Méthodes numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux

Adrien Brandejsky

▶ **To cite this version:**

Adrien Brandejsky. Méthodes numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux. Probabilités [math.PR]. Université Bordeaux 1, 2012. Français. NNT : 2012BOR14534 . tel-00733731

HAL Id: tel-00733731

https://theses.hal.science/tel-00733731

Submitted on 19 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Adrien BRANDEJSKY

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES PROCESSUS MARKOVIENS DÉTERMINISTES PAR MORCEAUX

Directeurs de recherche : François Dufour et Benoîte de Saporta

Soutenue le 2 juillet 2012,

Devant la commission d'examen formée de :

B. de Saporta	Université Bordeaux 4	Directrice de thèse
F. Dufour	Institut Polytechnique de Bordeaux	Directeur de thèse
B. Gaujal	INRIA Rhônes-Alpes	Rapporteur
G. Pagès	Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
O.L.V. Costa	Universidade de São Paulo	Examinateur
C. Elegbede	Astrium	Examinateur

n° d'ordre : 4534

Thèse soutenue pour ASTRIUM dans le cadre d'un contrat spécifique de thèse passé avec Inria.

à Zohra,

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse à l'INRIA François Dufour et Benoîte de Saporta. Leur encadrement, leur disponibilité et leur implication m'ont été très précieux et ont grandement contribué à ma formation. Dans le même temps, ils m'ont laissé une grande liberté et m'ont témoigné une grande confiance en encourageant toujours mes initiatives. Je remercie également Charles Elegbede, mon encadrant Astrium, pour son aide, son accompagnement au fil de ces années et pour le modèle qu'il nous a fourni.

Ensuite, je tiens à exprimer ma reconnaissance à Gilles Pagès et à Bruno Gaujal pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. La pertinence de leurs remarques et de leur suggestions prouve l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et je les en remercie. Je remercie également Oswaldo Luiz do Valle Costa pour avoir accepté de rejoindre le jury en tant qu'examinateur.

Pour leur aide et leur gentillesse, je remercie chaleureusement les membres de l'équipe CQFD et notamment Huilong Zhang qui a bien voulu m'enseigner les mystères de la boucle de calcul. Je pense à Hicham et à Romain avec qui j'ai partagé l'expérience, tantôt gratifiante, tantôt désolante, de l'enseignement. Je pense également à tous ceux qui ont été mes collègues : Karen, Jade, Raphaël, Camille, Laurent et Philippe. De façon plus générale, je remercie le personnel de l'INRIA et de l'université Bordeaux 1 qui ont contribué au bon déroulement de ces trois années de thèse.

Enfin, je remercie ma famille, particulièrement ma grand-mère Ljerka, ainsi que ma belle-famille avec une mention spéciale pour les enfants sans lesquels (parfois) on s'ennuierait : Lazare, Inès, Gaya, Sirine, Elissa, Idris, Manèle, Yasmine, Nicolas et Mélissa.

Dans le désordre, et parce qu'eux aussi m'ont accompagné tout au long de ces années, j'ai une pensée pour Sheldon Cooper, Spike, Tyrion Lannister et l'amiral William Adama.

Mes pensées les plus tendres vont à Jéhane et Zohra. Ma fille Jéhane est une source intarissable d'amour, d'affection et de franche rigolade. Quant à Zohra, je ne la remercierai jamais assez pour tout le bonheur qu'elle m'apporte.

Table des matières

Introduction générale **9**

I Processus Markoviens Déterministes par Morceaux **13**

1 PMDM et méthodes numériques **15**
1.1 Processus Markoviens Déterministes par Morceaux 15
1.1.1 Equations différentielles ordinaires et champs de vecteurs . . . 17
1.1.2 Définition d'un PMDM 17
1.1.3 Notations 19
1.1.4 Structure sous-jacente des PMDM 20
1.1.5 Le processus augmenté du temps 21
1.2 Exemples de PMDM et applications 23
1.2.1 Processus de Poisson 23
1.2.2 Un exemple académique 24
1.2.3 Un modèle d'atelier de maintenance 25
1.2.4 Une assurance garantie de revenus 27
1.2.5 Un modèle de corrosion fourni par Astrium 30
1.3 Méthodes numériques pour les PMDM 34
1.4 Quantification 35
1.4.1 Quantification d'une variable aléatoire 36
1.4.2 Quantification d'une chaîne de Markov 37
1.5 Contribution de la thèse 38

II Espérance de fonctionnelles **43**

Introduction **45**

2 Approximation d'espérances de fonctionnelles **49**
2.1 Définitions et hypothèses 49
2.2 Formulation récursive de l'espérance 52
2.2.1 Continuité Lipschitz des fonctions de coût 53
2.2.2 Formulation récursive 55
2.3 Continuité Lipschitz de F^A, G^A et v_n 56
2.3.1 Calculs préliminaires et continuité Lipschitz de F^A 56
2.3.2 Ecriture intégrale de l'opérateur G^A 59
2.3.3 Continuité Lipschitz de G^A et G_t^A 61

2.3.4 Continuité Lipschitz de v_n 62
2.4 Schéma d'approximation 65
2.4.1 Quantification de la chaîne $(Z_k, S_k)_{k\leq N}$ 65
2.4.2 Approximation de l'espérance et vitesse de convergence 66
2.4.3 Démonstration du théorème 2.4.2 67

3 Fonctionnelles dépendant du temps 71
3.1 Propriétés du processus augmenté du temps 72
3.2 Fonctions de coût lipschitziennes 76
3.3 Horizon de temps déterministe 78
3.3.1 Estimation directe du terme de coût instantané 78
3.3.2 Bornes pour le terme de coût des sauts à la frontière 80
3.3.3 Bornes dans le cas général 83
3.3.4 L'horizon de calcul 85
3.4 Résultats numériques 87
3.4.1 L'atelier de maintenance 87
3.4.2 Le modèle de corrosion 90
3.4.3 Évaluation d'une assurance garantie de revenus 97
3.4.4 Quantification et problème d'échelles 100

Conclusion 103

III Temps de sortie 107

Introduction 109

4 Premières approches 113
4.1 Programmation linéaire 113
4.1.1 L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge 113
4.1.2 Le générateur infinitésimal des PMDM 116
4.2 Une première méthode 117
4.2.1 L'horizon de calcul 119
4.2.2 Encadrement de l'espérance du temps de sortie 120
4.2.3 Evaluation directe de l'espérance du temps de sortie 121

5 Approximation des moments et de la distribution 125
5.1 Présentation et hypothèses 125
5.2 Formulation récursive des problèmes 127
5.2.1 Distribution 128
5.2.2 Moments 129
5.3 Schémas d'approximation 129
5.3.1 Schéma d'approximation de la distribution et preuve de convergence 130
5.3.2 Schéma d'approximation des moments et vitesse de convergence 135

6 Exemples et résultats numériques **139**
6.1 Processus de Poisson . . . 139
6.1.1 Vérification des hypothèses . . . 139
6.1.2 Approximation des moments . . . 140
6.1.3 Approximation de la fonction de survie . . . 141
6.1.4 Vitesse de convergence pour la distribution . . . 143
6.2 Modèle de corrosion . . . 146
6.2.1 Vérification des hypothèses . . . 147
6.2.2 Approximation de l'espérance . . . 149
6.2.3 Approximation de la fonction de survie . . . 149

Conclusion **153**

IV Arrêt optimal partiellement observé **157**

Introduction **159**

7 Arrêt optimal partiellement observé et filtrage **163**
7.1 Définition du problème et hypothèses . . . 163
7.2 Filtrage optimal . . . 166

8 Programmation dynamique **173**
8.1 La chaîne de Markov $(\Pi_n, S_n)_{n\geq 0}$ . . . 173
8.2 Les $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt . . . 175
8.3 Problème d'arrêt optimal complètement observé . . . 178
8.4 Opérateurs de programmation dynamique . . . 181
8.5 Fonction de valeur et temps d'arrêt ϵ-optimal . . . 185

9 Schéma d'approximation et exemple numérique **193**
9.1 Continuité Lipschitz des opérateurs . . . 194
9.2 Approximation numérique par quantification . . . 198
9.2.1 Approximation de la fonction de valeur . . . 199
9.2.2 Démonstration du théorème 9.2.6 . . . 201
9.2.3 Construction numérique d'un temps d'arrêt ϵ-optimal . . . 207
9.3 Exemple numérique . . . 211

Conclusion **213**

Conclusion générale **217**

Table des figures **224**

Liste des tableaux **225**

Bibliographie **230**

Introduction générale

Les modélisations probabilistes sont de plus en plus répandues dans des domaines aussi divers que la fiabilité industrielle, la finance ou encore la biologie. En effet, celles-ci permettent non seulement de rendre compte de phénomènes purement aléatoires mais également d'appréhender des systèmes déterministes pour lesquels on manque d'information ou de données observables ou qui sont soumis à des imprécisions de mesures ou encore à des aléas extérieurs. Enfin, certains systèmes déterministes du fait de leur grande complexité sont avantageusement assimilés à des modèles probabilistes.

Les outils probabilistes adaptés à la description de l'évolution au cours du temps de tels modèles sont les processus stochastiques à temps continu. Parmi ces processus, on peut distinguer deux familles. D'une part, celle des processus de type diffusion, objets de la théorie des équations différentielles stochastiques et du calcul stochastique d'Itô qui est sans nul doute, la plus répandue dans la littérature. D'autre part, la famille très hétérogène des processus de type non-diffusif. Ce sont ces derniers que M.H.A. Davis cherche à unifier dans [Davis, 1984]. Il introduit, dans ce but, la classe générale des *Processus Markoviens Déterministes par Morceaux* (PMDM) qui combinent des trajectoires déterministes à des sauts aléatoires et qu'il présente comme étant "a general family of stochastic models covering virtually all non-diffusion applications".

Les PMDM sont des processus stochastiques hybrides c'est-à-dire qu'ils peuvent comporter à la fois une composante discrète et une composante euclidienne. En pratique, la composante euclidienne peut contenir les variables d'intérêt comme par exemple la position, la température, la pression ou encore l'épaisseur d'aluminium corrodée. La composante discrète, quant à elle, appelée le *mode*, peut correspondre à l'ambiance ou à l'environnement dans lequel évolue le processus ou encore au régime de fonctionnement du système. Les lois qui régissent l'évolution du PMDM peuvent être très différentes dans chacun de ces modes.

Les PMDM, parfois appelés *processus markoviens de saut avec dérive*, présentent à la fois des trajectoires déterministes et des sauts aléatoires. Plus précisément, à l'instant initial, le processus entame son mouvement en suivant un flot déterministe. Ce flot est obtenu comme solution d'équations différentielles portant sur les composantes euclidiennes du système. Ces équations différentielles peuvent différer en fonction du mode. La trajectoire du processus s'effectue donc le long de ce flot jusqu'au premier instant de saut qui est aléatoire. Ce saut peut avoir deux origines :

il peut se produire spontanément avec un certain taux qui dépend de la position du processus ou bien il peut être lui-même déterministe et se produire parce que le processus a heurté une frontière de son domaine d'évolution. Cette double nature des sauts est une caractéristique importante des PMDM et permet de couvrir une large classe de modèles. La position après saut est ensuite sélectionnée de manière aléatoire selon une loi qui ne dépend que de la position du processus immédiatement avant le saut. A partir de cette nouvelle position, le processus suit à nouveau un flot déterministe jusqu'au deuxième instant de saut et ainsi de suite.

De nombreuses recherches s'intéressent aux propriétés des PMDM. Citons entre autres : la stabilité et l'ergodicité [1], la représentation des PMDM par réseaux de Petri colorés [2], le contrôle stochastique d'un PMDM [3], la loi des grands nombres et les grandes déviations [4], l'étude des lois marginales d'un PMDM [5] et les cas où celles-ci admettent des densités [6]. En plus de l'ouvrage fondateur [Davis, 1993], il existe également deux ouvrages de référence [7] qui abordent les PMDM et notamment la théorie asymptotique.

Du point de vue applicatif, les PMDM sont déjà présents dans de nombreux et très divers domaines parmi lesquels on peut citer la fiabilité et la sûreté industrielle, la génétique, les neurosciences, les réseaux de télécom et internet, la finance et l'assurance. En effet, en raison de leur double nature déterministe et stochastique, ils sont particulièrement bien adaptés pour décrire des systèmes obéissant à des lois déterministes (des équations issues de la physique par exemple) mais également soumis à une source d'aléa (incertitude quant à certains paramètres, influence d'évènements extérieurs, régime de fonctionnement,...).

Cette thèse est financée par Astrium dans le cadre de l'ANR "FAUTOCOES" (ANR-09-SEGI-004). La multiplication des modèles utilisant les PMDM est à l'origine d'un besoin croissant de méthodes numériques efficaces. Ainsi, les ingénieurs d'Astrium ont souhaité obtenir des méthodes permettant d'évaluer numériquement une durée de service. Mathématiquement, ceci correspond à l'étude d'un temps de sortie. Nous proposons donc des méthodes numériques pour approcher les moments et la distribution d'un temps de sortie d'un PMDM. Nous poursuivons alors le développement de méthodes numériques pour les PMDM dans deux directions : l'approximation d'espérance de fonctionnelles et l'arrêt optimal partiellement observé. Cette thèse est donc composée de quatre parties : une première partie introductive suivie de trois parties respectivement dédiées à chacun des trois problèmes évoqués plus haut et illustrés d'exemples numériques.

1. [Dufour and Costa, 1999, Costa and Dufour, 2008]
2. [Everdij and Blom, 2005]
3. [Vermes, 1985, Gugerli, 1986, Lenhart, 1989, Costa and Davis, 1989, Costa, 1991, Dempster, 1991, Dempster and Ye, 1995, Costa et al., 2000]
4. [Faggionato et al., 2009, Faggionato et al., 2010]
5. [Cocozza-Thivent et al., 2006b]
6. [Tyran-Kamińska, 2009]
7. [Jacobsen, 2006, Koroliuk and Limnios, 2005]

Partie I Cette première partie, le chapitre 1, constitue une introduction aux travaux présentés dans les parties suivantes. Nous y définissons notamment les processus markoviens déterministes par morceaux, détaillons certaines de leurs propriétés et décrivons quelques exemples dont un modèle de corrosion fourni par Astrium. Nous discutons ensuite des aspects numériques relatifs aux PMDM et présentons la méthode de quantification qui sera à la base des méthodes numériques développées dans cette thèse.

Partie II Cette partie traite de l'approximation d'espérance de fonctionnelles de PMDM. Dans le chapitre 2, nous commençons par délimiter le problème qui nous intéresse et par énoncer nos hypothèses. Nous développons ensuite notre méthode numérique qui est basée sur une formulation récursive de l'espérance de fonctionnelle issue de [Davis, 1993] que nous approchons par quantification d'une chaîne de Markov sous-jacente au PMDM. Nous prouvons la convergence de notre méthode et obtenons une borne de la vitesse de convergence. Dans le chapitre 3, nous étendons notre méthode au cas de fonctionnelles dépendant du temps et notamment à celui de la fonctionnelle à horizon déterministe. Nous illustrons ensuite notre méthode sur trois exemples numériques.

Partie III Dans cette partie, nous nous intéressons au temps de sortie d'un PMDM. Nous commençons, dans le chapitre 4, par exposer deux approches possibles que nous n'avons pas retenues dans la suite. D'une part, nous présentons la méthode, issue de [Helmes et al., 2001], d'approximation des moments par programmation linéaire et nous expliquons pourquoi elle s'adapte mal au cas des PMDM. D'autre part, nous montrons dans quelle mesure les résultats de la partie précédente permettent d'approcher l'espérance d'un temps de sortie. Ensuite, dans le chapitre 5, nous détaillons une méthode originale permettant d'approcher les moments et la fonction de survie du temps de sortie d'un PMDM. Celle-ci est à nouveau basée sur une formulation récursive des quantités d'intérêt et sur la quantification d'une chaîne de Markov sous-jacente au PMDM. Enfin, le chapitre 6 détaille deux exemples numériques.

Partie IV Cette dernière partie concerne l'arrêt optimal partiellement observé. A la différence des deux parties précédentes, il nous faut tout d'abord développer le cadre théorique nécessaire à la mise en place d'un schéma numérique. Ceci sera l'objet des chapitres 7 et 8. Le premier étudie la question du filtrage tandis que le second établit l'équation de programmation dynamique. Enfin, nous développons nos méthodes numériques dans le chapitre 9 qui visent, d'une part, à approcher la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal et, d'autre part, à expliciter un temps d'arrêt ϵ-optimal calculable en pratique. Un exemple académique illustre nos résultats.

Première partie

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux

Chapitre 1

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux et méthodes numériques

Ce chapitre introductif a pour but de présenter les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux (PMDM), de fixer certaines notations et définitions et de dresser les grandes lignes des méthodes numériques que nous développerons par la suite. Nous commençons par donner une définition précise des PMDM que nous illustrons de plusieurs exemples. Nous exposons ensuite les idées directrices de nos méthodes numériques, notamment, nous décrivons la méthode dite de *quantification*. Enfin, nous présentons les trois problèmes que nous étudierons respectivement dans les trois parties suivantes.

1.1 Processus Markoviens Déterministes par Morceaux

Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux ont été introduits par M.H.A. Davis (voir [Davis, 1993]) qui les présente comme une classe générale de modèles stochastiques non-diffusifs. Pour Schäl [Schäl, 1998], le résultat suivant de Cinlar et Jacod [Çinlar and Jacod, 1981] justifie l'analyse de Davis :

Tout processus de Markov fort $(X_t)_{t\geq 0}$ d'espace d'état E, borelien de $\mathbb{R}^d$, dont les trajectoires sont continues et à variations localement bornées est déterministe c'est-à-dire que $X_t = \Phi(X_0, t)$ avec $\Phi : \mathbb{R}^+ \to E$ un flot déterministe.

En conséquence, un processus de Markov fort non trivial présente nécessairement des trajectoires de variation totale infinie ou est soumis à des sauts. Le premier cas conduit à l'introduction des processus de diffusions qui sont largement représentés dans la littérature. La deuxième possibilité suggère d'étudier des processus présentant des saut et, d'après le résultat de Cinlar et Jacod, suivant un flot déterministe entre ces instants de saut. Il s'agit des Processus Markoviens Déterministes par Morceaux et c'est donc très naturellement que l'on est amené à considérer cette famille

importante.

Une caractéristique importante des PMDM est qu'il s'agit de processus hybrides. Un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ est donc de la forme $(X_t)_{t\geq 0} = (m_t, \zeta_t)_{t\geq 0}$ où m_t représente la partie discrète, appelée *le mode*, et ζ_t est une variable euclidienne. Le mode est à valeurs dans un ensemble fini [1] M, avec en général $M \subset \mathbb{N}$. L'évolution d'un PMDM est régie par trois caractéristiques locales, c'est-à-dire dépendant du mode $m \in M$: le flot Φ_m, le taux de saut λ_m et un noyau de transition Q_m qui permet de déterminer la position après un saut. Le processus part d'un point $x = (m, \zeta)$ dans l'espace d'état, la partie euclidienne ζ_t suit alors le flot déterministe $t \to \Phi_m(\zeta, t)$ jusqu'au premier temps de saut T_1 qui se produit soit spontanément de façon poissonienne avec un taux $\lambda_m(\Phi_m(\zeta, t))$ ou bien lorsque le flot $\Phi_m(\zeta, t)$ touche la frontière de l'espace d'état. Dans tous les cas, la position du processus à l'instant de saut T_1 est sélectionnée à l'aide du noyau de transition $Q_m(\Phi_m(\zeta, T_1), \cdot)$ et le processus repart depuis ce nouveau point $X_{T_1} = (m_{T_1}, \zeta_{T_1})$ noté Z_1. On définit de la même manière le temps S_2 jusqu'au prochain saut, l'instant du prochain saut est ainsi $T_2 = T_1 + S_2$, la nouvelle position après le saut est $Z_2 = X_{T_2}$ et ainsi de suite. La figure 1.1 donne un exemple de PMDM représenté jusqu'au deuxième temps de saut.

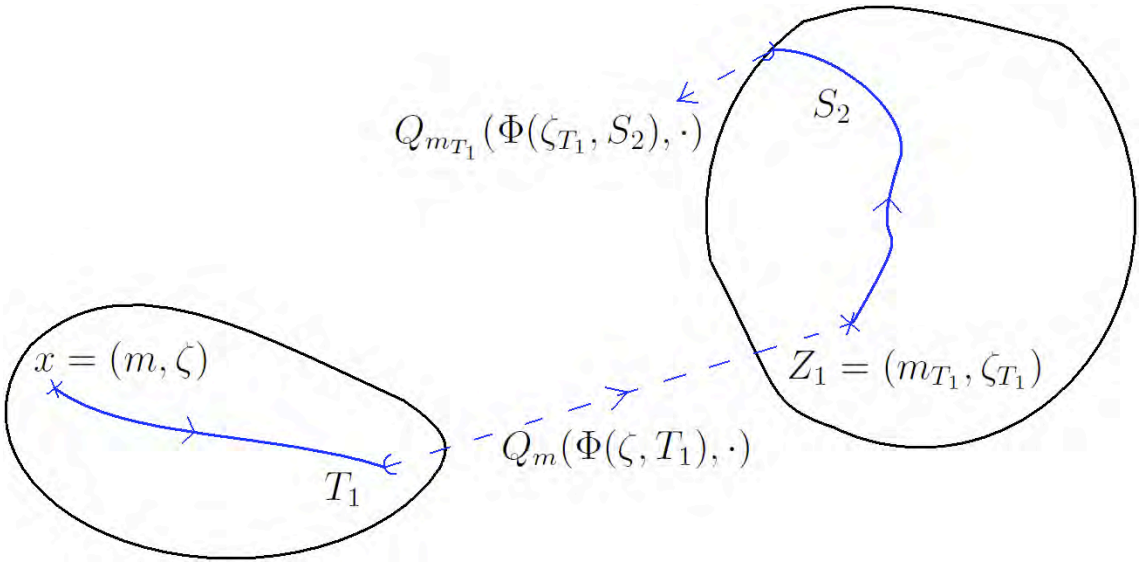

FIGURE 1.1 – Exemple de trajectoire d'un PMDM. Les deux composantes connexes de l'espace d'état peuvent correspondre à deux modes.

Ainsi, on associe au PMDM, deux chaînes de Markov à temps discret $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par les positions après un saut et les temps de saut, et $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par les positions après un saut et les durées inter-sauts. En choisissant judicieusement les caractéristiques $(\Phi_m, \lambda_m, Q_m)_{m\in M}$, on obtient des modèles stochastiques recouvrant un grand nombre de problèmes de recherche opérationnelle. Nous pré-

1. Dans [Davis, 1993], l'auteur considère une définition plus générale des PMDM car il permet à M d'être infini dénombrable. Cependant, cette généralisation n'est utile dans aucun des exemples que nous considèrerons.

senterons des exemples dans la section 1.2.

1.1.1 Equations différentielles ordinaires et champs de vecteurs

Avant de définir précisément les PMDM, nous devons rappeler quelques résultats concernant les équations différentielles ordinaires et la notion de champs de vecteur. Ceci nous permettra de décrire les parties déterministes des trajectoires des PMDM. Dans la suite, on fixe d un entier supérieur ou égal à 1.

Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction lipschitzienne. L'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}\Big(x(t)\Big) = b\Big(x(t)\Big), \qquad x(0) = x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1.1}$$

possède une unique solution notée $\Phi(x,t)$. A partir de l'unicité de la solution, on obtient la propriété de semi-groupe suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tous $s,t \in \mathbb{R}$, on a

$$\Phi\Big(\Phi(x,t),s\Big) = \Phi(x,t+s).$$

On définit maintenant $\mathfrak{X}$ un opérateur différentiel du premier ordre de la façon suivante : pour tout $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continûment différentiable,

$$\mathfrak{X}f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) b_i(x) \tag{1.1.2}$$

où on a noté b_i la i-ième coordonnée de b. On peut alors montrer [Davis, 1993, section 22] que $\Phi(x,\cdot)$ satisfait l'équation (1.1.1) si et seulement si pour tout $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ infiniment différentiable, on a

$$\frac{d}{dt} f\Big(\Phi(x,t)\Big) = \mathfrak{X}f\Big(\Phi(x,t)\Big).$$

On dit alors que $\mathfrak{X}$ est un *champ de vecteur* et Φ est le *flot* associé à $\mathfrak{X}$. Dans nos exemples, on donnera le flot Φ sans nécessairement expliciter la fonction b de l'équation différentielle ordinaire associée (1.1.1).

1.1.2 Définition d'un PMDM

Nous donnons maintenant une définition plus précise des Processus Markoviens Déterministes par Morceaux et nous introduisons quelques notations et hypothèses générales.

Pour tout espace métrique E, on note $\mathcal{B}(E)$ sa tribu borelienne, $B(E)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, bornées et mesurables définies sur E et $BL(E)$ le sous-espace des fonctions de $B(E)$ qui sont Lipschtziennes. On note ∂E sa frontière, $\overline{E}$ son adhérence et pour tout sous-ensemble A de E, on note A^c son complémentaire

dans E.

Soit M un ensemble fini appelé l'ensemble des modes du PMDM. En pratique, le mode peut représenter l'environnement ou le régime d'évolution du processus. Pour tout $m \in M$, le processus évolue dans E_m, sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit

$$E = \{(m, \zeta), m \in M, \zeta \in E_m\}.$$

Il s'agira de l'espace d'état du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} = (m_t, \zeta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ construit ci-après.

Un PMDM est défini par ses caractéristiques locales $(\Phi_m, \lambda_m, Q_m)_{m\in M}$.

- Pout tout $m \in M$, $\Phi_m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue appelée le flot dans le mode m. La fonction Φ_m est obtenue comme solution d'une équation différentielle ordinaire ainsi que nous l'avons décrit dans la section 1.1.1. On rappelle alors que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi_m(\cdot, t)$ est un homéomorphisme et $t \to \Phi_m(\cdot, t)$ est un semi-groupe i.e. pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_m(\zeta, t + s) = \Phi_m(\Phi_m(\zeta, s), t)$. Pour tout $x = (m, \zeta) \in E$, on définit maintenant le temps de sortie déterministe de E :

  $$t^*(x) = \inf\{t > 0 \text{ tel que } \Phi_m(\zeta, t) \in \partial E_m\}.$$

  On utilisera dans toute la suite la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

- Pour tout $m \in M$, le taux de saut $\lambda_m : \overline{E}_m \to \mathbb{R}^+$ est mesurable et satisfait :

  $$\forall (m, \zeta) \in E, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \int_0^\epsilon \lambda_m(\Phi_m(\zeta, t))dt < +\infty. \tag{1.1.3}$$

  Cette condition permettra d'éviter que le processus ne saute immédiatement.

- Pour tout $m \in M$, Q_m est un noyau de transition markovien sur $(\overline{E}_m, \mathcal{B}(\overline{E}))$ qui satisfait :

  $$\forall \zeta \in \overline{E}_m, Q_m(\zeta, \{(m, \zeta)\}^c) = 1.$$

  Cette condition permet d'assurer que le processus ne saute pas sur place. Chaque saut modifie le mode et/ou la composante euclidienne.

A partir de ces caractéristiques, Davis [Davis, 1993, page 57] montre qu'il existe un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, (\mathbf{P}_x)_{x\in E}\right)$ sur lequel est défini un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Partant d'un point $x \in E$, on peut construire ses trajectoires de la façon suivante. Soit T_1 une variable aléatoire positive de fonction de survie :

$$\mathbf{P}_x(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\Lambda(x,t)} & \text{si } 0 \le t < t^*(x), \\ 0 & \text{si } t \ge t^*(x), \end{cases}$$

où pour $x = (m, \zeta) \in E$ et $t \in [0, t^*(x)]$, on a posé

$$\Lambda(x, t) = \int_0^t \lambda_m(\Phi_m(\zeta, s))ds.$$

D'après la condition d'intégrabilité (1.1.3) imposée sur le taux de saut, on a $\mathbf{P}(T_1 = 0) = 0$. On tire alors une variable aléatoire Z_1 à valeurs dans E selon la loi $Q_m(\Phi_m(\zeta, T_1), \cdot)$. La trajectoire de X_t pour $t \leq T_1$ est donnée par :

$$X_t = \begin{cases} (m, \Phi_m(\zeta, t)) & \text{si } t < T_1, \\ Z_1 & \text{si } t = T_1. \end{cases}$$

Partant du point $X_{T_1} = Z_1$, on choisit alors d'une façon similaire $S_2 = T_2 - T_1$ le temps entre T_1 et le saut suivant, Z_2 la position après le deuxième saut et ainsi de suite. Davis montre, dans [Davis, 1993, section 25], que le processus ainsi obtenu est un processus de Markov fort $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Ce processus est continu à droite avec des limites à gauche et saute aux instants $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $T_0 = 0$). Par ailleurs, les processus $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $Z_n = X_{T_n}$ est la position après le saut et $S_n = T_n - T_{n-1}$ (avec $S_0 = 0$) est la n-ème durée inter-sauts sont des chaînes de Markov à temps discret. Ces chaînes de Markov jouent un rôle crucial dans notre étude, aussi, nous en détaillons certaines propriétés dans la section 1.1.4.

Concernant les temps de saut, on fera dans toute la suite l'hypothèse de non explosion suivante qui est standard (voir par exemple [Davis, 1993, section 24]) :

Hypothèse I.1 *Pour tout* $(x, t) \in E \times \mathbb{R}^+$, $\mathbf{E}_x \left[\sum_k \mathbb{1}_{\{T_k<t\}}\right] < +\infty$.

Elle implique en particulier que T_n tend vers l'infini p.s. lorsque n tend vers l'infini.

1.1.3 Notations

Afin de simplifier les notations, toute fonction h définie sur E sera identifiée avec ses fonctions composantes h_m définies sur E_m. Ainsi, on pourra écrire

$$h(x) = h_m(\zeta) \text{ lorsque } x = (m, \zeta) \in E.$$

On définit également un flot généralisé $\Phi : E \times \mathbb{R}^+ \to E$ de la façon suivante

$$\Phi(x, t) = (m, \Phi_m(\zeta, t)) \text{ lorsque } x = (m, \zeta) \in E. \tag{1.1.4}$$

De cette manière, on pourra raisonner sur $x \in E$ sans nécessairement préciser que x se décompose en $x = (m, \zeta)$. Le mode, caché dans la variable d'état, n'apparaîtra explicitement que rarement, ce qui allègera les notations.

On définit sur E la distance suivante, pour $x = (m, \zeta)$ et $x' = (m', \zeta') \in E$,

$$|x - x'| = \begin{cases} +\infty & \text{si } m \neq m', \\ |\zeta - \zeta'| & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Pour tout $x \in E$ et tout sous-ensemble A de E, on notera $d(x, A)$ la distance de x à A définie par

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} |x - a|.$$

Pour toute fonction w dans $B(\overline{E})$, on introduit les notations suivantes

$$Qw(x) = \int_E w(y)Q(x,dy), \qquad C_w = \sup_{x\in\overline{E}} |w(x)|,$$

et pour toute fonction Lipschitz w de $B(E)$, on note $[w]^E$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $[w]$ sa constante de Lipschitz :

$$[w]^E = \sup_{x\neq y\in E} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|},$$

avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

Remarque 1.1.1 *Pour $w \in B(\overline{E})$ et d'après la définition de la distance sur E, on a $[w]^E = \max_{m\in M}[w_m]^{E_m}$.*

Enfin, on utilisera également les notations suivantes. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a \wedge b = \min(a,b)$, $a \vee b = \max(a,b)$ et $a^+ = a \vee 0$. On notera aussi $\sigma(Y)$ la tribu engendrée par une variable aléatoire Y et si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, on notera $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ c'est-à-dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Décrivons maintenant plus en détail les deux chaînes de Markov $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous avons évoquées plus haut.

1.1.4 Structure sous-jacente des PMDM

Bien qu'il s'agisse d'un processus en temps continu, un PMDM contient une structure sous-jacente "à temps discret" donnée par la chaîne de Markov $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

- l'instant du n-ième saut est T_n (avec $T_0 = 0$),
- la variable S_n représente la n-ème durée inter-sauts (avec $S_0 = 0$), on a $S_n = T_n - T_{n-1}$ ou encore, $T_n = S_1 + ... + S_n$,
- la position après le n-ième saut est notée Z_n i.e. $Z_n = X_{T_n}$.

Ces chaînes de Markov joueront un rôle crucial dans toute notre discussion. Chacune d'entre elles "contient tout l'aléa" du PMDM puisque les trajectoires entre les instants de sauts sont déterministes. Il est possible de reconstituer, grâce à l'une de ces chaînes discrètes, l'intégralité du processus continu. En effet, à partir de $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \Phi(Z_n, t - T_n) \text{ si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

On peut écrire une relation similaire à partir de $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $T_n = \sum_{k=0}^n S_k$. Ces deux chaînes de Markov offrent donc la très intéressante possibilité de "résumer" en une chaîne à temps discret le processus original à temps continu. De manière plus précise, en notant $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration naturelle engendrée par le PMDM $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, Davis montre [Davis, 1993, théorème A2.1] que

$$\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma\Big(Z_0, S_0, ..., Z_n, S_n\Big) = \sigma\Big(Z_0, T_0, ..., Z_n, T_n\Big).$$

Davis montre également [Davis, 1993, section 25] que $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène dont le noyau de transition est comme suit : pour $h \in B(E \times \mathbb{R}^+)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[h(Z_n, S_n)\Big|Z_{n-1}, S_{n-1}] \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_E h(z,s)Q(\Phi(Z_{n-1},s),dz)\right) \lambda\Big(\Phi(Z_{n-1},s)\Big)e^{-\Lambda(Z_{n-1},s)}\mathbb{1}_{\{s<t^*(Z_{n-1})\}}ds \\
&\qquad + \left(\int_E h(z,t^*(Z_{n-1}))Q(\Phi(Z_{n-1},t^*(Z_{n-1})),dz)\right) e^{-\Lambda(Z_{n-1},t^*(Z_{n-1}))}. \quad (1.1.6)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut remarquer que le noyau de transition ci-dessus ne dépend pas de S_{n-1}, la loi de (Z_n, S_n) ne dépend que de la position Z_{n-1} après le précédent saut. En d'autres termes, on a la propriété suivante

$$\mathbf{E}[h(Z_n, S_n)\Big|Z_{n-1}, S_{n-1}] = \mathbf{E}[h(Z_n, S_n)\Big|Z_{n-1}].$$

Les deux termes de la somme dans l'expression du noyau de transition correspondent respectivement aux parties absolument continue et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue de la loi du temps inter-sauts. En effet, insistons sur le fait que les sauts du processus peuvent être de deux natures différentes. D'une part, ils peuvent se produire tout au long du flot de façon poissonienne au taux λ, on qualifiera ces sauts de *sauts aléatoires* ; quand ils se produisent, on a $S_n < t^*(Z_{n-1})$. D'autre part, les sauts sont forcés lorsque le processus atteint la frontière de l'espace d'état, on parlera alors de *sauts déterministes* ; ils correspondent aux cas où $S_n = t^*(Z_{n-1})$. Cette dualité est source de nombreuses difficultés lors de développements aussi bien théoriques que numériques. La loi des durées inter-sauts est en effet très dépendante de la géométrie de l'espace d'état et peut donc varier considérablement en fonction du problème considéré. Elle peut contenir une partie absolument continue et/ou une partie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Enfin, au sein d'un même modèle, les situations peuvent varier en fonction du mode. Les exemples que nous considérons ci-après rendent compte de cette diversité de situations.

1.1.5 Le processus augmenté du temps

Dans cette section, nous décrivons une transformation du processus, introduite dans [Davis, 1993, section 31], qui permet de traiter les problèmes dépendant explicitement du temps. Partant d'un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$, nous allons ainsi définir un nouveau processus $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dit *augmenté du temps*, défini sur un nouvel espace d'états afin d'inclure le temps dans la variable d'état. En effet, les paramètres du problème qu'on considère (comme les fonctions de coût d'un problème de contrôle) peuvent dépendre du temps. Il sera alors utile d'effectuer cette transformation car la dépendance en temps des paramètres deviendra alors implicite (le temps sera en effet inclus dans la trajectoire du processus). C'est le cas par exemple lorsque l'on s'intéresse à des problèmes à horizon de temps déterministe, comme à la section 3.3. Nous verrons un

autre exemple [2] de l'utilité d'introduire le processus augmenté du temps à la section 3.2. Nous définissons le processus *augmenté du temps* de la manière suivante.

Définition 1.1.2 *On introduit le nouvel espace d'état*

$$\widetilde{E} = E \times \mathbb{R}^+$$

muni de la norme définie par : pour tous $\xi = (x,t)$, $\xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$,

$$|\xi - \xi'| = |x - x'| + |t - t'| \tag{1.1.7}$$

où la norme sur E *est donnée par* (1.1.5). *Sur cet espace d'états, on définit un nouveau processus dit* augmenté du temps

$$\widetilde{X_t} = (X_t, t).$$

Le processus $(\widetilde{X_t})_{t\geq 0}$ est encore un PMDM dont les caractéristiques locales, notées $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\lambda}, \widetilde{Q})$, sont données pour tout $\xi = (x,t) \in \widetilde{E}$ par

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}(\xi) = \lambda(x), \\ \widetilde{\Phi}\Big(\xi, s\Big) = \Big(\Phi(x,s), t+s\Big) & \text{pour } s \leq t^*(x), \\ \widetilde{Q}\Big(\xi, A \times \{t\}\Big) = Q\Big(x, A\Big) & \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(E), \end{cases}$$

avec pour tout $\xi = (x,t) \in \widetilde{E}$,

$$\widetilde{t}^*(\xi) = \inf\{s > 0 \text{ tel que } \widetilde{\Phi}(\xi, s) \in \partial\widetilde{E}\} = t^*(x).$$

Nous utiliserons cette définition dans les sections 3.2 et 3.3 pour étudier des problèmes dont les paramètres dépendent explicitement du temps.

Par ailleurs, il peut arriver que les caractéristiques du PMDM (le taux de saut λ, le noyau de transition Q et la fonction b de l'équation différentielle ordinaire (1.1.1) définissant le flot Φ) dépendent explicitement du temps et non pas seulement de la variable d'état (voir par exemple le modèle présenté à la section 1.2.4). Dans [Davis, 1993, section 31], l'auteur explique comment est alors modifiée la définition du processus augmenté du temps ci-dessus. Les caractéristiques du nouveau PMDM ne dépendent alors plus que de la variable d'état (la dépendance en temps est implicite puisque le temps fait désormais partie de la variable d'état). Grâce à cette transformation, il n'est pas restrictif de considérer seulement des PMDM dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps ainsi que nous l'avons fait dans la section 1.1.2. En effet, comme l'écrit Davis, le cas des PMDM dont les caractéristiques dépendent explicitement du temps peut, de façon paradoxale, être vu comme un cas particulier des PMDM dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps.

Ceci conclut notre présentation des Processus Markoviens Déterministes par Morceaux et nous décrivons maintenant quelques exemples.

2. Il s'agira d'approcher l'espérance d'une fonctionnelle qui dépend de la trajectoire d'un PMDM mais également du temps.

1.2 Exemples de PMDM et applications

Les PMDM sont présents dans de nombreux domaines applicatifs. Ces domaines sont aussi divers que la modélisation de processus de dégradation [3], la fiabilité et la sûreté de fonctionnement [4], la génétique [5], les neurosciences [6], les réseaux de télécom et internet [7], la finance [8] et l'assurance [9]. On trouvera également plusieurs exemples de modèles utilisant les PMDM dans [Davis, 1993, section 21]. Enfin, nous citons l'article [Davis et al., 1987] qui traite du "capacity expansion problem" et qui constitue l'application historique des PMDM.

Nous décrivons maintenant les cinq exemples que nous étudierons dans la thèse. Les deux premiers sont académiques, les trois suivants correspondent à des applications réelles issues de l'industrie ou de l'assurance.

1.2.1 Processus de Poisson

Nos premiers exemples seront les très classiques processus de Poisson et processus de Poisson composé. En effet, ils font partie de la famille des PMDM.

Processus de Poisson simple

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = S_1 + \ldots + S_n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est appelé *processus de Poisson de paramètre* λ. C'est un PMDM d'espace d'état $E = \mathbb{R}^+$, d'intensité constante λ, de flot constant $\Phi(x,t) = x$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et dont le noyau de transition vérifie $Q(x, \{x+1\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Processus de Poisson composé

Soit $(\Upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendantes identiquement distribuées de loi μ. On appelle *processus de Poisson composé de paramètres* λ *et* μ, le processus $(N_t^\mu)_{t\geq 0}$ défini par

$$N_t^\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \Upsilon_n \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

3. [Chiquet et al., 2009]
4. [Gonzalez, 2010, de Saporta et al., 2010, Cocozza-Thivent et al., 2006, Eymard et al., 2008]
5. [Zeiser et al., 2010]
6. [Pakdaman et al., 2010]
7. [Graham and Robert, 2009, Graham and Robert, 2010, Busic et al., 2012]
8. [Jacobsen, 2006, chapitre 10]
9. [Dassios and Embrechts, 1989, Embrechts and Schmidli, 1994]

Le processus $(N_t^\mu)_{t\geq 0}$ est également un PMDM. Par rapport au précédent, la seule caractéristique qui change est le noyau de transition qui est alors donné, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par $Q(x,\cdot) = \mu(x+\cdot)$. Dans cet exemple, comme dans le précédent, on peut remarquer que le processus ne rencontrera jamais de frontière de l'espace d'état, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t^*(x) = +\infty$.

Processus de Poisson avec flot

On définit maintenant $Y_t = t + N_t$. Le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est également un PMDM d'espace d'état $E = \mathbb{R}^+$ dont les caractéristiques sont comme suit.

- Le taux de saut est constant : pour tout $x \in E$, $\lambda(x) = \lambda$. Ainsi les durées inter-sauts S_k suivent des lois exponentielles de paramètre λ indépendantes.
- Le flot est défini sur $(\mathbb{R}^+)^2$ par $\Phi(x,t) = x + t$, il n'y a pas de frontière et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t^*(x) = +\infty$.
- Enfin, les positions après les sauts sont données par $Q(x, \{x+1\}) = 1$ pour tout $x \in E$.

La figure 1.2 représente un exemple de trajectoire. Cette exemple sera étudié dans la section 6.1, on s'intéressera en particulier au temps de sortie de l'intervalle $[0; 10]$.

