] ou plus encore sous forme de forçage [9]. En effet, la réalisation d'une commande active en boucle fermée requiert l'utilisation de capteurs non-intrusifs, précis et adaptés à l'échelle d'espace-temps du phénomème étudié. Malheureusement, ces capteurs sont rarement disponibles dans le contexte réel d'application de la commande. La mesure la plus utilisée est le frottement pariétal en un nombre limité de points sur la paroi [6].

Pour résoudre ce problème, cet article propose une approche de commande basée vision. À notre connaissance, une telle approche n'a jamais été utilisée dans le cadre de la commande d'écoulements. La commande basée vision est une technique bien établie au sein des communautés robotique et automatique. En effet cette technique a montré des résultats significatifs pour la commande des systèmes complexes tels que les robots médicaux, sous-marins, aériens et mobiles [1]. De façon générale, cette

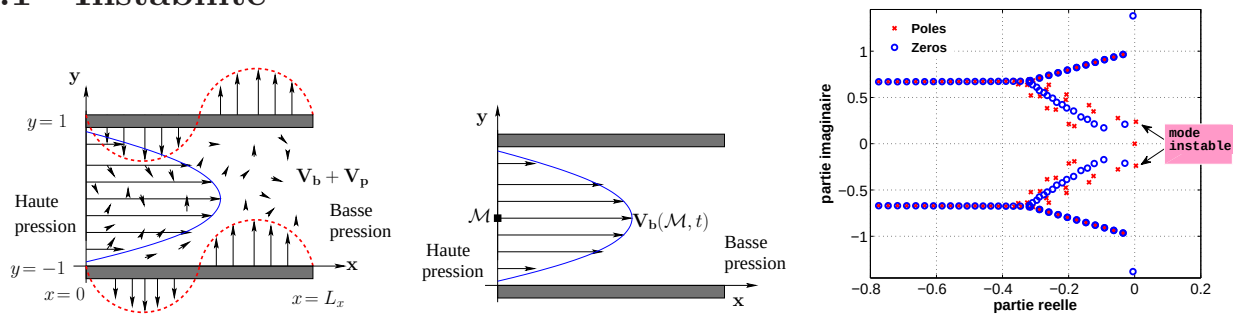
technique consiste à utiliser des informations visuelles issues d'un capteur de vision pour commander un système dynamique [3]. En utilisant un capteur de vision, un écoulement peut être complètement observé via une mesure du flot optique. Nous montrons que cette observation complète améliore significativement la commande d'écoulements en comparaison des commandes présentes dans la littérature qui utilisent un nombre limité de mesures du frottement.

Dans cet article, nous validons la commande basée vision sur l'écoulement 2D plan de Poiseuille. Dans la Section 2 nous rappelons le problème d'instabilité dans l'écoulement de Poiseuille ainsi que les solutions actuellement proposées pour pallier ce problème. Les limites de ces solutions sont clairement montrées dans cette même section. Ces limites sont principalement dues au nombre limité de mesures disponibles. Dans la Section 3 la commande basée vision est introduite et est présentée comme une solution aux limites évoquées. L'approche proposée est validée en Section 4 par le biais de simulations.

2 Écoulement de 2D plan de Poiseuille : instabilité et commandes existantes

Dans cette section nous présentons le problème de la commande de l'écoulement de Poiseuille en régime instable [8]. Ensuite nous présentons les solutions, s'appuyant la mesure du frottement pariétal, qui existent pour résoudre ce problème.

2.1 Instabilité



(a) (b) (c)

FIG. 1 – Commande aux frontières d'un écoulement perturbé 2D plan de Poiseuille : (a) Commande aux frontières de l'écoulement de base $\mathbf{V_b}(x,y,t)$ perturbé par $\mathbf{V_p}(x,y,t)$ avec L_x la longueur d'une période dans le sens de l'écoulement, (b) profil de vitesses de l'écoulement stationnaire où $\mathcal{M}$ est un point de l'écoulement et (c) pôles et zeros du système linéarisé réduit pour $Re = 10\ 000$, $\alpha_n = 1$.