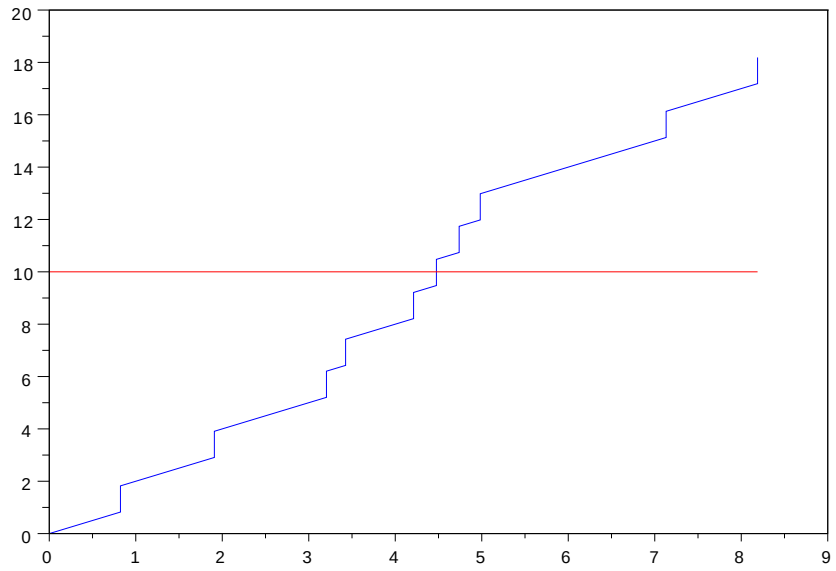

FIGURE 1.2 – Une trajectoire du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ (avec $\lambda = 1$) représentée jusqu'au $10^{ème}$ temps de saut.

1.2.2 Un exemple académique

On présente maintenant un nouvel exemple académique similaire à celui étudié dans [de Saporta et al., 2010]. Soit l'espace d'état $E = [0; 1[$.

- Pour $x \in E$ et $t \geq 0$, le flot est défini par $\Phi(x,t) = x + vt$. Ainsi, $t^*(x) = (1-x)/v$ est partout fini, et même borné par $1/v$.

- Le taux de saut est donné par $\lambda(x) = ax$ pour un $a > 0$.
- Le noyau de transition $Q(x, \cdot)$ correspond à une distribution uniforme sur un ensemble fini $E_0 \subset E$.

Ainsi, le processus évolue linéairement à vitesse v vers 1 et, plus il est proche de 1, plus il est susceptible de sauter vers un point de E_0. La figure 1.3 représente un exemple de trajectoire. Dans la section 9.3, on s'intéressera à un problème d'arrêt optimal partiellement observé pour cet exemple.

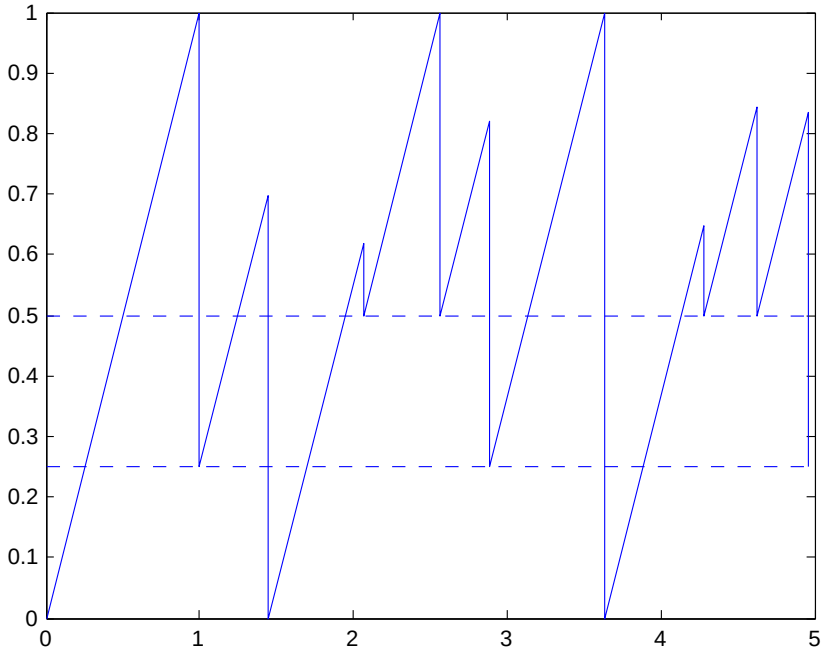

FIGURE 1.3 – Une trajectoire du processus représentée jusqu'au $9^{\text{ème}}$ temps de saut avec $a = 3$, $v = 1$ et $E_0 = \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\}$. Les lignes pointillées représentent les valeurs vers lesquelles il est possible de sauter.

1.2.3 Un modèle d'atelier de maintenance

Ce modèle d'atelier de maintenance est adapté de [Davis, 1993, section 21.15].

Dans une usine, une machine peut tomber en panne avec un taux $\lambda(\zeta)$ dépendant de son "âge" ζ. Elle est alors envoyée à l'atelier pour réparation. Par ailleurs, la direction de l'usine a décidé que, lorsque la machine a fonctionné toute une année sans panne, elle est également envoyée à l'atelier pour maintenance. On suppose que la réparation et la maintenance ont toujours la même durée de 7 jours et on suppose également qu'à l'issue de cette période, la machine est totalement réparée, sans trace d'usure. On considère donc trois modes :

- la machine fonctionne ($m = 1$),
- la machine est en réparation ($m = 2$),
- la machine est en maintenance ($m = 3$).

L'état de cette machine est modélisée par un PMDM noté $(X_t)_{t\geq 0} = (m_t, \zeta_t, t)_{t\geq 0}$ où ζ_t est le temps depuis le dernier changement de mode (ce paramètre est nécessaire puisque le taux de panne λ dépend de l'"âge" de la machine).

Remarque 1.2.1 *Ce PMDM correspond au processus "augmenté du temps" tel que décrit dans la section 1.1.5. En effet, pour décrire le modèle, on aurait pu se contenter du PMDM $(m_t, \zeta_t)_{t\geq 0}$ c'est-à-dire ne contenant pas explicitement la variable t. Nous verrons à la section 3.4.1 pourquoi il est intéressant d'inclure le temps dans le processus.*

L'espace des modes est $M = \{1; 2; 3\}$ et l'espace d'état est

$$E = \Big(\{1\} \times [0; 365] \times \mathbb{R}^+\Big) \cup \Big(\{2\} \times [0; 7] \times \mathbb{R}^+\Big) \cup \Big(\{3\} \times [0; 7] \times \mathbb{R}^+\Big).$$

Dans chaque mode, le flot est $\Phi_m\Big((\zeta, t), u\Big) = (\zeta + u, t + u)$. Le temps de sortie déterministe t^* est donc donné par

$$\begin{aligned} t^*(1, \zeta, t) &= 365 - \zeta, \\ t^*(m, \zeta, t) &= 7 - \zeta \text{ pour } m \in \{2; 3\}. \end{aligned}$$

Décrivons maintenant les sauts du processus. Dans le mode 1, le processus saute vers le mode 2 au taux $\lambda(\zeta)$ si $\zeta < 365$ et un saut est forcé vers le mode 3 lorsque $\zeta = 365$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} Q\Big((1, \zeta, t), \{(2, 0, t)\}\Big) &= 1 \text{ si } \zeta < 365, \\ Q\Big((1, \zeta, t), \{(3, 0, t)\}\Big) &= 1 \text{ si } \zeta = 365. \end{aligned}$$

Dans les modes 2 et 3, les sauts sont nécessairement déterministes i.e. $\lambda = 0$ et ne se produisent que lorsque $\zeta = 7$. On a donc

$$Q\Big((2, 7, t), \{(1, 0, t)\}\Big) = Q\Big((3, 7, t), \{(1, 0, t)\}\Big) = 1.$$

La figure 1.4 représente un exemple de trajectoire du processus.

On suppose que l'opérateur peut agir sur le fonctionnement de la machine en choisissant la valeur d'un paramètre $x \in [0; 1]$. Par exemple, x peut représenter une charge ou une cadence imposée à la machine. Les coûts ou profits relatifs à la machine sont alors comme suit :

- **mode 1 :** la machine produit des biens dont la valeur journalière est $r(x)$,
- **mode 2 :** en réparation, elle engendre un coût journalier $p(x)$,
- **mode 3 :** en maintenance, le coût est $q(x)$ avec raisonnablement $p(x) > q(x)$.

Notre but est de trouver la valeur du paramètre x qui maximise l'espérance du bénéfice total $B(x)$ i.e. la valeur actualisée (le taux d'intérêt sera noté ρ) de la production à laquelle on retranche les coûts liés à la maintenance et à la réparation sur une période $t_f = 5$ années :

$$B_{max} = \sup_{x\in[0;1]} B(x)$$

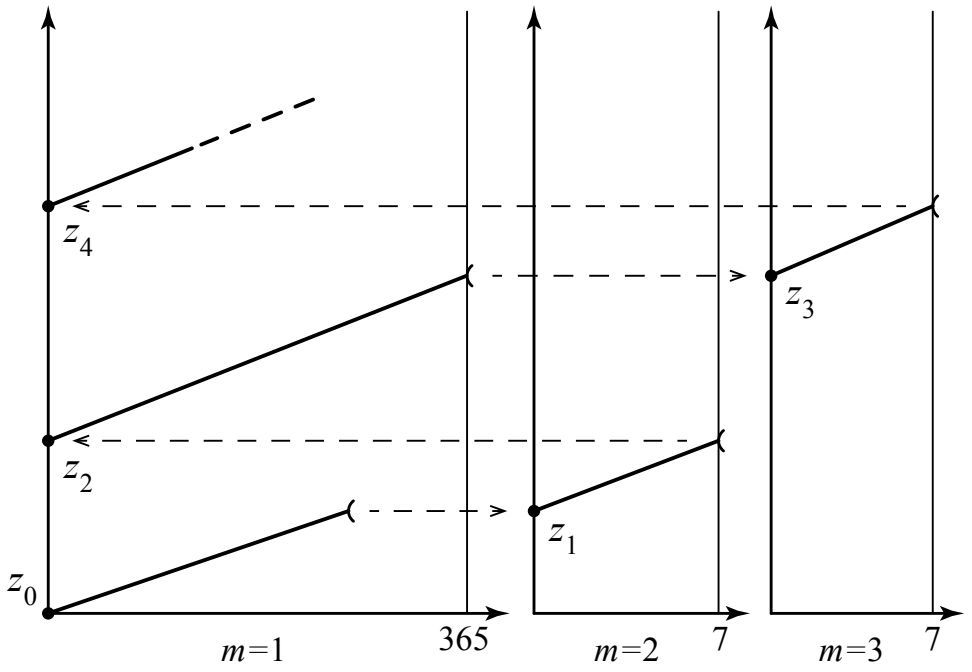

FIGURE 1.4 – Un exemple de trajectoire du modèle d'atelier de maintenance. Le processus part du point Z_0 dont le mode est $m = 1$ (machine en fonctionnement). La machine peut être envoyée à l'atelier pour réparation ($m = 2$) ou maintenance ($m = 3$).

où

$$B(x) = \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\Big(r(x)\mathbb{1}_{\{m_t=1\}} - p(x)\mathbb{1}_{\{m_t=2\}} - q(x)\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}\Big)dt\right].$$

On étudiera cet exemple dans la section 3.4.1. Remarquons simplement que $B(x)$ peut être approché par des simulations de Monte Carlo mais qu'il serait laborieux de résoudre le problème d'optimisation par cette méthode. En effet, il faudrait effectuer une nouvelle série de simulations pour chaque valeur de x. Notre méthode s'affranchira de cet obstacle.

1.2.4 Une assurance garantie de revenus

Ce modèle d'assurance est adapté de [Davis, 1993, section 21.12].

Une compagnie d'assurance propose une assurance "garantie de revenus" en cas d'arrêt maladie prolongé qui fonctionne de la manière suivante. Lorsqu'un arrêt maladie se prolonge au-delà d'une durée p (en années), l'assuré reçoit de la part de la compagnie une indemnité déterminée à l'avance jusqu'à la reprise d'activité, la date de fin de contrat t_f ou le décès de l'assuré. Ainsi, du point de vue de l'assureur, il existe quatre situations :

- l'assuré est en bonne santé ($m = 1$),

- l'assuré est en arrêt maladie (durée inférieure à p) et ne perçoit pas encore d'indemnité de la part de la compagnie ($m = 2$),
- l'assuré est en arrêt maladie (durée supérieure à p) et perçoit des indemnités ($m = 3$),
- l'assuré est décédé ($m = 4$).

Dans cet exemple, nous allons voir que le taux de saut dépend du temps depuis la dernière transition (changement de mode) mais également du temps courant (temps depuis le début du contrat). Comme indiqué dans la section 1.1.5, nous allons donc inclure le temps dans la variable d'état, c'est-à-dire considérer un processus augmenté du temps, afin d'obtenir un PMDM qui entre dans le cadre de la définition que nous avons fixée dans la section 1.1.2.

La situation d'un assuré est modélisée par un PMDM (augmenté du temps) noté $(X_t)_{t\geq 0} = (m_t, \zeta_t, t)_{t\geq 0}$ où ζ_t est le temps depuis le dernier changement de mode. L'espace d'état est

$$E = \Big(\{1\} \times (\mathbb{R}^+)^2\Big) \cup \Big(\{2\} \times [0; p] \times \mathbb{R}^+\Big) \cup \Big(\{3\} \times (\mathbb{R}^+)^2\Big) \cup \Big(\{4\} \times (\mathbb{R}^+)^2\Big).$$

Dans chaque mode, le flot est $\Phi_m\Big((\zeta, t), u\Big) = (\zeta + u, t + u)$. Ainsi, le temps de sortie déterministe t^* est donné par

$$\begin{aligned} t^*(2, \zeta, t) &= p - \zeta, \\ t^*(m, \zeta, t) &= +\infty \text{ si } m \in \{1, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on est ici dans une situation mixte où un mode possède une frontière tandis que les autres n'en ont pas.

Les transitions entre les états "bonne santé" (B), "malade" (M) et "décédé" (D) se font à des taux $\lambda^{BM}(\zeta, t)$, $\lambda^{MB}(\zeta, t)$, $\lambda^{BD}(\zeta, t)$ et $\lambda^{MD}(\zeta, t)$ où ζ représente le temps depuis le dernier changement d'état (ce qui permet de prendre en compte la durée de la maladie par exemple) et t le temps depuis le début du contrat (ce qui permet de prendre en compte l'âge de l'assuré) comme indiqué sur la figure 1.5.

Remarque 1.2.2 *Comme dans l'exemple précédent, le PMDM que nous décrivons dans ce modèle d'assurance est augmenté du temps. Cependant, c'est ici une nécessité car le taux de saut est susceptible de dépendre du temps.*

Ainsi, dans le mode 1, le taux de saut est $\lambda^{BM} + \lambda^{BD}$ et lorsqu'un saut se produit, on peut sauter du point $(1, \zeta, t)$ vers $(2, 0, t)$ ou vers $(4, 0, t)$ avec les probabilités

$$Q\Big((1, \zeta, t), \{(2, 0, t)\}\Big) = 1 - Q\Big((1, \zeta, t), \{(4, 0, t)\}\Big) = \frac{\lambda^{BM}(\zeta, t)}{\lambda^{BM}(\zeta, t) + \lambda^{BD}(\zeta, t)}.$$

Dans le mode 2, le taux de saut est $\lambda^{MB} + \lambda^{MD}$, on peut sauter vers les modes 1 ou 4. Cependant, lorsque la durée de l'arrêt maladie excède p, on passe immédiatement dans le mode 3. En d'autres termes, un saut est forcé depuis tout point $(2, p, t)$

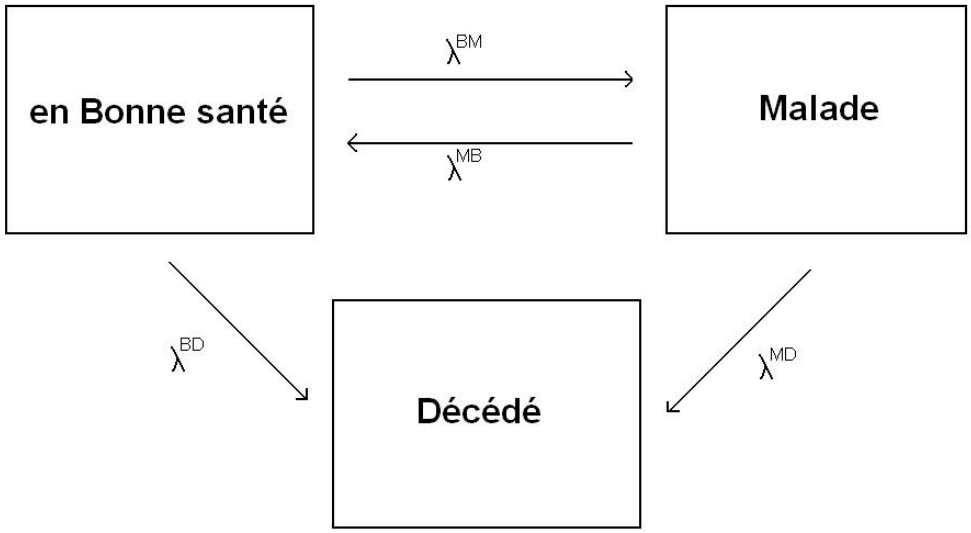

FIGURE 1.5 – Transitions entre les états dans le modèle d'assurance "garantie de revenus".

vers le point $(3,0,t)$. Le mode 2 est le seul mode où peuvent se produire des sauts déterministes, c'est le seul mode dans lequel t^* soit fini. On a donc si $\zeta < p$,

$$Q\Big((2,\zeta,t),\{(1,0,t)\}\Big) = 1 - Q\Big((2,\zeta,t),\{(4,0,t)\}\Big) = \frac{\lambda^{MB}(\zeta,t)}{\lambda^{MB}(\zeta,t)+\lambda^{MD}(\zeta,t)},$$

et si $\zeta = p$,

$$Q\Big((2,p,t),\{(3,0,t)\}\Big) = 1.$$

Dans le mode 3, le taux de saut est $\lambda^{MB} + \lambda^{MD}$ et on peut sauter du point $(3,\zeta,t)$ vers $(1,0,t)$ ou vers $(4,0,t)$ avec les mêmes probabilités que dans le mode précédent :

$$Q\Big((3,\zeta,t),\{(1,0,t)\}\Big) = 1 - Q\Big((3,\zeta,t),\{(4,0,t)\}\Big) = \frac{\lambda^{MB}(\zeta,t)}{\lambda^{MB}(\zeta,t)+\lambda^{MD}(\zeta,t)}.$$

Le mode 4 est un mode cimetière, le taux de saut y est nul et le processus ne peut en sortir.

La figure 1.6 représente un exemple de trajectoire du processus.

Dans la section 3.4.3, on cherchera à déterminer le prix d'une telle assurance qui est donné par la valeur actualisée (le taux d'intérêt sera noté ρ) des versements futurs :

$$\mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right].$$

Cette quantité correspond au coût total de l'assurance d'un euro par an de garantie de revenus.

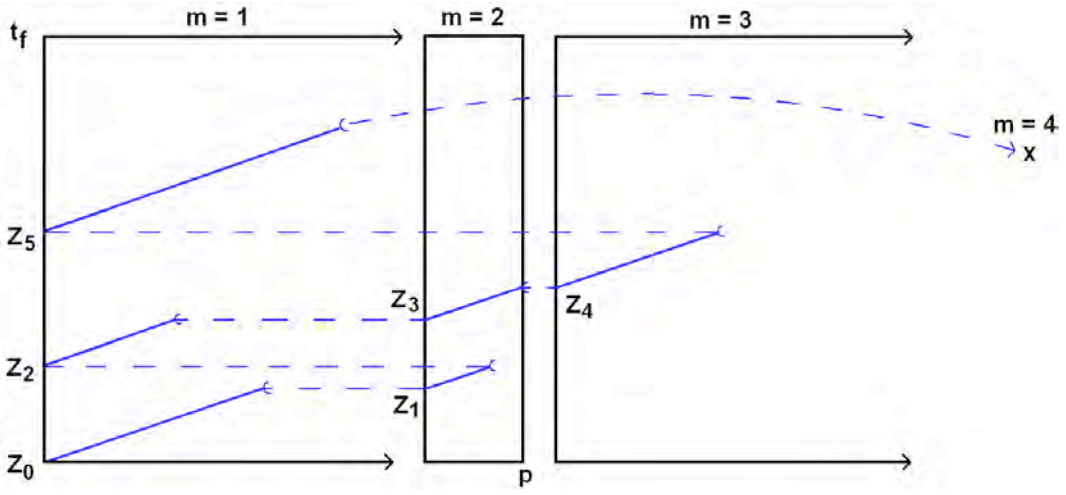

FIGURE 1.6 – Un exemple de trajectoire du modèle d'assurance.

1.2.5 Un modèle de corrosion fourni par Astrium

Cet exemple de modèle de corrosion nous a été fourni par Astrium.

FIGURE 1.7 – Mis en service en septembre 2010, *Le Terrible* est le quatrième sous-marin nucléaire lanceur d'engins nouvelle génération de la marine française.

On considère une structure en aluminium susceptible d'être corrodée. La structure métallique fait partie d'un missile balistique stratégique pouvant être stocké dans un sous-marin nucléaire. Ce missile séjourne successivement dans trois environnements qui sont plus ou moins corrosifs. La durée de stockage peut être assez longue et les exigences de sécurité sont très fortes. Les contraintes mécaniques exercées sur la structure dépendent de son épaisseur. Une perte d'épaisseur augmentera ainsi le risque de rupture. On considère qu'au-delà de 0.2 mm de perte d'épaisseur, la structure est inutilisable et doit être remplacée. Il est alors crucial d'étudier l'évolution de la perte d'épaisseur de la structure au cours du temps.

Décrivons maintenant plus en détail le modèle. Le missile est stocké dans trois environnements successivement :

- l'atelier (noté $m = 1$),
- le sous-marin en opération en mer ($m = 2$),
- le sous-marin en cale sèche ($m = 3$).

Ensuite, il retourne à l'atelier et ainsi de suite. Le missile reste dans chaque environnement pendant une durée aléatoire qui suit une loi exponentielle dont le paramètre λ_m dépend de l'environnement. La loi de dégradation qui gouverne la perte d'épaisseur dépend alors de l'environnement à travers deux paramètres : une période de transition déterministe η_m et un taux de corrosion aléatoire ρ uniformément distribué sur un intervalle donné, dépendant de l'ambiance. Typiquement, l'atelier et la cale sèche sont les environnements les plus corrosifs mais le temps passé en opération en mer est plus important. L'aléa sur le taux de corrosion rend compte des petites variations et des incertitudes sur le caractère plus ou moins corrosif de chaque environnement.

Dans chaque environnement $m \in \{1; 2; 3\}$, l'évolution au cours du temps de la perte d'épaisseur d_m satisfait :

$$d_m(\rho, s) = \rho \left(s + \eta_m \left(e^{-\frac{s}{2\eta_m}} - 1 \right) \right). \tag{1.2.1}$$

Le tableau 1.1 indique les valeurs des différents paramètres.

		environnement 1	environnement 2	environnement 3
λ_m	(h^{-1})	$(17520)^{-1}$	$(131400)^{-1}$	$(8760)^{-1}$
η_m	(h)	30000	200000	40000
ρ	$(\mathrm{mm.h}^{-1})$	$[10^{-6}, 10^{-5}]$	$[10^{-7}, 10^{-6}]$	$[10^{-6}, 10^{-5}]$

TABLE 1.1 – Valeurs des paramètres du modèle de corrosion.

Initialement, la structure se trouve dans l'environnement $m = 1$ et la perte d'épaisseur est nulle. On tire alors la taux de corrosion ρ_0 selon une distribution uniforme sur l'intervalle $[10^{-6}, 10^{-5}]$ et la date du premier changement d'environnement T_1 qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = (17520)^{-1}$ heures^{-1}. La corrosion débute selon l'équation (1.2.1), ainsi, pour tout $0 \leq t \leq T_1$, la perte d'épaisseur est $d_1(\rho_0, t)$. La structure passe alors dans l'environnement $m = 2$ et le processus évolue de manière similaire : on tire un nouveau taux de corrosion ρ_{T_1} selon une distribution uniforme sur $[10^{-7}, 10^{-6}]$, la date du second saut T_2 est tirée de façon que $T_2 - T_1$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = (131400)^{-1}$ heures^{-1} et pour $T_1 \leq t \leq T_2$, la perte d'épaisseur est $d_1(\rho_0, T_1) + d_2(\rho_{T_1}, t - T_1)$ et ainsi de suite. A chaque changement d'ambiance, un nouveau taux de corrosion ρ est tiré selon une loi uniforme sur l'intervalle correspondant.

La perte d'épaisseur, quant à elle, évolue continûment. La figure 1.8 représente un exemple de trajectoire de la perte d'épaisseur, les ruptures de pente correspondent aux instants de saut.

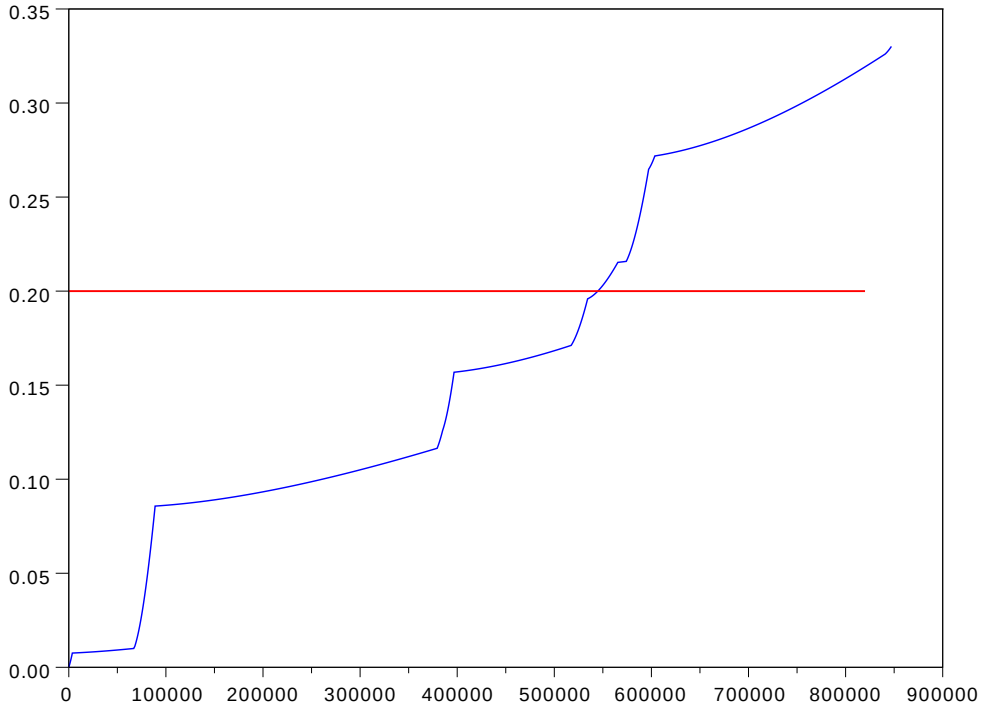

FIGURE 1.8 – Exemple de trajectoire de l'évolution de la perte d'épaisseur (en millimètres) au cours du temps (en heures). Au-delà de 0.2 mm, la structure est réputée inutilisable.

Modélisation par PMDM

L'espace d'état E. La perte d'épaisseur est modélisée par un PMDM dont les modes sont les différents environnements. Soit donc $M = \{1, 2, 3\}$. Le PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ contiendra les composantes suivantes : le mode $m \in M$, la perte d'épaisseur d, le temps depuis le dernier saut s (afin que le processus soit bien markovien), le taux de corrosion ρ (ce paramètre aléatoire change après chaque saut) et le temps t (si on considère le processus augmenté du temps [10]). Remarquons qu'on a toujours $s \leq t$, on considère ainsi l'espace d'états suivant :

$$E = \left\{(m, d, s, \rho, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}] \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } s \leq t\right\}.$$

10. Les caractéristiques du processus ne dépendent pas explicitement du temps, l'inclusion du temps dans l'espace d'état n'est donc pas une nécessité. Nous allons étudier ce modèle de corrosion à deux reprises, concernant deux problèmes différents. Dans la section 6.2, on pourra effectivement se passer de la variable t. Dans la section 3.4.2 cependant, on verra qu'elle sera nécessaire.

Le flot Φ. Le flot est donné pour tout $u \geq 0$ par

$$\Phi(\begin{pmatrix} m \\ d \\ s \\ \rho \\ t \end{pmatrix}, u) = \begin{pmatrix} m \\ d + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho, s) \\ s+u \\ \rho \\ t+u \end{pmatrix}$$

où on rappelle que d_m représente la perte d'épaisseur dans le mode m et est donnée par l'équation (1.2.1). Dans cette exemple, il n'y a pas de frontière de l'espace d'état pouvant provoquer un saut déterministe, on a ainsi

$$\forall x \in E, t^*(x) = +\infty.$$

Le noyau de transition Q. Etudions maintenant les sauts du processus. Lorsque le processus saute depuis un point $x = (m, d, s, \rho, t) \in E$, m devient $m+1$ modulo 3 (noté $m+1[3]$), d et t restent inchangés, s devient 0. Seul ρ est choisi aléatoirement selon une loi uniforme sur un intervalle $[\rho_{min}; \rho_{max}]$ qui dépend du nouveau mode. On a donc pour $w \in B(E)$, $x = (m, d, s, \rho, t) \in E$, et $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} Qw\Big(\Phi(\begin{pmatrix} m \\ d \\ s \\ \rho \\ t \end{pmatrix}, u)\Big) &= Qw \begin{pmatrix} m \\ d + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho, s) \\ s+u \\ \rho \\ t+u \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho_{max} - \rho_{min}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} w \begin{pmatrix} m+1[3] \\ d + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho, s) \\ 0 \\ \tilde{\rho} \\ t+u \end{pmatrix} d\tilde{\rho}. \quad (1.2.2) \end{aligned}$$

On étudiera cet exemple dans les sections 3.4.2, où on estimera la perte d'épaisseur moyenne dans l'environnement 2, et 6.2, où on s'intéressera aux moments et à la loi du temps de dépassement du seuil critique de 0.2 mm de perte d'épaisseur.

Nous avons présenté un assez large éventail d'exemples qui sont représentatifs de la diversité des situations que l'on peut rencontrer lorsqu'on étudie les PMDM. Signalons par exemple que nous disposons d'un modèle dans lequel les caractéristiques dépendent du temps (le taux de saut dans le modèle d'assurance). De plus, nous observons que certains modes sont complètement déterministes (les modes 2 et 3 du modèle d'atelier, le mode 4 du modèle d'assurance) : le taux de saut y est nul et le noyau de transition dégénéré. Enfin, une des caractéristiques importantes des PMDM est l'éventuelle présence de frontières de l'espace d'état qui engendrent des sauts déterministes. Remarquons que, sur ce point, les exemples ci-dessus couvrent

les différents cas possibles. Dans le modèle d'atelier de maintenance, il y a des frontières dans tous les modes (t^* est toujours fini). Dans le modèle de corrosion, il n'y a pas de frontière, les durées inter-sauts suivent alors des lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (lois exponentielles en l'occurence). Ceci correspond à la situation dans laquelle $t^* = +\infty$ dans tout l'espace d'état. Dans le modèle d'assurance enfin, la situation est mixte, il y a une frontière dans le mode 2 (t^* y est fini) mais pas dans les autres modes (t^* y est infini).

Ceci conclut notre présentation des PMDM. Nous nous tournons à présent vers l'aspect numérique et discutons des approches spécifiques au PMDM.

1.3 Méthodes numériques pour les PMDM

Dans la préface de [Davis, 1993], Davis note que "it is hard to deny that the Stochastic Differential Equation model has received more than its fair share of attention". Il est vrai en effet que la plupart des méthodes numériques développées pour les processus markoviens le sont dans le cadre des processus de diffusions et sont en général difficiles à transposer au cas des PMDM. Donnons deux exemples représentatifs. Il est souvent efficace d'approcher un processus de diffusion par un processus discrétisé en temps avec un pas uniforme (c'est par exemple le principe d'une approximation par schéma d'Euler). Cette approche ne convient pas aux PMDM. En effet, ceux-ci sont discontinus en des instants aléatoires. De plus, entre ces instants de saut, le processus est parfaitement déterministe voire explicite dans certaines applications. Dans ces conditions, la discrétisation à pas de temps constant du PMDM apparaît comme mal adaptée. Notre deuxième exemple concerne le générateur infinitésimal du processus. Celui du PMDM, décrit dans [Davis, 1993, section 26], contient un terme intégral qui dépend notamment de la géométrie du domaine et qui n'a pas d'équivalent dans le cas des processus de diffusion. Ainsi, les techniques numériques reposant sur la forme particulière du générateur infinitésimal d'une diffusion ne sont pas adaptables au cas des PMDM (voir partie III). En conclusion, il apparaît nécessaire de développer des méthodes numériques spécifiques aux PMDM. Certains travaux existants vont déjà dans ce sens.

Dans [Cocozza-Thivent et al., 2006, Eymard et al., 2008], les auteurs s'intéressent à la discrétisation des équations de Chapman-Kolmogorov. Ils obtiennent ainsi une approximation pour l'espérance d'une fonctionnelle du PMDM en résolvant les équations par des méthodes de volumes finis. Malheureusement, leur méthode n'autorise pas de saut du processus à la frontière. Dans [Davis, 1993], Davis montre que certaines espérances de fonctionnelles de PMDM (que nous étudierons dans la partie II) satisfont un système d'équations integro-différentielles ouvrant ainsi la voie à des techniques numériques, voie qui est empruntée par K. Gonzalez dans sa thèse [Gonzalez, 2010]. Elle y développe en détail une méthode numérique basée sur la résolution de ce système d'équations. Elle applique sa méthode à un exemple industriel concret qui constitue un cas test souvent cité dans la littérature car représentatif de l'industrie gazière et pétrolière.

L'approche développée dans [de Saporta et al., 2010] pour résoudre numériquement le problème d'arrêt optimal est complètement différente et exploite la structure spécifique des PMDM. Les auteurs commencent par interpréter les équations de programmation dynamique de [Gugerli, 1986] en fonction de la chaîne de Markov $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous-jacente au PMDM. Ensuite, ils discrétisent cette chaîne de Markov à l'aide d'une méthode nommée *quantification*, que nous décrirons dans la section suivante, en un processus à espace d'état fini. Sous des hypothèses de continuité Lipschitz, ils obtiennent la convergence de l'approximation. C'est cette idée qui guidera les méthodes numériques présentées dans cette thèse :

1. interpréter nos différents problèmes en fonction d'une chaîne de Markov à temps discret, sous-jacente au PMDM,
2. approcher cette chaîne de Markov par quantification.

L'utilisation de la chaîne de Markov sous-jacente $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplace en quelque sorte l'étape de discrétisation à pas régulier dans le cas des équations différentielles stochastiques dans le sens où elle permet de se ramener à l'étude d'une chaîne de Markov à temps discret. Elle apparaît particulièrement bien adaptée dans le cas des PMDM puisqu'elle n'induit aucune perte d'information. Nous avons en effet déjà remarqué que cette chaîne discrète contient tout l'aléa du processus continu. Dans la section suivante, nous décrivons le principe de la méthode de quantification.

1.4 Quantification

Les méthodes de quantification se sont développées au cours des vingt dernières années dans le domaine des probabilités numériques en vue d'applications en finance (voir par exemple [Pagès, 1998] qui a ouvert la voie à ce type de méthodes mais également [Bally and Pagès, 2003, Bally et al., 2005, Pagès et al., 2004] et le site www.quantize.maths-fi.com). L'objectif de la quantification est d'approcher "au mieux" (dans un sens défini plus bas) une variable aléatoire à espace d'état continu par une variable aléatoire à espace d'état fini c'est-à-dire de trouver une discrétisation "optimale" de l'espace d'état.

Plus précisément, la quantification d'une variable aléatoire X consiste en la recherche d'une grille finie de l'espace d'état telle que la projection $\widehat{X}$ de X sur cette grille minimise une norme L^p de l'erreur $X - \widehat{X}$. Par exemple, une telle grille aura plus de points dans les zones de forte densité. Ainsi qu'il est expliqué dans [Pagès et al., 2004, section 3], sous certaines hypothèses de continuité Lipschitz, on peut obtenir des bornes pour la vitesse de convergence de fonctionnelles de la variable quantifiée vers la variable originale, ce qui rend cette technique particulièrement intéressante. Dans la suite de cette section, nous donnerons quelques détails supplémentaires sur les méthodes de quantification. Pour une présentation plus complète, nous renvoyons à [Gray and Neuhoff, 1998] ou [Pagès et al., 2004] par exemple.

1.4.1 Quantification d'une variable aléatoire

Considérons X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\|X\|_p < \infty$ pour un certain $p \geq 1$ et fixons ν un entier. La quantification L^p-optimale de la variable aléatoire X consiste en la recherche de la meilleure approximation, au sens de la norme L^p, de X par un variable aléatoire $\widehat{X}$ prenant au plus ν valeurs : $\widehat{X} \in \{x^1, \ldots, x^\nu\}$. La procédure se décompose en deux étapes :

1. Trouver une grille finie $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ avec $\Gamma = \{x^1, \ldots, x^\nu\}$.
2. Poser $\widehat{X} = \widehat{X}^\Gamma$ avec $\widehat{X}^\Gamma = proj_\Gamma(X)$ et où $proj_\Gamma$ est la projection au plus proche voisin sur Γ pour la norme p correspondante.

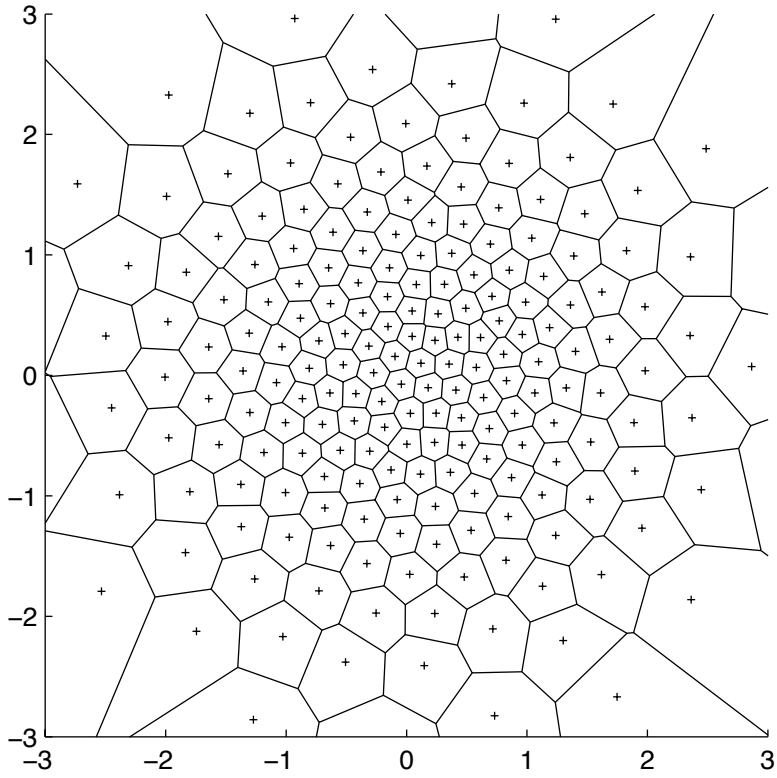

FIGURE 1.9 – Grille de quantification de 200 points associée à une variable aléatoire gaussienne centrée réduite en dimension 2.

La figure 1.9 représente un exemple de grille de quantification optimale pour une variable aléatoire gaussienne centrée réduite en dimension 2. On observe une concentration des points dans la zone centrale qui est de plus forte densité. Une telle grille, adaptée à la loi de X, fournit une meilleure approximation qu'une discrétisation régulière.

Les propriétés asymptotiques de la quantification sont données par le théorème de Zador (voir par exemple [Pagès et al., 2004]) :

Théorème 1.4.1 *Si* $\mathbb{E}[|X|^{p+\eta}] < +\infty$ *pour un certain* $\eta > 0$ *alors on a*

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^{p/d} \min_{|\Gamma|\leq\nu} \|X - \widehat{X}^{\Gamma}\|_p^p \;=\; J_{p,d} \left(\int |h|^{d/(d+p)}(u)du \right)^{1+p/d},$$

où la loi de X *est* $P_X(du) = h(u)\lambda_d(du) + \mu$ *avec* $\mu \perp \lambda_d$, $J_{p,d}$ *une constante et* λ_d *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$.

Remarquons que X doit avoir des moments jusqu'à l'ordre $p + \eta$ pour assurer la convergence ci-dessus. L'algorithme que nous utilisons pour obtenir la grille de quantification optimale est de type gradient stochastique, il s'agit de l'algorithme *Competitive Learning Vector Quantization* décrit dans [Bally and Pagès, 2003, section 3]. Du théorème ci-dessus, on retiendra principalement que

$$\|X - \widehat{X}^{\Gamma}\|_p = O(\nu^{-\frac{1}{d}})$$

où ν est le nombre de points dans la grille de quantification et d est la dimension du vecteur aléatoire X. Dans les applications numériques, nous comparerons cette vitesse de convergence théorique avec les vitesses empiriques que nous observerons dans les sections 3.4.2, 3.4.3, 6.1 et 6.2.

1.4.2 Quantification d'une chaîne de Markov

Il existe une procédure similaire pour la quantification optimale d'une chaîne de Markov $(X_k)_{1\leq k\leq N}$ où N est un entier fixé nommé *horizon de calcul*. Deux approches sont possibles. La première est appelée *marginal quantization*. Elle consiste en la quantification à chaque temps k de la variable aléatoire X_k, les probabilités de transition étant ensuite estimées par des simulations de Monte-Carlo. La seconde approche, nommée *Markovian quantization* permet de conserver la propriété de Markov. Dans tous les cas, la chaîne obtenue n'est pas homogène. Ces deux méthodes sont décrites en détails dans [Pagès et al., 2004, section 3]. Nous utiliserons l'approche *marginal quantization* pour des raisons de simplicité et parce qu'il est expliqué dans [Pagès et al., 2004, section 3] qu'elle semble donner de meilleurs résultats numériques.

L'algorithme de quantification du processus aléatoire $(X_k)_{0\leq k\leq N}$ fournit donc pour chaque pas de temps $0 \leq k \leq N$ une grille finie Γ_k de l'espace d'état de X_k ainsi que des matrices de transitions $(\widehat{Q}_k)_{0\leq k\leq N-1}$ de Γ_k vers Γ_{k+1}. Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \leq N$, X_k a des moments finis au moins jusqu'à l'ordre p et soit $proj_{\Gamma_k}$ la projection au plus proche voisin sur Γ_k. Le processus quantifié $(\widehat{X}_k)_{k\leq N}$ prend des valeurs pour chaque k dans la grille finie Γ_k et est défini pour tout $0 \leq k \leq N$ par

$$\widehat{X}_k = proj_{\Gamma_k}(X_k). \tag{1.4.1}$$

En pratique, on effectuera le calcul des grilles de quantification qui nécessite simplement de savoir simuler le processus. Cette étape peut être assez longue en terme de temps de calculs, surtout lorsque le nombre de points dans les grilles est important. De plus, le temps de calcul des grilles est proportionnel à l'horizon

de calcul N. Cependant, les grilles ne sont calculées qu'une fois pour toutes, elles peuvent être stockées et réutilisées. En effet, les grilles de quantification ne dépendent que de la dynamique du processus. On peut donc utiliser les mêmes grilles pour différents schémas d'approximation portant sur le même processus. Par ailleurs, ces schémas d'approximation sont en général peu coûteux en temps car le processus quantifié est à espace d'état fini. Par exemple, un calcul d'espérance ou d'espérance conditionnelle pour le processus quantifié n'est rien de plus qu'une somme finie. Ainsi, toute la complexité du calcul réside dans le calcul des grilles de quantification qui peut s'effectuer de manière préliminaire. Il en résulte une grande flexibilité dans l'utilisation des méthodes numériques basées sur la quantification qui constitue un avantage important par rapport à des méthodes de Monte-Carlo par exemple. Cette flexibilité sera notamment illustrée à la section 3.4.1. Nous y résoudrons le problème d'optimisation déjà décrit dans la section 1.2.3 pour lequel nous avons remarqué qu'une résolution par simulations de Monte Carlo serait très laborieuse. Signalons également que dans la partie III, dédiée à l'étude d'un temps de sortie, les mêmes grilles nous permettront d'approcher à la fois la distribution et les moments de ce temps de sortie.

1.5 Contribution de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer de nouvelles méthodes numériques adaptées aux PMDM. Par "développement de méthodes numériques", nous entendons :

- développement de résultats théoriques spécifiques nécessaires à la mise en place d'un schéma d'approximation original,
- description précise du schéma numérique,
- preuve et analyse fine de la convergence (vitesse de convergence),
- programmation effective de notre méthode dans le cadre d'exemples académiques et d'applications réelles (notamment le modèle fourni par Astrium),
- analyse des résultats numériques (comparaison avec la méthode de Monte Carlo, étude empirique de la convergence).

Nous nous intéressons à trois problèmes que nous traitons respectivement dans les trois prochaines parties. Ces trois problèmes sont : (i) l'approximation d'espérance de fonctionnelles du PMDM, (ii) l'approximation de la loi et des moments d'un temps de sortie et (iii) l'arrêt optimal partiellement observé. Dans chacun des cas, notre approche numérique sera basée sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM.

Partie II. Tout d'abord, nous abordons la question de l'approximation de fonctionnelles du PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ de la forme suivante :

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{T_N} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-})\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right]$$

où l et c représentent deux fonctions dites "de coût". Nous avons déjà mentionné une possible approche par résolution d'un système d'équations différentielles (voir [Davis, 1993, section 32] et [Gonzalez, 2010]). Notre approche est très différente et s'appuie sur l'exploitation de la structure à temps discret sous-jacente, conformément aux idées développées dans [de Saporta et al., 2010]. Notre principale contribution dans cette partie est alors l'extension de la méthode, d'une part à des fonctionnelles dépendantes du temps,

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right],$$

et d'autre part, à des fonctionnelles à horizon de temps déterministe $t_f \in \mathbb{R}^{*+}$ (plutôt qu'à horizon de temps donné par un temps de saut),

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^{t_f} l(X_t,t)dt + \sum_{T_j\le t_j} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\Big].$$

Partie III. Dans la troisième partie, nous étudierons les temps de sortie du PMDM. Nous développons des méthodes numériques pour approcher les moments et la distribution d'un temps de sortie noté τ, c'est-à-dire pour $j \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$, les quantités

$$\mathbf{E}\left[\tau^j\right] \text{ et } \mathbf{P}(\tau > s).$$

A nouveau, nous utilisons la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM. Cependant, dans cette partie, en raison de la non-continuité Lipschitz de certains opérateurs, la convergence du schéma n'est plus aussi directe. Nous parvenons malgré tout à l'obtenir (ainsi qu'une vitesse dans le cas des moments) grâce à des arguments plus fins concernant l'algorithme de quantification.

Partie IV. Enfin, le dernier problème que nous abordons est celui de l'arrêt optimal partiellement observé. Pour ce faire, nous nous appuyons sur [Gugerli, 1986] et [de Saporta et al., 2010] qui étudient respectivement l'arrêt optimal complètement observé du point de vue théorique et numérique. Nous supposons que les temps de sauts sont parfaitement observés mais que les positions après un saut sont observées au travers d'un bruit. L'opérateur n'a donc pas accès au processus $(X_t)_{t\ge0}$ mais seulement à un processus $(Y_t)_{t\ge0}$ appelé *processus observé*. L'information disponible pour la prise de décision n'est donc pas la filtration engendrée par le processus original $(X_t)_{t\ge0}$ mais seulement celle engendrée par $(Y_t)_{t\ge0}$ dite *filtration observée* et notée $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\ge0}$. On s'intéresse alors au problème d'arrêt optimal partiellement observé

$$\sup_{\sigma\le T_N} \mathbf{E}\left[g(X_\sigma)\right],$$

où g est une fonction dite "de coût" et σ est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\ge0}$-temps d'arrêt i.e. un temps d'arrêt par rapport à la filtration observée.

Pour étudier ce problème, nous introduisons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le filtre Π_k correspondant à la loi de la position après le saut Z_k conditionnellement à l'information disponible au temps de saut T_k i.e. $\mathfrak{F}^Y_{T_k}$. Le filtrage, dans le cas particulier des PMDM n'ayant pas encore, à notre connaissance, été étudié, nous commençons par établir une formule de récurrence satisfaite par la suite des filtres. Nous donnons ensuite l'équation de programmation dynamique du problème d'arrêt optimal. Finalement, grâce à la quantification du filtre, nous décrivons des méthodes numériques pour approcher la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal partiellement observé mais également pour construire un temps d'arrêt ϵ-optimal.

Chacune de nos méthodes est illustrée par des exemples numériques. Par ailleurs, concernant les hypothèses que nous formulerons par la suite, nous avons cherché à les choisir de façon à ce qu'elles ne soient pas restrictives vis-à-vis des applications. Certaines trouvent leur justification dans l'ouvrage de M.H.A. Davis [Davis, 1993]. Les autres ont été mises à l'épreuve, d'une part, par des échanges avec les ingénieurs d'Astrium (notamment Charles Elegbede) qui sont en mesure de nous renseigner quant à leur caractère réaliste dans les applications réelles et d'autre part, au travers des différents exemples que nous avons présentés dans la section 1.2 et que nous considérons comme représentatifs.

Bibliographie

[Bally and Pagès, 2003] Bally, V. and Pagès, G. (2003). A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6) :1003–1049.

[Bally et al., 2005] Bally, V., Pagès, G., and Printems, J. (2005). A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options. *Math. Finance*, 15(1) :119–168.

[Busic et al., 2012] Busic, A., Gaujal, B., and Pin, F. (2012). Perfect Sampling of Markov Chains with Piecewise Homogeneous Events. *Performance Evaluation*.

[Chiquet et al., 2009] Chiquet, J., Limnios, N., and Eid, M. (2009). Piecewise deterministic Markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *J. Statist. Plann. Inference*, 139(5) :1657–1667.

[Çinlar and Jacod, 1981] Çinlar, E. and Jacod, J. (1981). Representation of semimartingale Markov processes in terms of Wiener processes and Poisson random measures. In *Seminar on Stochastic Processes, 1981 (Evanston, Ill., 1981)*, volume 1 of *Progr. Prob. Statist.*, pages 159–242. Birkhäuser Boston, Mass.

[Cocozza-Thivent et al., 2006] Cocozza-Thivent, C., Eymard, R., and Mercier, S. (2006). A finite-volume scheme for dynamic reliability models. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(3) :446–471.

[Dassios and Embrechts, 1989] Dassios, A. and Embrechts, P. (1989). Martingales and insurance risk. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 5(2) :181–217.

[Davis, 1993] Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

[Davis et al., 1987] Davis, M. H. A., Dempster, M. A. H., Sethi, S. P., and Vermes, D. (1987). Optimal capacity expansion under uncertainty. *Adv. in Appl. Probab.*, 19(1) :156–176.

[de Saporta et al., 2010] de Saporta, B., Dufour, F., and Gonzalez, K. (2010). Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637.

[Embrechts and Schmidli, 1994] Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994). Ruin estimation for a general insurance risk model. *Adv. in Appl. Probab.*, 26(2) :404–422.

[Eymard et al., 2008] Eymard, R., Mercier, S., and Prignet, A. (2008). An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 222(2) :293–323.

[Gonzalez, 2010] Gonzalez, K. (2010). *Contribution à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux*. PhD thesis, Université Bordeaux 1.

[Graham and Robert, 2009] Graham, C. and Robert, P. (2009). Interacting multiclass transmissions in large stochastic networks. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6) :2334–2361.

[Graham and Robert, 2010] Graham, C. and Robert, P. (2010). A multi-class mean-field model with graph structure for TCP flows. In *Progress in industrial mathematics at ECMI 2008*, volume 15 of *Math. Ind.*, pages 125–131. Springer, Heidelberg.

[Gray and Neuhoff, 1998] Gray, R. M. and Neuhoff, D. L. (1998). Quantization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(6) :2325–2383. Information theory : 1948–1998.

[Gugerli, 1986] Gugerli, U. S. (1986). Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process. *Stochastics*, 19(4) :221–236.

[Jacobsen, 2006] Jacobsen, M. (2006). *Point process theory and applications*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. Marked point and piecewise deterministic processes.

[Pagès, 1998] Pagès, G. (1998). A space quantization method for numerical integration. *J. Comput. Appl. Math.*, 89(1) :1–38.

[Pagès et al., 2004] Pagès, G., Pham, H., and Printems, J. (2004). Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance. In *Handbook of computational and numerical methods in finance*, pages 253–297. Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[Pakdaman et al., 2010] Pakdaman, K., Thieullen, M., and Wainrib, G. (2010). Fluid limit theorems for stochastic hybrid systems with application to neuron models. *Adv. in Appl. Probab.*, 42(3) :761–794.

[Schäl, 1998] Schäl, M. (1998). On piecewise deterministic Markov control processes : control of jumps and of risk processes in insurance. *Insurance Math. Econom.*, 22(1) :75–91. The interplay between insurance, finance and control (Aarhus, 1997).

[Zeiser et al., 2010] Zeiser, S., Franz, U., and Liebscher, V. (2010). Autocatalytic genetic networks modeled by piecewise-deterministic Markov processes. *J. Math. Biol.*, 60(2) :207–246.

Deuxième partie

Espérance de fonctionnelles

Introduction

Dans cette partie, nous proposons une méthode numérique permettant d'approcher des espérances de fonctionnelles d'un Processus Markovien Déterministe par Morceaux. Notre méthode s'appuie sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au processus à temps continu. Nous prouvons la convergence de notre approximation en précisant la vitesse de convergence. Trois exemples viennent illustrer notre discussion.

Cette partie est adaptée de l'article *Numerical method for expectations of piecewise-deterministic Markov processes* [Brandejsky et al., 2012] paru dans la revue électronique *Communications in Applied Mathematics and Computational Science (CAM-CoS)*

Plus précisément, nous cherchons à approcher des espérances de la forme suivante

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_N} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right],$$

où $(X_t)_{t\geq 0}$ est un PMDM, où l et c sont des fonctions à valeurs réelles, bornées et où ∂E est la frontière de l'espace d'état E. De telles espérances interviennent en général en tant que fonctions de "coût" ou de "récompense" au sein de problèmes d'optimisation. On nomme le premier terme *coût instantané* et le second *coût de saut à la frontière*. Dans le cadre de la théorie du contrôle, on parle parfois de *coût d'intervention* pour désigner le deuxième terme. M.H.A. Davis montre, dans [Davis, 1993, chapitre 3], que la forme ci-dessus est assez générale dans le sens où elle contient de nombreuses fonctionnelles de natures apparemment différentes comme par exemple l'espérance d'un temps de sortie, d'un temps de séjour ou encore pour $t \geq 0$ fixé, la loi de X_t (i.e. $\mathbf{E}_x[\mathbb{1}_F(X_t)]$ où F est un ensemble mesurable). Dans le domaine de la fiabilité, on peut également s'intéresser à de telles espérances pour calculer par exemple des probabilités d'évènements redoutés ou la valeur moyenne d'une durée de service d'un composant.

Etonnamment, il existe assez peu de travaux dans la littérature consacrés au calcul de telles espérances par d'autres moyens que des simulations de Monte-Carlo. M.H.A. Davis a montré que ces espérances satisfont des équations integro-différentielles. Cependant, ces systèmes d'équations aux dérivées partielles sont assez inhabituels. Il s'agit en effet d'équations de transport à vitesse non constante, couplées par les conditions aux frontières et par un terme intégral faisant intervenir

un noyau qui dépend du processus stochastique sous-jacent. La résolution numérique de telles équations dépend fortement du problème considéré et de sa géométrie car chacune d'entre elles doit être résolue sur un domaine différent. Malgré tout, dans sa thèse, K. Gonzalez [Gonzalez, 2010] met en oeuvre cette méthode dans un cas-test de la littérature afin d'approcher des probabilités d'évènements redoutés. Une approche similaire à celle de Davis a été développée récemment dans [Cocozza-Thivent et al., 2006, Eymard et al., 2008]. Elle est basée sur la discrétisation des équations de Chapman-Kolmogorov satisfaites par la loi de $(X_t)_{t\geq 0}$. Les auteurs proposent alors une approximations des espérances grâce à des méthodes de volumes finis. Malheureusement, leur méthode n'autorise pas de saut à la frontière. Notre approche, complètement différente, ne repose sur aucune équation différentielle mais plutôt sur le fait qu'une telle espérance peut être obtenue en itérant un opérateur intégral noté G^A. Cet opérateur ne fait intervenir que la chaîne de Markov sous-jacente $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des espérances conditionnelles. Il est alors naturel de suivre l'idée développée dans [de Saporta et al., 2010] et de proposer une méthode numérique basée sur la quantification de cette chaîne de Markov.

Dans cette partie, nous développons une méthode numérique pour calculer des espérances de la forme ci-dessus lorsque les fonctions de coût l et c satisfont des conditions de continuité Lipschitz. Nous rappelons tout d'abord les résultats de M.H.A. Davis selon lesquels l'espérance peut être obtenue en itérant un opérateur noté G^A. Ensuite, nous exprimons l'opérateur G^A en fonction de la chaîne de Markov sous-jacente $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la remplaçons par son approximation quantifiée. De plus, afin de prouver la convergence de notre algorithme, nous remplaçons la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}$ dans la fonctionnelle par une approximation lipschitzienne. Nous obtenons alors des bornes pour la vitesse de convergence. Dans un deuxième temps, et c'est notre principale contribution, nous traitons ensuite deux aspects importants qui n'avaient pas été abordés dans [de Saporta et al., 2010].

Le premier aspect consiste à autoriser c et l à dépendre du temps, tout en restant lipschitziennes, si bien que nous pouvons alors approcher des espérances de la forme

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right].$$

Cette généralisation est importante du point de vue des applications. Par exemple, elle autorise des fonctions de coût *actualisées* comme $l(x,t) = e^{-\delta t}l(x)$ et $c(x,t) = e^{-\delta t}c(x)$ où δ représente un taux d'intérêt. Pour calculer l'espérance ci-dessus, notre stratégie consiste à considérer, ainsi que le suggère M.H.A. Davis, le processus augmenté du temps $\widetilde{X}_t = (X_t, t)$ que nous avons décrit à la section 1.1.5. Il est alors naturel, pour aborder le problème dépendant du temps, d'appliquer notre précédent schéma numérique au processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$. Cependant, il n'est pas du tout évident que les hypothèses nécessaires à notre méthode numérique seront encore valides pour ce nouveau PMDM $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$.

La seconde importante généralisation est celle du cas d'un horizon de temps déterministe. En effet, il semble crucial du point de vue des applications de pouvoir

approcher des espérances de la forme

$$\mathbf{E}_x\Big[\int_0^{t_f} l(X_t,t)dt + \sum_{T_j\le t_j} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\Big],$$

pour un $t_f > 0$ fixé indépendamment du nombre de sauts qui se produiront avant cette date déterministe. Pour calculer cette quantité, nous commençons pas choisir un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}\left(T_N < t_f\right)$ soit proche de zéro si bien que l'espérance précédente est approchée par

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)\mathbb{1}_{\{t\le t_f\}}dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\mathbb{1}_{\{T_j\le t_f\}}\right].$$

A première vue, cette fonctionnelle est de la forme précédente. Cependant, souvenons-nous que nous avions eu recours à des hypothèses de continuité Lipschitz des fonctions de coût. Une application directe des résultats précédents est alors rendue impossible par les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\{\cdot\le t_f\}}$. Nous traitons ces fonctions indicatrices de deux manières. D'une part, nous prouvons que l'hypothèse de régularité sur le coût instantané peut être relâchée et que notre algorithme converge en dépit de la discontinuité. D'autre part, ce raisonnement ne pouvant s'appliquer au terme de saut, nous bornons la deuxième fonction indicatrice entre deux approximations lipschitziennes. Ceci fournit des bornes pour l'espérance de la fonctionnelle à horizon déterministe.

Un avantage important de notre méthode réside dans sa flexibilité. En effet, ainsi qu'il est noté dans [Bally and Pagès, 2003], une méthode basée sur la quantification est "obstacle free" ce qui signifie, dans notre cas, qu'elle fournit, une fois pour toute, une discrétisation du processus indépendamment des fonctions de coût l et c puisque les grilles de quantification ne dépendent que de la dynamique du processus. Elles ne sont calculées qu'une fois, peuvent être stockées et servir plusieurs fins. Une fois qu'elles ont été obtenues, nous pouvons aisément et rapidement approcher une autre espérance. Cette flexibilité est un avantage important par rapport à une méthode de Monte-Carlo standard où nous aurions à refaire le calcul intégralement pour chaque espérance. Nous illustrons cet argument dans la section 3.4 où nous résolvons aisément un problème d'optimisation dont la résolution par la méthode de Monte-Carlo aurait été laborieuse.

Le plan de cette partie est le suivant. Dans le chapitre 2, après avoir introduit des définitions et énoncé nos hypothèses (section 2.1), nous introduisons la méthode de calcul récursif de l'espérance (section 2.2). Nous développons ensuite (section 2.4) le schéma d'approximation numérique dont nous prouvons la convergence et bornons la vitesse de convergence. Notre principale contribution se trouve dans le chapitre 3 dans lequel nous étudions le processus augmenté du temps (section 3.1) pour ensuite présenter les généralisations aux cas de fonctions de coût dépendantes du temps (section 3.2) et de l'horizon de temps déterministe (section 3.3). Enfin, nos résultats sont illustrés par trois exemples dans la section 3.4.

Chapitre 2

Approximation d'espérances de fonctionnelles d'un PMDM

Dans ce chapitre, nous commençons par définir le cadre de notre étude en introduisant nos hypothèses. Nous rappelons ensuite que l'espérance qui nous intéresse peut être obtenue de façon récursive par itération d'un opérateur G^A (formulation due à [Davis, 1993]). Enfin, nous décrivons notre schéma d'approximation dont nous prouvons la convergence à l'aide de la continuité Lipschitz de l'opérateur G^A que nous établissons également.

2.1 Définitions et hypothèses

Pour la définition des PMDM, ainsi que pour certaines notations, on renvoie à la section 1.1. Nous introduisons maintenant les définitions et hypothèses spécifiques à ce chapitre. Nous avons déjà annoncé que l'hypothèse de continuité Lipschitz des fonctions de coût jouera un rôle crucial dans la preuve de convergence de notre schéma numérique. Nous introduisons donc des espaces de fonctions qui seront dites *lipschitziennes le long du flot*.

Définition 2.1.1 *On note $\mathbf{L_c}(E)$ l'ensemble des fonctions $w \in B(E)$ qui sont lipschitziennes le long du flot i.e. les fonctions à valeurs réelles, bornées, mesurables, définies sur E et qui satisfont les conditions suivantes :*

- *Pour tout $x \in E$, $w(\Phi(x,\cdot))$: $[0, t^*(x)[\to \mathbb{R}$ est continue, $\lim_{t \to t^*(x)} w(\Phi(x,t))$ existe et est notée $w\Big(\Phi(x, t^*(x))\Big)$,*
- *il existe $[w]_1^E \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0, t^*(x) \wedge t^*(y)]$, on ait :*

$$|w(\Phi(x,t)) - w(\Phi(y,t))| \leq [w]_1^E |x - y|,$$

- *il existe $[w]_2^E \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $x \in E$ et $t, u \in [0, t^*(x)]$, on ait :*

$$|w(\Phi(x,t)) - w(\Phi(x,u))| \leq [w]_2^E |t - u|,$$

- *il existe $[w]_*^E \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $x, y \in E$, on ait :*

$$|w(\Phi(x, t^*(x))) - w(\Phi(y, t^*(y)))| \leq [w]_*^E |x - y|.$$

On note aussi $\mathbf{L_c}(\partial E)$ *l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, bornées, mesurables, définies sur* ∂E *qui satisfont la condition suivante :*

- *il existe* $[w]_*^{\partial E} \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $x, y \in E$*, on ait*

$$|w(\Phi(x, t^*(x))) - w(\Phi(y, t^*(y)))| \leq [w]_*^{\partial E}|x - y|.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $[w]_i$ au lieu de $[w]_i^E$ pour $i \in \{1, 2, *\}$ et $[w]_*$ au lieu de $[w]_*^{\partial E}$.

Dans la définition ci-dessus, nous avons utilisé le flot généralisé défini par l'équation (1.1.4). Par exemple, la définition de $[w]_1$ est équivalente à la suivante : pour tout $m \in M$, il existe $[w_m]_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $\zeta, \zeta' \in E_m$ et $t \in [0, t^*(m, \zeta) \wedge t^*(m, \zeta')]$, on ait :

$$|w_m(\Phi_m(\zeta, t)) - w_m(\Phi_m(\zeta', t))| \leq [w_m]_1|\zeta - \zeta'|.$$

On pose alors $[w]_1 = \max_{m \in M}[w_m]_1$.

Dans le chapitre 3, lorsque nous nous tournerons vers des espérances de fonctionnelles dépendant du temps, nous aurons besoin d'une notion de continuité Lipschitz le long du flot plus faible que la précédente. Ainsi, au lieu d'être globalement lipschitziennes le long du flot jusqu'en t^*, les fonctions de l'espace $\mathbf{L_c}^u(E)$, défini ci-après, ne sont que localement lipschitzienne le long du flot au sens où elle ne sont lipschitzienne que jusqu'en $u \wedge t^*$.

Définition 2.1.2 *Pour tout* $u \geq 0$*, on note* $\mathbf{L_c}^u(E)$ *l'ensemble des fonctions* $w \in B(E)$ *lipschitziennes le long du flot jusqu'à l'instant* u *i.e. les fonctions à valeurs réelles, bornées, mesurables, définies sur* E *et qui satisfont les conditions suivantes :*

- *Pour tout* $x \in E$*,* $w(\Phi(x, \cdot))$ *:* $[0, t^*(x) \wedge u[\to \mathbb{R}$ *est continue et si* $t^*(x) \leq u$*, alors* $\lim_{t \to t^*(x)} w(\Phi(x, t))$ *existe et est notée* $w\Big(\Phi(x, t^*(x))\Big)$*,*
- *il existe* $[w]_1^{E,u} \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $x, y \in E$ *et* $t \in [0, t^*(x) \wedge t^*(y) \wedge u]$*, on ait :*

$$|w(\Phi(x, t)) - w(\Phi(y, t))| \leq [w]_1^{E,u}|x - y|,$$

- *il existe* $[w]_2^{E,u} \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $x \in E$ *et* $t, t' \in [0, t^*(x) \wedge u]$*, on ait :*

$$|w(\Phi(x, t)) - w(\Phi(x, t'))| \leq [w]_2^{E,u}|t - t'|,$$

- *il existe* $[w]_*^{E,u} \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $x, y \in E$*, si* $t^*(x) \leq u$ *et* $t^*(y) \leq u$*, on ait :*

$$|w(\Phi(x, t^*(x))) - w(\Phi(y, t^*(y)))| \leq [w]_*^{E,u}|x - y|.$$

Remarquons que pour tout $0 \leq u \leq u'$, on a $\mathbf{L_c}^{u'}(E) \subset \mathbf{L_c}^u(E)$ avec $[w]_i^{E,u} \leq [w]_i^{E,u'}$ où $i \in \{1, 2, *\}$. De plus, pour tout $u \geq 0$, $\mathbf{L_c}(E) \subset \mathbf{L_c}^u(E)$ avec $[w]_i^{E,u} \leq [w]_i^E$ où $i \in \{1, 2, *\}$. Par ailleurs, la continuité Lipschitz (locale ou non) le long du flot est une notion plus forte que la continuité Lipschitz usuelle. En effet, soit w une fonction localement lipschitzienne le long du flot jusqu'à l'instant $u \geq 0$ i.e. $w \in \mathbf{L_c}^u(E)$, pour tous x, $y \in E$, on a

$$|w(x) - w(y)| = |w(\Phi(x, 0)) - w(\Phi(y, 0))| \leq [w]_1^{E,u}|x - y|.$$

En résumé, on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{c} w \text{ lipschitzienne le long du flot} \\ \Downarrow \\ w \text{ localement lipschitzienne le long du flot} \\ \Downarrow \\ w \text{ lipschitzienne} \end{array}$$

Les implications réciproques sont, en général, fausses. En effet, dans l'exemple suivant, w est lipschitzienne au sens classique mais pas le long du flot (ni même localement).

Exemple *Pour exhiber un contre-exemple, on souhaite ici considérer un flot de la forme* $(x,t) \to x + \sqrt{t}$ *afin d'exploiter la non continuité Lipschitz en* $t = 0$ *mais, cette fonction ne vérifie pas la propriété de semi-groupe. On a alors recours à une seconde variable d'état* s *qui indique le temps depuis lequel le processus parcourt effectivement le flot sans sauter. On pose donc* $E = [0;1] \times [0;1]$ *et on définit le flot* Φ *sur* $E \times \mathbb{R}^+$ *par*

$$\Phi(\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, t) = \begin{pmatrix} x + \sqrt{t+s} - \sqrt{s} \\ t+s \end{pmatrix}.$$

La fonction $w(x,s) = x$ *est bien une fonction de* $B(E)$*, lipschitzienne de constante* $[w] = 1$ *mais n'est pas localement lipschitzienne le long du flot, elle n'est dans* $\mathbf{L_c}^u(E)$ *pour aucune valeur de* u*. En effet, on a*

$$|w(\Phi(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, t)) - w(\Phi(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, t'))| = |\sqrt{t} - \sqrt{t'}|$$

qu'on ne peut borner par Constante $\times |t - t'|$ *sur aucun intervalle* $[0;u]$*.*

Cependant, remarquons enfin que sous des hypothèses de continuité Lipschitz (respectivement Lipschitz locale) au sens classique sur le flot Φ et le temps de sortie déterministe t^*, on a les implications réciproques (respectivement seulement la deuxième implication réciproque).

Les hypothèses spécifiques à cette partie sont alors les suivantes.

Hypothèse II.1 *Le taux de saut* λ *est borné et il existe* $[\lambda]_1 \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $x, y \in E$ *et* $t \in [0, t^*(x) \wedge t^*(y)]$*, on ait :*

$$|\lambda(\Phi(x,t)) - \lambda(\Phi(y,t))| \leq [\lambda]_1 |x - y|.$$

Hypothèse II.2 *Le temps de sortie déterministe de* E*, noté* t^**, est borné et lipschitzien sur* E*. En d'autres termes, il existe* C_{t^*}*,* $[t^*] \in \mathbb{R}^+$ *telles que, pour tous* x*,* $y \in E$ *:*

$$\begin{aligned} 0 \leq t^*(x) &\leq C_{t^*}, \\ \Big|t^*(x) - t^*(y)\Big| &\leq [t^*]\Big|x - y\Big|. \end{aligned}$$

Puisque le temps de sortie déterministe t^* est borné par C_{t^*}, on peut remarquer que ${\mathbf{L}_\mathbf{c}}^u(E) = \mathbf{L}_\mathbf{c}(E)$ lorsque $u \geq C_{t^*}$.

Le temps de sortie déterministe t^* n'est pas toujours naturellement borné comme nous avons pu le constater dans les exemples décrits dans la section 1.2. Cependant, nous allons voir qu'en général, dans le cadre d'applications pratiques, ceci n'est pas un obstacle à la mise en place d'un schéma numérique. En effet, dans la plupart des applications, les propriétés physiques du système assurent que t^* est borné (voir les exemples présentés dans les sections 1.2.2 et 1.2.3) ou bien que le problème possède naturellement un horizon de temps déterministe fini (date de fin de contrat dans le modèle d'assurance de la section 1.2.4 ou seuil critique de 0.2 mm dans le modèle de corrosion de la section 1.2.5). Dans ce dernier cas, on ne perd pas en généralité en considérant que t^* est borné par cet horizon déterministe t_f. Ceci conduit à remplacer C_{t^*} par t_f. On présente un exemple d'une telle situation dans la section 3.4.2 au sein de laquelle on développe le modèle de corrosion introduit dans la section 1.2.5.

Hypothèse II.3 *Le noyau de transition markovien Q est Lipschitz dans le sens suivant : il existe $[Q] \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $u \geq 0$ et pour toute fonction $w \in {\mathbf{L}_\mathbf{c}}^u(E)$, on ait*

1. *pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0, t^*(x) \wedge t^*(y) \wedge u[$,*

$$|Qw(\Phi(x,t)) - Qw(\Phi(y,t))| \leq [Q][w]_1^{E,u}|x-y|.$$

2. *pour tous $x, y \in E$ tel que $t^*(x) \vee t^*(y) \leq u$,*

$$|Qw(\Phi(x,t^*(x))) - Qw(\Phi(y,t^*(y)))| \leq [Q]\Big([w]_*^{E,u} + [w]_1^{E,u}\Big)|x-y|.$$

L'hypothèse II.3 ci-dessus est légèrement plus restrictive que sa contrepartie dans [de Saporta et al., 2010] (hypothèse 2.5) à cause de l'introduction de l'espace ${\mathbf{L}_\mathbf{c}}^u(E)$ (à la place de $\mathbf{L}_\mathbf{c}(E)$ qui contient moins de fonctions que ${\mathbf{L}_\mathbf{c}}^u(E)$). Ceci nous permettra de montrer que le processus augmenté du temps satisfait une hypothèse similaire (voir section 3.1).

2.2 Formulation récursive de l'espérance

Désormais, on suppose que le processus part du point $x \in E$ fixé i.e. $Z_0 = x$ p.s. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, on cherche à approcher numériquement la quantité

$$J_N(l,c)(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-})\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right], \tag{2.2.1}$$

où $l \in B(E)$, $c \in B(\partial E)$ et X_{t^-} est la limite à gauche de X_t. Ainsi, $X_{T_j^-} = \Phi(Z_{j-1}, S_j)$ est la position avant le j-ème saut. Puisque les saut à la frontière se produisent exactement aux temps de sortie déterministe de E, on a

$$J_N(l,c)(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{N} c\Big(\Phi(Z_{j-1}, t^*(Z_{j-1}))\Big)\mathbb{1}_{\{S_j = t^*(Z_{j-1})\}}\right].$$

Dans de nombreuses applications, $J_N(l,c)(x)$ apparaît comme une fonction de "coût" ou de "récompense" (voir par exemple les applications présentées dans la section 3.4). Le premier terme, qui dépend de l, est appelé le coût instantané et le second, qui dépend de c, est le coût de saut à la frontière.

Dans le reste de ce chapitre, on cherche une formulation de l'espérance ci-dessus qui nous permettra de mettre en place une méthode d'approximation numérique. La propriété de continuité Lipschitz sera un élément crucial pour prouver la convergence de notre schéma numérique. Pour cette raison, la première étape consiste à remplacer la fonction indicatrice de $J_N(l,c)(x)$ par une fonction lipschitzienne. Nous présenterons alors une formule de récurrence fournissant l'espérance souhaitée. Cette formulation récursive sera le point de départ de notre méthode numérique.

2.2.1 Continuité Lipschitz des fonctions de coût

On introduit une hypothèse de régularité Lipschitz sur les fonctions de coût l et c.

Hypothèse II.4 *On suppose que $l \in \mathbf{L_c}(E)$ et $c \in \mathbf{L_c}(\partial E)$.*

De plus, nous remplaçons la fonction indicatrice dans $J_N(l,c)(x)$ par une fonction lipschitzienne notée δ^A, avec $A > 0$. La fonction δ^A est une approximation triangulaire de cette fonction indicatrice, représentée sur la figure 2.1, et définie sur $E \times \mathbb{R}$ par

$$\delta^A(x,t) = \begin{cases} A\Big(t - (t^*(x) - \frac{1}{A})\Big) & \text{pour } t \in [t^*(x) - \frac{1}{A}; t^*(x)], \\ -A\Big(t - (t^*(x) + \frac{1}{A})\Big) & \text{pour } t \in [t^*(x); t^*(x) + \frac{1}{A}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x \in E$, la fonction $t \to \delta^A(x,t)$ tend vers $t \to \mathbb{1}_{\{t=t^*(x)\}}$ lorsque A tend vers l'infini. On pose alors

$$J_N^A(l,c)(x) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_N} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{N} c\Big(\Phi(Z_{j-1}, t^*(Z_{j-1}))\Big)\delta^A(Z_{j-1}, S_j) \right],$$

La proposition suivante prouve la convergence lorsque A tend vers l'infini de $J_N^A(l,c)(x)$ vers $J_N(l,c)(x)$ et donne une borne de l'erreur.

Proposition 2.2.1 *Sous l'hypothèse II.1, pour tous $x \in E$, $A > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$, $l \in B(E)$ et $c \in B(\partial E)$, on a*

$$\Big|J_N^A(l,c)(x) - J_N(l,c)(x)\Big| \leq \frac{NC_cC_\lambda}{A}.$$

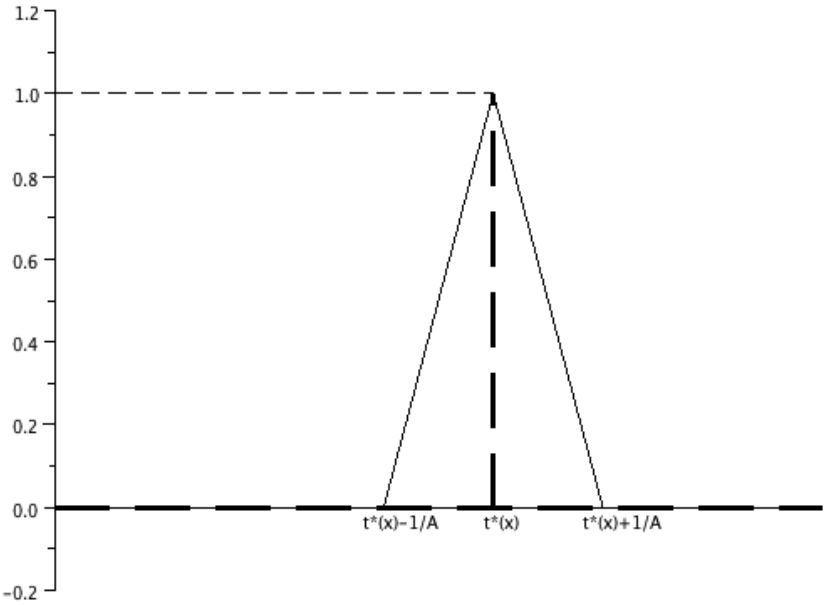

FIGURE 2.1 – La fonction $t \to \delta^A(x,t)$ est une approximation lipschitzienne de la fonction indicatrice $t \to \mathbb{1}_{\{t=t^*(x)\}}$.

Démonstration Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|J_N^A(l,c)(x) - J_N(l,c)(x)\Big| \\
&= \left|\mathbf{E}_x\left[\sum_{j=1}^N c\Big(\Phi(Z_{j-1}, t^*(Z_{j-1}))\Big)\Big(\delta^A(Z_{j-1},S_j) - \mathbb{1}_{\{S_j=t^*(Z_{j-1})\}}\Big)\right]\right| \\
&\leq C_c \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_x\left[\Big|\delta^A(Z_{j-1},S_j) - \mathbb{1}_{\{S_j=t^*(Z_{j-1})\}}\Big|\right] \\
&\leq C_c \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_x\left[\mathbf{E}\left[\Big|\delta^A(Z_{j-1},S_j) - \mathbb{1}_{\{S_j=t^*(Z_{j-1})\}}\Big|\Big|Z_{j-1}\right]\right].
\end{aligned}$$

Rappelons que, d'après l'équation (1.1.6), la loi conditionnelle de S_j sachant Z_{j-1} admet sur l'intervalle $[0; t^*(Z_{j-1})[$ la densité

$$s \to \lambda\Big(\Phi(Z_{j-1},s)\Big)e^{-\Lambda(Z_{j-1},s)},$$

et place un poids $e^{-\Lambda(Z_{j-1},t^*(Z_{j-1}))}$ sur le point $t^*(Z_{j-1})$. Dans l'espérance conditionnelle ci-dessus, les termes provenant de la masse ponctuelle en $t^*(Z_{j-1})$ dans δ^A et dans la fonction indicatrice se compensent. Nous rappelons aussi que λ est borné d'après l'hypothèse II.1. Enfin, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|J_N^A(l,c)(x) - J_N(l,c)(x)\Big| \\
&\leq C_c \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_x\left[\int_{t^*(Z_{j-1})-\frac{1}{A}}^{t^*(Z_{j-1})} \delta^A(Z_{j-1},s)\lambda\Big(\Phi(Z_{j-1},s)\Big)e^{-\Lambda(Z_{j-1},s)}ds\right] \\
&\leq \frac{NC_cC_\lambda}{A}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

En conséquence de cette proposition, nous nous intéressons désormais à l'approximation de $J_N^A(l,c)(x)$ pour un A fixé, suffisamment grand pour assurer que l'erreur précédente est aussi petite que souhaité. On discutera du choix adéquat de A dans la section 2.4.2.

2.2.2 Formulation récursive

M.H.A. Davis [Davis, 1993, section 32] montre que l'espérance $J_N^A(l,c)(x)$ qui nous intéresse peut être obtenue en itérant un opérateur que nous noterons G^A. Nous présentons maintenant cette méthode qui nous permettra ensuite de définir notre schéma d'approximation dans la section 2.4.

Définition 2.2.2 *On introduit les fonctions L, C^A et F^A définies pour tous $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$ par*

$$\begin{aligned} L(x,t) &= \int_0^t l\Big(\Phi(x,s)\Big)ds, \\ C^A(x,t) &= c\Big(\Phi(x,t^*(x))\Big)\delta^A(x,t), \\ F^A(x,t) &= L(x,t) + C^A(x,t), \end{aligned}$$

ainsi que l'opérateur $G^A : B(E) \to B(E)$

$$G^A w(x) = \mathbf{E}_x\left[F^A(x,S_1) + w(Z_1)\right].$$

Nous définissons maintenant, par récurrence rétrograde, une suite de fonctions $(v_k)_{0\le k\le N}$ à partir d'itérations de l'opérateur G^A. La quantité $J_N^A(l,c)(x)$ que nous cherchons à approcher pourra s'exprimer en fonction de v_0.

Définition 2.2.3 *On introduit la suite de fonctions $(v_k)_{0\le k\le N}$ de $B(E)$ définie comme suit :*

$$\begin{cases} v_N(x) &= 0, \\ v_k(x) &= G^A v_{k+1}(x). \end{cases}$$

M.H.A. Davis montre alors dans [Davis, 1993, équation 32.33], que pour tout $k \in \{0,...,N\}$,

$$v_{N-k}(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_k} l(X_t)dt + \sum_{j=1}^{k} c\Big(\Phi(Z_{j-1},t^*(Z_{j-1}))\Big)\delta^A(Z_{j-1},S_j)\right].$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, on a $J_N^A(l,c)(x) = v_0(x)$.

La récurrence ci-dessus sur des fonctions peut se traduire en une récurrence, plus facile à manier numériquement, sur de simples variables aléatoires. En effet, remarquons que, grâce à la propriété de Markov de la chaîne $(Z_n,S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $k \in \{0,...,N-1\}$,

$$G^A w(x) = \mathbf{E}\left[F^A(Z_k,S_{k+1}) + w(Z_{k+1})\Big|Z_k = x\right]. \tag{2.2.2}$$

Ainsi, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, on pose $V_k = v_k(Z_k)$ et on a

$$\begin{cases} V_N &= 0, \\ V_k &= \mathbf{E}\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + V_{k+1}\middle| Z_k\right]. \end{cases}$$

Cette récurrence rétrograde fournit la quantité souhaitée, puisqu'on a supposé que $Z_0 = x$ p.s.

$$V_0 = J_N^A(l, c)(x).$$

Par conséquent, nous devons approcher la suite de variables aléatoires $(V_k)_{0\leq k\leq N}$. Cette suite vérifie une récurrence qui ne dépend que de la chaîne $(Z_k, S_k)_{0\leq k\leq N}$. Il apparaît donc naturel de suivre l'idée développée dans [de Saporta et al., 2010] en proposant un schéma basé sur une quantification de cette chaine. Cependant, avant de présenter la méthode numérique proprement dite, nous allons discuter de la continuité Lipschitz de l'opérateur G^A et des fonctions F^A et v_n. Ces propriétés seront en effet essentielles pour prouver la convergence de notre méthode dans la section 2.4.

2.3 Continuité Lipschitz de F^A, G^A et v_n

Le but de cette section est d'obtenir la continuité Lipschitz des fonctions $(v_n)_{0\leq n\leq N}$ définies ci-dessus. Après quelques calculs préliminaires, nous obtenons la continuité Lipschitz de la fonction F^A ainsi que celle de l'opérateur G^A dans un sens précisé plus bas. La continuité Lipschitz de l'opérateur nous permet alors d'établir celle des fonctions v_n.

2.3.1 Calculs préliminaires et continuité Lipschitz de F^A

Nous commençons par un lemme qui résume quelques propriétés de la fonction δ^A.

Lemme 2.3.1 *Sous l'hypothèse II.2, la fonction δ^A est Lipschitz par rapport à chacune de ces variables : pour tous x, $y \in E$ et u, $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$|\delta^A(x,t) - \delta^A(y,t)| \leq A[t^*]|x - y|,$$
$$|\delta^A(x,t) - \delta^A(x,u)| \leq A|t - u|,$$

De plus, on a pour tous $x \in E$ et $t, s \geq 0$ tels que $t + s \leq t^*(x)$,

$$\delta^A(\Phi(x,s),t) = \delta^A(x, t+s).$$

Démonstration La continuité Lipschitz par rapport à la variable de temps est immédiate puisque, par construction, $t \to \delta^A(x,t)$ est affine par morceaux. Soit alors x, $y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, remarquons que la fonction $\delta^A(y,\cdot)$ est égale à $\delta^A(x,\cdot)$ translatée de $t^*(x) - t^*(y)$:

$$\delta^A(y,t) = \delta^A(x, t + t^*(x) - t^*(y)).$$

Ceci a deux conséquences. D'une part, la continuité Lipschitz par rapport à la variable d'espace peut être obtenue à partir de la continuité Lipschitz par rapport à la variable de temps :

$$\begin{aligned}|\delta^A(x,t) - \delta^A(y,t)| &= |\delta^A\Big(x,t\Big) - \delta^A\Big(x, t + t^*(x) - t^*(y)\Big)| \\ &\leq A|t^*(x) - t^*(y)| \\ &\leq A[t^*]|x-y|.\end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que $t^*(\Phi(x,s)) = t^*(x) - s$, on obtient alors le comportement de $\delta^A(\cdot,t)$ le long du flot

$$\delta^A(\Phi(x,s),t) = \delta^A\Big(x, t + t^*(x) - t^*(\Phi(x,s))\Big) = \delta^A(x,t+s)$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la continuité Lipschitz de F^A.