Le modèle réduit utilisé pour élaborer une commande aux frontières (voir figure 1(a)) permettant de réguler autour de son état stationnaire (voir figure 1(b)) un écoulement perturbé de Poiseuille est donné par [7] :

$$\dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{A}^{\mathbf{n}}\mathbf{p}^{\mathbf{n}}(t) + \mathbf{B}^{\mathbf{n}}\mathbf{u}(t),\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}^{\top\mathbf{n}}\mathbf{p}^{\mathbf{n}}(t),\ \mathbf{p}^{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{p}^{\mathbf{n}}{}_0 \tag{1}$$

où $\mathbf{p}^{\mathbf{n}}(t)$ est le vecteur d'état, $\mathbf{A}^{\mathbf{n}}$ est la matrice d'état, $\mathbf{u}(t)$ est le vecteur d'entrées de commande sur les bords inférieur et supérieur, $\mathbf{B}^{\mathbf{n}}$ la matrice de commande, $\mathbf{C}^{\mathbf{n}}$ est la matrice de sortie et $\mathbf{z}(t)$ est le vecteur de mesures du frottement pariétal sur les bords inférieur et supérieur. De manière plus précise, le vecteur $\mathbf{p}^{\mathbf{n}}(t)$ correspond à la projection des vitesses de perturbation $\mathbf{V_p}(x,y,t)$ sur les bases de Fourier et sur l'évaluation des polynômes de Chebychev aux points de collocations de Gauss-Lobatto [7]. Les bases de Fourier et les polynômes de Chebychev sont nécessaires à la discrétisation des équations de Navier-Stokes (ENS) et à l'obtention du modèle réduit. Noter que la vitesse de perturbation $\mathbf{V_p}(x,y,t)$ est définie comme la différence entre la vitesse courante de l'écoulement et la vitesse en régime établi.

Pour un nombre de Reynolds de $R_e = 10\ 000$, l'écoulement est instable uniquement pour le nombre d'onde $\alpha_n = 1$ comme le montrent les pôles de la matrice d'état $\mathbf{A}^{\mathbf{n}}$ sur la figure 1(c). Dans ce cas, une petite perturbation de l'écoulement en régime stationnaire le conduit à un écoulement turbulent. Plusieurs solutions ont été proposées pour stabiliser cet écoulement perturbé.

2.2 Commandes existantes

En utilisant un retour de sortie classique $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k_1}\mathbf{z}(t)$, où $\mathbf{k_1}$ est une matrice de gain, dans (1), l'écoulement instable de Poiseuille peut être stabilisé [6]. Cependant, ce retour de sortie, à cause de l'utilisation d'une seule mesure de frottement pariétal, ne réussit généralement pas à supprimer de grands modes transitoires qui pourraient déclencher la transition vers la turbulence [6]. En supposant que le vecteur d'état $\mathbf{p^n}(t)$ est disponible, une commande par retour d'état de type LQR (Linear Quadratic Regulator) peut facilement stabiliser l'écoulement perturbé [7]. Toutefois, en pratique, l'approche LQR ne peut pas être utilisée puisque cela requiert la vraie valeur du vecteur d'état $\mathbf{p^n}(t)$. C'est la raison pour laquelle la commande par retour de sortie LQG (Linear Quadratic Gaussian), basée sur l'utilisation d'un observateur, est considérée comme une approche efficace à la stabilisation de l'écoulement de Poiseuille [7]. Cette dernière approche utilise une estimation $\widehat{\mathbf{p^n}}(t)$ du vecteur d'état. Cette estimation est obtenue à partir des mesures du frottement pariétal $\mathbf{z}(t)$ en utilisant un observateur construit suivant le schéma d'une estimation linéaire quadratique LQE (Linear Quadratic Estimation). La commande par retour de sortie LQG s'exprime donc comme suit

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k}^\top \widehat{\mathbf{p^n}}(\mathbf{z}(t)), \tag{2}$$

où le vecteur $\mathbf{k}$ est le gain optimal LQR. Dans la suite, cette dernière approche de commande sera appelée commande LQG basée frottement pariétal et abrégée LQG-BFP.