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses II.2 et II.4, la fonction F^A, introduite dans la définition 2.2.2, est Lipschitz par rapport à chacune de ces variables. Pour tous x, $y \in E$ et $u, v \in [0; t^*(x) \wedge t^*(y)]$, on a*

$$|F^A(x,u) - F^A(y,v)| \leq [F^A]_1|x-y| + [F^A]_2|u-v|$$

avec

$$\begin{aligned}[F^A]_1 &= C_{t^*}[l]_1 + [c]_* + A[t^*]C_c, \\ [F^A]_2 &= C_l + AC_c.\end{aligned}$$

Démonstration Pour $x, y \in E$ et $t \in [0; t^*(x) \wedge t^*(y)]$, on a

$$\begin{aligned}|F^A(x,t) - F^A(y,t)| &\leq \int_0^t \Big|l\Big(\Phi(x,s)\Big) - l\Big(\Phi(y,s)\Big)\Big| ds \\ &\quad + \Big|c\Big(\Phi(x,t^*(x))\Big)\delta^A(x,t) - c\Big(\Phi(y,t^*(y))\Big)\delta^A(y,t)\Big| \\ &\leq (C_{t^*}[l]_1 + [c]_* + A[t]_* C_c)|x-y|.\end{aligned}$$

Pour $x \in E$ et u,$v \in [0; t^*(x)]$, on a

$$\begin{aligned}|F^A(x,u) - F^A(x,v)| &\leq \Big|\int_v^u l\Big(\Phi(x,s)\Big)ds\Big| + \Big|c\Big(\Phi(x,t^*(x))\Big)\Big|\Big|\delta^A(x,u) - \delta^A(x,v)\Big)\Big| \\ &\leq (C_l + AC_c)|u-v|.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Les deux lemmes suivants constituent des résultats préliminaires nécessaires pour établir la continuité Lipschitz de G^A. Le premier est adapté de [de Saporta et al., 2010] (lemme A.1).

Lemme 2.3.3 *Sous l'hypothèse II.2, pour $h \in \mathbf{L_c}(E)$, pour tous x, $y \in E$, et pour $t \leq t^*(x) \wedge t^*(y)$, on a*

$$\left| \int_t^{t^*(x)} h(\Phi(x,s))e^{-\Lambda(x,s)}ds - \int_t^{t^*(y)} h(\Phi(y,s))e^{-\Lambda(y,s)}ds \right| \leq \Big(C_{t^*}[h]_1 + \Big(C_{t^*}^2[\lambda]_1 + [t^*] \Big) C_h \Big) |x-y|.$$

Démonstration On suppose sans perte de généralité que $t^*(x) \leq t^*(y)$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_t^{t^*(x)} h(\Phi(x,s))e^{-\Lambda(x,s)}ds - \int_t^{t^*(y)} h(\Phi(y,s))e^{-\Lambda(y,s)}ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t^*(x)} \Big(h(\Phi(x,s))e^{-\Lambda(x,s)} - h(\Phi(y,s))e^{-\Lambda(y,s)} \Big) ds \right| + \left| \int_{t^*(x)}^{t^*(y)} h\Big(\Phi(y,s)\Big)e^{-\Lambda(y,s)}ds \right|. \end{aligned}$$

D'une part, le lemme A.1 de [de Saporta et al., 2010] donne

$$|h(\Phi(x,s))e^{-\Lambda(x,s)} - h(\Phi(y,s))e^{-\Lambda(y,s)}| \leq [h]_1|x-y| + C_h C_{t^*}[\lambda]_1|x-y|,$$

et puisque $|t^*(x) - t| \leq C_{t^*}$, on a

$$\left| \int_t^{t^*(x)} \Big(h(\Phi(x,s))e^{-\Lambda(x,s)} - h(\Phi(y,s))e^{-\Lambda(y,s)} \Big) ds \right| \leq ([h]_1 C_{t^*} + C_h C_{t^*}^2[\lambda]_1)|x-y|. \quad (2.3.1)$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_{t^*(x)}^{t^*(y)} h\Big(\Phi(y,s)\Big)e^{-\Lambda(y,s)}ds \right| \leq [t^*]C_h|x-y|. \quad (2.3.2)$$

Enfin, on obtient le résultat en additionnant les équations (2.3.1) et (2.3.2). □

De plus, on rappelle un cas particulier du lemme A.1 de [de Saporta et al., 2010].

Lemme 2.3.4 *Sous les hypothèses II.1 et II.2, pour $h \in \mathbf{L_c}(\partial E) \cup \mathbf{L_c}(E)$ et $x, y \in E$, on a*

$$\left| e^{-\Lambda(x,t^*(x))} h\Big(\Phi(x,t^*(x))\Big) - e^{-\Lambda(y,t^*(y))} h\Big(\Phi(y,t^*(y))\Big) \right| \leq \Big([h]_* + C_h \Big(C_{t^*}[\lambda]_1 + [t^*]C_\lambda \Big) \Big) |x-y|.$$

2.3.2 Ecriture intégrale de l'opérateur G^A

Nous introduisons maintenant une définition qui sera utile dans les prochaines preuves. Pour $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$, on définit

$$\begin{aligned} G_t^A w(x) &= E_x\left[\left(F^A(x, S_1) + w(Z_1)\right)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] \\ &= E_x\left[\left(L(x, S_1) + C^A(x, S_1) + w(Z_1)\right)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right]. \end{aligned}$$

Cet opérateur, qui contient G^A en tant que cas particulier (en effet, $G_0^A = G^A$), apparaîtra naturellement lorsque nous étudierons le comportement de v_n le long du flot (voir lemme 2.3.8). Afin de prouver la continuité Lipschitz de cet opérateur, il sera plus approprié d'en donner une écriture sous forme d'intégrale plutôt que sous forme d'espérance. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 2.3.5 *Sous l'hypothèse II.4, pour $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$, on a*

$$E_x\left[L(x, S_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] = \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) &= e^{-\Lambda(x,t)} \int_0^t l \circ \Phi(x, s) ds, \\ \alpha_2(x, t) &= \int_t^{t^*(x)} l \circ \Phi(x, s) e^{-\Lambda(x,s)} ds. \end{aligned}$$

Démonstration Notons $\varphi_{S_1}(du)$ la loi de S_1 sous $\mathbf{P}_x$. D'après l'équation (1.1.6), on a

$$\varphi_{S_1}(du) = \lambda(\Phi(x, u)) e^{-\Lambda(x,u)} \mathbb{1}_{[0;t^*(x)]}(u) du + e^{-\Lambda(x,t^*(x))} \delta_{t^*(x)}(u)$$

On va vérifier que l'on peut calculer $E_x\left[L(x, S_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right]$ en appliquant le théorème de Fubini. On a

$$\int_t^{+\infty} \left(\int_0^u \left|l(\Phi(x, s))\right| ds\right) \varphi_{S_1}(du) \leq \int_t^{+\infty} C_l u \varphi_{S_1}(du) \leq C_l \mathbf{E}_x\left[S_1\right] \leq C_l C_{t^*} < +\infty.$$

Le théorème de Fubini donne alors

$$\begin{aligned} E_x\left[L(x, S_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] &= \int_t^{+\infty} \left(\int_0^u l(\Phi(x, s)) ds\right) \varphi_{S_1}(du) \\ &= \int_0^{+\infty} l(\Phi(x, s)) \left(\int_{s \vee t}^{+\infty} \varphi_{S_1}(du)\right) ds \\ &= \int_0^{+\infty} l(\Phi(x, s)) \left(e^{-\Lambda(x, s \vee t)} \mathbb{1}_{\{s \vee t \leq t^*(x)\}}\right) ds \\ &= e^{-\Lambda(x,t)} \int_0^t l(\Phi(x, s)) ds + \int_t^{t^*(x)} l(\Phi(x, s)) e^{-\Lambda(x,s)} ds. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Notons que dans la démonstration précédente, on a utilisé le fait que t^* est supposé être borné. Cet argument est assez fort car il suffit en réalité que S_1 soit intégrable ce qui est très souvent le cas même lorsque t^* n'est pas borné (voir par

exemple les sections 1.2.1, 1.2.4 et 1.2.5).

Le lemme suivant donne la deuxième partie de l'écriture intégrale de G_t^A. On introduit une notation utile, pour $w \in \mathbf{L_c}(E)$, on pose :

$$\Big(\lambda Q w\Big)(x) = \lambda(x) Q w(x).$$

Remarquons qu'on a alors

$$\begin{aligned} C_{\lambda Q w} &\leq C_\lambda C_w, \\ [\lambda Q w]_1 &\leq C_\lambda [Q][w]_1 + C_w [\lambda]_1. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.6 *Pour tous $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$, on a*

$$E_x\left[\Big(C^A(x,S_1) + w(Z_1)\Big)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] = \alpha_3(x,t) + \alpha_4(x,t) + \alpha_5(x)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_3(x,t) &= c \circ \Phi(x, t^*(x)) \textstyle\int_t^{t^*(x)} \delta^A(x,s) \lambda \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds, \\ \alpha_4(x,t) &= \textstyle\int_t^{t^*(x)} \Big(\lambda Q w\Big) \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds, \\ \alpha_5(x) &= e^{-\Lambda(x,t^*(x))} \Big(Q w + c\Big) \circ \Phi(x, t^*(x)). \end{aligned}$$

Démonstration Soit $w \in \mathbf{L_c}(E)$. On définit la fonction $h : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(x,s) = c\Big(\Phi(x, t^*(x))\Big)\delta^A(x,s) + Qw\Big(\Phi(x,s)\Big).$$

Remarquons que pour tout $t \in [0; t^*(x)]$, on a alors

$$E_x\left[\Big(C^A(x,S_1) + w(Z_1)\Big)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] = E_x\left[h(x,S_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right].$$

De plus, d'après l'équation (1.1.6), S_1 admet sous $\mathbf{P}_x$ la loi

$$\lambda(\Phi(x,u)) e^{-\Lambda(x,u)} \mathbb{1}_{[0; t^*(x)[}(u) du + e^{-\Lambda(x, t^*(x))} \delta_{t^*(x)}(u),$$

d'où

$$E_x\left[h(x,S_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \geq t\}}\right] = \int_t^{t^*(x)} h(x,s) \lambda \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds + e^{-\Lambda(x,t^*(x))} h(x, t^*(x)).$$

Enfin, en remarquant que $\delta^A(x, t^*(x)) = 1$, on obtient le résultat. □

Enfin, d'après les lemmes 2.3.5 et 2.3.6 ci-dessus, on a l'écriture intégrale de G_t^A, pour $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$,

$$G_t^A w(x) = \alpha_1(x,t) + \alpha_2(x,t) + \alpha_3(x,t) + \alpha_4(x,t) + \alpha_5(x) \tag{2.3.3}$$

où on rappelle que

$$\begin{aligned} \alpha_1(x,t) &= e^{-\Lambda(x,t)} \textstyle\int_0^t l \circ \Phi(x,s) ds, \\ \alpha_2(x,t) &= \textstyle\int_t^{t^*(x)} l \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds, \\ \alpha_3(x,t) &= c \circ \Phi(x, t^*(x)) \textstyle\int_t^{t^*(x)} \delta^A(x,s) \lambda \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds, \\ \alpha_4(x,t) &= \textstyle\int_t^{t^*(x)} \Big(\lambda Q w\Big) \circ \Phi(x,s) e^{-\Lambda(x,s)} ds, \\ \alpha_5(x) &= e^{-\Lambda(x,t^*(x))} \Big(Q w + c\Big) \circ \Phi(x, t^*(x)). \end{aligned}$$

2.3.3 Continuité Lipschitz de G^A et G_t^A

La proposition suivante établit la continuité Lipschitz de l'opérateur G_t^A qui nous permettra d'obtenir directement celle de G^A et ensuite celle des fonctions v_n.

Proposition 2.3.7 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, on a $G_t^A w \in B(E)$ lorsque $w \in B(E)$ avec*

$$C_{G_t^A w} \leq C_{t^*} C_l + C_c + C_w.$$

De plus, pour $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $(x,y) \in E^2$ et $t \in [0; t^*(x) \wedge t^*(y)]$, on a

$$\Big|G_t^A w(x) - G_t^A w(y)\Big| \leq K(A,w)|x-y|,$$

où $K(A,w) = E_1 + E_2 A + E_3[w]_1 + E_4 C_w + [Q][w]_*$ où les constantes E_1, E_2, E_3 et E_4 ne dépendent que des caractéristiques du PMDM et des fonctions de coût :

$$\begin{aligned}
E_1 = \;& 2[l]_1 C_{t^*} + C_l\Big([t^*] + 2C_{t^*}^2[\lambda]_1\Big) + [c]_*\Big(1 + C_{t^*}C_\lambda\Big) \\
& + C_c\Big(2[\lambda]_1 C_{t^*} + C_\lambda C_{t^*}^2[\lambda]_1 + 2[t^*]C_\lambda\Big), \\
E_2 = \;& C_c C_{t^*} C_\lambda [t^*], \\
E_3 = \;& \Big(1 + C_{t^*}C_\lambda\Big)[Q], \\
E_4 = \;& 2C_\lambda[t^*] + C_{t^*}[\lambda]_1\Big(2 + C_{t^*}C_\lambda\Big).
\end{aligned}$$

l'équation

Démonstration La première assertion est claire, G_t^A étant définie comme l'espérance d'une fonction qui est bornée d'après nos hypothèses. Soit maintenant $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $(x,y) \in E^2$ et $t \in [0; t^*(x) \wedge t^*(y)]$. Etant donné l'équation (2.3.3), il est naturel de décomposer $|G_t^A w(x) - G_t^A w(y)|$ en la somme de cinq différences :

$$|G_t^A w(x) - G_t^A w(y)| \leq \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i(x,t) - \alpha_i(y,t)| + |\alpha_5(x) - \alpha_5(y)|.$$

La première est $|\alpha_1(x,t) - \alpha_1(y,t)|$, elle est bornée par

$$\begin{aligned}
|\alpha_1(x,t) - \alpha_1(y,t)| &\leq C_{t^*} C_l \Big|e^{-\Lambda(x,t)} - e^{-\Lambda(y,t)}\Big| + \int_0^t \Big(l \circ \Phi(x,s) - l \circ \Phi(y,s)\Big) ds \\
&\leq \Big(C_{t^*}^2 C_l [\lambda]_1 + C_{t^*}[l]_1\Big)|x-y|.
\end{aligned}$$

Les différences $|\alpha_2(x,t) - \alpha_2(y,t)|$ et $|\alpha_4(x,t) - \alpha_4(y,t)|$ peuvent être bornées grâce au lemme 2.3.3 en prenant successivement $h = l$ et $h = \lambda Q w$.

Concernant la différence des termes α_5, on utilise le lemme 2.3.4 avec $h = Qw + c$ en remarquant que

$$\begin{aligned}
C_{Qw+c} &\leq C_w + C_c, \\
[Qw + c]_* &\leq [Q]\Big([w]_* + [w]_1\Big) + [c]_*.
\end{aligned}$$

Il nous reste à borner $|\alpha_3(x,t) - \alpha_3(y,t)|$, on suppose sans perte de généralité que $t^*(x) \leq t^*(y)$ et, en raisonnant comme dans le lemme 2.3.3, on a

$$\begin{aligned}
&|\alpha_3(x,t) - \alpha_3(y,t)| \\
&\leq C_c \int_t^{t^*(x)} \Big|\delta^A(x,s)\lambda\circ\Phi(x,s)e^{-\Lambda(x,s)} - \delta^A(y,s)\lambda\circ\Phi(y,s)e^{-\Lambda(y,s)}\Big| ds \\
&\quad + C_c \int_{t^*(x)}^{t^*(y)} \Big|\delta^A(y,s)\lambda\circ\Phi(y,s)e^{-\Lambda(y,s)}\Big| ds + [c]_* C_{t^*} C_\lambda |x-y| \\
&\leq C_c \int_t^{t^*(x)} \Big(C_\lambda \Big|\delta^A(x,s) - \delta^A(y,s)\Big| + [\lambda]_1 |x-y| + C_\lambda \Big|e^{-\Lambda(x,s)} - e^{-\Lambda(y,s)}\Big|\Big) ds \\
&\quad + C_c [t^*] C_\lambda |x-y| + [c]_* C_{t^*} C_\lambda |x-y|.
\end{aligned}$$

On conclut notamment grâce au lemme 2.3.1 qui énonce la continuité Lipschitz de δ^A :

$$\begin{aligned}
&|\alpha_3(x,t) - \alpha_3(y,t)| \\
&\quad \leq \Big(C_c C_{t^*}\Big(C_\lambda A[t^*] + [\lambda]_1 + C_\lambda C_{t^*}[\lambda]_1\Big) + C_c[t^*]C_\lambda + [c]_* C_{t^*} C_\lambda\Big)|x-y|.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. □

Notons que la constante obtenue $K(A,w)$ ne dépend pas de t. Ainsi, pour $t=0$, on obtient en particulier la continuité Lipschitz de l'opérateur G^A avec la même constante de Lipschitz.

2.3.4 Continuité Lipschitz de v_n

On cherche maintenant à prouver que les fonctions v_n sont lipschitziennes le long du flot dans le sens précisé plus haut. Pour cette raison, nous allons étudier le comportement de v_n le long du flot. On a alors le lemme suivant, similaire à [Davis, 1993, lemme 51.7] et dans lequel l'opérateur G_t^A, défini au début de la section, apparaît naturellement.

Lemme 2.3.8 *Pour tous $n \in \{0,\dots,N-1\}$, $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$, on a*

$$v_n(\Phi(x,t)) = e^{\Lambda(x,t)} G_t^A v_{n+1}(x) - \int_0^t l\circ\Phi(x,s)ds.$$

Démonstration D'après l'équation (2.3.3) et en y remplaçant w par v_{n+1}, t par 0 et x par $\Phi(x,t)$, on a

$$\begin{aligned}
v_n(\Phi(x,t)) &= G^A v_{n+1}(\Phi(x,t)) \\
&= \int_0^{t^*(x)-t} l\circ\Phi(x,t+s)e^{-\Lambda(\Phi(x,t),s)}ds \\
&\quad + c\circ\Phi(x,t^*(x)) \int_0^{t^*(x)-t} \delta^A(x,t+s)\lambda\circ\Phi(x,t+s)e^{-\Lambda(\Phi(x,t),s)}ds \\
&\quad + \int_0^{t^*(x)-t} \Big(\lambda Q v_{n+1}\Big)\circ\Phi(x,t+s)e^{-\Lambda(\Phi(x,t),s)}ds \\
&\quad + e^{-\Lambda(\Phi(x,t),t^*(x)-t)}\Big(Qv_{n+1} + c\Big)\circ\Phi(x,t^*(x)).
\end{aligned}$$

En effet, on a utilisé $t^*(\Phi(x,t)) = t^*(x) - t$, la propriété de semi-groupe du flot $\Phi(\Phi(x,t),s) = \Phi(x,t+s)$ ainsi que la proposition 2.3.1 selon laquelle $\delta^A(\Phi(x,t),s) = \delta^A(x,t+s)$.

De plus, étudions le comportement de $\Lambda(\cdot,s)$ le long du flot

$$\begin{aligned}\Lambda(\Phi(x,t),s) &= \int_0^s \lambda(\Phi(\Phi(x,t),u))du \\ &= \int_0^s \lambda(\Phi(x,t+u))du \\ &= \int_t^{t+s} \lambda(\Phi(x,u))du \\ &= \Lambda(x,t+s) - \Lambda(x,t).\end{aligned}$$

Ainsi, en factorisant par $e^{\Lambda(x,t)}$ et en posant le changement de variable $u = t+s$, on obtient

$$\begin{aligned}v_n(\Phi(x,t)) &= e^{\Lambda(x,t)}\Big(\int_t^{t^*(x)} l\circ\Phi(x,u)e^{-\Lambda(x,u)}du \\ &\quad + c\circ\Phi(x,t^*(x))\int_t^{t^*(x)}\delta^A(x,u)\lambda\circ\Phi(x,u)e^{-\Lambda(x,u)}du \\ &\quad + \int_t^{t^*(x)}\Big(\lambda Q v_{n+1}\Big)\circ\Phi(x,u)e^{-\Lambda(x,u)}du \\ &\quad + e^{-\Lambda(x,t^*(x))}\Big(Qv_{n+1}+c\Big)\circ\Phi(x,t^*(x))\Big) \\ &= e^{\Lambda(x,t)}G_t^A v_{n+1}(x) - \int_0^t l\circ\Phi(x,u)du.\end{aligned}$$

On a le résultat souhaité. □

Nous avons étudié le comportement de v_n le long du flot, nous sommes donc maintenant en mesure d'établir sa continuité Lipschitz.

Proposition 2.3.9 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, pour tout $n \in \{0,1,...,N\}$, v_n est lipschitzienne le long du flot i.e.*

$$v_n \in \mathbf{L_c}(E)$$

avec $C_{v_N} = [v_N]_1 = [v_N]_2 = [v_N]_* = [v_N] = 0$ et pour tout $n \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$\begin{aligned}C_{v_n} &\le (N-n)\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big), \\ [v_n]_1 &\le e^{C_{t^*}C_\lambda}\Big(K(A,v_{n+1}) + (N-n)C_{t^*}[\lambda]_1\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big)\Big) + C_{t^*}[l]_1, \\ [v_n]_2 &\le e^{C_{t^*}C_\lambda}\Big(C_{t^*}C_lC_\lambda + 2C_l + C_\lambda C_c + (2N-2n-1)C_\lambda\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big)\Big) + C_l, \\ [v_n]_* &\le [v_n]_1 + [t^*][v_n]_2. \\ [v_n] &\le K(A,v_{n+1}).\end{aligned}$$

Démonstration Tout d'abord, on a bien le résultat attendu au rang N puisque $v_N = 0$. Fixons maintenant $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Rappelons que pour tout $x \in E$, on a d'après la définition 2.2.2

$$v_n(x) = G^A v_{n+1}(x) = \mathbf{E}_x\left[L(x, S_1)\right] + \mathbf{E}_x\Big[C^A(x, S_1)\Big] + \mathbf{E}_x[v_{n+1}(Z_1)].$$

Ainsi, $C_{v_n} \leq C_{t^*}C_l + C_c + C_{v_{n+1}} \leq (N-n)\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big)$ par récurrence puisque $v_N = 0$ et donc $C_{v_N} = 0$.

On s'intéresse maintenant à $[v_n]_1$. Le lemme 2.3.8 qui précise le comportement de v_n le long du flot donne

$$\begin{aligned}
&|v_n(\Phi(x,t)) - v_n(\Phi(y,t))| \\
&\quad\leq |e^{\Lambda(x,t)}G_t^A v_{n+1}(x) - e^{\Lambda(y,t)}G_t^A v_{n+1}(y)| + \int_0^t \Big|l\circ\Phi(x,s) - l\circ\Phi(y,s)\Big|ds \\
&\quad\leq e^{\Lambda(x,t)}\underbrace{|G_t^A v_{n+1}(x) - G_t^A v_{n+1}(y)|}_{(a)} + \underbrace{|G_t^A v_{n+1}(y)|}_{(b)}\underbrace{|e^{\Lambda(x,t)} - e^{\Lambda(y,t)}|}_{(c)} + C_{t^*}[l]_1|x-y|.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en utilisant la proposition 2.3.7 pour borner le terme (a) :

$$(a) \leq K(A, v_{n+1})|x-y|,$$

en remarquant que

$$\begin{aligned}
\Lambda(x,t) &\leq C_{t^*}C_\lambda, \\
(c) &\leq e^{C_{t^*}C_\lambda}C_{t^*}[\lambda]_1|x-y|.
\end{aligned}$$

et en utilisant la proposition 2.3.7 pour obtenir (par récurrence) :

$$(b) \leq C_{t^*}C_l + C_c + C_{v_{n+1}} \leq (N-n)\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big).$$

Considérons maintenant $[v_n]_2$. Pour $x \in E$ et s, $t \in [0, t^*(x)]$ avec $s \leq t$, on a

$$\begin{aligned}
&|v_n(\Phi(x,t)) - v_n(\Phi(x,s))| \\
&\quad\leq e^{\Lambda(x,t)}\underbrace{|G_t^A v_{n+1}(x) - G_s^A v_{n+1}(x)|}_{(d)} + \underbrace{|G_s^A v_{n+1}(x)|}_{(e)}\underbrace{|e^{\Lambda(x,t)} - e^{\Lambda(x,s)}|}_{(f)} + C_l|t-s|.
\end{aligned}$$

D'après l'équation (2.3.3), on a

$$\begin{aligned}
(d) &\leq E_x\left[\Big|F(x,S_1) + v_{n+1}(Z_1)\Big|\mathbb{1}_{\{s\leq S_1<t\}}\right] \\
&\leq \left|e^{-\Lambda(x,t)}\int_0^t l(\Phi(x,u))du - e^{-\Lambda(x,s)}\int_0^s l(\Phi(x,u))du\right| + \int_s^t \Big|l(\Phi(x,u))e^{-\Lambda(x,u)}\Big|du \\
&\quad + \Big|c\circ\Phi(x,t^*(x))\Big|\int_s^t \Big|\delta^A(x,u)\lambda\circ\Phi(x,u)e^{-\Lambda(x,u)}\Big|du \\
&\quad + \int_s^t \Big|\Big(\lambda Q v_{n+1}\Big)\circ\Phi(x,u)e^{-\Lambda(x,u)}\Big|du, \\
&\leq \Big(C_{t^*}C_l|e^{-\Lambda(x,t)} - e^{-\Lambda(x,s)}| + C_l|t-s|\Big) + \Big(C_l|t-s|\Big) \\
&\quad + \Big(C_cC_\lambda|t-s|\Big) + \Big(C_\lambda C_{v_{n+1}}|t-s|\Big).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a également

$$(f) \leq e^{C_{t^*}C_\lambda} C_\lambda |t-s|,$$

et comme pour le terme (b) :

$$(e) \leq (N-n)\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big).$$

Enfin, la borne de $[v_n]$ est une conséquence directe de la proposition 2.3.7. □

Nous avons obtenu la continuité Lipschitz des fonctions $(v_n)_{0\leq n\leq N}$, nous nous tournons à présent vers le schéma d'approximation numérique proprement dit.

2.4 Schéma d'approximation

Nous avons montré dans la section 2.2.2 que l'espérance qui nous intéresse peut être obtenue par itération de l'opérateur G^A qui ne dépend que de la chaîne de Markov à temps discret $(Z_k, S_k)_{0\leq k\leq N}$. La première étape de notre méthode numérique consiste donc à discrétiser cette chaîne afin d'approcher l'opérateur G^A.

2.4.1 Quantification de la chaîne $(Z_k, S_k)_{k\leq N}$

La méthode de discrétisation que nous utilisons est la quantification. Nous l'avons détaillée dans la section 1.4. Nous ne rappellerons ici que l'essentiel afin, notamment, de fixer les notations.

L'algorithme de quantification de la chaîne de Markov à temps discret $(\Theta_k)_{k\leq N} = (Z_k, S_k)_{k\leq N}$ nous fournit pour chaque pas de temps $0 \leq k \leq N$ une grille finie $\Gamma_k \subset E\times\mathbb{R}^+$ ainsi que des matrices de transitions $(\widehat{Q}_k)_{0\leq k\leq N-1}$ de Γ_k vers Γ_{k+1}. Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \leq N$, Z_k et S_k ont des moments finis au moins jusqu'à l'ordre p. On note alors $proj_{\Gamma_k}$ la projection au plus proche voisin de $E \times \mathbb{R}^+$ sur Γ_k (pour la distance associée à la norme p). Le processus quantifié $(\widehat{\Theta}_k)_{k\leq N} = (\widehat{Z}_k, \widehat{S}_k)_{k\leq N}$ à valeur pour chaque k dans la grille finie Γ_k de $E \times \mathbb{R}^+$ est alors défini par

$$(\widehat{Z}_k, \widehat{S}_k) = proj_{\Gamma_k}(Z_k, S_k). \tag{2.4.1}$$

De plus, on note respectivement Γ_k^Z et Γ_k^S les projections de Γ_k sur E et $\mathbb{R}^+$.

Rappelons également que le processus de quantification optimale $(\widehat{\Theta}_k)_{k\leq N}$ converge vers le processus $(\Theta_k)_{k\leq N}$ au sens de la norme L^p lorsque le nombre de points dans les grilles tend vers l'infini (voir le théorème 1.4.1). Enfin, et c'est un des principaux avantages de notre méthode par rapport à des simulations de Monte-Carlo standards, nous insistons sur le fait que les grilles de quantifications permettent une grande flexibilité. En effet, leur calcul peut être assez long en pratique mais, une fois obtenues, elles peuvent être stockées et réutilisées pour calculer rapidement différentes espérances dès lors que la dynamique du processus n'est pas modifiée.

Nous présentons maintenant notre schéma numérique qui consiste simplement à remplacer les variables aléatoires Z_k et S_k par leur approximation quantifiée dans l'opérateur G^A. L'approximation suit alors très simplement puisque le processus quantifié a un espace d'états fini.

2.4.2 Approximation de l'espérance et vitesse de convergence

Nous allons utiliser le processus quantifié $(\widehat{\Theta}_k)_{k\leq N} = (\widehat{Z}_k, \widehat{S}_k)_{k\leq N}$ afin de définir une version quantifiée de l'opérateur G^A et d'approcher les variables aléatoires $(V_k)_{k\leq N}$. Remarquons que le processus quantifié n'est plus une chaîne de Markov homogène donc nous obtiendrons un opérateur différent pour chaque pas de temps k. Dans la section précédente, on a déjà remarqué, c'est l'équation (2.2.2), que pour tout $k \in \{1, ..., N\}$ et $x \in E$,

$$G^A w(x) = \mathbf{E}\left[F^A(Z_{k-1}, S_k) + w(Z_k)\Big| Z_{k-1} = x\right].$$

La définition de l'opérateur quantifié suit naturellement.

Définition 2.4.1 *Pour tous $k \in \{1, ..., N\}$, $w \in B(\Gamma_k^Z)$ et $z \in \Gamma_{k-1}^Z$, on pose*

$$\widehat{G}_k^A w(z) = \mathbf{E}\left[F^A(z, \widehat{S}_k) + w(\widehat{Z}_k)\Big| \widehat{Z}_{k-1} = z\right],$$

on définit alors les fonctions $(\widehat{v}_k)_{0\leq k\leq N}$:

$$\begin{cases} \widehat{v}_N(z) &= 0, & \text{pour tout } z \in \Gamma_N^Z, \\ \widehat{v}_k(z) &= \widehat{G}_{k+1}^A \widehat{v}_{k+1}(z), & \text{pour tout } k \in \{0, ..., N-1\} \text{ et } z \in \Gamma_k^Z. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, on pose

$$\widehat{V}_k = \widehat{v}_k(\widehat{Z}_k).$$

L'espérance conditionnelle dans $\widehat{G}_k^A w(z)$ est une somme finie. Ainsi, le calcul numérique de la suite $(\widehat{V}_k)_k$ sera facile à effectuer dès que l'on aura obtenu le processus quantifié $(\widehat{\Theta}_k)_{k\leq N}$ (c'est-à-dire les grilles de quantification et les matrices de transition).

Nous avons supposé que $Z_0 = x$ p.s. Ainsi, l'algorithme de quantification fournit $\widehat{Z}_0 = x$ p.s. également. Par conséquent, la variable aléatoire $\widehat{V}_0 = \widehat{v}_0(\widehat{Z}_0)$ est, en réalité, déterministe. Le théorème suivant énonce la convergence de $\widehat{V}_0$ vers $V_0 = J_N^A(l, c)(x)$ et borne la vitesse de convergence.

Théorème 2.4.2 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, l'erreur d'approximation vérifie :*

$$|J_N(l, c)(x) - \widehat{V}_0| \leq \varepsilon_N(l, c, X, A)$$

où

$$\varepsilon_N(l, c, X, A) = \frac{NC_c C_\lambda}{A} + \sum_{k=0}^{N-1} \Big(2[v_{k+1}]\|Z_{k+1} - \widehat{Z}_{k+1}\|_p + \Big(2[v_k] + [F^A]_1\Big)\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + [F^A]_2\|S_{k+1} - \widehat{S}_{k+1}\|_p\Big),$$

les différentes constantes intervenant ci-dessus ayant été définies dans la section précédente.

La proposition 2.2.1 suggère que A devrait être aussi grand que possible. Cependant, les constantes $[F^A]_1$, $[F^A]_2$ et $[v_n]$ qui apparaissent dans la borne de l'erreur d'approximation du théorème 2.4.2 ci-dessus augmentent linéairement avec A. Ainsi, afin de contrôler l'erreur, il est nécessaire que l'ordre de grandeur de l'erreur de quantification $\|\Theta_k - \widehat{\Theta}_k\|_p$ soit au plus de $\frac{1}{A}$.

La convergence du schéma d'approximation est une conséquence du théorème 2.4.2 ci-dessus. En effet, $\|\Theta_k - \widehat{\Theta}_k\|_p$ peut devenir arbitrairement petit lorsque le nombre de points dans la grille de quantification tend vers l'infini. La preuve de ce théorème fait l'objet de la section suivante.

2.4.3 Démonstration du théorème 2.4.2

La continuité Lipschitz des fonctions v_k a été prouvée dans la proposition 2.3.9. Soit maintenant $A > 0$, remarquons tout d'abord que

$$|J_N(l,c)(x) - \widehat{V}_0| \leq |J_N(l,c)(x) - V_0| + |V_0 - \widehat{V}_0|.$$

La proposition 2.2.1 assure que

$$|J_N(l,c)(x) - V_0| \leq \frac{NC_cC_\lambda}{A},$$

puisque $V_0 = J_N^A(l,c)(x)$. Nous nous cherchons maintenant à borner $|V_0 - \widehat{V}_0|$.

Dans la suite, la preuve emprunte certains arguments à celle du théorème 5.1 de [de Saporta et al., 2010]. Rappelons que $\|V_N - \widehat{V}_N\|_p = 0$ et fixons $k \in \{0, ..., N-1\}$. Afin de borner l'erreur d'approximation, on la décompose en trois termes

$$\|V_k - \widehat{V}_k\|_p \leq \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3$$

où on a posé

$$\begin{cases} \Xi_1 &= \|v_k(Z_k) - v_k(\widehat{Z}_k)\|_p, \\ \Xi_2 &= \|G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p, \\ \Xi_3 &= \|\widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p. \end{cases}$$

Le théorème est maintenant une conséquence directe des trois prochains lemmes qui fournissent des bornes pour chacun des trois termes ci-dessus.

La borne pour le premier terme est immédiate, elle découle de la continuité Lipschitz des fonctions v_k énoncée par la proposition 2.3.9.

Lemme 2.4.3 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, le premier terme Ξ_1 est borné par*

$$\|v_k(Z_k) - v_k(\widehat{Z}_k)\|_p \leq [v_k]\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p.$$

Lemme 2.4.4 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, le deuxième terme Ξ_2 est borné par*

$$\begin{aligned}&\|G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p \\ &\quad \leq [v_{k+1}]\|Z_{k+1} - \widehat{Z}_{k+1}\|_p + \Big([v_k] + [F^A]_1\Big)\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + [F^A]_2\|S_{k+1} - \widehat{S}_{k+1}\|_p.\end{aligned}$$

Démonstration D'après l'équation (2.2.2), on a

$$G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k) = E\left[F^A(\widehat{Z}_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})\Big|Z_k = \widehat{Z}_k\right].$$

De plus, on rappelle que

$$\widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k) = E\left[F^A(\widehat{Z}_k, \widehat{S}_{k+1}) + v_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1})\Big|\widehat{Z}_k\right],$$

ainsi, on obtient

$$\|G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

où on note

$$\begin{aligned}\beta_1 =&\|E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})\Big|\widehat{Z}_k\right] - E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})\Big|Z_k = \widehat{Z}_k\right]\|_p,\\ \beta_2 =&\|E\left[v_{k+1}(Z_{k+1}) - v_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1})\Big|\widehat{Z}_k\right]\|_p,\\ \beta_3 =&\|E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) - F^A(\widehat{Z}_k, \widehat{S}_{k+1})\Big|\widehat{Z}_k\right]\|_p.\end{aligned}$$

Tout d'abord, d'après la proposition 2.3.9, v_{k+1} est Lipschitz. Donc, β_2 est borné par

$$\beta_2 \leq [v_{k+1}]\|Z_{k+1} - \widehat{Z}_{k+1}\|_p.$$

Ensuite, rappelons que $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n) = proj_{\Gamma_n}(Z_n, S_n)$, on a donc $\sigma(\widehat{Z}_n) \subset \sigma(Z_n, S_n)$, et puisque $\sigma(Z_n, S_n) \subset \mathcal{F}_{T_n}$, la loi des espérances conditionnelles itérées et la propriété de Markov du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ assurent que

$$\begin{aligned}E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})\Big|\widehat{Z}_k\right] =&E\left[E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})|\mathcal{F}_{T_k}\right]\Big|\widehat{Z}_k\right]\\ =&E\left[E\left[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})|Z_k\right]\Big|\widehat{Z}_k\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, grâce à la continuité Lipschitz des v_k, on obtient une borne pour β_1

$$\begin{aligned}\beta_1 \leq&\left\|E\Big[E[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})|Z_k] - E[F^A(Z_k, S_{k+1}) + v_{k+1}(Z_{k+1})|Z_k = \widehat{Z}_k]\Big|\widehat{Z}_k\Big]\right\|_p\\ \leq&\|E\left[G^A v_{k+1}(Z_k) - G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k)\Big|\widehat{Z}_k\right]\|_p\\ \leq&\|G^A v_{k+1}(Z_k) - G^A v_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p\\ \leq&\|v_k(Z_k) - v_k(\widehat{Z}_k)\|_p\\ \leq&[v_k]\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p.\end{aligned}$$

Enfin, on borne β_3 grâce à la proposition 2.3.2 qui énonce la continuité Lipschitz de F^A

$$\beta_3 \leq [F^A]_1 \|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + [F^A]_2 \|S_{k+1} - \widehat{S}_{k+1}\|_p.$$

D'où le résultat. □

Lemme 2.4.5 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3 et II.4, le troisième terme Ξ_3 est borné par*

$$\|\widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_k)\|_p \leq [v_{k+1}] \|Z_{k+1} - \widehat{Z}_{k+1}\|_p + \|V_{k+1} - \widehat{V}_{k+1}\|_p.$$

Démonstration La définition de l'opérateur $\widehat{G}^A_{k+1}$ donne

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_k)\right\|_p &= \left\|E\left[v_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1}) - \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1}) \middle| \widehat{Z}_k\right]\right\|_p \\ &\leq \left\|v_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1}) - \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1})\right\|_p. \end{aligned}$$

On intercale le terme $v_{k+1}(Z_{k+1})$ par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} &\left\|\widehat{G}^A_{k+1} v_{k+1}(\widehat{Z}_k) - \widehat{G}^A_{k+1} \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_k)\right\|_p \\ &\leq \left\|v_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1}) - v_{k+1}(Z_{k+1})\right\|_p + \left\|v_{k+1}(Z_{k+1}) - \widehat{v}_{k+1}(\widehat{Z}_{k+1})\right\|_p \\ &\leq [v_{k+1}] \left\|\widehat{Z}_{k+1} - Z_{k+1}\right\|_p + \left\|V_{k+1} - \widehat{V}_{k+1}\right\|_p. \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé la continuité Lipschitz de v_k, énoncée par la proposition 2.3.9, ainsi que les définitions de V_{k+1} et $\widehat{V}_{k+1}$. □

On dispose donc d'un schéma numérique dont on a prouvé la convergence et obtenu une vitesse de convergence. Ceci nous permet d'approcher les espérances de fonctionnelles de PMDM ainsi que nous l'avions annoncé. Dans le chapitre suivant, nous étendons ces résultats au cas de fonctionnelles dépendant du temps (notamment le cas de l'espérance à horizon de temps déterministe). Nous présentons ensuite les résultats numériques obtenus lors de la mise en œuvre de notre méthode dans des exemples concrets.

Chapitre 3

Fonctionnelles dépendant du temps et résultats numériques

Dans ce chapitre, nous allons étendre les résultats précédents au cas de fonctionnelles dépendant du temps puis nous développerons trois exemples numériques : le modèle d'atelier de maintenance (section 1.2.3), le modèle d'assurance (section 1.2.4) et le modèle de corrosion (section 1.2.5).

Nous abordons maintenant la contribution principale de cette partie en présentant deux généralisations du problème précédent. D'une part, nous allons étudier des fonctionnelles de la forme

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_N} l(X_t, t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right]$$

où l et c sont lipschitziennes. D'autre part, nous souhaitons remplacer l'horizon de temps aléatoire T_N par un horizon déterministe noté t_f i.e.

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{t_f} l(X_t, t)dt + \sum_{T_j \leq t_f} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right].$$

Nous allons raisonner de la façon suivante. Ainsi que le suggère M.H.A. Davis dans [Davis, 1993], nous utilisons le processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0} = (X_t, t)_{t\geq 0}$ qui inclut la variable de temps dans l'espace d'états et que nous avons défini à la section 1.1.5. En effet, nous verrons alors que l'espérance de la fonctionnelle dépendant du temps et celle à horizon déterministe se ramènent à des espérances de fonctionnelles de la forme étudiée dans le chapitre précédent pour le processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$. Ainsi, nous chercherons à appliquer le schéma d'approximation précédent à ce nouveau PMDM. Cependant, il est loin d'être évident que les hypothèses de continuité Lipschitz II.1, II.2 et II.3 seront toujours valables pour le nouveau processus.

Ainsi, ce chapitre est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, nous montrons que le processus augmenté du temps satisfait les hypothèses de continuité Lipschitz requises par notre schéma d'approximation. Ensuite, nous verrons que le

cas de la fonctionnelle dépendant du temps correspond au cas d'une fonctionnelle ne dépendant que de la variable d'état du processus augmenté du temps (la dépendance en temps devient implicite) et peut donc être obtenu grâce à la méthode précédente. Enfin, nous étudierons le cas de l'horizon de temps déterministe qui fait apparaître une nouvelle difficulté : la présence de fonction indicatrices qui ne sont donc pas lipschitziennes.

3.1 Propriétés du processus augmenté du temps

M.H.A. Davis suggère, dans [Davis, 1993, section 31], que le cas de fonctionnelle dépendant du temps peut être traité en ajoutant la variable de temps à l'espace d'états. Ainsi, nous pourrons appliquer notre méthode du chapitre précédent au processus augmenté du temps. Cependant, et c'est l'objet de cette section, il faut vérifier que les hypothèses de continuité Lipschitz sont toujours valables. Nous avons déjà décrit le processus augmenté du temps à la section 1.1.5, nous en rappelons ici la définition et les caractéristiques afin de fixer les notations pour la suite du chapitre.