Le système bouclé avec la commande LQG-BFP est donné par [7] :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^\mathbf{n}(t) \\ \dot{\widehat{\mathbf{p}^\mathbf{n}}}(t) - \dot{\mathbf{p}}^\mathbf{n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A^n} - \mathbf{B^n}\mathbf{k}^\top & -\mathbf{B^n}\mathbf{k}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{A^n} - \mathbf{L}\mathbf{C}^{\top\mathbf{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p^n}(t) \\ \widehat{\mathbf{p}^\mathbf{n}}(t) - \mathbf{p^n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\mathbf{p}(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{p^n}(0) = \mathbf{p^n}_0,\ \widehat{\mathbf{p}^\mathbf{n}}(0) - \mathbf{p^n}(0) = \textbf{inconnue}, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathbf{I}$ est une matrice identité, $\varepsilon_z(t)$ et $\varepsilon_\mathbf{p}(t)$ sont les bruits Gaussiens associés respectivement à $\mathbf{z}(t)$ et $\mathbf{p^n}(t)$. Une mauvaise initialisation $\widehat{\mathbf{p}^\mathbf{n}}(0)$ de l'observateur pourrait causer la divergence du système non-linéaire décrivant l'écoulement réel. En plus, comme autre inconvénient, le bruit dans le frottement pariétal $\varepsilon_z(t)$ se propage dans la commande comme nous le montrons en section 4.2 ; et cela n'est pas souhaitable en pratique pour les actionneurs. Ces deux probèmes sont résolus par la commande basée vision introduite dans la section suivante.

3 Commande basée vision

Ici nous présentons d'abord la technique de commande basée vision aussi connue en robotique sous le nom d'asservissement visuel. Nous présentons ensuite l'intérêt de l'utilisation de l'asservissement visuel pour la commande d'écoulements

3.1 Principe

Pour réaliser une tâche d'asservissement visuel, un ensemble d'informations visuelles $\mathbf{s}(t)$ est choisi à partir de l'image de la scène visualisée par un dispositif optique. Une loi de commande est ensuite élaborée de telle sorte que le vecteur d'informations visuelles $\mathbf{s}(t)$ atteigne la consigne $\mathbf{s}^*$ correspondant à l'ensemble désiré d'informations visuelles et donc à un état désiré du système dynamique. Généralement une partie de l'image est utilisée pour définir un difféomorphisme entre la scène observée et l'ensemble d'informations visuelles $\mathbf{s}(t)$. Le principe de la commande est donc de réguler le vecteur d'erreur $\mathbf{e}(t) = \mathbf{s}(t) - \mathbf{s}^*$ à zéro. La dynamique du vecteur erreur est alors donnée par

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{\partial \mathbf{e}(t)}{\partial t} + \mathbf{L_e}(t)\mathbf{u}(t), \tag{4}$$

où $\mathbf{u}(t)$ est vecteur d'entrées de commande du système, $\mathbf{L_e}(t)$ est la matrice jacobienne qui définit la variation des informations visuelles par rapport à la variation de la commande [3], et $\partial\mathbf{e}(t)/\partial t$ exprime la variation propre des informations visuelles.

Dans la suite nous appliquons l'asservissement visuel à la régulation de l'écoulement 2D plan de Poiseuille : nous choisissons un ensemble $\mathbf{s}(t)$ d'information visuelles à partir de cartes denses de vitesses de l'écoulement obtenues en utilisant des techniques de visualisation d'écoulements présentées dans [5].

3.2 Commande basée vision d'écoulements en boucle fermée

L'asservissement visuel fait partie de la classe de commandes dites référencées capteur en automatique où la commande est calculée dans l'espace du capteur [10]. De ce fait, l'asservissement visuel d'un écoulement correspond clairement à une commande où la synthèse d'un observateur n'est pas nécessaire. C'est là, bien entendu, un avantage considérable.