Définition 3.1.1 *On introduit le nouvel espace d'état*

$$\widetilde{E} = E \times \mathbb{R}^+$$

muni de la norme définie par : pour tout $\xi = (x,t)$, $\xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$,

$$|\xi - \xi'| = |x - x'| + |t - t'| \tag{3.1.1}$$

où la norme sur E *est donnée par l'équation* (1.1.5)*. Sur cet espace d'états, on définit le nouveau processus dit* augmenté du temps

$$\widetilde{X_t} = (X_t, t).$$

Les caractéristiques locales du PMDM $(\widetilde{X_t})_{t\geq 0}$, notées $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{Q}, \widetilde{\Phi})$ sont données pour tout $\xi = (x,t) \in \widetilde{E}$ par

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}(\xi) = \lambda(x), \\ \widetilde{\Phi}\Big(\xi, s\Big) = \Big(\Phi(x,s), t+s\Big) & \text{pour } s \leq t^*(x), \\ \widetilde{Q}\Big(\xi, A \times \{t\}\Big) = Q\Big(x, A\Big) & \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(E). \end{cases}$$

De plus, on définit naturellement pour tout $\xi = (x,t) \in \widetilde{E}$

$$\widetilde{t^*}(\xi) = \inf\{s > 0 \text{ tel que } \widetilde{\Phi}(\xi, s) \in \partial\widetilde{E}\} = t^*(x).$$

Clairement, les hypothèses II.1 et II.2 sont toujours vraies avec

$$[\widetilde{\lambda}]_1 = [\lambda]_1, \qquad C_{\widetilde{\lambda}} = C_\lambda, \qquad [\widetilde{t^*}] = [t^*], \qquad C_{\widetilde{t^*}} = C_{t^*}.$$

Cependant, il est plus délicat de montrer l'hypothèse II.3. Nous commençons par le lemme suivant.

Lemme 3.1.2 *Soit $u, t \geq 0$ et $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$. On note w_t la fonction de $B(E)$ définie par*

$$w_t(\cdot) = w(\cdot, t).$$

Sous l'hypothèse II.2, on a alors

$$w_t \in \mathbf{L_c}^{t\wedge u}(E),$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} [w_t]_1^{E,t\wedge u} & \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}, \\ [w_t]_2^{E,t\wedge u} & \leq [w]_1^{\widetilde{E},u} + [w]_2^{\widetilde{E},u}, \\ [w_t]_*^{E,t\wedge u} & \leq \Big(1 + [t^*]\Big)[w]_*^{\widetilde{E},u}. \end{array}\right.$$

Démonstration Soit $u, t \geq 0$ et $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$. Tout d'abord, pour $x, x' \in E$ et $s \leq t^*(x) \wedge t^*(x') \wedge t \wedge u$, on a

$$|w_t(\Phi(x,s)) - w_t(\Phi(x',s))| = \Big|w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-s), s\Big)\Big) - w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x', t-s), s\Big)\Big)\Big|.$$

On utilise alors le fait que $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$, ce qui nous donne puisque $s \leq u$

$$|w_t(\Phi(x,s)) - w_t(\Phi(x',s))| \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}\Big|(x, t-s) - (x', t-s)| = [w]_1^{\widetilde{E},u}\Big|x - x'\Big|.$$

D'où, $[w_t]_1^{E,t\wedge u} \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}$.

Ensuite, on raisonne de même pour $[w_t]_2^{E,t\wedge u}$. Soit $x \in E$ et $s, s' \leq t^*(x) \wedge t \wedge u$, on a

$$|w_t(\Phi(x,s)) - w_t(\Phi(x,s'))| = \Big|w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-s), s\Big)\Big) - w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-s'), s'\Big)\Big)\Big|.$$

On intercale le terme $w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-s'), s\Big)\Big)$ et on a alors, puisque $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$ et $s, s' \leq u$,

$$\begin{array}{rcl} |w_t(\Phi(x,s)) - w_t(\Phi(x,s'))| & \leq & [w]_1^{\widetilde{E},u}\Big|(x, t-s) - (x, t-s')| + [w]_2^{\widetilde{E},u}\Big|s - s'| \\ & \leq & \Big([w]_1^{\widetilde{E},u} + [w]_2^{\widetilde{E},u}\Big)\Big|s - s'\Big| \end{array}$$

c'est-à-dire $[w_t]_2^{E,t\wedge u} \leq [w]_1^{\widetilde{E},u} + [w]_2^{\widetilde{E},u}$.

Enfin, pour $x, x' \in E$ tels que $t^*(x) \vee t^*(x') \leq t \wedge u$, on a

$$\begin{array}{l} |w_t(\Phi(x, t^*(x))) - w_t(\Phi(x', t^*(x')))| \\ \quad = \Big|w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-t^*(x)), t^*(x)\Big)\Big) - w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x', t-t^*(x')), t^*(x')\Big)\Big)\Big| \\ \quad = \Big|w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x, t-t^*(x)), \widetilde{t}^*(x, t-t^*(x))\Big)\Big) - w\Big(\widetilde{\Phi}\Big((x', t-t^*(x')), \widetilde{t}^*(x', t-t^*(x'))\Big)\Big)\Big|. \end{array}$$

De plus, puisque $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$ et $\widetilde{t}^*(x, t-t^*(x)) \vee \widetilde{t}^*(x', t-t^*(x')) \leq u$, on a

$$|w_t(\Phi(x,t^*(x))) - w_t(\Phi(x',t^*(x')))| \leq [w]_*^{\widetilde{E},u}\Big|(x,t-t^*(x)) - (x',t-t^*(x'))\Big|.$$

On conclut grâce à l'hypothèse de continuité Lipschitz II.2 sur t^* qui implique $\Big|(x,t-t^*(x)) - (x',t-t^*(x'))\Big| \leq \Big(1+[t^*]\Big)\Big|x-x'\Big|$. Finalement, on a $w_t \in \mathbf{L_c}^{t\wedge u}(E)$ avec $[w_t]_*^{E,t\wedge u} \leq [w]_*^{\widetilde{E},u}\Big(1+[t^*]\Big)$. □

La proposition suivante montre que l'hypothèse II.3 est toujours vraie pour le processus augmenté du temps $(\widetilde{X})_{t\geq 0}$.

Proposition 3.1.3 *Sous les hypothèses II.2 et II.3 (énoncées pour le processus original $(X_t)_{t\geq 0}$), pour tout $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$, on a*

1. *pour tous ξ, $\xi' \in \widetilde{E}$ et $s \in [0, \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi') \wedge u]$,*

$$\Big|\widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi,s\Big)\Big) - \widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi',s\Big)\Big)\Big| \leq ([Q]\vee 1)[w]_1^{\widetilde{E},u}\Big|\xi-\xi'\Big|,$$

2. *pour tous ξ, $\xi' \in \widetilde{E}$ tels que $\widetilde{t}^*(\xi) \vee \widetilde{t}^*(\xi') \leq u$,*

$$\begin{aligned}\Big|\widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi,\widetilde{t}^*(\xi)\Big)\Big) - \widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi',\widetilde{t}^*(\xi')\Big)\Big)\Big| \\ \leq \Big([Q]\vee 1\Big)\Big(1+[t^*]\Big)\Big([w]_*^{\widetilde{E},u} + [w]_1^{\widetilde{E},u}\Big)|\xi-\xi'|,\end{aligned}$$

En d'autres termes, l'hypothèse II.3 est vérifiée pour le processus augmenté du temps $(\widetilde{X})_{t\geq 0}$ avec $[\widetilde{Q}] = \Big([Q]\vee 1\Big)\Big(1+[t^*]\Big)$.

Démonstration Pour $\xi = (x,t) \in \widetilde{E}$ et $w \in \mathbf{L_c}^u(\widetilde{E})$, on a, par définition de $\widetilde{Q}$,

$$\widetilde{Q}w(\xi) = \int_{\xi'\in\widetilde{E}} w(\xi')\widetilde{Q}\Big((x,t),d\xi'\Big) = \int_{z\in E} w(z,t)Q\Big(x,dz\Big) = Qw_t(x). \qquad (3.1.2)$$

Nous pouvons alors vérifier l'hypothèse de régularité sur $\widetilde{Q}$. Soit $\xi = (x,t)$ et $\xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$. Soit $s \in [0; \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi') \wedge u]$. Grâce à la définition de $\widetilde{\Phi}$ et à l'équation l'équation (3.1.2) on a

$$\begin{aligned}\Big|\widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi,s\Big)\Big) - \widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi',s\Big)\Big)\Big| &= \Big|\widetilde{Q}w\Big(\Phi(x,s),t+s\Big) - \widetilde{Q}w\Big(\Phi(x',s),t'+s\Big)\Big| \\ &= \Big|Qw_{t+s}\Big(\Phi(x,s)\Big) - Qw_{t'+s}\Big(\Phi(x',s)\Big)\Big|.\end{aligned}$$

Nous décomposons ceci en la somme de deux différences

$$\begin{aligned}&\Big|Qw_{t+s}\Big(\Phi(x,s)\Big) - Qw_{t'+s}\Big(\Phi(x',s)\Big)\Big| \\ &\qquad \leq \underbrace{\Big|Qw_{t+s}\Big(\Phi(x,s)\Big) - Qw_{t+s}\Big(\Phi(x',s)\Big)\Big|}_{(a)} + \underbrace{\Big|Q(w_{t+s}-w_{t'+s})\Big(\Phi(x',s)\Big)\Big|}_{(b)}.\end{aligned}$$

D'une part, rappelons que grâce au lemme 3.1.2, $w_{t+s} \in \mathbf{L_c}^{(t+s)\wedge u}(E)$ si bien que, puisque $s \leq (t+s)\wedge u$, nous pouvons utiliser l'hypothèse II.3 de continuité Lipschitz sur Q. Le terme (a) est alors borné comme suit

$$(a) \leq [Q][w_{t+s}]_1^{E,(t+s)\wedge u}|x-x'|.$$

De plus, le lemme 3.1.2 fournit également $[w_{t+s}]_1^{E,(t+s)\wedge u} \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}$ ainsi

$$(a) \leq [Q][w]_1^{\widetilde{E},u}|x - x'|.$$

D'autre part, concernant le terme (b), on a

$$(b) \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}|t - t'|.$$

Finalement, on obtient

$$\big|\widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi, s\big)\big) - \widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi', s\big)\big)\big| \leq ([Q] \vee 1)[w]_1^{\widetilde{E},u}\big|\xi - \xi'\big|.$$

On borne de manière similaire l'expression $\big|\widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi, \widetilde{t}^*(\xi)\big)\big) - \widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi', \widetilde{t}^*(\xi')\big)\big)\big|$ où $\xi = (x,t)$ et $\xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$ sont tels que $\widetilde{t}^*(\xi) \vee \widetilde{t}^*(\xi') \leq u$. L'équation l'équation (3.1.2) implique

$$\begin{aligned}\big|\widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi, \widetilde{t}^*(\xi)\big)\big) - \widetilde{Q}w\big(\widetilde{\Phi}\big(\xi', \widetilde{t}^*(\xi')\big)\big)\big| \\ = \big|Qw_{t+t^*(x)}\big(\Phi(x, t^*(x))\big) - Qw_{t'+t^*(x')}\big(\Phi(x', t^*(x'))\big)\big|\end{aligned}$$

que nous décomposons en

$$\begin{aligned}&\big|Qw_{t+t^*(x)}\big(\Phi(x, t^*(x))\big) - Qw_{t'+t^*(x')}\big(\Phi(x', t^*(x'))\big)\big| \\ &\leq \underbrace{\big|Qw_{t+t^*(x)}\big(\Phi(x, t^*(x))\big) - Qw_{t+t^*(x)}\big(\Phi(x', t^*(x'))\big)\big|}_{(c)} \\ &\quad + \underbrace{\big|(Qw_{t+t^*(x)} - Qw_{t'+t^*(x')})\big(\Phi(x', t^*(x'))\big)\big|}_{(d)}.\end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.1.2, $w_{t+t^*(x)} \in \mathbf{L_c}^{(t+t^*(x))\wedge u}(E)$. De plus, nous supposons, sans perte de généralité, que $t^*(x) \geq t^*(x')$ d'où $t^*(x) \vee t^*(x') \leq (t + t^*(x)) \wedge u$. Par conséquent, le terme (c) est borné grâce à l'hypothèse II.3 de continuité Lipschitz sur Q et au lemme 3.1.2 (qui donne les constantes de Lipschitz de $w_{t+t^*(x)}$) par

$$(c) \leq [Q]\Big((1 + [t^*])[w]_*^{\widetilde{E},u} + [w]_1^{\widetilde{E},u}\Big)|x - x'|.$$

Par ailleurs, pour le terme (d), on a

$$\begin{aligned}(d) &= \Big|\int_{z\in E}\Big(w(z, t + t^*(x)) - w(z, t' + t^*(x'))\Big)Q\Big(\Phi(x', t^*(x')), dz\Big)\Big| \\ &\leq \int_{z\in E}\Big([w]_1^{\widetilde{E},u}|t - t' + t^*(x) - t^*(x')|\Big)Q\Big(\Phi(x', t^*(x')), dz\Big),\end{aligned}$$

d'après la remarque 2.1. De plus, $Q\big(\Phi(x', t^*(x')), \cdot\big)$ étant une probabilité, on a

$$(d) \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}|t - t' + t^*(x) - t^*(x')| \leq [w]_1^{\widetilde{E},u}(|t - t'| + [t^*]|x - x'|).$$

Enfin, en regroupant (c) et (d), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi,\widetilde{t}^*(\xi)\Big)\Big)-\widetilde{Q}w\Big(\widetilde{\Phi}\Big(\xi',\widetilde{t}^*(\xi')\Big)\Big)\right| \\
\leq&[Q](1+[t^*])[w]_*^{\widetilde{E},u}|x-x'|+[w]_1^{\widetilde{E},u}\Big([Q]|x-x'|+|t-t'|+[t^*]|x-x'|\Big) \\
\leq&\Big([Q]\vee 1\Big)\Big(1+[t^*]\Big)\Big([w]_*^{\widetilde{E},u}+[w]_1^{\widetilde{E},u}\Big)|\xi-\xi'|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

C'est à la lueur de ce résultat que nous comprenons l'importance de l'introduction de la notion de continuité Lipschitz locale. En effet, si nous avions formulé l'hypothèse II.3 seulement pour les fonctions globalement lipschitzienne le long du flot (telle qu'elle était formulée initialement dans [de Saporta et al., 2010]), nous n'aurions pas pu prouver qu'elle s'étendait au processus augmenté du temps.

Par conséquent, nous pouvons appliquer notre méthode numérique au processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$. En d'autres termes, pour $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$, $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ et $\xi \in \widetilde{E}$, notre schéma d'approximation permet d'approcher $\widetilde{J}_N(l,c)(\xi)$ que nous définissons par

$$\widetilde{J}_N(l,c)(\xi)=\mathbf{E}_\xi\left[\int_0^{T_N} l(\widetilde{X}_t)dt+\sum_{j=1}^N c(\widetilde{X}_{T_j^-})\mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_{T_j^-}\in\partial\widetilde{E}\}}\right]. \tag{3.1.3}$$

Nous allons maintenant voir que les fonctionnelles dépendant du temps et celles à horizon déterministes se réduisent à de telles quantités $\widetilde{J}_N(l,c)(\xi)$ pour des fonctions l et c convenablement choisies.

3.2 Fonctions de coût lipschitziennes

Nous étudions tout d'abord le problème des fonctionnelles dépendant du temps avec fonctions de coût lipschitziennes par rapport aux deux variables x et t. Ainsi, on fixe $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$, $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ et $x \in E$. On souhaite calculer

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)dt+\sum_{j=1}^N c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right].$$

Il est immédiat de remarquer que cette quantité peut être exprimée en utilisant le processus augmenté du temps partant du point $\xi_0=(x,0)$. En effet, on a

$$\widetilde{J}_N(l,c)(\xi_0)=\mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)dt+\sum_{j=1}^N c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right],$$

où $\widetilde{J}_N(l,c)(\xi_0)$ est donné par l'équation l'équation (3.1.3). Les fonctions de coût l et c dépendent du temps. Cependant, dans le terme de gauche, elles sont vues comme des fonctions du processus augmenté du temps. La dépendance en temps est alors cachée dans la variable d'état et elles apparaissent comme des fonctions ne

dépendant que de cette variable d'état. L'espérance de la fonctionnelle dépendant du temps est donc obtenue en calculant l'espérance d'une fonctionnelle pour le PMDM transformé. Cette nouvelle fonctionnelle ne dépend pas explicitement du temps et entre donc dans le cadre du schéma numérique décrit dans la section 2.4. C'est ce qu'énonce le théorème suivant dont la preuve est une conséquence de la discussion précédente.

Théorème 3.2.1 *Soit $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$ et $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$. Sous les hypothèses II.1, II.2 et II.3 (qui portent toujours sur le processus original $(X_t)_{t\geq 0}$), on applique le schéma d'approximation de la section 2.4 au processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ et on obtient*

$$\left|\mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t,t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\right] - \widehat{V}_0\right| \leq \varepsilon_N(l,c,\widetilde{X},A).$$

où on a noté $\varepsilon_N(l,c,\widetilde{X},A)$ la borne de l'erreur d'approximation fournie par le théorème 2.4.2 lorsque le schéma d'approximation est appliqué avec les fonctions de coût l et c au processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$.

La quantité $\varepsilon_N(l,c,\widetilde{X},A)$ est calculée par rapport au processus $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ au lieu de $(X_t)_{t\geq 0}$ ainsi que cela est fait dans l'énoncé du théorème 2.4.2. On a ainsi

$$\begin{aligned}\varepsilon_N(l,c,\widetilde{X},A) = \frac{NC_cC_\lambda}{A} + \sum_{k=0}^{N-1}\Big(&2[v_{k+1}]^{\widetilde{E}}\|\widetilde{Z}_{k+1}-\widehat{\widetilde{Z}}_{k+1}\|_p \\ &+\Big(2[v_k]^{\widetilde{E}} + [F^A]_1' + A[F^A]_1''\Big)\|\widetilde{Z}_k-\widehat{\widetilde{Z}}_k\|_p + \Big([F^A]_2' + A[F^A]_2''\Big)\|\widetilde{S}_{k+1}-\widehat{\widetilde{S}}_{k+1}\|_p\Big).\end{aligned}$$

où $(\widetilde{Z}_k,\widetilde{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ représente la suite des positions après saut et des durées inter-saut pour le processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ et avec

$$\begin{array}{ll}[F^A]_1' = C_{t^*}[l]_1^{\widetilde{E}} + [c]_*^{\widetilde{E}}, & [F^A]_1'' = [t^*]C_c,\\ [F^A]_2' = C_l, & [F^A]_2'' = C_c,\\ [v_n]^{\widetilde{E}} \leq \widetilde{K}(A,v_{n-1}),&\end{array}$$

et pour tout $w \in \mathbf{L_c}(E)$, $\widetilde{K}(A,w) = \widetilde{E}_1 + E_2A + \widetilde{E}_3[w]_1^{\widetilde{E}} + E_4C_w + [\widetilde{Q}][w]_*^{\widetilde{E}}$ où enfin

$$\begin{aligned}[\widetilde{Q}] &= \Big([Q]\vee 1\Big)\Big(1+[t^*]\Big),\\ \widetilde{E}_1 &= 2[l]_1^{\widetilde{E}}C_{t^*} + C_l\Big([t^*]+2C_{t^*}^2[\lambda]_1\Big) + [c]_*^{\widetilde{E}}\Big(1+C_{t^*}C_\lambda\Big)\\ &\quad + C_c\Big(2[\lambda]_1C_{t^*} + C_\lambda C_{t^*}^2[\lambda]_1 + 2[t^*]C_\lambda\Big),\\ \widetilde{E}_3 &= \Big(1+C_{t^*}C_\lambda\Big)[\widetilde{Q}],\\ [v_n]_1^{\widetilde{E}} &\leq e^{C_{t^*}C_\lambda}\left(\widetilde{K}(A,v_{n-1}) + (N-n)C_{t^*}[\lambda]_1\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big)\right) + C_{t^*}[l]_1^{\widetilde{E}},\\ [v_n]_2^{\widetilde{E}} &\leq e^{C_{t^*}C_\lambda}\Big(C_{t^*}C_lC_\lambda + 2C_l + C_\lambda C_c + (2N-2n-1)C_\lambda\Big(C_{t^*}C_l + C_c\Big)\Big) + C_l,\\ [v_n]_*^{\widetilde{E}} &\leq [v_n]_1^{\widetilde{E}} + [t^*][v_n]_2^{\widetilde{E}}.\end{aligned}$$

Les autres constantes restent inchangées.

3.3 Horizon de temps déterministe

Dans l'optique des applications, il semble pertinent d'étudier le problème à horizon de temps déterministe t_f. Par exemple, on peut vouloir estimer un coût moyen sur une période donnée indépendamment du nombre de sauts qui se produiront durant cette période. En pratique, nous choisirons un horizon de temps de la forme $t_f \wedge T_N$ avec N suffisamment grand pour s'assurer que le N-ème saut se produira après l'instant t_f avec une grande probabilité i.e. que $\mathbf{P}_x\Big(T_N < t_f\Big)$ soit proche de zéro. Nous reportons la discussion concernant le choix d'un tel N, avec en particulier une borne théorique de $\mathbf{P}_x\Big(T_N < t_f\Big)$, à la section suivante 3.3.4. Remarquons simplement qu'en pratique, cette probabilité peut être estimée, de façon préliminaire, par des simulations de Monte-Carlo. On cherche donc à approcher pour $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$, $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ et $x \in E$, la quantité

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x\Big[\int_0^{T_N \wedge t_f} l(X_t,t)dt + \sum_{T_j \le t_f} c(X_{T_j^-}, T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}}\Big] \\ = \; & \mathbf{E}_x\Big[\int_0^{T_N} l(X_t,t)\mathbb{1}_{\{t\le t_f\}}dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}}\mathbb{1}_{\{T_j \le t_f\}}\Big]. \end{aligned}$$

L'approche naturelle consisterait à tuer le processus à l'instant t_f ainsi que le suggère M.H.A. Davis dans [Davis, 1993, section 31], et à appliquer notre méthode au nouveau processus. Cependant, le processus ainsi tué ne remplira plus les hypothèses de continuité Lipschitz du fait de la discontinuité introduite à l'instant t_f.
Une autre idée consisterait alors à utiliser les résultats précédents, c'est-à-dire à utiliser le processus augmenté du temps en posant $\widetilde{l}(x,t) = l(x,t)\mathbb{1}_{\{t\le t_f\}}$ et $\widetilde{c}(x,t) = c(x,t)\mathbb{1}_{\{t\le t_f\}}$. Cependant, un problème similaire se présente. En effet, de telles fonctions $\widetilde{l}$ et $\widetilde{c}$ ne sont plus lipschitziennes en temps alors que notre schéma numérique nécessite cette hypothèse. Dans le reste de cette section, nous allons voir comment surmonter cet obstacle. D'une part, nous prouverons que l'hypothèse de continuité Lipschitz sur l peut être relâchée si bien que notre méthode numérique pourra être appliquée directement, malgré la fonction indicatrice dans le terme de coût instantané, pour approcher $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, c)$ avec $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$. D'autre part, dans le cas général, nous traiterons la discontinuité de $\widetilde{c}$ en l'encadrant entre deux fonctions lipschitziennes.

3.3.1 Estimation directe du terme de coût instantané

Nous allons expliquer comment l'hypothèse de continuité Lipschitz sur la fonction de coût instantané peut être relâchée afin que le théorème 2.4.2, qui énonce la convergence de notre schéma d'approximation, reste vrai lorsque la fonction de coût instantané est de la forme $\widetilde{l}(x,t) = l(x,t)\mathbb{1}_{\{t\le t_f\}}$ avec $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$ et que la fonction de coût des sauts à la frontière est $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ (les constantes dans la borne de la vitesse de convergence seront légèrement modifiées). En effet, la fonction de coût instantané $\widetilde{l}$ apparaît dans une intégrale qui aura un effet régularisant en nous permettant de prouver les propriétés de continuité Lipschitz de la fonctionnelle malgré la discontinuité de la fonction indicatrice. Nous présentons maintenant les détails de

ce raisonnement.

Dans ce paragraphe, nous étudions l'approximation appliquée au processus augmenté du temps dont les caractéristiques locales sont $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\lambda}$ et $\widetilde{Q}$ définies dans la section 3.1. De plus, on fixe une fonction $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$ et on définit $\widetilde{l} \in B(\widetilde{E})$ par

$$\text{pour tout } \xi = (x,t) \in \widetilde{E},\ \widetilde{l}(\xi) = l(x,t)\mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}}.$$

On cherche à prouver que le théorème 2.4.2, reste vrai si on choisit $\widetilde{l}$ comme fonction de coût instantané bien qu'elle ne vérifie pas l'hypothèse de continuité Lipschitz II.4 i.e. $\widetilde{l} \notin \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$. En effet, cette continuité Lipschitz est utilisée quatre fois dans la preuve du théorème, une fois dans la proposition 2.3.2, deux fois dans la proposition 2.3.7 (lorsqu'on cherche à borner la différence des termes α_1 et celle des α_2) et une fois dans la proposition 2.3.9 (lorsqu'on borne $[v_n]_1$). Dans chaque cas, la continuité Lipschitz de la fonction de coût instantané est utilisée pour borner des termes de la forme

$$\int_s^{s'} \Big|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)\Big| du, \tag{3.3.1}$$

pour ξ, $\xi' \in \widetilde{E}$ et s, $s' \in [0; \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi')]$, ou de la forme

$$\int_s^{\widetilde{t}^*(\xi)\wedge\widetilde{t}^*(\xi')} \left|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big)e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi,u\right)} - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi',u\right)}\right| du, \tag{3.3.2}$$

pour ξ, $\xi' \in \widetilde{E}$ et $s \in [0; \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi')]$ dans lequel on a noté naturellement $\widetilde{\Lambda}(\xi, u) = \int_0^u \widetilde{\lambda}(\widetilde{\Phi}(\xi, v))dv$. Concernant cette seconde forme, l'équation (3.3.2), remarquons que

$$\begin{aligned}
&\int_s^{\widetilde{t}^*(\xi)\wedge\widetilde{t}^*(\xi')} \left|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big)e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi,u\right)} - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi',u\right)}\right| du \\
&\leq \int_s^{\widetilde{t}^*(\xi)\wedge\widetilde{t}^*(\xi')} \Big|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)\Big| du + C_l \int_s^{\widetilde{t}^*(\xi)\wedge\widetilde{t}^*(\xi')} \left|e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi,u\right)} - e^{-\widetilde{\Lambda}\left(\xi',u\right)}\right| du \\
&\leq \int_s^{\widetilde{t}^*(\xi)\wedge\widetilde{t}^*(\xi')} \Big|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)\Big| du + C_l C_{t^*}^2 [\lambda]_1 \big|\xi - \xi'\big|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour assurer que le théorème 2.4.2 reste vrai avec $\widetilde{l}$ comme fonction de coût instantané, il suffit de parvenir à borner les termes de la forme (3.3.1). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Sous l'hypothèse II.2, pour $\xi = (x,t), \xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$ et $s \in [0; \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi')]$, on a*

$$\int_0^s \Big|\widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big)\Big| du \leq (C_{t^*}[l]_1 + C_l)|\xi - \xi'|.$$

Démonstration Soit $\xi = (x,t), \xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$ et $s \in [0; \widetilde{t}^*(\xi) \wedge \widetilde{t}^*(\xi')]$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \left| \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) - \widetilde{l} \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big) \right| du \\
&\quad \leq \int_0^s \left| l \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi, u\big) \mathbb{1}_{\{t+u \leq t_f\}} - l \circ \widetilde{\Phi}\big(\xi', u\big) \mathbb{1}_{\{t'+u \leq t_f\}} \right| du \\
&\quad \leq \underbrace{\int_0^s \left| l \circ \widetilde{\Phi}(\xi, u) - l \circ \widetilde{\Phi}(\xi', u) \right| du}_{(a)} + \underbrace{C_l \int_0^s \left| \mathbb{1}_{\{t+u \leq t_f\}} - \mathbb{1}_{\{t'+u \leq t_f\}} \right| du}_{(b)}.
\end{aligned}$$

Le terme (a) est borné par

$$(a) \leq C_{t^*}[l]_1 |\xi - \xi'|,$$

puisque $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$. Concernant le terme (b), on suppose sans perte de généralité que $t \leq t'$, on a

$$\left| \mathbb{1}_{\{t+u \leq t_f\}} - \mathbb{1}_{\{t'+u \leq t_f\}} \right| = \left| \mathbb{1}_{\{t-t_f \leq u\}} - \mathbb{1}_{\{t'-t_f \leq u\}} \right| = \mathbb{1}_{\{t-t_f \leq u < t'-t_f\}},$$

ainsi, le terme (b) est borné par

$$(b) \leq C_l \int_{t-t_f}^{t'-t_f} du = C_l |t - t'| \leq C_l |\xi - \xi'|.$$

D'où le résultat. □

Finalement, le théorème 2.4.2 reste vrai si on choisit $\widetilde{l}$ comme fonction de coût instantané. Il suffit de modifier légèrement les constantes de Lipschitz données dans les propositions 2.3.2, 2.3.7 et 2.3.9. Les termes $C_{t^*}[l]_1$ doivent être remplacés par $C_{t^*}[l]_1 + C_l$. Par conséquent, notre schéma d'approximation peut être utilisé pour calculer $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, c)(\xi)$ avec $c \in \mathbf{L_c}(\partial \widetilde{E})$ et $\xi \in \widetilde{E}$. On rappelle que $\widetilde{J}_N$ est défini par l'équation (3.1.3) et que pour tout $x \in E$, on a

$$\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, c)(x, 0) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_N \wedge t_f} l(X_t, t) dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right].$$

On s'intéresse maintenant à la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}}$ requise dans le terme de coût des sauts à la frontière.

3.3.2 Bornes pour le terme de coût des sauts à la frontière

Nous avons vu que la condition de continuité Lipschitz sur l peut être relâchée. Cependant, elle est incontournable dans le cas de c et notre méthode ne peut être utilisée directement avec $\widetilde{c}(x,t) = c(x,t)\mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}}$. On surmonte cet obstacle en utilisant des approximations lipschitziennes de la fonction indicatrice. En effet, pour $B > 0$, on introduit les fonctions à valeurs réelles $\underline{u}_B$ et $\overline{u}_B$ représentées sur la figure

3.1 et définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\underline{u}_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < t_f - \frac{1}{B}, \\ -B(t-t_f) & \text{si } t_f - \frac{1}{B} \leq t < t_f, \\ 0 & \text{si } t_f \leq t, \end{cases}$$

$$\overline{u}_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < t_f, \\ -B(t-t_f)+1 & \text{si } t_f \leq t < t_f + \frac{1}{B}, \\ 0 & \text{si } t_f + \frac{1}{B} \leq t. \end{cases}$$

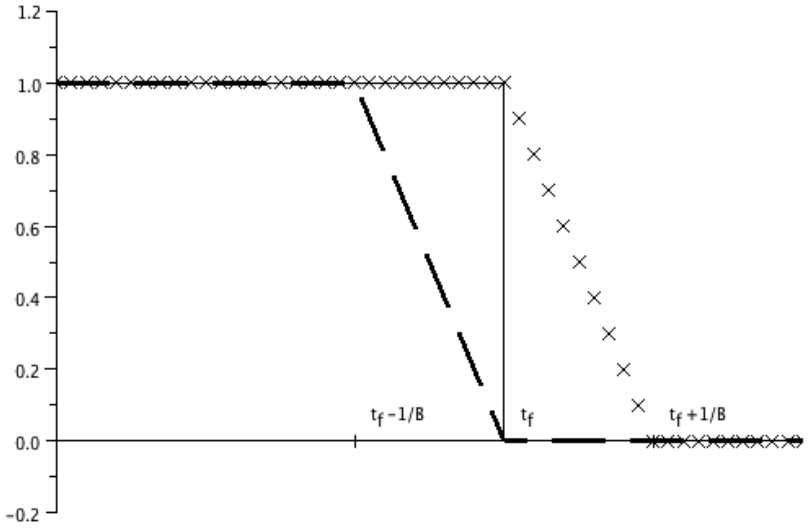

FIGURE 3.1 – La fonction $t \to \mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}}$ (courbe continue) et ses deux approximations lipschitziennes.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 3.3.2 *Pour tout $t \geq 0$, $\lim_{B\to+\infty} \underline{u}_B(t) = \mathbb{1}_{[0;t_f[}(t)$ et $\lim_{B\to+\infty} \overline{u}_B(t) = \mathbb{1}_{[0;t_f]}(t)$. De plus, pour tout $B > 0$, $\underline{u}_B$ et $\overline{u}_B$ sont Lipschitz de constante de Lipschitz B. Enfin, on a*

$$\left|\underline{u}_B - \mathbb{1}_{[0;t_f]}\right| \leq \mathbb{1}_{[t_f - \frac{1}{B};t_f]},$$

$$\left|\overline{u}_B - \mathbb{1}_{[0;t_f]}\right| \leq \mathbb{1}_{[t_f;t_f+\frac{1}{B}]},$$

et

$$\underline{u}_B \leq \mathbb{1}_{[0;t_f]} \leq \overline{u}_B.$$

Ainsi, on définit pour $l \in \mathbf{L_c}(\widetilde{E})$

$$\widetilde{l}(x,t) = l(x,t)\mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}} \tag{3.3.3}$$

et pour $c \in \mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ et $B > 0$,

$$\underline{c}_B(x,t) = c(x,t)\underline{u}_B(t) \qquad \text{et} \qquad \overline{c}_B(x,t) = c(x,t)\overline{u}_B(t). \tag{3.3.4}$$

Vérifions que ces fonctions satisfont nos conditions de continuité Lipschitz le long du flot.

Proposition 3.3.3 *Sous les hypothèses II.2, et II.4, les fonctions $\underline{c}_B$ et $\overline{c}_B$ appartiennent à $\mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$ avec*

$$[\underline{c}_B]_* \leq [c]_* + BC_c(1 \vee [t^*]), \qquad [\overline{c}_B]_* \leq [c]_* + BC_c(1 \vee [t^*]).$$

Démonstration On prouve le résultat pour $\underline{c}_B$, l'autre cas étant similaire. Pour tous $\xi = (x,t), \xi' = (x',t') \in \widetilde{E}$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\underline{c}_B\Big(\widetilde{\Phi}(\xi, t^*(\xi))\Big) - \underline{c}_B\Big(\widetilde{\Phi}(\xi', t^*(\xi'))\Big)\Big| \\
&= \Big|c\Big(\widetilde{\Phi}(\xi, \widetilde{t^*}(\xi))\Big)\underline{u}_B(t + \widetilde{t^*}(\xi)) - c\Big(\widetilde{\Phi}(\xi', \widetilde{t^*}(\xi'))\Big)\underline{u}_B(t' + \widetilde{t^*}(\xi'))\Big| \\
&\leq [c]_*|\xi - \xi'| + C_c\Big|\underline{u}_B(t + \widetilde{t^*}(\xi)) - \underline{u}_B(t' + \widetilde{t^*}(\xi'))\Big| \\
&\leq [c]_*|\xi - \xi'| + C_c B\Big(|t - t'| + [t^*]|x - x'|\Big) \\
&\leq \Big([c]_* + C_c B(1 \vee [t^*])\Big)|\xi - \xi'|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Ainsi, les fonctions $\underline{c}_B$ et $\overline{c}_B$ sont des fonctions de coût de saut à la frontière admissibles. Notre schéma permet donc d'approcher $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \underline{c}_B)(x,0)$ et $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0)$. De plus, nous pouvons encadrer l'espérance à horizon déterministe par

$$\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \underline{c}_B)(x,0) \leq \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} l(X_t)\mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}}dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-})\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}}\mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}}\right] \leq \widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0).$$

La proposition suivante fournit la convergence des deux bornes.

Proposition 3.3.4 *Sous l'hypothèse II.4, pour tout $x \in E$, on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{B \to +\infty} \widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \underline{c}_B)(x,0) &= \lim_{B \to +\infty} \widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0) \\
&= \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N \wedge t_f} l(X_t, t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}}\mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}}\right].
\end{aligned}$$

La convergence ci-dessus est valable pour tout $t_f > 0$ dans le cas de $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0)$ mais seulement pour presque tout $t_f > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ dans le cas de $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \underline{c}_B)(x,0)$.

Ce résultat asymétrique peut paraître étrange a priori mais il s'explique assez simplement. La fonction $\overline{u}_B$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{[0;t_f]}$ qui est bien la fonction indicatrice présente dans le membre de droite ci-dessus alors que $\underline{u}_B$ converge vers l'indicatrice de l'intervalle semi-ouvert $\mathbb{1}_{[0;t_f[}$. La convergence seulement presque partout, énoncée par la proposition, résulte alors de l'éventuelle présence d'une masse ponctuelle de la loi d'un des temps de saut en t_f. Rappelons en effet que les lois des temps de sauts ne sont pas absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue en raison de la présence des frontières.

Démonstration Soit $x \in E$. On étudie d'abord $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0)$. On va majorer la différence

$$\left| \mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_N \wedge t_f} l(X_t,t)dt + \sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}} \right] - \widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \overline{c}_B)(x,0) \right|.$$

Remarquons tout d'abord que les termes de coût instantané se compensent, il reste donc à étudier

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_x \left[\sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}} - \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_B(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right] \right| \\
&\quad \leq \mathbf{E}_x \left[\sum_{j=1}^{N} \left| c(X_{T_j^-}, T_j) \right| \left| \mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}} - \overline{u}_B(T_j) \right| \right] \\
&\quad \leq C_c \mathbf{E}_x \left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{t_f < T_j \leq t_f + \frac{1}{B}\}} \right] \\
&\quad \leq C_c \sum_{j=1}^{N} \Big(\varphi_j(t_f + \frac{1}{B}) - \varphi_j(t_f) \Big),
\end{aligned}$$

où φ_j est la fonction de répartition de T_j. Or, pour tout $j \leq N$,

$$\lim_{B \to +\infty} \Big(\varphi_j(t_f + \frac{1}{B}) - \varphi_j(t_f) \Big) = 0$$

puisque φ_j est continue à droite, ce qui prouve la convergence souhaitée.

On étudie maintenant le cas de $\widetilde{J}_N(\widetilde{l}, \underline{c}_B)(x,0)$. Des calculs similaires donnent

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_x \left[\sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \mathbb{1}_{\{T_j \leq t_f\}} - \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_B(X_{T_j^-}, T_j) \mathbb{1}_{\{X_{T_j^-} \in \partial E\}} \right] \right| \\
&\quad \leq C_c \sum_{j=1}^{N} \Big(\varphi_j(t_f) - \varphi_j(t_f - \frac{1}{B}) \Big).
\end{aligned}$$

On ne peut pas conclure comme dans le cas précédent car φ_j n'est pas continue à gauche si t_f est un atome de la distribution de T_j. On suppose donc que ce n'est pas le cas ce qui nous donne alors le résultat puisque pour tout $j \leq N$,

$$\lim_{B \to +\infty} \Big(\varphi_j(t_f) - \varphi_j(t_f - \frac{1}{B}) \Big) = 0.$$

On remarque finalement que l'ensemble des atomes de T_j étant au plus dénombrable, la convergence a lieu pour presque tout t_f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. □

3.3.3 Bornes dans le cas général

Le résultat précédent montre que l'espérance à horizon déterministe peut être bornée en appliquant notre méthode numérique successivement à $(\widetilde{l}, \underline{c}_B)$ et à $(\widetilde{l}, \overline{c}_B)$.

On obtient ainsi les deux suites de variables aléatoires $(\underline{V}_{k,B})_{0\le k\le N}$, respectivement $(\overline{V}_{k,B})_{0\le k\le N}$, correspondant à la suite de variables aléatoires $(V_k)_{0\le k\le N}$, décrite dans la section 2.4, lorsqu'on applique notre schéma d'approximation numérique au processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\ge 0}$ avec fonctions de coût $(\widetilde{l},\underline{c}_B)$, respectivement $(\widetilde{l},\overline{c}_B)$, définies par les équations (3.3.3) et (3.3.4). Les bornes de l'erreur d'approximation fournies par le théorème 2.4.2 sont notées respectivement $\varepsilon_N(l,\underline{c}_B,\widetilde{X},A,B)$ et $\varepsilon_N(l,\overline{c}_B,\widetilde{X},A,B)$.

En d'autres termes, on a montré le théorème suivant.

Théorème 3.3.5 *Soit $l\in\mathbf{L_c}(\widetilde{E})$ et $c\in\mathbf{L_c}(\partial\widetilde{E})$. Sous les hypothèses II.1, II.2 et II.3 (qui portent toujours sur le processus original $(X_t)_{t\ge0}$), on a*

$$\begin{aligned}\underline{V}_{0,B}-\varepsilon_N(l,\underline{c}_B,\widetilde{X},A,B)&\\ \le \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N\wedge t_f} l(X_t,t)dt+\sum_{j=1}^{N} c(X_{T_j^-},T_j)\mathbb{1}_{\{X_{T_j^-}\in\partial E\}}\mathbb{1}_{\{T_j\le t_f\}}\right]&\\ \le \overline{V}_{0,B}+\varepsilon_N(l,\overline{c}_B,\widetilde{X},A,B).&\end{aligned}$$

Dans le théorème précédent, la quantité $\varepsilon_N(l,\underline{c}_B,\widetilde{X},A,B)$ (et de manière similaire $\varepsilon_N(l,\overline{c}_B,\widetilde{X},A,B)$) est calculée par rapport au processus $(\widetilde{X}_t)_{t\ge0}$ au lieu de $(X_t)_{t\ge0}$ ainsi que cela est fait dans l'énoncé du théorème 2.4.2. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_N(l,\underline{c}_B,\widetilde{X},A,B)=\frac{NC_cC_\lambda}{A}+\sum_{k=0}^{N-1}\Big(&2[v_{k+1}]^{\widetilde{E}}\|\widetilde{Z}_{k+1}-\widehat{\widetilde{Z}}_{k+1}\|_p\\ +\Big(2[v_k]^{\widetilde{E}}+[F^A]_1'+[F^A]_1''A+[F^A]_1'''B\Big)\|\widetilde{Z}_k-\widehat{\widetilde{Z}}_k\|_p&+\Big([F^A]_2'+[F^A]_2''A\Big)\|\widetilde{S}_{k+1}-\widehat{\widetilde{S}}_{k+1}\|_p\Big).\end{aligned}$$

où $(\widetilde{Z}_k,\widetilde{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ représente la suite des positions après saut et des temps inter-saut pour le processus augmenté du temps $(\widetilde{X}_t)_{t\ge0}$ et avec

$$\begin{aligned}&[F^A]_1'''=C_c(1\vee[t^*]),\\ &[v_n]_1^{\widetilde{E}}\le e^{C_{t^*}C_\lambda}\left(\widetilde{K}(A,B,v_{n-1})+nC_{t^*}[\lambda]_1\Big(C_{t^*}C_l+C_c\Big)\right)+C_{t^*}[l]_1^{\widetilde{E}},\\ &[v_n]^{\widetilde{E}}\le\widetilde{K}(A,B,v_{n-1}),\end{aligned}$$

et pour tout $w\in\mathbf{L_c}(E)$, $\widetilde{K}(A,B,w)=E_1'+E_1''B+E_2A+\widetilde{E}_3[w]_1^{\widetilde{E}}+E_4C_w+[\widetilde{Q}][w]_*^{\widetilde{E}}$ où enfin

$$\begin{aligned}E_1'=\;&2[l]_1^{\widetilde{E}}C_{t^*}+C_l\Big([t^*]+2C_{t^*}^2[\lambda]_1\Big)+[c]_*^{\widetilde{E}}\Big(1+C_{t^*}C_\lambda\Big)\\ &+C_c\Big(2[\lambda]_1C_{t^*}+C_\lambda C_{t^*}^2[\lambda]_1+2[t^*]C_\lambda\Big),\\ E_1''=\;&C_c(1\vee[t^*])\Big(1+C_{t^*}C_\lambda\Big)\end{aligned}$$

Les autres constantes restent inchangées et on renvoie à la section 3.2 pour leur expression précise.

Par ailleurs, il est important d'insister sur le fait qu'appliquer deux fois notre méthode numérique (pour les couples de fonctions coût $(\widetilde{l},\underline{c}_B)$ puis $(\widetilde{l},\overline{c}_B)$) n'augmente pas significativement le temps de calcul. En effet, l'obtention des grilles de

quantification est de loin l'étape la plus coûteuse. Ces grilles, qui ne dépendent que de la dynamique du processus, peuvent ensuite être stockées et utilisées pour le calcul des deux bornes.

On étudie maintenant la question du choix du paramètre B. Cette discussion est similaire à celle du choix de A dans la section 2.4.2. La proposition 3.3.4 suggère que B doit être choisi aussi grand que possible. Cependant, si B est grand, les constantes de Lipschitz le seront également ce qui va diminuer la précision des bornes $\varepsilon_N(l, \underline{c}_B, \widetilde{X}, A, B)$ et $\varepsilon_N(l, \overline{c}_B, \widetilde{X}, A, B)$ pour l'erreur d'approximation dans le théorème 3.3.5. En effet, on vérifie aisément que $[v_n]$ augmente linéairement avec B (voir ci-dessus les expressions précises des constantes de Lipschitz). Ainsi, afin de contrôler l'erreur proposée par le théorème 3.3.5, il faut que l'ordre de grandeur de l'erreur de quantification $\|\Theta_n - \widehat{\Theta}_n\|_p$ soit au plus de $\frac{1}{B}$.

3.3.4 L'horizon de calcul

Avant de conclure cette section et de présenter nos résultats numériques, nous allons discuter du choix de l'horizon de calcul N. Nous avons déjà vu que cet horizon de calcul doit être choisi de façon que $\mathbf{P}_x(T_N < t_f)$ soit faible. Bien entendu, une approche possible consiste à choisir N de façon arbitraire puis à valider ou non le choix effectué en approchant la probabilité par simulations de Monte Carlo. Cependant, il pourra être utile de disposer d'un borne théorique et c'est l'objet de ce paragraphe : nous allons fournir, sous certaines conditions, une borne de $\mathbf{P}_x(T_N < t_f)$ en fonction de N. Les hypothèses dont nous aurons besoin dans cette discussion sont les suivantes :

Hypothèse II.5 *Le taux de saut λ est borné par C_λ.*

Hypothèse II.6 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $Q(x, A_\epsilon) = 1$ où $A_\epsilon = \{x \in E \text{ tel que } t^*(x) \geq \epsilon\}$. En d'autres termes, les sauts ne peuvent envoyer le processus trop près de la frontière de E.*

L'hypothèse II.5 est satisfaite dans une large majorité d'applications (elle est valable dans tous les exemples que nous avons présentés dans la section 1.2) ; l'hypothèse II.6 est également assez générale, elle est introduite par Davis dans [Davis, 1993, section 24] (elle est satisfaite dans tous nos exemples).

Nous commençons par étudier plus précisément la construction du processus (X_t) afin d'obtenir un résultat concernant les temps de sauts $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini une suite $(\Upsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0; 1]$. Soit $x = (m, \zeta) \in E$ et $\omega \in \Omega$. Détaillons maintenant la construction de la trajectoire $\{X_t(\omega),\, t > 0\}$ du processus partant du point $x = (m, \zeta)$. Soit

$$\varphi_S(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0, \\ \exp\left(-\int_0^t \lambda(m, \Phi_m(\zeta, s))ds\right) & \text{si } 0 \leq t < t^*(x), \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(x). \end{cases}$$

Il s'agit de la fonction de survie du premier temps de saut $S_1 = T_1$ sous $\mathbf{P}_x$ (voir section 1.1.2). Son inverse généralisée est :

$$\psi_S(u,x) = \inf\{t \geq 0 : \varphi_S(t,x) \leq u\}.$$

On peut alors construire le premier temps de saut en posant $S_1(\omega) = T_1(\omega) = \psi_S(\Upsilon_1(\omega), x)$ et pour tout $t < T_1(\omega)$,

$$X_t(\omega) = (m, \Phi_m(\zeta, t)).$$

Si $T_1(\omega) < +\infty$, on choisit $X_{T_1} = (m_{T_1}, \zeta_{T_1})$ de loi $Q(\cdot, \Phi_m(\zeta, T_1))$. Supposons que la trajectoire soit ainsi construite jusqu'au temps T_k. Si $T_k(\omega) < +\infty$, soit

$$\begin{aligned} S_{k+1}(\omega) &= \psi_S(\Upsilon_k(\omega), X_{T_k}), \\ T_{k+1}(\omega) &= T_k(\omega) + S_{k+1}(\omega). \end{aligned}$$

Si $T_{k+1}(\omega) < +\infty$, on choisit $X_{T_{k+1}} = (m_{T_{k+1}}, \zeta_{T_{k+1}})$ de loi $Q(\cdot, \Phi_{m_{T_k}}(\zeta_{T_k}, S_{k+1}))$. Enfin, la trajectoire est construite par récurrence.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a le lemme suivant qui nous permet de déduire une majoration de $\mathbf{P}_x(T_N < t_f)$ à partir d'une minoration de la fonction de survie des durées inter-saut.

Lemme 3.3.6 *Soit H une fonction de survie telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E$, $H(t) \leq \varphi_S(t,x)$. Il existe une suite de variables aléatoires indépendantes $(\check{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de loi H et telle que $\forall t_f \in \mathbb{R}$, $\forall N \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbf{P}_x(T_N < t_f) \leq \mathbf{P}_x(\check{T}_N < t_f).$$

où on a posé $\check{T}_N = \sum_{k=0}^{N} \check{S}_k$.

Démonstration Soit H une telle fonction de survie. Notons $\check{\psi}_S$ son inverse généralisée i.e.

$$\check{\psi}_S(u) = \inf\{t \geq 0 : H(t) \leq u\}.$$

L'hypothèse faite sur H implique que pour tout $x \in E$, $\check{\psi}_S(u) \leq \psi_S(u,x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\check{S}_k(\omega) = \check{\psi}_S(\Upsilon_k(\omega)).$$

Remarquons que l'on utilise les mêmes variables Υ_k que dans la définition de S_k, ce qui nous permet d'écrire que $\check{S}_k \leq S_k$ p.s. et donc $\check{T}_k \leq T_k$ p.s. Le résultat suit. □

On cherche maintenant à borner $\mathbf{P}_x(T_N < t_f)$ pour $t_f > 0$ fixé. Soit

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-C_\lambda t} & \text{si } 0 \leq t < \epsilon, \\ 0 & \text{si } t \geq \epsilon. \end{cases}$$

La distribution H correspond à la "pire" distribution pour les durées inter-saut dans le sens où elle entraîne les sauts les plus fréquents. En effet, en notant φ_k la fonction de survie de S_k, on a $H \leq \varphi_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, le lemme 3.3.6 fournit une variable aléatoire $\check{T}_N = \sum_{k=0}^{N} \check{S}_k$, où les $\check{S}_k$ sont indépendants et ont pour fonction de survie la fonction H, telle que

$$\mathbf{P}_x(T_N < t_f) \leq \mathbf{P}_x(\check{T}_N < t_f).$$

Des calculs standards donnent $\mathbf{E}_x[\check{T}_N] = Nm_S$ et $\mathbf{V}_x[\check{T}_N] = N\sigma_S^2$ où on a posé

$$m_S = \mathbf{E}_x[\check{S}_1] = \frac{1}{C_\lambda}\left(1 - e^{-C_\lambda \epsilon}\right),$$
$$\sigma_S^2 = \mathbf{V}_x[\check{S}_1] = \frac{1}{C_\lambda^2}\left(1 - 2C_\lambda \epsilon e^{-C_\lambda \epsilon} - e^{-2C_\lambda \epsilon}\right).$$

Supposons maintenant que N soit tel que $Nm_S > t_f$ et en remarquant que

$$\mathbf{P}_x(\check{T}_N < t_f) \leq \mathbf{P}_x\left(\left|\check{T}_N - \mathbf{E}_\mu[\check{T}_N]\right| > \mathbf{E}_\mu[\check{T}_N] - t_f\right),$$

l'inégalité de Tchebychev donne :

$$\mathbf{P}_x(\check{T}_N < t_f) \leq \frac{N\sigma_S^2}{(Nm_S - t_f)^2}.$$

Le terme de droite majore $\mathbf{P}_x(T_N < t_f)$ et tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Il peut être utilisé pour choisir *a priori* une valeur de l'horizon de calcul N.

3.4 Résultats numériques

Dans cette section, on applique nos résultats à trois exemples présentés dans le premier chapitre : le modèle d'atelier de maintenance (section 1.2.3), le modèle industriel de corrosion proposé par Astrium (section 1.2.5) et le modèle d'assurance "garantie de revenus" (section 1.2.4).

3.4.1 L'atelier de maintenance

On étudie ici le modèle d'atelier de maintenance introduit dans la section 1.2.3.

Rappelons qu'il s'agit d'une machine pouvant se trouver dans trois états (les trois modes du processus correspondant) :

- mode 1 la machine fonctionne et produit des biens d'une valeur journalière $r(x)$,

- mode 2 la machine est en réparation et coûte chaque jour $p(x)$,

- mode 3 en maintenance, le coût journalier est $q(x)$.

Les coûts et profits liés à la machine dépendent d'un paramètre $x \in [0; 1]$ choisi par l'opérateur, notre but est donc de trouver la valeur de x qui maximise l'espérance du bénéfice total $B(x)$:

$$B_{max} = \sup_{x \in [0;1]} B(x),$$

où

$$B(x) = \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\Big(r(x)\mathbb{1}_{\{m_t=1\}} - p(x)\mathbb{1}_{\{m_t=2\}} - q(x)\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}\Big)dt\right].$$

On utilisera les valeurs suivantes $r(x) = x$, $p(x) = 100x^2$, $q(x) = 5$, $\rho = \frac{0.03}{365}$ et le taux de saut λ est tel que la durée de séjour dans le mode 1 suit une loi de Weibull de paramètres $\alpha = 2$ et $\beta = 600$. Pour $x \in [0;1]$ fixé, nous souhaitons calculer $\widetilde{J}_N(\widetilde{l},0)(1,0,0)$ où

$$\widetilde{l}(m,\zeta,t) = e^{-\rho t}\Big(r(x)\mathbb{1}_{\{m=1\}} - p(x)\mathbb{1}_{\{m=2\}} - q(x)\mathbb{1}_{\{m=3\}}\Big)\mathbb{1}_{\{t\leq t_f\}}.$$

Remarquons que nous aurions pu choisir r, p et q plus généraux en les autorisant à dépendre du temps. Les hypothèses I.1, II.1 et II.2 sont clairement vérifiées. L'hypothèse II.3 est aisée à vérifier car le noyau de transition Q est dégénéré. Quant à l'hypothèse II.4, elle se ramène à une hypothèse de continuité Lipschitz au sens classique sur $\widetilde{l}$ puisque le flot est lui-même lipschitzien. Celle-ci se vérifie aisément et on peut appliquer notre méthode numérique. Nous devons tout d'abord trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}_{(1,0,0)}(T_N < t_f)$ soit faible. Des simulations de Monte-Carlo suggèrent la valeur $N = 18$ car on a alors $\mathbf{P}_{(1,0,0)}(T_N < t_f)$ de l'ordre de 10^{-5}. Avant de présenter les résultats numériques, intéressons-nous à la méthodologie développée dans la section 3.3.4 pour estimer a priori l'horizon de calcul N. Les hypothèses de cette section sont en effet vérifiées. Pour que la borne théorique que nous y avons obtenue soit de l'ordre de 10^{-5}, il faut choisir $N > 400$ ce qui est bien sûr irréaliste.

Insistons sur le fait que, lorsque les grilles de quantification ont été obtenues, nous pouvons approcher $B(x)$ presque instantanément pour n'importe quel $x \in [0;1]$ parce que les mêmes grilles sont utilisées pour chaque calcul. Grâce à cette flexibilité, nous pouvons tracer la fonction $x \to B(x)$ et, ainsi, résoudre aisément le problème d'optimisation. C'est un avantage important de notre méthode. En effet, si nous utilisions une méthode standard de Monte-Carlo, il faudrait répéter l'intégralité des calculs pour chaque valeur de x et il serait alors laborieux de résoudre le problème d'optimisation.

La figure 3.2 représente l'approximation (500 points dans les grilles de quantification) de la fonction B obtenue sur une grille de $[0;1]$ avec un pas constant de 10^{-2}. Ceci conduit à la solution du problème d'optimisation. On obtient $B_{max} = B(x_{max}) = 537.84$ où $x_{max} = 0.78$ est la valeur du paramètre x qui maximise le bénéfice de l'usine. Soit maintenant $x = 0.78$, le tableau 3.1 présente les valeurs de $\widehat{V}_N$, l'approximation de $B(x)$, en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification. Une valeur de référence, obtenue par simulation de Monte-Carlo (10^8 simulations) est $B_{Monte-Carlo} = 537.69$.

La figure 3.3 présente la vitesse de convergence empirique de notre approximation de $B(x_{max})$. Cette vitesse de convergence, estimée par un modèle de régression, est -1.08. La valeur théorique de la vitesse de convergence de la quantification optimale, donnée par le théorème 1.4.1, serait de -0.5 si on considérait que la dimension est ici 2 (en effet, $\zeta = 0$ immédiatement après un saut donc on ne quantifie que les

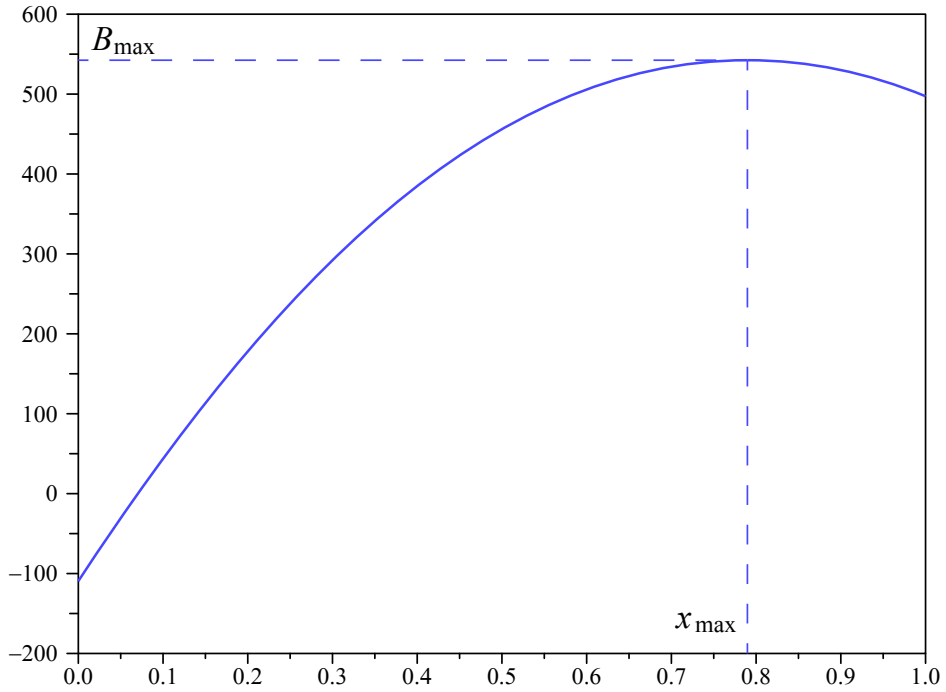

FIGURE 3.2 – La fonction $x \to B(x)$ calculée avec 500 points dans les grilles de quantification en tout point $x = \frac{k}{100}$, pour $0 \leq k \leq 100$.

Points dans les grilles de quantification	$\widehat{V}_N$	erreur relative à 537.69
20 points	542.14	0.83 %
50 points	539.57	0.35 %
100 points	538.24	0.10 %
500 points	537.84	0.03 %
Monte Carlo (10^8 simulations)	537.69	

TABLE 3.1 – Résultat des simulations pour le bénéfice moyen optimal dans le modèle d'atelier de maintenance.

variables m et t). On constate que la valeur empirique est plus proche de -1, ce qui correspondrait à un processus de dimension 1. Ceci peut s'expliquer par le fait que la variable de mode m est en fait déjà discrète.

Du point de vue du temps de calcul, nous avons déjà signalé que le calcul de grandes grilles de quantification est, de loin, l'étape la plus coûteuse. L'approximation de l'espérance qui suit étant presque instantanée. Cependant, nous pouvons remarquer dans le tableau ci-dessus, qu'une série de grilles ne contenant que 50 points fournit déjà un résultat assez précis (une erreur de 0.35% seulement). De telles grilles sont obtenues très rapidement. Par ailleurs, nous avons déjà remarqué que les mêmes grilles peuvent avoir plusieurs fins. Par exemple, nous pourrions aussi nous intéresser au temps moyen que la machine passe à l'atelier en choisissant

$l(m, \zeta, t) = \mathbb{1}_{\{m \in \{2;3\}\}}$.

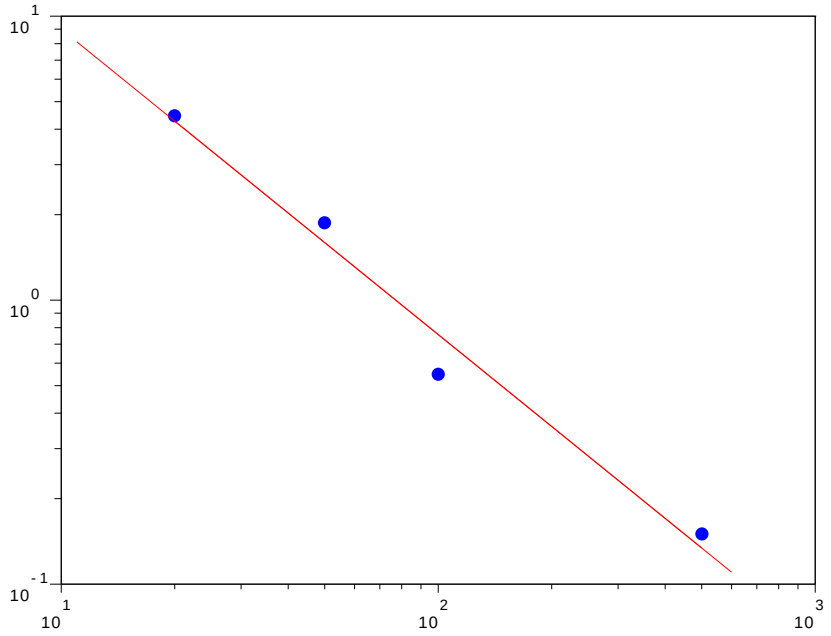

FIGURE 3.3 – Logarithme de l'erreur dans l'approximation du bénéfice moyen optimal par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -1.08.

3.4.2 Le modèle de corrosion

Nous considérons maintenant le modèle de corrosion, fourni pas Astrium, que nous avons présenté dans la section 1.2.5 et à laquelle nous renvoyons pour la description précise du PMDM modélisant la situation. Nous cherchons à calculer la perte d'épaisseur moyenne dans l'environnement 2 jusqu'à la date $t_f = 18$ années (cette durée correspond à la durée moyenne d'un cycle de passage dans les trois environnements successifs).

Cet exemple est particulièrement intéressant car nous allons voir que certaines de nos hypothèses ne sont pas vérifiées notamment l'hypothèse II.2, selon laquelle t^* doit être borné, puisqu'on a $t^*(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$. Nous allons voir que la mise en oeuvre de notre schéma numérique sera toujours possible : l'horizon de temps déterministe t_f jouera le rôle de C_{t^*} et les fonctions qui nous intéressent seront nulles au-delà de t_f.

Rappelons maintenant les principales caractéristiques du PMDM modélisant l'évolution de la corrosion. L'espace d'état est

$$E = \left\{(m, d, s, \rho, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}] \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } s \leq t\right\}.$$

Le flot est donné pour tout $u \geq 0$ par

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} m \\ d \\ s \\ \rho \\ t \end{pmatrix}, u\right) = \begin{pmatrix} m \\ d + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho, s) \\ s+u \\ \rho \\ t+u \end{pmatrix}$$

où d_m représente la perte d'épaisseur dans le mode m et est donnée par l'équation l'équation (1.2.1) que nous rappelons :

$$d_m(\rho, s) = \rho\left(s + \eta_m\left(e^{-\frac{s}{2\eta_m}} - 1\right)\right). \tag{3.4.1}$$

La fonction de coût $l \in B(E)$ est définie pour tous $x = (m, d, s, \rho, t) \in E$ et $u \geq 0$ par

$$l(\Phi(x,u)) = \rho\Big(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{s+u}{2\eta_m}}\Big)\mathbb{1}_{\{m=2\}} = \frac{d}{du}\Big(d_m(\rho, s+u)\Big)\mathbb{1}_{\{m=2\}}. \tag{3.4.2}$$

On définit ensuite $\tilde{l}(\Phi(x,u)) = l(\Phi(x,u))\mathbb{1}_{\{t+u\leq t_f\}}$, on a ainsi

$$\begin{aligned} L(x,u) &= \int_0^u \tilde{l}\Big(\Phi(x,u')\Big)du' \\ &= \int_0^{u\wedge(t_f-t)^+} l\Big(\Phi(x,u')\Big)du' \\ &= \Big(d_m(\rho, s+u\wedge(t_f-t)^+) - d_m(\rho,s)\Big)\mathbb{1}_{\{m=2\}}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la perte d'épaisseur dans le mode 2 depuis le point $x = (m, d, s, \rho, t)$ et pendant une durée $u \wedge (t_f - t)^+$.

Les hypothèses I.1 et II.1 sont clairement satisfaites car le taux de saut est constant dans chaque ambiance. De plus, il est aisé, d'après l'équation l'équation (3.4.2), de vérifier que l'hypothèse II.4 est vérifiée, c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.4.1 *La fonction de coût l définie par l'équation* (3.4.2) *est lipschitzienne le long du flot i.e.*

$$l \in \mathbf{L_c}(E).$$

En d'autres termes, l'hypothèse II.4 est vérifiée.

Démonstration Soit $x = (m, d, s, \rho, t)$, $x' = (m', d', s', \rho', t') \in E$ et u, $u' \in \mathbb{R}^+$, nous allons borner la quantité

$$\left|l(\Phi(x,u)) - l(\Phi(x',u'))\right|.$$

Le seul cas non trivial est le cas $m = m' = 2$ car si $m \neq 2$ et $m' \neq 2$, la quantité ci-dessus est nulle et si un seul des modes est le mode 2, on a, d'après la norme

définie sur E par 1.1.5, $|x - x'| = +\infty$ et il n'y a rien à prouver. On suppose donc que $m = m' = 2$ et on a

$$|l(\Phi(x,u)) - l(\Phi(x',u'))| = \left|\rho\Big(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{s+u}{2\eta_2}}\Big) - \rho'\Big(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{s'+u'}{2\eta_2}}\Big)\right|.$$

On intercale le terme $\rho'\Big(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{s+u}{2\eta_2}}\Big)$. En remarquant que $\Big(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{s+u}{2\eta_2}}\Big) \leq 1$ et $\rho \vee \rho' \leq 10^{-5}$, on a

$$\begin{aligned} |l(\Phi(x,u)) - l(\Phi(x',u'))| &\leq |\rho - \rho'| + \frac{1}{2}10^{-5}\left|e^{-\frac{s+u}{2\eta_2}} - e^{-\frac{s'+u'}{2\eta_2}}\right| \\ &\leq |\rho - \rho'| + \frac{1}{4\eta_2}10^{-5}|s - s'| + \frac{1}{4\eta_2}10^{-5}|u - u'|. \end{aligned}$$

Or, $|\rho - \rho'| + \frac{1}{4\eta_2}10^{-5}|s - s'| \leq |x - x'|$ puisque $\frac{1}{4\eta_2}10^{-5} \leq 1$. On obtient donc la continuité Lipschitz de l le long du flot avec

$$\begin{aligned} [l]_1^E &\leq 1, \\ [l]_2^E &\leq \frac{1}{4\eta_2}10^{-5}. \end{aligned}$$

Dans cette exemple, t^* est infini, il n'y a donc pas lieu de définir $[l]_*^E$, le lemme est prouvé. □

On se tourne maintenant vers l'hypothèse II.3 et nous verrons que, bien qu'elle ne soit pas vraie pour toute fonction $w \in \mathbf{L_c}^v(E)$, elle l'est pour une sous classe de fonctions suffisamment grande. Nous commençons par une remarque : rappelons-nous que pour tout $x = (m,d,s,\rho,t) \in E$ et pour tout $k \in \{0,...,N\}$, on a $v_{N-k}(x) = \mathbf{E}_x\Big[\int_0^{T_k} l\Big(\Phi(x,u)\Big)\mathbb{1}_{\{t+u\leq t_f\}}du\Big]$, donc pour tout $k \in \{0,...,N\}$ la fonction v_k ainsi que la fonction $\tilde{l}$ satisfont la condition suivante :

$$\text{pour tout } x = (m,d,s,\rho,t) \in E \text{ tel que } t \geq t_f, \text{ on a } w(x) = 0. \tag{3.4.3}$$

L'étape suivante consiste à pouver que l'hypothèse II.3 est valable pour toute fonction $w \in \mathbf{L_c}^v(E)$ qui satisfait également la condition l'équation (3.4.3). C'est l'objet du lemme 3.4.2. Ceci est suffisant car, dans la preuve du théorème qui assure la convergence de notre schéma numérique, l'hypothèse II.3 n'est utilisée que pour les fonctions $(v_k)_{k\in\{0,...,N\}}$ qui satisfont la condition l'équation (3.4.3). Avant d'énoncer le lemme, nous rappelons l'équation (1.2.2) satisfaite par le noyau de transition Q : pour $w \in B(E)$, $x = (m,d,s,\rho,t) \in E$, et $u \geq 0$,

$$Qw\Big(\Phi(\begin{pmatrix} m \\ d \\ s \\ \rho \\ t \end{pmatrix}, u)\Big) = \frac{1}{\rho_{max} - \rho_{min}}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} w\begin{pmatrix} m+1[3] \\ d + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho,s) \\ 0 \\ \tilde{\rho} \\ t+u \end{pmatrix} d\tilde{\rho}. \tag{3.4.4}$$

Lemme 3.4.2 *Il existe* $[Q] \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tous* $v \geq 0$ *et* $w \in \mathbf{L_c}^v(E)$ *qui satisfait la condition l'équation* (3.4.3)*, on a pour tous* x, $x' \in E$ *et* $0 \leq u \leq v$,

$$\Big|Qw\Big(\Phi(x,u)\Big) - Qw\Big(\Phi(x',u)\Big)\Big| \leq [Q][w]_1^{E,v}|x - x'|.$$

Démonstration Soit $x = (m, d, s, \rho, t)$ et $x' = (m', d', s', \rho', t') \in E$ avec par exemple $t \leq t'$. Tout d'abord, on peut choisir $m = m'$. En effet, dans le cas contraire, $|x - x'| = +\infty$ et il n'y a rien à prouver. Il existe alors trois cas :

- si $t_f \leq t + u \leq t' + u$, alors on a $Qw\Big(\Phi(x,u)\Big) = Qw\Big(\Phi(x',u)\Big) = 0$ parce que w satisfait la condition l'équation (3.4.3) et il n'y a rien à montrer.
- si $t + u \leq t_f \leq t' + u$, alors $Qw\Big(\Phi(x',u)\Big) = Qw\Big(\Phi((m',d',s',\rho',t_f),u)\Big) = 0$ (c'est une conséquence de la condition l'équation (3.4.3)) si bien que nous sommes ramenés au cas suivant,
- Supposons désormais que $t + u \leq t' + u \leq t_f$. On cherche à borner

$$\Big|Qw\Big(\Phi(x,u)\Big) - Qw\Big(\Phi(x',u)\Big)\Big|.$$

D'après l'équation l'équation (3.4.4), on a

$$\left|Qw\Big(\Phi(\begin{pmatrix} m \\ d \\ s \\ \rho \\ t \end{pmatrix},u)\Big) - Qw\Big(\Phi(\begin{pmatrix} m \\ d' \\ s' \\ \rho' \\ t' \end{pmatrix},u)\Big)\right|$$

$$\leq [w]_1^E \left|\begin{pmatrix} 0 \\ d - d' + d_m(\rho, s+u) - d_m(\rho', s'+u) + d_m(\rho', s') - d_m(\rho, s) \\ 0 \\ 0 \\ t - t' \end{pmatrix}\right|.$$

Ainsi, il suffit de prouver que la fonction $(\rho, s) \to d_m(\rho, s)$, définie par l'équation (3.4.1), est lipschitzienne par rapport à ses deux variables sur l'ensemble

$$[10^{-7}; 10^{-5}] \times [0; t_f].$$

On peut se limiter à cet ensemble car on a $s \leq t$ et $s' \leq t'$, ainsi $s, s', s+u, s'+u \leq t_f$. Des calculs élémentaires impliquent :

$$\begin{aligned} |d_m(\rho, s) - d_m(\rho', s')| &\leq s|\rho - \rho'| + \frac{3}{2}\rho'|s - s'| \\ &\leq t_f|\rho - \rho'| + \frac{3}{2}10^{-5}|s - s'|. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Dans la démonstration précédente, le rôle de t_f est essentiel car la fonction $(\rho, s) \to d_m(\rho, s)$ n'est pas Lipschitz sur $[10^{-7}; 10^{-5}] \times \mathbb{R}^+$. Remarquons que l'utilisation de t_f aurait été inutile si t^* avait été borné car on aurait alors considéré

la fonction sur l'ensemble $[10^{-7}; 10^{-5}] \times [0; C_{t^*}]$. L'horizon de temps déterministe t_f joue ici le rôle du C_{t^*} manquant.

Enfin, l'hypothèse II.2 n'est pas satisfaite parce que dans notre modèle de corrosion, on a $t^*(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$. Nous avons vu, dans la preuve précédente, que l'horizon de temps déterministe t_f joue le rôle de C_{t^*}. En effet, toutes les fonctions qui nous intéressent sont nulles au-delà de t_f (voir l'équation (3.4.3)), il est inutile de considérer le processus au-delà de t_f.

Plus généralement, nous allons voir que dans notre problème à horizon de temps déterministe, l'hypothèse selon laquelle t^* doit être borné peut être supprimée et nos résultats restent vrais en remplaçant C_{t^*} par t_f. C'est clair dans le cas de la proposition 2.3.2 parce que la fonction $\tilde{l}$ satisfait la condition l'équation (3.4.3). La proposition 2.3.9 reste vraie également en replaçant C_{t^*} par t_f. En effet, d'une part, il est clair que $L(x, u) \leq t_f C_l$. D'autre part, lors du calcul de $|v_n(\Phi(x, u)) - v_n(\Phi(x', u'))|$, trois cas peuvent se présenter (comme dans la preuve du lemme 3.4.2) :

- si $t_f \leq u \leq u'$, on a $v_n(\Phi(x, u)) = v_n(\Phi(x', u')) = 0$ (ceci résulte de la condition l'équation (3.4.3)),
- si $u \leq t_f \leq u'$, on a $|v_n(\Phi(x, u)) - v_n(\Phi(x', u'))| = |v_n(\Phi(x, u)) - v_n(\Phi(x', t_f))|$ puisque $v_n(\Phi(x', u')) = v_n(\Phi(x', t_f)) = 0$ (c'est la condition l'équation (3.4.3) encore une fois) et on est ramené au cas précédent,
- si $u \leq u' \leq t_f$, les calculs restent inchangés et t_f remplace C_{t^*} pour borner u et u'.

Des simulations de Monte Carlo suggèrent d'utiliser la valeur $N = 14$ comme horizon de calcul. En effet, on obtient alors $\mathbf{P}(T_N < t_f)$ de l'ordre de 10^{-4}. Pour obtenir une borne de cette ordre de grandeur, la méthodologie de la section 3.3.4 suggère de choisir $N > 1000$. Le tableau 3.2 présente les valeurs de la perte moyenne d'épaisseur dans l'environnement 2 obtenues grâce à notre schéma ainsi qu'une approximation par simulations de Monte-Carlo (obtenue avec 10^8 simulations) et les erreurs relatives de nos valeurs par rapport à la valeur Monte Carlo.

La figure 3.4 présente la vitesse de convergence empirique. Cette vitesse de convergence, estimée par un modèle de régression, est -0.35. Cette valeur est très proche de la vitesse de convergence de la quantification optimale, donnée par le théorème 1.4.1, qui est -0.33 puisque la dimension est ici 3. En effet, la succession des modes étant déterministe, il n'est pas nécessaire de quantifier cette variable. De plus, $s = 0$ immédiatement après un saut donc on ne quantifie que les variables ρ, d et t.

Par ailleurs, le tableau 3.3 présente le temps nécessaire au calcul [1] de l'espérance à partir des grilles de quantification. Nous pouvons observer que, une fois les grilles de quantification obtenues, notre schéma d'approximation est très rapide.

1. les calculs sont effectués avec Matlab R2010b sur un MacBook Pro 2.66 GHz i7 processor.

Points dans le grilles de quantification	$\widehat{V}_0$	erreur
20 points	0.038386	4.43 %
50 points	0.037804	2.85 %
100 points	0.037525	2.09 %
200 points	0.037421	1.81 %
500 points	0.037264	1.38 %
1000 points	0.037160	1.10 %
2000 points	0.037041	0.77 %
4000 points	0.037007	0.69 %
6000 points	0.036973	0.57 %
8000 points	0.036944	0.49 %
10000 points	0.036911	0.40 %
12000 points	0.036897	0.36 %
Monte Carlo	0.036755	

TABLE 3.2 – Résultat des simulations pour l'approximation de la perte d'épaisseur moyenne (en mm) dans l'environnement 2 en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification et une approximation par la méthode Monte-Carlo (10^8 simulations).

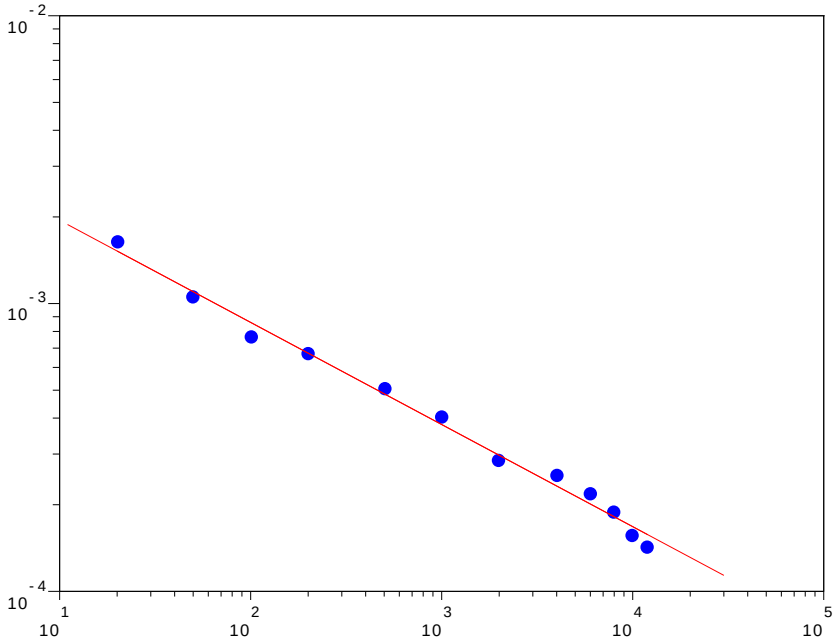

FIGURE 3.4 – Logarithme de l'erreur dans l'approximation de la perte d'épaisseur par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -0.35.

Grilles de quantification	temps de calcul (secondes)
20 points	0.0059
50 points	0.0085
100 points	0.014
200 points	0.034
500 points	0.12
1000 points	0.37
2000 points	1.5
4000 points	5.6
6000 points	13
8000 points	24
10000 points	35
12000 points	54
Monte Carlo (10^8 simulations)	$\approx$ 16 000

TABLE 3.3 – Temps de calcul nécessaire à l'approximation de l'espérance dans le modèle de corrosion.

3.4.3 Évaluation d'une assurance garantie de revenus

On étudie ici le modèle d'assurance introduit dans la section 1.2.4.

Rappelons que l'on cherche à déterminer le prix de l'assurance donné par :

$$\mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right].$$

Il s'agit du coût total d'une assurance qui paie 1 euro par an à l'assuré à partir du moment où la durée d'un arrêt maladie excède p années et jusqu'à la reprise d'activité, la fin de contrat ou le décès de l'assuré.

On choisit les valeurs numériques suivantes : $\lambda^{BM}(\zeta,t) = 0.3$, $\lambda^{MB}(\zeta,t) = 2.8$, $\lambda^{BD}(\zeta,t) = \lambda^{MD}(\zeta,t) = 0.001$, $p = 0.5$ années, $\rho = 0.03$ et t_f allant jusqu'à 25 années. Nos hypothèses sont vérifiées sauf l'hypothèse II.2 (t^* borné) mais on peut, par les mêmes arguments que dans l'exemple précédent, remplacer C_{t^*} par t_f. Afin d'appliquer notre schéma d'approximation, il faut choisir un horizon de calcul N tel que $\mathbf{P}_{(1,0,0)}(T_N < t_f)$ soit faible lorsque $t_f = 25$ années. Des simulations de Monte Carlo suggèrent la valeur $N = 28$ car la probabilité $\mathbf{P}_{(1,0,0)}(T_N < t_f)$ est alors de l'ordre de 10^{-3}. La méthodologie de la section 3.3.4, quant à elle, fournit une borne de la probabilité du même ordre de grandeur pour $N > 500$.

La figure 3.5 représente la fonction

$$t_f \to \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right],$$

pour $t_f \in [0;25]$ (tracée avec un pas de temps égal à 0.5) estimée par notre schéma numérique pour 100, 200 et 2000 points dans les grilles de quantification. Dans le tableau 3.4, on a fixé la valeur $t_f = 25$ années et on donne les approximations de $\mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right]$ en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification. A l'aide de 10^8 simulations de Monte Carlo, on obtient la valeur de référence 0.3945 euros. La figure 3.6 présente la vitesse de convergence empirique. Cette vitesse de convergence, estimée par un modèle de régression, est -0.89. La valeur théorique de la vitesse de convergence de la quantification optimale, donnée par le théorème 1.4.1, serait de -0.5 si on considérait que la dimension est ici 2 (en effet, $\zeta = 0$ immédiatement après un saut donc on ne quantifie que les variables m et t). On constate que la valeur empirique est plus proche de -1, ce qui correspondrait à un processus de dimension 1. Ceci peut s'expliquer par le fait que la variable de mode m est en fait déjà discrète.

Dans cet exemple, on peut à nouveau apprécier la flexibilité offerte par la quantification. En effet, les grilles de quantification ne dépendent pas de la date de fin de contrat t_f. Ainsi, une fois les grilles obtenues, on peut obtenir rapidement l'approximation du coût de l'assurance pour n'importe quelle valeur de t_f (dans la limite imposée par l'horizon de calcul N). Ceci nous a permis de tracer aisément la fonction $t_f \to \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right]$ représentée sur la figure 3.5. Au contraire, si on

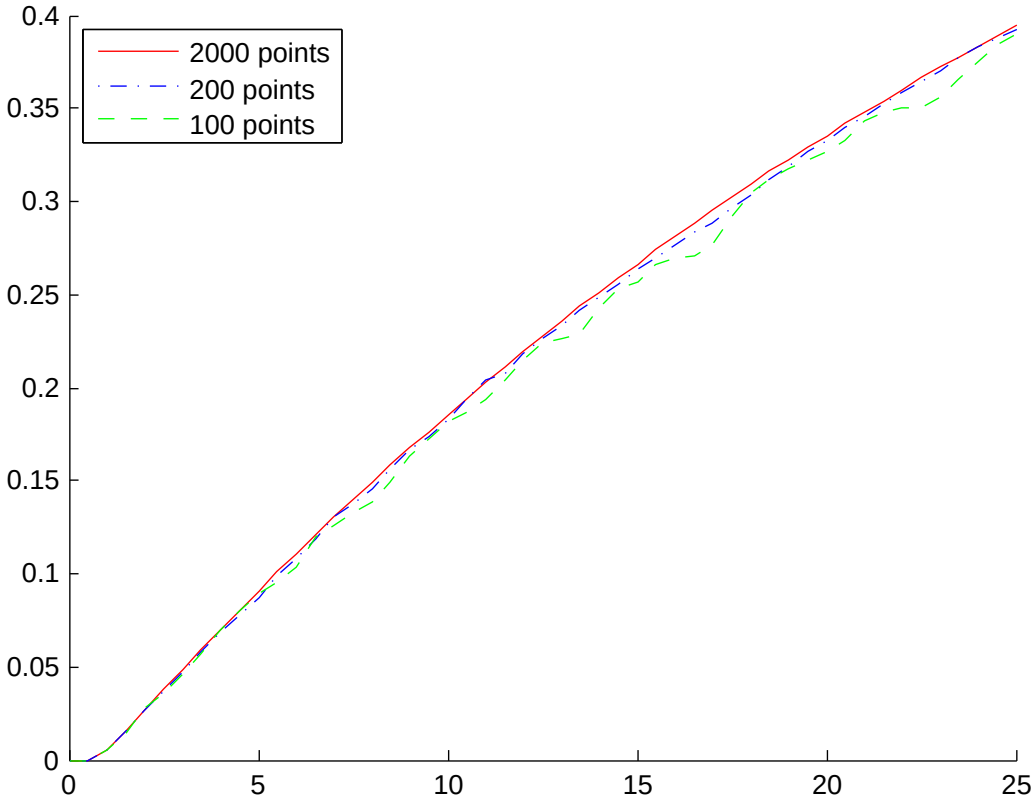

FIGURE 3.5 – La fonction $t_f \to \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right]$ (coût de l'assurance en fonction de la durée du contrat) calculée par quantification avec 100 points, 200 points et 2000 points. La courbe obtenue par simulations de Monte-Carlo n'est pas représentée ici pour plus de clarté car elle est pratiquement confondue avec celle obtenue par quantification avec 2000 points.

opte pour une méthode de simulations de Monte Carlo, on doit effectuer à nouveau tous les calculs si on décide de changer la date de fin de contrat a posteriori.