Pour notre problème nous choisissons $\mathbf{s}(t) = \mathbf{p^n}(t)$ dans un objectif de comparaison avec l'approche LQG-BFP. Autour de la solution stationnaire (le point d'équilibre), dans le cas idéal où l'état du système n'est pas bruité et où il n'y a pas d'erreurs de mesure, en identifiant la dynamique idéale du système décrite par (1) avec la dynamique idéale de l'erreur donnée par (4), on obtient immédiatement

$$\frac{\partial \mathbf{e}(t)}{\partial t} = \mathbf{A^n}\mathbf{e}(t),\ \mathbf{L_e}(t) = \mathbf{B^n} \text{ avec } \mathbf{e}(t) = \mathbf{p^n}(t). \tag{5}$$

Plus précisément les grandeurs présentés dans (5) peuvent être interprétées comme suit : le terme $\frac{\partial \mathbf{e}(t)}{\partial t}$ décrit le caractère instationnaire de l'image du champ de vitesses de l'écoulement dû au mouvement de l'écoulement non commandé et le terme $\mathbf{L_e}(t)$ décrit l'inhomogénéité spatiale du champ de vitesses de l'image de l'écoulement due à la commande (soufflage et aspiration).

Nous utilisons une commande simple de type retour d'état LQR

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k}^\top \widehat{\mathbf{p^n}}(\mathbf{V_{py}}(x, y, t)), \tag{6}$$

qui est précisément un retour de sortie puisque nous pouvons estimer le vecteur d'état $\widehat{\mathbf{p^n}}(t)$ à partir des vitesses $\mathbf{V_{py}}(x, y, t)$ mesurées par flot optique dans un cadre consistent avec les ENS [5]. Nous appellerons cette commande, la commande LQG basée vision, en abégré LQG-BV.

Dû à un manque de place, nous ne pouvons pas présenter le détail des calculs exprimant la relation liant la valeur réelle de létat $\mathbf{p^n}$ à sa valeur estimée $\widehat{\mathbf{p^n}}$. Dans le cas où le flot optique conduit à une vitesse de perturbation bruitée $\mathbf{V_{py}}(y, x, t) + \boldsymbol{\varepsilon}(y, x, t)$, il est possible de prouver que

$$\widehat{\mathbf{p^n}}(t) = \mathbf{p^n}(t) + \frac{1}{N}\mathbf{e^n}(t), \tag{7}$$

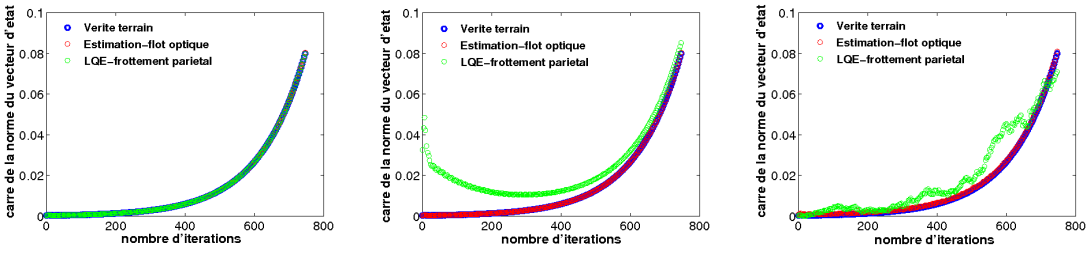
où le vecteur $\mathbf{e^n}(t)$ est lié au champ de bruit de mesures $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t)$. Il est clair qu'à partir de (7), plus le nombre de pixels N (typiquement $N = 1024$ pour une image standard) plus $\widehat{\mathbf{p^n}}(t)$ est proche de $\mathbf{p^n}(t)$.

Dans le cas où les mesures issues du flot optique sont bruitées, en injectant (7) dans (6) et en injectant le résultat ainsi obtenu dans (4), et en utilisant (5), on obtient le système bouclé commandé par l'approche vision

$$\dot{\mathbf{p}}^\mathbf{n}(t) = (\mathbf{A^n} - \mathbf{B^n}\mathbf{k}^\top)\mathbf{p^n}(t) - \frac{1}{N}\mathbf{B^n}\mathbf{k}^\top\mathbf{e^n}(t),\quad \mathbf{p^n}(0) = \mathbf{p^n}_0. \tag{8}$$

Le comportement du système bouclé (8) n'est donc plus affecté par la valeur initiale $\widehat{\mathbf{p^n}}(t = 0)$ de l'estimation. De plus pour une large valeur du nombre de pixels N dans la direction de l'écoulement, la dynamique du système bouclé (8) est moins affectée par le bruit de mesures car $\frac{1}{N}\mathbf{B^n}\mathbf{k}^\top\mathbf{e^n}(t)$ tend vers $\mathbf{0}$. Ceci est une deuxième grande amélioration par rapport à la commande LQG-BFP qui reste toujours bruitée quand l'estimateur LQE utilise des mesures bruitées de frottement pariétal comme le montre l'équation (3).