Grilles de quantification	$\widehat{V}_0$	erreur relative à 0.3945
100 points	0.3899	1.17 %
200 points	0.3927	0.46 %
500 points	0.3938	0.18 %
1000 points	0.3940	0.13 %
2000 points	0.3942	0.07 %
Monte Carlo	0.3945	

TABLE 3.4 – Résultats des simulations pour l'évaluation de l'assurance garantie de revenus de durée de contrat $t_f = 25$ années.

Enfin, comme dans l'exemple précédent, on présente le temps nécessaire au cal-

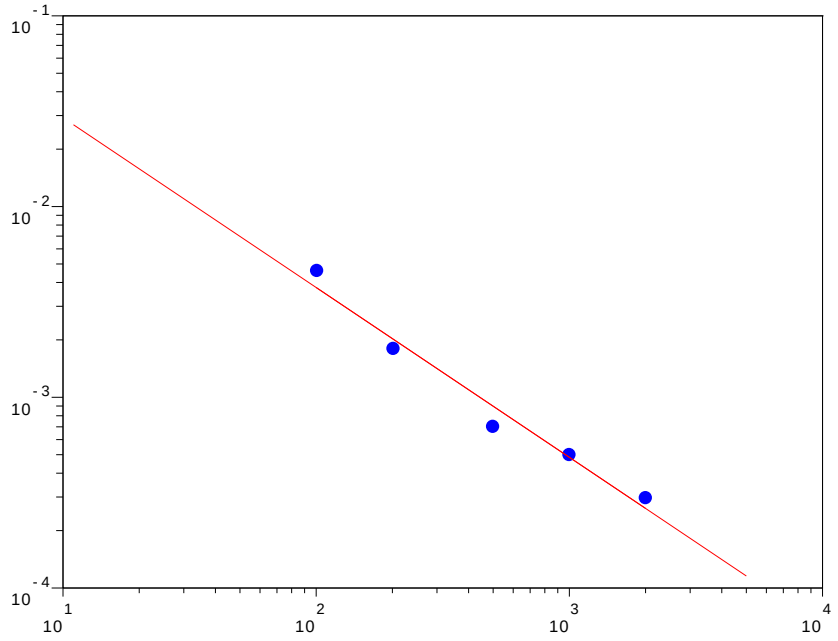

FIGURE 3.6 – Logarithme de l'erreur dans l'approximation de la valeur de l'assurance par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -0.89.

cul[2] de l'espérance à partir des grilles de quantification dans le tableau 3.5. Nous observons à nouveau que notre schéma d'approximation est très rapide une fois les grilles de quantification obtenues. Par ailleurs, le temps de calcul (pour notre schéma ainsi que pour la méthode de Monte Carlo) est plus important dans cet exemple que dans le précédent. Ceci s'explique par l'horizon de calcul qui est de $N = 28$ dans cet exemple et qui n'était que de $N = 14$ dans le précédent.

Grilles de quantification	temps de calcul (secondes)
100 points	0.040
200 points	0.087
500 points	0.42
1000 points	1.5
2000 points	5.7
Monte Carlo (10^8 simulations)	$\approx$ 32 000

TABLE 3.5 – Temps de calcul nécessaire à l'approximation de l'espérance dans le modèle d'assurance.

2. les calculs sont effectués avec Matlab R2010b sur un MacBook Pro 2.66 GHz i7 processor.

3.4.4 Quantification et problème d'échelles

Afin de conclure cette section concernant les exemples numériques, nous décrivons ici une difficulté rencontrée lors du calcul pratique des grilles de quantification et liée à des problèmes d'échelles.

Dans l'exemple du modèle de corrosion, les composantes du processus à quantifier sont d'ordres de grandeur très différents. Les temps de saut T_k sont de l'ordre de 10^5 alors que le taux de corrosion ρ est voisin de 10^{-6}. L'algorithme classique de quantification fournit alors des résultats peu satisfaisants : les composantes dont l'ordre de grandeur est plus faible ne sont pas prises en compte. En effet, celles-ci sont négligées dans l'étape de recherche du plus proche voisin puisque ce plus proche voisin s'entend au sens de la norme p usuelle.

Afin de corriger ce problème, nous avons utilisé une norme p (en pratique, une norme euclidienne) pondérée de manière à niveler les ordres de grandeur des différentes coordonnées. Nous illustrons cet effet par un exemple. Il s'agit de la quantification d'un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $[0;1] \times [0;1000]$. On voit clairement que dans le cas de l'algorithme standard (figure 3.7), seule la deuxième coordonnée est prise en compte, tous les points de la grille ont une abscisse proche de 0.5. Au contraire, dans le cas de l'algorithme pondéré (figure 3.8), la distribution uniforme des points de la grille paraît beaucoup plus satisfaisante.

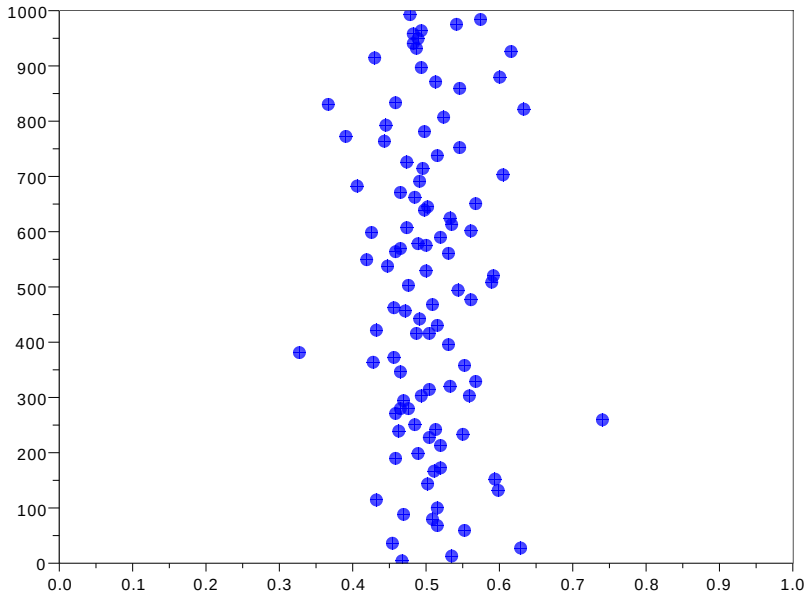

FIGURE 3.7 – Quantification d'une loi uniforme sur $[0;1] \times [0;1000]$. Algorithme standard.

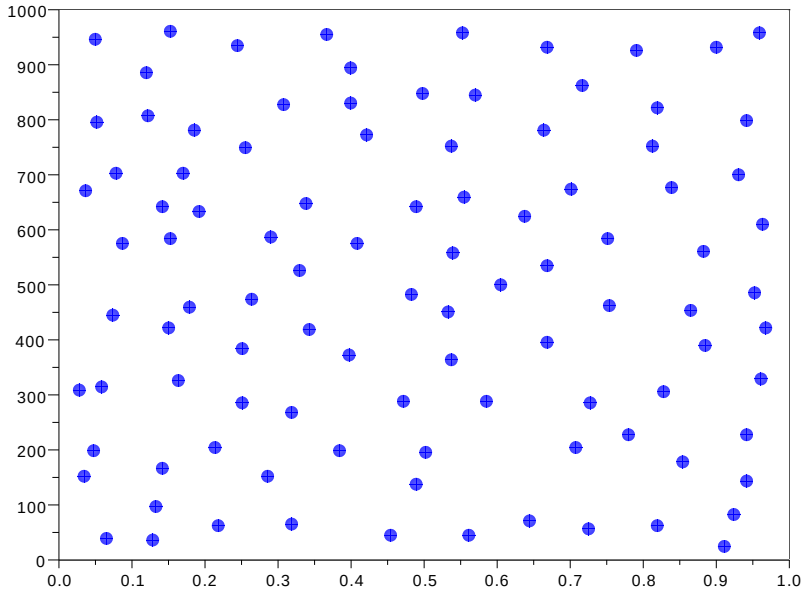

FIGURE 3.8 – Quantification d'une loi uniforme sur $[0;1] \times [0;1000]$. Algorithme pondéré.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode numérique efficace et facile à implémenter visant à approcher des espérances de fonctionnelles de Processus Markoviens Déterministes par Morceaux. Nous avons prouvé la convergence de l'algorithme en exhibant une vitesse de convergence.

Bien que notre méthode soit développée dans le cadre de fonctionnelles invariantes en temps, elle s'étend aux cas de fonctionnelles dépendantes du temps et de fonctionnelles à horizon déterministe. En effet, nous avons montré que, grâce à l'introduction du processus augmenté du temps, ces deux derniers problèmes peuvent être vus, paradoxalement, comme des cas particuliers du problème initial indépendant du temps.

Parmi nos hypothèses, celle que nous jugeons la plus restrictive est sans conteste l'hypothèse II.2 selon laquelle le temps de sortie déterministe t^* doit être borné. Ceci exclut en effet toutes les applications dans lesquelles au moins un des modes ne comporte pas de frontière. Cependant, nous avons vu que cette restriction peut être contournée lorsqu'on étudie un problème à horizon de temps déterministe t_f. Ce phénomène est détaillé dans l'exemple du modèle de corrosion de la section 3.4.2, nous y observons que t_f joue le rôle de la borne manquante de t^*. Ceci permet d'appliquer notre schéma numérique à une large classe de processus.

Notre méthode est simple à mettre en oeuvre car elle nécessite simplement d'être capable de simuler le processus. De plus, bien que le temps de calcul des grilles de quantification puisse être assez important, il peut être effectué de façon préliminaire car ces grilles ne dépendent que de la dynamique du processus et non des fonctions de coût. Par conséquent, elles peuvent être stockées et réutilisées. Ainsi que l'illustrent les exemples développés dans les sections 3.4.1 et 3.4.3, ceci confère à notre méthode une flexibilité appréciable. En effet, le calcul de l'espérance étant très rapide, une fois les grilles obtenues (voir à ce sujet les tableaux 3.3 et 3.5), on peut décider de modifier la fonctionnelle ou de réévaluer les paramètres physiques qui ne modifient pas la dynamique du processus, le nouveau résultat sera calculé presque instantanément. Cette flexibilité est un avantage important par rapport à une méthode de Monte-Carlo.

Bibliographie

[Bally and Pagès, 2003] Bally, V. and Pagès, G. (2003). A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6) :1003–1049.

[Brandejsky et al., 2012] Brandejsky, A., de Saporta, B., and Dufour, F. (2012). Numerical method for expectations of piecewise-deterministic markov processes. *CAMCoS*, 7(1) :63–104.

[Cocozza-Thivent et al., 2006] Cocozza-Thivent, C., Eymard, R., and Mercier, S. (2006). A finite-volume scheme for dynamic reliability models. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(3) :446–471.

[Davis, 1993] Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

[de Saporta et al., 2010] de Saporta, B., Dufour, F., and Gonzalez, K. (2010). Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637.

[Eymard et al., 2008] Eymard, R., Mercier, S., and Prignet, A. (2008). An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 222(2) :293–323.

[Gonzalez, 2010] Gonzalez, K. (2010). *Contribution à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux*. PhD thesis, Université Bordeaux 1.

Troisième partie

Temps de sortie

Introduction

Dans cette partie, nous présentons une méthode de calcul de la fonction de survie et des moments d'un temps de sortie pour un PMDM. Notre approche numérique est à nouveau basée sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM. L'approximation que nous proposons est facile à mettre en œuvre et possède une certaine flexibilité vis-à-vis du temps de sortie considéré. Nous prouvons la convergence de nos algorithmes et obtenons une vitesse de convergence dans le cas des moments. Deux exemples numériques illustrent notre méthode : le premier est le processus de Poisson avec flot présenté dans la section 1.2.1, le second est le modèle de corrosion introduit dans la section 1.2.5.

Cette partie est adaptée de l'article *Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process* ([Brandejsky et al., 2012]) paru dans la revue *Advances in Applied Probability*.

Le calcul numérique des moments d'un temps de sortie pour les processus de Markov a été étudié par K. Helmes, S. Röhl et R.H. Stockbridge dans [Helmes et al., 2001]. Partant d'une hypothèse relative au générateur du processus, ils obtiennent un système d'équations linéaires satisfaites par les moments. A ces équations, ils adjoignent un nombre fini de conditions de Hausdorff pour les moments qui sont également des contraintes linéaires. Le problème d'optimisation ainsi obtenu est alors un problème classique de programmation linéaire pour lequel de nombreux logiciels efficaces sont disponibles. J.-B. Lasserre et T. Prieto-Rumeau introduisent dans [Lasserre and Prieto-Rumeau, 2004] une méthode similaire mais ils améliorent l'efficacité de l'algorithme en remplaçant les conditions de Hausdorff par des contraintes de semi-définie positivité de matrices de moments. Cependant, leur approche ne s'applique pas aux PMDM parce que l'hypothèse sur le générateur du processus n'est pas satisfaite en général. Nous détaillerons ce point dans la section 4.1 après avoir exposé l'approche de K. Helmes, S. Röhl et R.H. Stockbridge.

Dans [Davis, 1993, section 33], Davis présente une méthode itérative permettant de calculer l'espérance du temps de sortie du PMDP mais son approche nécessite la résolution d'un grand nombre d'équations différentielles ordinaires dont la forme dépend fortement du problème considéré et notamment du comportement du processus à la frontière de l'espace d'état.

Par ailleurs, avant de présenter notre méthode de calcul des moments et de la fonction de survie, nous montrons comment les résultats de la partie précédente

permettent de calculer l'espérance du temps τ de sortie d'un ensemble $U \subset E$. En effet, si l'on suppose que le processus ne peut plus revenir en U une fois qu'il en est sorti, on peut écrire $\tau \wedge T_N = \int_0^{T_N} \mathbb{1}_{\{X_s \in U\}} ds$ qui est bien une fonctionnelle du processus qui entre dans le cadre étudié lors de la partie précédente.

Dans le contexte des applications, il apparaît important d'étudier également la distribution du temps de sortie. Aussi, nous présentons une nouvelle approche dans cette partie qui permet non seulement de calculer l'espérance du temps de sortie mais aussi ses autres moments et sa distribution.

Par la suite, nous nous intéressons à un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ d'espace d'état E et nous présentons des méthodes de calcul des moments et de la fonction de survie du temps de sortie d'un ensemble noté $U \subset E$ conditionné au fait que le processus quitte U avant le N-ième temps de saut T_N du PMDM. Dans notre approche, la première étape consiste à exprimer le j-ième moment (respectivement la fonction de survie) comme le dernier terme d'une suite $(p_{k,j})_{k\leq N}$ (respectivement $(p_k)_{k\leq N}$) satisfaisant une relation de récurrence $p_{k+1,j} = \psi(p_{k,j})$ (respectivement $p_{k+1} = \psi(p_k)$).

Dans ce contexte, une façon naturelle de traiter ce problème consiste à suivre l'idée utilisée dans la partie précédente c'est-à-dire à écrire les récurrences en fonction d'une chaîne de Markov sous-jacente à temps discret et à la remplacer par son approximation quantifiée. Les expressions de $(p_{k,j})_k$ et $(p_k)_k$ contiennent des discontinuités en raison de la présence de fonctions indicatrices mais comme dans [de Saporta et al., 2010], nous montrons qu'elles n'arrivent qu'avec une suffisamment faible probabilité. Cependant, il est impossible d'appliquer directement les idées de la partie précédente en raison d'une importante difficulté, inédite dans cette partie : la fonction ψ telle que $p_{k+1,j} = \psi(p_{k,j})$ et $p_{k+1} = \psi(p_k)$ n'est pas lipschitzienne. En effet, les relations de récurrence $p_{k+1,j} = \psi(p_{k,j})$ et $p_{k+1} = \psi(p_k)$ sont les analogues de la relation $v_k = G^A v_{k+1}$ dans la partie précédente et on a vu que la continuité Lipschitz de l'opérateur G^A y jouait un rôle crucial. L'une des principales contributions de ce chapitre réside dans le fait que nous parvenons à surmonter cet obstacle en utilisant des arguments plus fins relatif à l'algorithme de quantification. Nous prouvons alors la convergence de notre schéma d'approximation. De plus, dans le cas des moments, nous obtenons même une borne de la vitesse de convergence. Soulignons également que nos hypothèses sont raisonnables au vu des applications.

Comme dans la partie précédente, un avantage important de notre méthode réside dans sa flexibilité vis-à-vis de U c'est-à-dire vis-à-vis du temps de sortie. En effet, si on s'intéresse au temps de sortie d'un nouvel ensemble U', on pourra, si U' satisfait les mêmes hypothèses que U, obtenir très rapidement les moments et la distribution du nouveau temps de sortie. En effet, les grilles de quantification, calculées pour le premier temps de sortie, peuvent être réutilisées.

Cette partie est organisé de la façon suivante. Dans le chapitre 4, nous présentons deux approches que nous avons étudiées mais qui ne donnent pas des résultats assez satisfaisants. D'une part, nous présenterons l'approche de [Helmes et al., 2001] et

verrons en quoi elle s'adapte mal au cas des PMDM (section 4.1). D'autre part, nous étendrons les résultats de la partie précédente au calcul de l'espérance d'un temps de sortie (section 4.2).Dans le chapitre 5, qui constitue le coeur de notre contribution dans cette partie, nous présentons les schémas d'approximation des moments et de la distribution du temps de sortie ainsi que les preuves de convergence. Enfin, le chapitre 6 regroupe deux exemples pour lesquels nous détaillerons les résultats numériques obtenus.

Chapitre 4

Approximation de l'espérance d'un temps de sortie : premières approches

Avant de présenter la méthode numérique que nous avons retenue pour le calcul des moments et de la distribution du temps de sortie d'un PMDM. Nous décrivons dans ce chapitre deux approches possibles pour le calcul de l'espérance d'un temps de sortie. La première méthode est assez générale pour les processus markoviens mais nous verrons qu'elle s'adapte mal au cas particulier des PMDM. Dans la deuxième section, nous verrons dans quelle mesure les résultats de la partie précédente permettent d'envisager le calcul de l'espérance d'un temps de sortie.

4.1 Programmation linéaire pour le calcul des moments

Il existe une méthode numérique efficace et assez générale, développée notamment dans [Helmes et al., 2001] et [Lasserre and Prieto-Rumeau, 2004], pour le calcul des moments du temps de sortie d'un processus markovien. Il est donc naturel de chercher à utiliser cette méthode dans le cadre des PMDM. Dans la section suivante, nous allons décrire cette méthode, qui s'appuie sur une hypothèse concernant le générateur infinitésimal du processus, puis nous verrons qu'elle n'est pas envisageable dans le cas des PMDM, l'hypothèse en question n'étant que rarement satisfaite.

4.1.1 L'approche de Helmes, Röhl et Stockbridge

Dans cette section, nous présentons l'approche adoptée par Helmes, Röhl et Stockbridge dans [Helmes et al., 2001] pour calculer numériquement l'espérance d'un temps de sortie pour un processus markovien.

Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus markovien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont le générateur est noté $\mathfrak{A}$ et a pour domaine $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Les auteurs considèrent un ouvert borné $U \in \mathbb{R}^d$

et cherchent à encadrer numériquement l'espérance de

$$\tau = \inf\{s \geq 0 \text{ tel que } Y_s \notin U\}. \tag{4.1.1}$$

Le point de départ de la discussion se situe alors dans la remarque que pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, le processus

$$f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t \mathfrak{A}f(Y_s)ds$$

est une martingale. Ainsi, pour tout $t > 0$, on obtient

$$\mathbf{E}\left[f(Y_{t\wedge\tau}) - f(Y_0) - \int_0^{t\wedge\tau} \mathfrak{A}f(Y_s)ds\right] = 0.$$

En supposant alors que τ est fini presque surement, on peut passer à la limite lorsque t tend vers l'infini pour obtenir

$$\mathbf{E}[f(Y_\tau)] - \mathbf{E}[f(Y_0)] - \mathbf{E}\left[\int_0^\tau \mathfrak{A}f(Y_s)ds\right] = 0. \tag{4.1.2}$$

Les auteurs définissent alors deux mesures μ_0 et μ_1 de la façon suivante :

- la mesure μ_0 est une mesure sur $\mathbb{R}^d$ (en fait sur U) appelée mesure d'occupation moyenne jusqu'à τ définie pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu_0(B) = \mathbf{E}\left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{\{Y_s \in B\}}ds\right],$$

- la mesure μ_1 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ (en fait sur ∂U) appelée loi de la position de sortie de U définie pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu_1(B) = \mathbf{P}(Y_\tau \in B).$$

Si on suppose que le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ part d'un point $y_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, l'équation (4.1.2) devient

$$\int_U \mathfrak{A}f(y)\mu_0(dy) + f(y_0) - \int_{\partial U} f(y)\mu_1(dy) = 0. \tag{4.1.3}$$

C'est cette équation, nommée *basic adjoint equation*, qui permettra aux auteurs de mettre en place leur méthode numérique.

Par ailleurs, il est montré dans [Kurtz and Stockbridge, 1998] que l'équation (4.1.3) caractérise la mesure d'occupation μ_0 et la loi de la position de sortie μ_1 d'un processus ayant pour générateur $\mathfrak{A}$.

Les auteurs introduisent alors l'hypothèse importante de leur discussion.

Hypothèse III.1 *les polynômes font partie de $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ et si f est un polynôme alors $\mathfrak{A}f$ l'est également.*

En effet, cette hypothèse va permettre de traduire l'équation (4.1.3) en un système d'équations linéaires sur les moments des mesures μ_0 et μ_1 qui seront notés $(m_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$:

$$m_j = \int_{\mathbb{R}^d} y^j \mu_0(dy), \qquad b_j = \int_{\mathbb{R}^d} y^j \mu_1(dy).$$

Plus précisément, pour un multi-indice $k \in \mathbb{N}^d$, on pose $f_k(y) = y^k = y_1^{k_1} \dots y_d^{k_d}$. D'après l'hypothèse III.1, on a alors $\mathfrak{A}f_k(y) = \sum_j c_j(k) y^j$ pour une certaine suite de réels $(c_j(k))_{j\in\mathbb{N}^d}$. On applique l'équation (4.1.3) en f_k pour obtenir des équations linéaires reliant les moments. Pour tout $k \in \mathbb{N}^d$, on obtient

$$\sum_j c_j(k) m_j + y_0^k - b_k = 0. \tag{4.1.4}$$

Il est alors important de remarquer que

$$\mathbf{E}[\tau] = \int_0^\tau ds = \mu_0(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_0(dy) = m_0.$$

Le calcul de l'espérance de τ a donc été ramené au calcul de m_0 sachant que les moments $(m_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$ des mesures μ_0 et μ_1 vérifient les équations de la forme (4.1.4). Cependant, ces équations ne sont pas suffisantes car elles ne garantissent pas que les solutions seront des suites de moments. Il est donc nécessaire d'y adjoindre des conditions afin assurer que les suites $(m_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}^d}$ soient bien des moments de mesures. Deux types de conditions ont été considérées dans la littérature : des contraintes linéaires (LP) et des contraintes semi-définies (SDP).

Contraintes LP Dans [Helmes et al., 2001], les auteurs choisissent d'utiliser les conditions de moments de Hausdorff qui sont des conditions nécessaires et suffisantes (voir [Feller, 1966, page 222]). Ces équations étant linéaires, elles permettent d'envisager une résolution par programmation linéaire pour laquelle il existe de nombreux solveurs efficaces.

Contraintes SDP Dans [Lasserre and Prieto-Rumeau, 2004], les conditions de moments de Hausdorff sont remplacées par des contraintes de semi-définie positivité de certaines matrices de moments. Ces dernières conditions semblent fournir de meilleurs résultats numériques (on pourra également consulter [Lasserre, 2003] pour une comparaison des performances des approches LP et SDP).

Cette méthode peut également être adaptée pour approcher les moments d'ordre supérieur de τ. Il s'agit donc d'une méthode efficace permettant d'approcher n'importe quel moment du temps de sortie τ dès lors que l'hypothèse III.1 est satisfaite. Nous l'avons vu, cette hypothèse est en effet cruciale dans la discussion précédente. Elle est satisfaite pour une large classe de processus tels que les processus de diffusions (le générateur étant alors essentiellement un opérateur différentiel).

Nous allons voir dans la section suivante que l'hypothèse III.1 n'est en général pas satisfaite pour les PMDM, cette approche ne pourra donc pas être envisagée dans notre cas et il sera nécessaire de développer des techniques originales adaptées aux PMDM.

4.1.2 Le générateur infinitésimal des PMDM

Dans cette section, nous allons rappeler le résultat de [Davis, 1993, section 26] qui décrit le générateur infinitésimal d'un PMDM. Nous montrons ensuite sur des exemples que l'hypothèse III.1 n'est pas valable en général pour les PMDM.

Un important résultat de la théorie des PMDM tient dans le fait qu'une description précise du générateur infinitésimal et de son domaine est disponible [Davis, 1993, théorème 26.14]. Le domaine $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ contient les fonctions f mesurables sur $\overline{E}$ qui vérifient certaines conditions techniques de régularité et d'intégrabilité ainsi que la condition de bord : pour tout $x \in \partial E$,

$$f(x) = \int_E f(y) Q(x, dy). \tag{4.1.5}$$

Théorème 4.1.1 *Le générateur infinitésimal $\mathfrak{A}$ d'un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ de caractéristiques (Φ, λ, Q) est donné, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, par*

$$\mathfrak{A}f(x) = \mathfrak{X}f(x) + \lambda(x) \int_E \Big(f(y) - f(x)\Big) Q(x, dy). \tag{4.1.6}$$

où $\mathfrak{X}$ est le champ de vecteur associé au flot Φ et défini en (1.1.2).

Le générateur des PMDM étant décrit avec précision, nous pouvons nous intéresser à l'hypothèse III.1. Notons qu'elle est satisfaite pour le processus de Poisson avec flot présenté dans la section 1.2.1. Dans ce cas, on a en effet d'après le théorème 4.1.1

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{df}{dx}(x) + \lambda\Big(f(x+1) - f(x)\Big).$$

Cette situation est cependant assez marginale parmi les PMDM et nous donnons maintenant des arguments afin de convaincre le lecteur que l'hypothèse III.1 n'est en général pas satisfaite pour les PMDM.

- La condition de bord (4.1.5) est très contraignante et rarement vérifiée par les polynômes. Dans l'exemple académique de la section 1.2.2, on a $\partial E = \{1\}$ mais pour $k \geq 1$
$$\int_E y^k Q(x, dy) = \frac{1}{|E_0|} \sum_{y \in E_0} y^k < 1$$
et la condition de bord n'est donc pas satisfaite. Ceci est assez général dès que le noyau de transition est dégénéré comme dans les modèles des sections 1.2.3 et 1.2.4.

- Dans l'équation (4.1.6), considérons le terme $\mathfrak{X}f(x)$ (notons que $\mathfrak{A}$ se réduit à $\mathfrak{X}$ lorsque le taux de saut est nul). Rappelons que pour f infiniment différentiable, on a
$$\mathfrak{X}f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) b_i(x).$$
Rappelons que dans l'équation ci-dessus, les fonctions b_i définissent l'équation différentielle ordinaire d'où est issu le flot (voir l'équation 1.1.1). Pour que $\mathfrak{X}$

vérifie l'hypothèse III.1, il est nécessaire que pour tout i, la i-ième coordonnée b_i de b soit un polynôme (en effet, choisir $f(x) = x_i$ dans la définition de $\mathfrak{X}$ ci-dessus). Cette condition est très restrictive et n'est par exemple pas satisfaite dans le cas du modèle de corrosion de la section 1.2.5.

- Au vu du terme intégral $\lambda(x) \int_E \Big(f(y) - f(x)\Big) Q(x, dy)$ de l'équation (4.1.6), il semble peu probable que l'hypothèse III.1 soit vérifiée si λ n'est pas un polynôme. Cette condition serait très contraignante car elle limiterait fortement le choix concernant les lois des temps de saut (même si, dans un souci de simplicité, nous avons souvent choisi de prendre λ constant dans nos applications numériques).

- Enfin, supposons que les conditions précédentes soient tout de même remplies : la condition au bord est satisfaite et les fonctions b et λ sont des polynômes, alors le terme $\int_E f(y) Q(x, dy)$ peut encore s'opposer à ce que l'hypothèse III.1 soit vérifiée. Considérons en effet l'exemple suivant. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in E$ tels que pour tout $x \in E$, on a $Q(x, \{\alpha, \beta\}) = 1$, on a alors

$$\int_E y^k Q(x, dy) = a^k Q(x, \{\alpha\}) + b^k \Big(1 - Q(x, \{\alpha\})\Big)$$

  qui ne sera un polynôme que si $Q(x, \{\alpha\})$ l'est.

Finalement, nous avons vu que le générateur infinitésimal d'un PMDM ne pourra satisfaire l'hypothèse III.1 que dans certains cas très particuliers. L'approche développée par Helmes, Röhl et Stockbridge ainsi que par Lasserre et Prieto-Rumeau ne peut donc pas constituer une méthode générique pour le calcul des moments dans le cas des PMDM.

4.2 Une première méthode numérique par quantification

Dans cette section, nous allons voir comment les résultats de la partie précédente peuvent être utilisés pour calculer l'espérance du temps de sortie d'un PMDM.

Soit U un borélien de E. On suppose que le processus part d'un point $x \in U$ fixé c'est-à-dire $Z_0 = x$ p.s. et on considère le temps de sortie τ de U :

$$\tau = \inf \{ s \geq 0 \text{ tel que } X_s \notin U \} .$$

Puisque nous nous intéressons au calcul numérique, il semble naturel de supposer que τ est fini $\mathbf{P}_x$-p.s. On va chercher à exprimer τ comme une fonctionnelle du processus afin d'appliquer les résultats de la partie précédente pour calculer l'espérance du temps de sortie. On suppose donc que les hypothèses de la partie précédente, II.1, II.2 et II.3, sont satisfaites par les caractéristiques du processus. On leur adjoint l'hypothèse suivante, qui sera cruciale pour exprimer τ comme une fonctionnelle du processus.

Hypothèse III.2 *Le processus ne peut retourner dans U une fois qu'il en est sorti i.e.* $\forall z \in U^c, \mathbf{P}_z(\exists t \geq 0, X_t \in U) = 0$.

Pour s'assurer que l'hypothèse III.2 est vérifiée, il peut paraître naturel d'introduire le processus *tué au temps* τ, noté $(X_t^\tau)_{t\in\mathbb{R}^+}$, et défini par :

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_t & \text{pour } t < \tau, \\ \Delta & \text{pour } t \geq \tau. \end{cases}$$

où Δ représente un état cimetière. Ce nouveau processus est le même que le processus original jusqu'à l'instant τ. Ensuite, lorsqu'il cherche à sortir de U, on force un saut qui l'envoie dans un état cimetière dans lequel il demeure indéfiniment. Le processus $(X_t^\tau)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifie donc trivialement l'hypothèse III.2. Cependant, le fait de tuer le processus modifie les caractéristiques du processus en introduisant une discontinuité. De manière générale, les caractéristiques du processus tué ne vérifient plus les hypothèses de continuité Lipschitz qui leur ont été imposées notamment l'hypothèse II.3. L'introduction de l'hypothèse III.2 constitue donc une véritable restriction qui ne peut, en général, être levée par aucun artifice.

Notre méthode a alors pour point de départ la remarque suivante qui est une conséquence de l'hypothèse III.2 :

$$\tau = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_s\in U\}} ds.$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\tau \wedge T_N$ peut se mettre sous la forme d'une fonctionnelle qui entre dans le cadre de la partie précédente, on a

$$\mathbf{E}_x[\tau \wedge T_N] = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{T_N} \mathbb{1}_{\{X_s\in U\}} ds\right] = J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x).$$

De plus, lorsque N tend vers l'infini, on a $T_N \to +\infty$ d'après l'hypothèse I.1, donc par convergence monotone

$$\lim_{N\to+\infty} J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x) = \mathbf{E}_x[\tau].$$

Finalement, on peut approcher $\mathbf{E}_x[\tau]$ par $J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$ pour un N suffisamment grand que nous nommons *l'horizon de calcul*.

La quantité $J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$ ne peut être obtenue directement par le schéma numérique de la partie précédente car la fonction de coût instantané $\mathbb{1}_U$ est discontinue et ne vérifie donc pas la condition de continuité Lipschitz de l'hypothèse II.4. Nous verrons, dans un premier temps, qu'on peut malgré tout obtenir un encadrement de cette quantité. Puis, nous verrons que sous certaines conditions, $J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$ peut être obtenu directement en passant outre l'hypothèse de continuité Lipschitz. Cependant, avant d'aller plus loin, nous discutons dans la section suivante du choix adéquat de l'horizon de calcul N. En effet, comme dans la partie précédente (section 3.3.4), le premier problème rencontré pour formaliser mathématiquement la quantité que nous voulons calculer est celui de l'horizon de calcul en terme de nombre de sauts du processus.

4.2.1 L'horizon de calcul

Tout comme Davis [Davis, 1993, section 33], nous approchons τ par $\tau \wedge T_N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ puisque $\tau \wedge T_N \to \tau$ lorsque $N \to +\infty$ d'après l'hypothèse I.1. Il est donc nécessaire de choisir N suffisamment grand pour que $\mathbf{P}_\mu(T_N < \tau)$ soit faible. En effet, dans ce cas, l'évolution du processus au-delà de T_N n'aura qu'un faible impact sur la loi du temps de sortie.

Il est difficile d'estimer cette probabilité en toute généralité car le lien entre τ et les temps de sauts dépend fortement du problème considéré. Ainsi, on estimera souvent N par des simulations préliminaires. En effet, on pourra calculer $\mathbf{P}_\mu(T_N < \tau)$ pour N fixé par la méthode de Monte-Carlo puis augmenter la valeur de N jusqu'à ce que la probabilité devienne suffisamment faible.

Cependant, nous présentons ici une autre méthode pour borner cette probabilité qui pourra être utile dans les applications. Tout d'abord, remarquons que pour tout $K > 0$, on a

$$\{T_N < \tau\} \subset \{T_N < K\} \cup \{\tau > K\}.$$

On en déduit

$$\mathbf{P}_x(T_N < \tau) \leq \mathbf{P}_x(T_N < K) + \mathbf{P}_x(\tau > K).$$

Cette majoration sera particulièrement utile lorsque τ sera borné (comme dans l'exemple du processus de Poisson présenté à la section 1.2.1 ou encore dans l'exemple suivant) car il existe alors K tel que $\mathbf{P}_x(\tau > K) = 0$. Dans le cas contraire, lorsque τ ne sera pas borné, il sera parfois possible de trouver K tel que $\mathbf{P}_x(\tau > K)$ soit faible. Dans cette optique, l'exemple suivant, bien que simple, est assez typique.

Exemple : un modèle de propagation de fissure

Nous adaptons ici un exemple étudié dans [Chiquet and Limnios, 2008], qui modélise une propagation de fissure. Le processus réel $(Y_t)_{t\geq 0}$ représente la dimension de la fissure, il vérifie :

$$\begin{cases} Y_0 > 0, \\ \dot{Y}_t = A_t Y_t \text{ pour tout } t \geq 0. \end{cases}$$

où A_t est un processus markoviens de saut dont l'espace d'état est $\{\alpha, \beta\}$ avec $0 < \alpha \leq \beta$. On s'intéresse à l'instant τ où la fissure atteint une taille critique y_c. Le processus $(X_t)_{t\geq 0} = (A_t, Y_t)_{t\geq 0}$ est un PMDM, A_t représentant le mode d'évolution à l'instant t. On peut alors borner le temps de sortie en considérant le flot le plus lent, ce qui correspond dans notre cas au mode α : on a clairement pour tout $t \geq 0$, $Y_t \geq Y_0 e^{\alpha t}$ et ainsi $\mathbf{P}_\mu(\tau > \frac{1}{\alpha}\ln(\frac{y_c}{Y_0})) = 0$.

Par ailleurs, concernant le terme $\mathbf{P}_x(T_N < K)$, on renvoie à la section 3.3.4 de la partie précédente où une borne théorique a déjà été donnée sous certaines conditions. Finalement, lorsque τ est borné avec une grande probabilité et lorsque les hypothèses de la section 3.3.4 sont satisfaites, on peut choisir N *a priori* tel que $\mathbf{P}_\mu(T_N < \tau)$ soit faible.

4.2.2 Encadrement de l'espérance du temps de sortie

Nous avons ramené le calcul de l'espérance du temps τ de sortie de U à celui de la quantité $J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$ étudiée dans la partie précédente. Cependant, afin d'appliquer le schéma numérique de la partie précédente, nous devons nous débarrasser de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_U$. Pour ce faire, comme dans la section 3.3.2, nous allons l'encadrer entre deux fonctions lipschitziennes indexées par un paramètre $D \in \mathbb{R}^{*+}$. Le prix à payer pour avoir un encadrement fin sera de grandes constantes de lipschitz et donc des bornes importantes pour la majoration de l'erreur du théorème 2.4.2. Nous allons montrer que cet effet peut néanmoins être compensé en prenant suffisamment de points dans la grille de quantification ce qui nous permettra malgré tout d'obtenir un encadrement précis de $J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$. Définissons donc pour $D \in \mathbb{R}^{*+}$, les approximations lipschitziennes $\underline{l}_D$ et $\bar{l}_D$ de $\mathbb{1}_U$ de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$\begin{cases} \underline{l}_D(x) = 1 \wedge (Dd(x, U^c)), \\ \bar{l}_D(x) = 0 \vee (1 - Dd(x, U)). \end{cases}$$

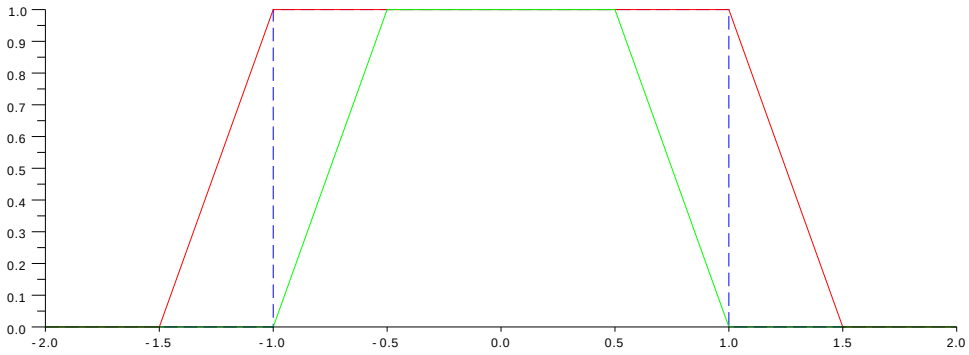

FIGURE 4.1 – La fonction indicatrice $\mathbb{1}_U$ et ses approximations lipschitziennes avec $D = 2$ et $U =]-1; 1[$.

On a alors

$$\underline{l}_D \leq \mathbb{1}_U \leq \bar{l}_D.$$

On en déduit que pour tout $D \in \mathbb{R}^{*+}$

$$J_N(\underline{l}_D, 0)(x) \leq J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x) \leq J_N(\bar{l}_D, 0)(x).$$

Nous allons voir maintenant que les fonctions $\underline{l}_D$ et $\bar{l}_D$ sont lipschitziennes ce qui nous permettra d'appliquer notre méthode numérique pour évaluer les bornes de l'encadrement ci-dessus. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.2.1 *Les fonctions $\underline{l}_D$ et $\bar{l}_D$ sont lipschitziennes et on a*

$$\begin{cases} [\underline{l}_D] = [\bar{l}_D] = D, \\ C_{\underline{l}_D} = C_{\bar{l}_D} = 1. \end{cases}$$

Démonstration Il est clair que $C_{\underline{l}_D} = C_{\bar{l}_D} = 1$, montrons que $[\underline{l}_D] = D$, la démonstration étant similaire pour $\bar{l}_D$.

Fixons $x, x' \in E$, écartons le cas $\underline{l}_D(x) = \underline{l}_D(x') = 1$ et supposons par symétrie que $\underline{l}_D(x) \leq \underline{l}_D(x')$. On a donc $\underline{l}_D(x) = D \times d(x, U^c)$. Fixons $x'' \in U^c$,

$$\begin{aligned}\underline{l}_D(x') &\leq D \times d(x', U^c) \\ &\leq D \times |x' - x''| \\ &\leq D \times |x' - x| + D \times |x - x''|.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en passant à la borne inférieure lorsque $x'' \in U^c$. □

Les fonctions $\underline{l}_D$ et $\bar{l}_D$ sont lipschitziennes. Ainsi, comme nous l'avons remarqué à la section 2.1, sous hypothèses de continuité Lipschitz du flot, elles sont également lipschitzienne le long du flot et on peut appliquer le schéma numérique de la partie précédente avec ces fonctions de coût instantané. Conformément aux conventions de la partie précédente, notons $\underline{V}_{0,D}$ (respectivement $\overline{V}_{0,D}$) l'approximation de $J_N(\underline{l}_D, 0)(x)$ (respectivement $J_N(\bar{l}_D, 0)(x)$) et $\varepsilon_N(\underline{l}_D, 0, X)$ (respectivement $\varepsilon_N(\bar{l}_D, 0, X)$) la borne de l'erreur fournie par le théorème 2.4.2. Remarquons en effet que ces bornes ne dépendent pas du paramètre A car la fonction de coût des sauts à la frontière c est nulle. On a alors l'encadrement suivant pour l'espérance $\mathbf{E}_x[\tau \wedge T_N] = J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x)$ dont la démonstration découle directement de la discussion précédente.

Théorème 4.2.2 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3, III.2 et si le flot Φ est lipschitzien, on a l'encadrement suivant :*

$$\underline{V}_{0,D} - \varepsilon_N(\underline{l}_D, 0, X) \leq \mathbf{E}_x[\tau \wedge T_N] \leq \overline{V}_{0,D} + \varepsilon_N(\bar{l}_D, 0, X).$$

Pour régler le paramètre D de façon optimale, on raisonne comme pour le paramètre B à la section 3.3.3. Les fonctions $\underline{l}_D$ et $\bar{l}_D$ seront d'autant plus proches de la fonction indicatrice qu'elles encadrent que D sera grand. Cependant, les erreurs $\varepsilon_N(\underline{l}_D, 0, X)$ et $\varepsilon_N(\bar{l}_D, 0, X)$ augmentent linéairement avec D (on peut le vérifier aisément à partir de leurs expressions données dans le théorème 2.4.2 et les propositions 2.3.2 et 2.3.9). Ainsi, pour contrôler ces erreurs, il faut que le nombre de points dans la grille de quantification soit tel que l'erreur de quantification soit au plus de l'ordre de $\frac{1}{D}$.