Dans la section suivante, nous comparons en simulation les commandes LQG-BFP et LQG-BV.



(a) (b) (c)

FIG. 2 – Comparaison de l'estimation du vecteur d'état en utilisant le frottement pariétal et le flot optique : (a) cas idéal, (b) mauvaise initialisation $\widehat{\mathbf{p^n}}(0) = 10\mathbf{p^n}(0)$ dans l'estimateur LQE et (c) bruit blanc Gaussien d'écart type 0.01 pour le frottement pariétal et $\widehat{\mathbf{p^n}}(0) = \mathbf{p^n}(0)$ pour l'estimateur LQE et bruit blanc Gaussien d'écart type 0.1 en chaque élément du champ de vitesses mesuré par flot optique.

4 Résultats

Les résultats théoriques établis dans la Section 3 sont validés dans cette section à l'aide de données synthétiques décrivant la variation spatio-temporelles de la vitesse de perturbation $\mathbf{V_p}(x, y, t)$. Ces données sont obtenues à partir du modèle réduit de l'écoulement de Poiseuille donné en (1). Ce modèle réduit est utilisé pour réaliser un simulateur de l'écoulement commandé de Poiseuille avec les caractéristiques classiques suivantes utilisées dans [6, 7] : $R_e = 10\ 000$, $L_x = 4\pi$ et $\alpha_n = 1$. En utilisant le code Matlab donné dans [7], le simulateur linéaire calcule les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ données dans (1) avec $M = 250$ pixels dans la direction y.

4.1 Comparaison des estimations de l'état

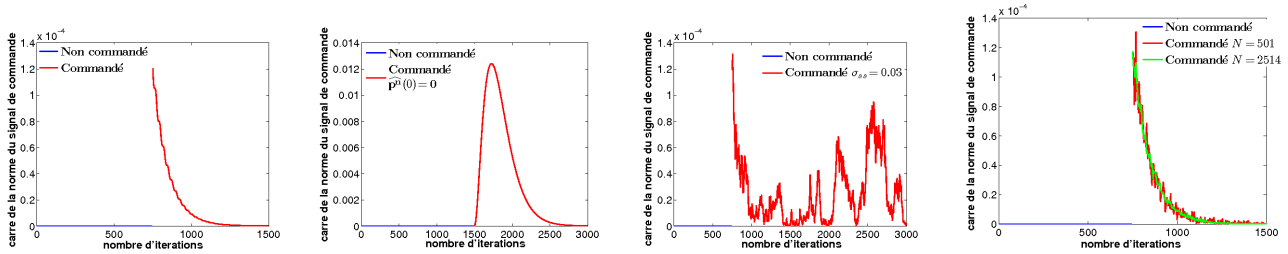
Ici nous comparons l'estimation du vecteur d'état en utilisant le frottement pariétal et le flot optique. Pour le flot optique on a $N = 501$ pixels dans le sens de l'écoulement. Les résultats sont données sur la figure 2 où on peut voir que l'estimation basée sur le flot optique est plus performante que l'estimateur LQE qui utilise le frottement pariétal. La figure 2(a) présente le cas idéal (pas de bruit de mesures et $\widehat{\mathbf{p^n}}(0) = \mathbf{p^n}(0)$ pour l'estimateur LQE) où on peut voir que toutes les estimations correspondent parfaitement à la vérité terrain. La figure 2(b) illustre le problème d'initialisation et la convergence asymptotique liés à l'estimateur LQE ; et montre que l'approche basée vision n'est pas concernée par ce problème.

Dans le but de montrer la robustesse au bruit de l'approche basée vision, l'écart type du bruit sur le flot optique a été volontairement fixé à une valeur 10 fois plus grande que l'écart type du bruit sur le frottement pariétal. Comme le montre la figure. 2(c), à cause du grand nombre de vitesses de l'écoulement obtenu par le flot optique, la nouvelle approche est très robuste au bruit sur les mesures.

4.2 Comparaison des signaux de commande

Les signaux de commande sont représentés sur la figure 3. La figure 3(a) décrit le cas idéal où il n'y a pas d'erreur d'initialisation. La figure 3(b) concerne le problème de l'initialisation dans la commande LQG-BFP : en supposant que la vraie valeur de $\widehat{\mathbf{p^n}}(0)$ est inconnue, ce qui est le cas en pratique, nous fixons $\widehat{\mathbf{p^n}}(0) = \mathbf{0}$ par défaut. Dans ce cas il est clair que le signal de commande peut être 100 fois plus grand que le signal de commande idéal incluant l'approche LQG-BV (comparez les valeurs de la commande sur les figures 3(a) et 3(b)). Cette grande valeur de la commande pourrait conduire à une trajectoire non adaptée du vecteur d'état et pourrait par conséquent conduire à la divergence du système non-linéaire que représente l'écoulement réel [7]. Par ailleurs la durée d'application de la commande dans le cas LQG-BFP est beaucoup plus longue qu'avec l'approche LQG-BV pour une même valeur de gain $\mathbf{k}$ (voir Fig. 3(b) où on a 3000 itérations).

Les figures 3(c) et 3(d) présentent le cas où les mesures sont bruitées. La figure 3(c) présente le cas LQG-BFP, où on peut voir que le signal de commande ne converge pas vers 0 : bien que l'écart type



(a) (b) (c) (d)

FIG. 3 – Comparaison des commandes LQG-BFP et LQG-BV : (a) cas idéal, (b) erreur d'initialisation dans le cas LQG-BFP, (c) bruit de mesures dans le cas LQG-BFP, (d) bruit de mesures dans le cas LQG-BV.

sur le bruit du frottement pariétal est fixé à une petite valeur, $\sigma_{ss} = 0.03$, le signal de commande est très bruité, ce qui n'est pas souhaitable pour les actionneurs. Enfin la figure 3(d) illustre la robustesse de la commande LQG-BV où l'écart type sur le bruit de mesures est 10 fois plus grand que dans le cas LQG-BFP : il est clair sur cette figure que plus le nombre d'échantillons de vitesses utilisées est grand, moins la commande LQG-BV est bruitée.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une approche basée vision pour la commande d'écoulements. Celle-ci ne nécessite pas l'utilisation d'un observateur contrairement aux approches habituelles. Notre approche s'appuie sur la technique de flot optique qui est non intrusive et qui, grâce au grand nombre de mesures qu'elle offre, est robuste au bruit de mesures. Enfin nous avons prouvé théoriquement et en simulation que cette nouvelle approche de commande a un comportement beaucoup plus satisfaisant que les approches habituelles basées sur la mesure du frottement pariétal.

Références

[1] F. Bonin-Font, A. Ortiz, and G. Oliver. Visual navigation for mobile robots : a survey. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 53(3) :263–296, 2008.

[2] H. Choi, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, 255 :503–539, 1993.

[3] B. Espiau, F. Chaumette, and P. Rives. A new approach to visual servoing in robotics. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 8(3) :313–326, June 1992.

[4] D. Greenblatt and I. Wygnanski. The control of flow separation by periodic excitation. *Prog. Aero. Sci*, 36(7) :487–545, 2000.

[5] D. Heitz, E. Mémin, and C. Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Exp. Fluids*, 48(3) :369–393, 2010.

[6] S. Joshi, J. Speyer, and J. Kim. A systems theory approach to the feedback stabilization on infinitesimal and finite amplitude disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 332 :157–184, 1997.

[7] J. McKernan. *Control of plane Poiseuille flow : a theoretical and computational investigation.* PhD thesis, Cranfield University, 2006.

[8] S. Orszag. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50 :689–703, 1971.

[9] B. Protas and J. Weisfred. Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Physics of Fluids*, 14(2) :810–826, 2002.

[10] C. Samson, M. Le Borgne, and B. Espiau. *Robot control : the Task Function approach.* Oxford University Press, 1991.