4.2.3 Evaluation directe de l'espérance du temps de sortie

Dans cette section, nous allons montrer que sous certaines conditions, on peut appliquer directement le schéma numérique de la partie précédente aux fonctions de coût $(l, c) = (\mathbb{1}_U, 0)$ pour approcher l'espérance du temps de sortie. L'algorithme sera convergent malgré la discontinuité de la fonction indicatrice.

A l'instar de t^*, on définit u^* le temps de sortie déterministe de U.

Définition 4.2.3 *Pour tout $x \in U$, on introduit $u^*(x)$ comme étant le temps pour que le flot partant de x quitte l'ensemble U :*

$$u^*(x) = \inf \{s \geq 0 \text{ tel que } \Phi(x,s) \notin U\}.$$

Cette définition est assez naturelle. En effet, nous ne sommes intéressés que par la trajectoire du processus à l'intérieur de U qu'on peut d'une certaine manière considérer comme notre nouvelle espace d'état [1]. La fonction u^* joue ainsi le rôle de t^* dans ce problème.

Le nouvelle condition dont nous aurons besoin dans cette section sera la continuité Lipschitz de u^*. En effet, en reprenant les notations de la partie précédente, si on cherche à appliquer notre méthode numérique avec les fonctions de coût $(l,c) = (\mathbb{1}_U, 0)$, on a pour tous $x \in E$ et $t \in [0; t^*(x)]$,

$$F^A(x,t) = L(x,t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\Phi(x,s)\in U\}} ds = u^*(x) \wedge t.$$

Pour que le schéma numérique de la section précédente reste convergent en prenant $(l,c) = (\mathbb{1}_U, 0)$ comme fonctions de coût, il faut vérifier que les fonctions $F^A = L$ et v_n restent lipschitziennes. Nous allons montrer que c'est le cas si u^* est elle-même lipschitzienne. Concernant la fonction L, on a le lemme suivant.

Lemme 4.2.4 *Si u^* est lipschitzienne alors L l'est également par rapport à chacune de ses variables avec*

$$[L]_1 = [u^*],$$
$$[L]_2 = 1.$$

Démonstration Soient $x, y \in E$ et $s, t \in [0; t^*(x) \wedge t^*(y)]$, on a alors

$$|L(x,t) - L(y,t)| = |u^*(x) \wedge t - u^*(y) \wedge t| \leq |u^*(x) - u^*(y)| \leq [u^*]|x - y|.$$

Par ailleurs,

$$|L(x,t) - L(x,s)| = |u^*(x) \wedge t - u^*(x) \wedge s| \leq |t - s|$$

d'où le résultat. □

On se tourne maintenant vers la continuité Lipschitz des fonctions v_n. Nous avons déjà remarqué dans la section 3.3.1 qu'on peut se passer de la continuité Lipschitz de la fonction de coût instantané l si on est capable de borner des termes de la forme (3.3.1) que nous rappelons ici

$$\int_s^{s'} \Big| l \circ \Phi\Big(x,u\Big) - l \circ \Phi\Big(x',u\Big) \Big| du,$$

1. Ceci sera particulièrement vrai dans le chapitre suivant car nous pourrons considérer le processus tué au temps τ.

avec $l = \mathbb{1}_U$ et $s, s' \in [0; t^*(x) \wedge t^*(x')]$. Supposons par symétrie que $u^*(x) \leq u^*(x')$, remarquons que la différence de fonctions indicatrices

$$|\mathbb{1}_{\{\Phi(x,u)\in U\}} - \mathbb{1}_{\{\Phi(x',u)\in U\}}|$$

est non nulle si et seulement si $\mathbb{1}_{\{\Phi(x,u)\in U\}} = 0$ et $\mathbb{1}_{\{\Phi(x',u)\in U\}} = 1$ c'est-à-dire si $u^*(x) \leq u < u^*(x')$ [2]. On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_s^{s'} \Big|l \circ \Phi\Big(x, u\Big) - l \circ \Phi\Big(x', u\Big)\Big| du &= \int_s^{s'} |\mathbb{1}_{\{\Phi(x,u)\in U\}} - \mathbb{1}_{\{\Phi(x',u)\in U\}}| du \\ &= \int_s^{s'} \mathbb{1}_{u^*(x)\leq u<u^*(x')} |du \\ &= |u^*(x') \wedge s' - u^*(x) \vee s \\ &\leq |u^*(x') - u^*(x)| \\ &\leq [u^*]|x' - x|.\end{aligned}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse de continuité Lipschitz de u^*, le théorème 2.4.2 reste vrai si on choisit $l = \mathbb{1}_U$ comme fonction de coût instantané. On modifie légèrement les constantes dans l'expression de l'erreur $\varepsilon(\mathbb{1}_U, 0, X)$. Les constantes $[F^A]_1$ et $[F^A]_2$ deviennent respectivement les constantes $[L]_1$ et $[L]_2$ du lemme 4.2.4 et dans les constantes de Lipschitz de v_n, les termes $C_{t^*}[l]_1$ deviennent $[u^*]$. En d'autres termes, on a montré le résultat suivant.

Théorème 4.2.5 *Sous les hypothèses II.1, II.2, II.3, III.2, et si u^* est lipschitzienne alors, on peut appliquer le schéma numérique de la section 2.4.2 avec les fonctions de coût $(l, c) = (\mathbb{1}_U, 0)$ et l'erreur d'approximation vérifie :*

$$|J_N(\mathbb{1}_U, 0)(x) - \widehat{V}_0| \leq \varepsilon_N(X),$$

où

$$\varepsilon_N(X) = \sum_{k=0}^{N-1} 2[v_{k+1}]\|Z_{k+1} - \widehat{Z}_{k+1}\|_p + \Big(2[v_k] + [u^*]\Big)\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|S_{k+1} - \widehat{S}_{k+1}\|_p,$$

avec

$$[v_n] \leq K'(v_{n+1}),$$

et $K'(w) = E_1''' + E_3[w]_1 + E_4 C_w + [Q][w]_*$ où la constante E_1''' ne dépend que des caractéristiques du PMDM :

$$\begin{aligned}E_1''' &= 2[u^*] + [t^*] + 2C_{t^*}^2[\lambda]_1, \\ C_{v_n} &\leq (N-n)C_{t^*}, \\ [v_n]_1 &\leq e^{C_{t^*}C_\lambda}\left(K'(v_{n+1}) + (N-n)C_{t^*}[\lambda]_1 C_{t^*}\right) + [u^*], \\ [v_n]_2 &\leq e^{C_{t^*}C_\lambda}\Big(C_{t^*}C_\lambda + 2 + (2N-2n-1)C_\lambda C_{t^*}\Big) + 1, \\ [v_n]_* &\leq [v_n]_1 + [t^*][v_n]_2,\end{aligned}$$

et enfin E_3 et E_4 restent inchangés et sont données dans la proposition 2.3.7.

2. En réalité, les inégalités sont ici larges ou strictes selon que $\Phi(x, u^*(x))$ et $\Phi(x', u^*(x'))$ appartiennent ou non à U mais cela n'a pas d'importance dans la suite. On s'est placé ici dans le cas où U est un ouvert.

En conclusion, sous l'hypothèse supplémentaire III.2, on peut utiliser le schéma numérique de la partie précédente pour calculer l'espérance du temps de sortie d'un ensemble $U \subset E$. D'une part, nous pouvons obtenir un encadrement de cette espérance. D'autre part, sous une hypothèse supplémentaire de continuité Lipschitz du temps de sortie déterministe de U, on peut également en calculer une évaluation directe. L'avantage de cette méthode est qu'elle s'inscrit directement dans le cadre de la précédente. Si on a mis en œuvre la méthode de calcul des espérances de fonctionnelles, on est en mesure, sous l'hypothèse supplémentaire III.2, d'obtenir directement, comme cas particulier, l'espérance d'un temps de sortie.

Dans le chapitre suivant, nous présentons une méthode plus ambitieuse car elle permettra d'approcher non seulement l'espérance du temps de sortie mais également n'importe quel autre moment ainsi que la fonction de survie. La méthode que nous venons de décrire n'est cependant pas à bannir car les hypothèses sous-jacentes seront différentes.

Chapitre 5

Approximation des moments et de la distribution d'un temps de sortie

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode numérique permettant d'approcher les moments et la distribution d'un temps de sortie d'un PMDM. Après avoir défini le problème et introduit nos hypothèses, nous présenterons des formulations récursives des moments et de la fonction de survie qui nous permettront de mettre en place notre schéma d'approximation numérique. Celui-ci est à nouveau basé sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM. Nous prouvons sa convergence et obtenons une vitesse dans le cas des moments.

5.1 Présentation du problème et hypothèses

Nous commençons par exposer plus précisément le problème du temps de sortie en définissant notamment l'ensemble U duquel on veut calculer le temps de sortie. Nous énoncerons également les hypothèses spécifiques à ce chapitre.

Pour tout $m \in M$, soit U_m un borélien de E_m et soit

$$U = \{(m, \xi), m \in M, \xi \in U_m\}.$$

On s'intéresse au temps de sortie de U noté τ :

$$\tau = \inf\{s \geq 0 \text{ tel que } X_s \notin U\}. \tag{5.1.1}$$

Notons μ la distribution de l'état initial $Z_0 = X_0$ du processus. L'hypothèse suivante est naturelle pour que le problème soit bien posé.

Hypothèse III.3 *Le processus part d'un point de U et finit par en sortir presque sûrement i.e. le support de μ est inclus dans U et $\mathbf{P}_\mu(\tau < +\infty) = 1$.*

Comme dans le chapitre précédent, le temps u^* de sortie déterministe de U, défini en 4.2.3, jouera un rôle de premier plan dans notre discussion. En effet, dans

le problème du temps de sortie, il remplacera d'une certaine manière le temps t^* de sortie déterministe de E. Nous formulons à son sujet l'hypothèse suivante.

Hypothèse III.4 *La fonction u^* est*

a. *lipschitzienne : il existe $[u^*] \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous x, $y \in E$:*

$$\Big|u^*(x) - u^*(y)\Big| \leq [u^*]\Big|x - y\Big|,$$

b. *bornée : il existe $C_{u^*} \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E$:*

$$0 \leq u^*(x) \leq C_{u^*}.$$

Sauf lorsque le flot a une expression assez simple (comme dans l'exemple du processus de Poisson), il n'est pas possible d'obtenir une formule explicite de u^*. Il ne sera en général connu qu'au travers d'une équation de la forme $\Phi\Big(x, u^*(x)\Big) \in \partial U$. C'est par exemple le cas dans le modèle de corrosion que nous étudierons dans la section 6.2. Dans cet exemple, nous verrons cependant qu'une telle équation suffit à établir sa continuité Lipschitz.

On formule par ailleurs deux hypothèses sur l'ensemble U.

Hypothèse III.5 *Pour tout $m \in M$, l'ensemble U_m est convexe.*

Cette hypothèse permet d'exploiter une propriété de l'algorithme de quantification (voir la proposition 5.3.1).

Hypothèse III.6 *Pour $\alpha > 0$, soit $U^\alpha = \{x \in E$ tel que $d(x, \partial U) \leq \alpha\}$. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ tel que pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, $\mathbf{P}_\mu(Z_k \in U^\alpha) \leq C\alpha^\beta$.*

Cette hypothèse signifie qu'il est peu probable que le processus saute près de la frontière de U. Nous verrons dans le chapitre suivant que cette condition est vérifiée pour le processus de Poisson avec flot (section 1.2.1) ainsi que dans le modèle de corrosion (section 1.2.5). De plus, nous verrons, dans ces mêmes exemples comment l'hypothèse peut être obtenue de manière assez générale lorsque Z_k a une densité bornée. Enfin, notons que si Z_k est à valeurs dans un ensemble discret E_0, l'hypothèse est vérifiée dès lors que $\inf_{x \in E_0} d(x, \partial U) > 0$ [1].

Les trois hypothèses ci-dessus, III.4, III.5 et III.6 joueront un rôle crucial dans notre discussion. Nous introduisons maintenant deux hypothèses supplémentaires qui n'impliquent aucune perte de généralité car elles peuvent se déduire des précédentes quitte à effectuer une transformation du processus que nous allons préciser. La première a déjà été utilisée dans le chapitre précédent, il s'agit de l'hypothèse III.2 selon laquelle le processus ne peut retourner en U après l'avoir quitté. La seconde est la suivante.

1. On n'a cependant pas l'équivalence comme le montre l'exemple suivant. On pose $U = \mathbb{R}^+$ et on suppose que Z_k est à valeurs dans $E_0 = \{\frac{1}{2^j}, j \in \mathbb{N}^*\}$ avec pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\big(Z_k = \frac{1}{2^j}\big) = \frac{1}{2^j}$. On vérifie alors que pour tout $\alpha > 0$, $\mathbf{P}\big(Z_k \in U^\alpha\big) \leq 2\alpha$ mais que $\inf_{x \in E_0} d(x, \partial U) = 0$.

Hypothèse III.7 *La fonction t^* est bornée par C_{t^*}.*

Si l'une de ces deux hypothèses n'est pas satisfaite par le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, on introduit le processus *tué au temps* τ, noté $(X_t^\tau)_{t\in\mathbb{R}^+}$, et défini par :

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_t & \text{pour } t < \tau, \\ \Delta & \text{pour } t \geq \tau. \end{cases}$$

où Δ représente un état cimetière. L'espace d'état du processus tué est $E^\tau = U \cup \{\Delta\}$ et l'hypothèse III.2 est vérifiée puisque le processus reste en Δ après avoir quitté U. De plus, $t^{*\tau}$, le temps de sortie déterministe de E^τ pour le processus tué, est égal à u^* qui est borné d'après l'hypothèse III.4.b. Enfin, quitte à tuer le processus, on peut supposer que les hypothèses III.2 et III.4 sont satisfaites. Remarquons que nous avions déjà évoqué le processus tué au temps τ dans le chapitre précédent. Cependant, cette transformation n'était alors pas licite car elle ne conservait pas les hypothèses de continuité Lipschitz formulées sur les caractéristiques du processus alors que dans cette partie, nous n'aurons pas besoin de ces dernières hypothèses. La condition de non retour en U qui apparaissait comme restrictive dans le chapitre précédent ne l'est plus désormais.

Le but de ce chapitre est de développer un schéma d'approximation pour la fonction de survie et les moments du temps de sortie τ. Notre méthode sera très facile à mettre en œuvre car elle nécessitera seulement d'être capable de simuler le processus. Notre approche est basée sur un calcul récursif utilisant la chaîne de Markov $(Z_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, nous étudierons $\tau \wedge T_N$ plutôt que τ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ que nous appellerons l'horizon de calcul. En effet, d'après l'hypothèse I.1, lorsque N tend vers l'infini, on a

$$\tau \wedge T_N \to \tau \qquad \mathbf{P}_\mu \text{ p.s.}$$

On peut ainsi approcher τ par $\tau \wedge T_N$ si N est choisi (suffisamment grand) pour que la probabilité $\mathbf{P}_\mu(\tau > T_N)$ soit assez petite. En effet, dans ce cas, l'évolution du processus au-delà de T_N n'aura qu'un faible impact sur la loi et les moments du temps de sortie. On a déjà discuté du choix d'un tel N dans la section 4.2.1 à laquelle nous renvoyons.

Dans la section suivante, nous présentons les équations récursives qui permettent de calculer la fonction de survie de $\tau \wedge T_N$ puis ses moments.

5.2 Formulation récursive des problèmes

Comme dans la partie précédente, notre stratégie va consister à exprimer les problèmes qui nous intéressent au moyen d'une récurrence dépendant d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM afin de pouvoir mettre en place un schéma d'approximation par quantification. Dans cette section, nous décrivons ces récurrences.

5.2.1 Distribution

Notre premier but est le calcul numérique d'une approximation de la loi du temps de sortie τ. Plus précisément, on cherche à approcher $\mathbf{P}_\mu(\tau > s \big| \tau \leq T_N)$ pour tout $s > 0$. Nous commençons par établir que cette quantité peut s'obtenir par un calcul récursif.

Définition 5.2.1 *Pour tout $s > 0$, on définit les suites $(p_k(s))_{k\geq 0}$, $(q_k)_{k\geq 0}$ et $(r_k(s))_{k\geq 0}$ de la manière suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_k(s) & = \mathbf{P}_\mu(\tau > s \big| \tau \leq T_k), \\ q_k & = \mathbf{P}_\mu(\tau \leq T_k), \\ r_k(s) & = \mathbf{P}_\mu(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}). \end{array} \right.$$

La probabilité conditionnelle $p_k(s)$ n'est pas définie lorsque $q_k = 0$. On choisit d'étendre la définition en posant alors $p_k(s) = 0$.

Notre objectif est d'approcher $p_N(s)$ où N représente l'horizon de calcul. La proposition suivante fournit une relation de récurrence pour la suite $(p_k)_{k\leq N}$. On remarque alors que p_N peut être calculé dès que les suites $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_k)_{k\leq N-1}$ sont connues.

Proposition 5.2.2 *Sous l'hypothèse III.3, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $s > 0$, on a $p_0(s) = 0$ et*

$$p_{k+1}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{p_k(s)q_k + r_k(s)}{q_{k+1}}, & \text{si } q_{k+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Démonstration Tout d'abord, puisque $T_0 = 0$ et puisque le processus part de l'ensemble U d'après l'hypothèse III.3, on a $p_0 = 0$.

Ensuite, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $q_{k+1} \neq 0$ et en remarquant que

$$\{\tau \leq T_{k+1}\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\},$$

on obtient

$$\begin{aligned} p_{k+1}(s) &= \frac{\mathbf{P}_\mu(\{\tau > s\} \cap \{\tau \leq T_{k+1}\})}{\mathbf{P}_\mu(\tau \leq T_{k+1})} \\ &= \frac{\mathbf{P}_\mu(\{\tau > s\} \cap \{\tau \leq T_k\}) + \mathbf{P}_\mu(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})}{q_{k+1}} \\ &= \frac{p_k(s)q_k + r_k(s)}{q_{k+1}}, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Avant d'aborder les calculs numériques, nous présentons le second problème qui nous intéresse.

5.2.2 Moments

Notre deuxième objectif est l'approximation des moments du temps de sortie de U i.e. pour tout $j \in \mathbb{N}$, on s'intéresse à $\mathbf{E}_\mu[\tau^j \big| \tau \leq T_N]$. La méthode que nous introduisons est à nouveau basée sur une construction itérative de la quantité à calculer.

Définition 5.2.3 *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit les suites $(p_{k,j})_{k\geq 0}$ et $(r_{k,j})_{k\geq 0}$ de la manière suivante :*

$$\begin{cases} p_{k,j} &= \mathbf{E}_\mu \left[\tau^j \big| \tau \leq T_k \right], \\ r_{k,j} &= \mathbf{E}_\mu \left[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}} \right]. \end{cases}$$

Notre objectif est d'approcher $p_{N,j}$ où N représente à nouveau l'horizon de calcul. Comme dans la section précédente, la suite $(p_{k,j})_{k\leq N}$ satisfait une relation de récurrence dont les paramètres sont les suites $(q_k)_{k\leq N}$, précédemment introduites, et $(r_{k,j})_{k\leq N-1}$.

Proposition 5.2.4 *Sous l'hypothèse III.3, on a pour tout $k, j \in \mathbb{N}$, $p_{0,j} = 0$ et*

$$p_{k+1,j} = \begin{cases} \frac{p_{k,j} q_k + r_{k,j}}{q_{k+1}}, & \text{si } q_{k+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration La preuve est similaire à la précédente, celle de la proposition 5.2.2. □

Nous sommes à présent en mesure de nous tourner vers les schémas d'approximation numérique.

5.3 Schémas d'approximation

Tout comme dans la partie précédente, nos schémas d'approximation sont basés sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret sous-jacente au PMDM à temps continu. Nous renvoyons à la section 1.4 pour une présentation détaillée de la quantification.

Dans la partie précédente, nous avons quantifié la chaîne de Markov formée des positions après saut Z_k et des durées inter-sauts S_k. Dans cette partie, il sera plus avantageux de considérer la chaîne

$$(\Theta_k)_{k\leq N} = (Z_k, T_k)_{k\leq N},$$

formée des positions après un saut et des temps de sauts. Parce qu'elle remplit le même rôle que dans la partie consacrée aux espérances de fonctionnelles, nous notons à nouveau $(\Theta_k)_{k\leq N}$ la chaîne de Markov à temps discret que nous considérons, ce n'est cependant pas la même que précédemment. L'algorithme de quantification fournit ainsi pour chaque pas de temps $0 \leq k \leq N$ une grille finie $\Gamma_k \subset E \times \mathbb{R}^+$ ainsi que des matrices de transitions $(\widehat{Q}_k)_{0\leq k\leq N-1}$ de Γ_k vers Γ_{k+1} et on pose

$$(\widehat{Z}_k, \widehat{T}_k) = proj_{\Gamma_k}(Z_k, T_k). \tag{5.3.1}$$

Dans ce chapitre, on aura également besoin d'une propriété fine de l'algorithme de quantification, démontrée dans [Bouton and Pagès, 1997].

Proposition 5.3.1 *Le processus quantifié évolue dans l'enveloppe convexe du support de la loi du processus original.*

Ainsi, dans notre cas, d'après l'hypothèse III.5 de convexité de U, si $Z_k \in U$ p.s. pour un certain $k \in \{0, ..., N\}$ alors $\widehat{Z}_k \in U$ p.s. également. Cette propriété sera importante dans la suite, plus précisément dans les démonstrations des propositions 5.3.7 et 5.3.9.

5.3.1 Schéma d'approximation de la distribution et preuve de convergence

On a déjà remarqué dans la proposition 5.2.2 que $p_N(s) = \mathbf{P}_\mu(\tau > s | \tau \leq T_N)$ peut être calculé dès lors que les suites $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_k)_{k\leq N-1}$ sont connues. Par conséquent, on va cherche à exprimer ces suites en fonction de la chaîne de Markov $(Z_k, T_k)_{k\leq N}$ que nous remplacerons ensuite par la chaîne quantifiée $(\widehat{Z}_k, \widehat{T}_k)_{k\leq N}$ afin de définir leurs approximations $(\widehat{q}_k)_{k\leq N}$ et $(\widehat{r}_k)_{k\leq N-1}$.

Tout d'abord, remarquons que $\{T_k < \tau\} = \{Z_k \in U\}$ et $\{\tau \leq T_k\} = \{Z_k \notin U\}$ d'après l'hypothèse III.2 selon laquelle le processus ne peut plus retourner en U lorsqu'il en est sorti.

De plus, sur l'évènement $\{Z_k \in U, Z_{k+1} \notin U\}$, on a $\mathbf{P}_\mu$-p.s.

$$\tau = (T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1},$$

où $u^*(x)$ est le temps de sortie déterministe de U depuis le point x, défini en 4.2.3. En effet, le processus ne peut sortir de U qu'en franchissant la frontière ∂U lors de son mouvement déterministe le long du flot ou bien lors d'un saut.

Des deux observations précédentes, on déduit que :

$$\begin{cases} q_k & = \mathbf{E}_\mu[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)], \\ r_k(s) & = \mathbf{E}_\mu[\mathbb{1}_{\{(T_k+u^*(Z_k))\wedge T_{k+1}>s\}}\mathbb{1}_U(Z_k)\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Les équations ci-dessus seront cruciales dans notre discussion. Dorénavant, nous les utiliserons sans mentionner l'hypothèse III.2.

Avant de présenter le schéma d'approximation proprement dit, nous allons énoncer quelques propriétés de la suite $(q_k)_{k\leq N}$ qui seront importantes dans les preuves de convergence. La suite $(q_k)_k$ est croissante puisque $\{\tau \leq T_k\} \subset \{\tau \leq T_{k+1}\}$ pour tout $k \leq N-1$. De plus, remarquons que $q_0 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$ d'après l'hypothèse III.3. Par conséquent, il existe un indice noté $\tilde{k} \geq 1$ tel que

- pour tout $k < \tilde{k}$, on a $q_k = 0$,
- pour tout $k \geq \tilde{k}$, on a $q_k > 0$.

On note $\tilde{q} = q_{\tilde{k}}$ la première valeur strictement positive de la suite si bien que $q_k \geq \tilde{q}$ pour tout $k \geq \tilde{k}$. En d'autres termes, on a la définition suivante.

Définition 5.3.2 *Soit*

$$\tilde{k} = \inf\{k \geq 0 \text{ tel que } q_k > 0\},$$

$$\tilde{q} = q_{\tilde{k}}$$

i.e. $\tilde{q}$ est la première valeur strictement positive de la suite $(q_k)_{k\in\{0,\dots,N\}}$.

On définit maintenant naturellement les approximations quantifiées des suites précédentes.

Définition 5.3.3 *Pour tout $s > 0$, on définit les suites $(\widehat{q}_k)_{k\in\{0,\dots,N\}}$ et $(\widehat{r}_k)_{k\in\{0,\dots,N-1\}}$ de la façon suivante :*

$$\begin{cases} \widehat{q}_k & = \mathbf{E}_\mu[\mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_k)], \\ \widehat{r}_k(s) & = \mathbf{E}_\mu[\mathbb{1}_{\{(\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k))\wedge \widehat{T}_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)\mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1})]. \end{cases}$$

Il est important de remarquer que $\widehat{q}_k$ et $\widehat{r}_k(s)$ peuvent être facilement calculés à partir des grilles de quantification. En effet, on a :

$$\widehat{q}_k = \sum_{\substack{\theta = (z,t) \in \Gamma_k \\ z \notin U}} \mathbf{P}(\widehat{\Theta}_k = \theta),$$

$$\widehat{r}_k(s) = \sum_{\substack{\theta = (z,t) \in \Gamma_k \\ z \in U}} \sum_{\substack{\theta' = (z',t') \in \Gamma_{k+1} \\ z' \notin U}} \mathbb{1}_{\{(t+u^*(z))\wedge t' > s\}} \mathbf{P}(\widehat{\Theta}_k = \theta)\widehat{Q}_k(\theta;\theta').$$

Rappelons que d'après la proposition 5.2.2, la suite $(p_k)_{k\leq N}$ satisfait une récurrence dépendant de deux paramètres : $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_k)_{k\leq N-1}$, que nous sommes maintenant en mesure d'approcher. Ainsi, en remplaçant ces paramètres par leur approximation quantifiée, on construit par récurrence une nouvelle suite notée $(\widehat{p}_k)_{k\leq N}$. Dans le reste de cette section, on s'attachera à prouver la convergence de $(\widehat{p}_k)_{k\leq N}$ vers $(p_k)_{k\leq N}$. Cette convergence est loin d'être triviale car d'une part, les définitions des suites $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_k)_{k\leq N-1}$ font intervenir des fonctions indicatrices qui ne sont pas lipschitziennes et d'autre part, la formule de récurrence donnant p_{k+1} à partir p_k, q_k, q_{k+1} et r_k n'est pas non plus lipschitzienne.

Définition 5.3.4 *Pour tout $s > 0$, on pose $\widehat{p}_0(s) = 0$ et pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$, on pose*

$$\widehat{p}_{k+1}(s) = \begin{cases} \frac{\widehat{p}_k(s)\widehat{q}_k + \widehat{r}_k(s)}{\widehat{q}_{k+1}}, & \text{si } \widehat{q}_{k+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.3.3}$$

Les deux propositions suivantes seront nécessaires pour prouver la convergence du schéma d'approximation. Elles énoncent respectivement la convergence de $(\widehat{q}_k)_{k\leq N}$ et $(\widehat{r}_k)_{k\leq N-1}$ vers $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_k)_{k\leq N-1}$.

Proposition 5.3.5 *Sous les hypothèses III.6 et III.2, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, $\widehat{q}_k$ converge vers q_k lorsque l'erreur de quantification $\|\Theta_k - \widehat{\Theta}_k\|_p$ tend vers zéro. Plus précisément, l'erreur est bornée par*

$$|q_k - \widehat{q}_k| \leq C^{\frac{p}{p+\beta}} \left(\left(\frac{\beta}{p}\right)^{\frac{p}{p+\beta}} + \left(\frac{p}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{p+\beta}} \right) \|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p^{\frac{p\beta}{p+\beta}},$$

où C et β sont définies dans l'hypothèse III.6.

Démonstration Pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, l'équation (5.3.2) donne

$$|q_k - \widehat{q}_k| = |\mathbf{E}_\mu[\mathbb{1}_U(Z_k) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)]|.$$

La différence de fonctions indicatrices est non nulle si et seulement si Z_k et $\widehat{Z}_k$ sont de part et d'autre de ∂U. Dans ce cas, pour tout $\alpha > 0$, si $\left|Z_k - \widehat{Z}_k\right| \leq \alpha$, alors $d(Z_k, \partial U) \leq \alpha$. Ainsi, on a toujours $\left|Z_k - \widehat{Z}_k\right| > \alpha$ ou $Z_k \in U^\alpha$. L'inégalité de Markov et l'hypothèse III.6 donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mu\left|\mathbb{1}_U(Z_k) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)\right| &\leq \mathbf{P}_\mu\Big(\left|Z_k - \widehat{Z}_k\right| > \alpha\Big) + \mathbf{P}_\mu\Big(Z_k \in U^\alpha\Big) \\
&\leq \frac{\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p^p}{\alpha^p} + C\alpha^\beta.
\end{aligned}$$

Cette borne est minimale pour $\alpha = \left(\frac{p\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p^p}{\beta C}\right)^{\frac{1}{p+\beta}}$ et le résultat suit. □

Proposition 5.3.6 *Sous les hypothèses III.4.a, III.6 et III.2, pour tout $k \in \{0, ..., N-1\}$ et pour presque tout $s > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,*

$$\widehat{r}_k(s) \to r_k(s)$$

lorsque l'erreur de quantification $\|\Theta_l - \widehat{\Theta}_l\|_p$ tend vers zéro pour $l \in \{k, k+1\}$.

Comme dans la proposition 3.3.4 de la partie précédente, on n'a pas la convergence en tout point à cause de la présence de frontières.

Démonstration Soit $k \in \{0, ..., N-1\}$ et $s > 0$, l'équation (5.3.2) donne

$$|r_k(s) - \widehat{r}_k(s)| \leq A + B,$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \left|\mathbf{E}_\mu\left[\left(\mathbb{1}_{\{(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} > s\}} - \mathbb{1}_{\{(\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1} > s\}}\right)\mathbb{1}_U(Z_k)\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})\right]\right|, \\
B &= \left|\mathbf{E}_\mu\left[\mathbb{1}_{\{(\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1} > s\}}\Big(\mathbb{1}_U(Z_k)\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)\mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1})\Big)\right]\right|.
\end{aligned}$$

Dans le terme A, on borne grossièrement $\mathbb{1}_U(Z_k)$ et $\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})$ par 1 et on se concentre sur la différence des fonctions indicatrices. Cette difference est non nulle si et seulement si $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$ et $(\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1}$ sont de part et

d'autre de s si bien qu'ils appartiennent tous les deux à l'intervalle $[s-\eta; s+\eta]$ où $\eta = \left|(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} - (\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1}\right|$, on a alors :

$$\left|\mathbb{1}_{\{(T_k+u^*(Z_k))\wedge T_{k+1}>s\}} - \mathbb{1}_{\{(\widehat{T}_k+u^*(\widehat{Z}_k))\wedge \widehat{T}_{k+1}>s\}}\right| \leq \mathbb{1}_{\{|(T_k+u^*(Z_k))\wedge T_{k+1}-s|\leq\eta\}},$$

et donc

$$A \leq \mathbf{P}_\mu\left(\left|(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} - s\right| \leq \eta\right).$$

Le reste de la preuve consiste à remarquer qu'on a l'alternative suivante : soit η est petit et la probabilité que $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$ soit dans l'intervalle $[s-\eta; s+\eta]$ l'est également, soit η est grand mais ceci se produit avec une faible probabilité lorsque l'erreur de quantification tend vers zéro. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}
A &\leq \mathbf{P}_\mu\left(\left|(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} - s\right| \leq \eta, \eta \leq \alpha\right) + \mathbf{P}_\mu\left(\eta > \alpha\right) \\
&\leq \mathbf{P}_\mu\left(\left|(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} - s\right| \leq \alpha\right) + \mathbf{P}_\mu\left(\eta > \alpha\right) \\
&\leq \left|\check{\varphi}_k(s+\alpha) - \check{\varphi}_k(s-\alpha)\right| + \frac{\|\eta\|_p^p}{\alpha^p},
\end{aligned}$$

où $\check{\varphi}_k$ représente la fonction de répartition de $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$. Fixons $\epsilon > 0$ et supposons que s n'est pas un atome de cette loi si bien qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\left|\check{\varphi}_k(s+\alpha_1) - \check{\varphi}_k(s-\alpha_1)\right| \leq \epsilon$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse III.4.a qui énonce la continuité Lipschitz de u^*, on a $\eta \leq \left|T_k - \widehat{T}_k\right| + [u^*]\left|Z_k - \widehat{Z}_k\right| + \left|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\right|$. De plus, puisque l'erreur de quantification tend vers zéro, on peut supposer que $\|\eta\|_p \leq \alpha_1 \epsilon^{\frac{1}{p}}$. En posant $\alpha = \alpha_1$ dans les calculs précédents, on a

$$A \leq \left|\check{\varphi}_k(s+\alpha_1) - \check{\varphi}_k(s-\alpha_1)\right| + \frac{\|\eta\|_p^p}{\alpha_1^p} \leq 2\epsilon.$$

L'ensemble des atomes de la loi de $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$ étant au plus dénombrable, les calculs précédents sont valables pour presque tout $s > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Majorons maintenant le terme B :

$$\begin{aligned}
B &\leq \mathbf{E}_\mu\left|\mathbb{1}_U(Z_k)\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)\mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1})\right| \\
&\leq \mathbf{E}_\mu\left[\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})\left|1_U(Z_k) - 1_U(\widehat{Z}_k)\right|\right] + \mathbf{E}_\mu\left[1_U(\widehat{Z}_k)\left|1_{U^c}(Z_{k+1}) - 1_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1})\right|\right] \\
&\leq \left|q_k - \widehat{q}_k\right| + \left|q_{k+1} - \widehat{q}_{k+1}\right|,
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro d'après la proposition 5.3.5. □

La convergence de notre schéma d'approximation pour la distribution du temps de sortie est désormais une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition 5.3.7 *On suppose que les hypothèses III.3, III.5, III.6 et III.2 sont vérifiées. Soit $(\sigma_k)_{k\leq N-1}$ et $(\widehat{\sigma}_k)_{k\leq N-1}$ deux suites de nombres à valeurs dans $[0,1]$. Soit $(\pi_k)_{0\leq k\leq N}$ et $(\widehat{\pi}_k)_{0\leq k\leq N}$ définis de la manière suivante : $\pi_0 = \widehat{\pi}_0 = 0$ et*

$$\pi_{k+1} = \begin{cases} \frac{\pi_k q_k + \sigma_k}{q_{k+1}}, & \text{si } q_{k+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\widehat{\pi}_{k+1} = \begin{cases} \frac{\widehat{\pi}_k \widehat{q}_k + \widehat{\sigma}_k}{\widehat{q}_{k+1}}, & si\ \widehat{q}_{k+1} \neq 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Pour $0 \leq k \leq N$, si l'erreur de quantification est telle que pour tout $l \leq k$ on a

$$C^{\frac{p}{p+\beta}} \left(\left(\frac{\beta}{p} \right)^{\frac{p}{p+\beta}} + \left(\frac{p}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{p+\beta}} \right) \|Z_l - \widehat{Z}_l\|_p^{\frac{p\beta}{p+\beta}} \leq \frac{1}{2}\tilde{q},$$

alors

$$\begin{aligned} |\pi_k - \widehat{\pi}_k| \ \leq \ & \frac{2}{\tilde{q}} \Big(\pi^{sup} |q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + |\pi_{k-1} - \widehat{\pi}_{k-1}| + |\sigma_{k-1} - \widehat{\sigma}_{k-1}| \Big) \\ & + \frac{2(\pi^{sup} + 1)}{\tilde{q}^2} |q_k - \widehat{q}_k|, \end{aligned}$$

où on a posé $\pi^{sup} = \max_{0 \leq k \leq N} \pi_k$.

Démonstration La difficulté de cette preuve repose dans la non continuité Lipschitz de la fonction donnant π_{k+1} à partir π_k, q_k, q_{k+1} et σ_k en raison de la division par q_{k+1}. Pour surmonter cet obstacle, nous allons utiliser la borne inférieure strictement positive de la suite $(q_k)_{k \leq N}$ décrite plus tôt. En effet, rappelons que, d'après la définition 5.3.2, il existe un indice $\tilde{k}$ tel que $q_k \geq \tilde{q} > 0$ pour tout $k \geq \tilde{k}$ et $q_k = 0$ pour tout $k < \tilde{k}$. De plus, on va mettre en évidence une borne inférieure similaire pour la suite $(\widehat{q}_k)_{k \leq N}$ en exploitant la convergence de $\widehat{q}_k$ vers q_k.

Prouvons par récurrence que $\widehat{\pi}_k$ converge vers π_k. Tout d'abord, on a $\widehat{\pi}_0 = \pi_0 = 0$. Soit maintenant $k \in \{1, ..., N\}$.

Si $k < \tilde{k}$, alors $q_k = 0$ et l'hypothèse III.5 entraîne que $\widehat{q}_k = 0$ également. En effet, $q_k = 0$ signifie que $Z_k \in U$ p.s. U étant convexe, la proposition 5.3.1 implique $\widehat{Z}_k \in U$ p.s. également. En d'autres termes, $\widehat{q}_k = 0$. Enfin, d'après leurs définitions, on a $\pi_k = \widehat{\pi}_k = 0$.

Si $k \geq \tilde{k}$, alors $q_k \geq \tilde{q} > 0$. Afin de borner l'erreur entre π_k et $\widehat{\pi}_k$, il est en effet nécessaire de disposer d'une borne inférieure strictement positive pour q_k en raison de la division par q_k dans la relation de récurrence. Nous cherchons maintenant à obtenir le même genre de borne pour $\widehat{q}_k$ en exploitant la proposition 5.3.5 qui énonce la convergence de $\widehat{q}_k$ vers q_k. En effet, supposons désormais que le nombre de points dans les grilles de quantification soit suffisamment grand, et donc que l'erreur de quantification soit suffisamment petite, pour assurer que pour tout $j \in \{\tilde{k}, ..., N\}$, $|q_j - \widehat{q}_j| \leq \frac{1}{2}\tilde{q}$. Alors, on a la borne inférieure requise $\widehat{q}_k \geq \frac{1}{2}\tilde{q} > 0$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} |\pi_k - \widehat{\pi}_k| \leq & \left| \frac{\pi_{k-1} q_{k-1} + \sigma_{k-1}}{q_k} - \frac{\widehat{\pi}_{k-1} \widehat{q}_{k-1} + \widehat{\sigma}_{k-1}}{\widehat{q}_k} \right| \\ \leq & \frac{\pi_{k-1}}{\widehat{q}_k} |q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + \frac{\widehat{q}_{k-1}}{\widehat{q}_k} |\pi_{k-1} - \widehat{\pi}_{k-1}| + \frac{1}{\widehat{q}_k} |\sigma_{k-1} - \widehat{\sigma}_{k-1}| \\ & + |\pi_{k-1} q_{k-1} + \sigma_{k-1}| \frac{|q_k - \widehat{q}_k|}{q_k \widehat{q}_k}. \end{aligned}$$

Posons maintenant $\pi^{sup} = \max_{0\leq k\leq N} \pi_k$. On a

$$\begin{aligned}
&|\pi_k - \widehat{\pi}_k| \\
&\quad\leq \frac{\pi^{sup}}{\widehat{q}_k}|q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + \frac{1}{\widehat{q}_k}|\pi_{k-1} - \widehat{\pi}_{k-1}| + \frac{1}{\widehat{q}_k}|\sigma_{k-1} - \widehat{\sigma}_{k-1}| + (\pi^{sup}+1)\frac{|q_k - \widehat{q}_k|}{q_k\widehat{q}_k} \\
&\quad\leq \frac{2}{\tilde{q}}\left(\pi^{sup}|q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + |\pi_{k-1} - \widehat{\pi}_{k-1}| + |\sigma_{k-1} - \widehat{\sigma}_{k-1}|\right) + \frac{2(\pi^{sup}+1)}{\tilde{q}^2}|q_k - \widehat{q}_k|,
\end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. □

Remarquons que, dans la proposition précédente, on peut obtenir une vitesse pour la convergence de $\widehat{\pi}_k$ vers π_k dès lors qu'on connaît une vitesse pour la convergence de $\widehat{\sigma}_k$ vers σ_k et un majorant de la suite $(\pi_k)_{0\leq k\leq N}$.

Enfin, nous pouvons énoncer l'un de nos principaux résultats, la convergence du schéma d'approximation de la distribution du temps de sortie :

Théorème 5.3.1 *Sous les hypothèses III.3, III.4.a, III.5, III.6 et III.2, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$ et pour presque tout $s > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a la convergence*

$$\widehat{p}_k(s) \to p_k(s),$$

lorsque l'erreur de quantification $\|\Theta_j - \widehat{\Theta}_j\|_p$ tend vers zéro pour tout $j \in \{0, ..., k\}$.

Démonstration Soit $s > 0$ tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\widehat{r}_k(s)$ converge vers $r_k(s)$. On applique la proposition 5.3.7 avec $(\sigma_k)_{0\leq k\leq N-1} = (r_k(s))_{0\leq k\leq N-1}$ et $(\widehat{\sigma}_k)_{0\leq k\leq N-1} = (\widehat{r}_k(s))_{0\leq k\leq N-1}$ si bien que $(\pi_k)_{0\leq k\leq N} = (p_k(s))_{0\leq k\leq N}$ et $(\widehat{\pi}_k)_{0\leq k\leq N} = (\widehat{p}_k(s))_{0\leq k\leq N}$. Remarquons enfin que $(p_k(s))_{0\leq k\leq N}$ est borné par 1. □

Il est intéressant de remarquer que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse III.4.b selon laquelle la fonction u^* doit être bornée. Cette condition sera cruciale dans le cas des moments mais est inutile pour l'approximation de la distribution.

Finalement, nous avons développé une approximation aisée à mettre en œuvre de la fonction de survie du temps de sortie. Nous nous tournons à présent vers ses moments. Bien entendu, ils peuvent être obtenus grâce à la distribution. Cependant, nous présentons une méthode directe dans la section suivante pour laquelle nous obtiendrons une borne pour la vitesse de convergence.

5.3.2 Schéma d'approximation des moments et vitesse de convergence

Comme pour la distribution, les moments peuvent être approchés grâce à la quantification du processus $(\Theta_k)_{k\leq N} = (Z_k, T_k)_{k\leq N}$. Cependant, il est important de souligner que nous serons en mesure d'obtenir une vitesse de convergence pour ce nouveau schéma. On peut remarquer que, d'après la proposition 5.2.4 et comme dans le cas de la distribution, $p_{N,j} = \mathbf{E}_\mu[\tau^j | \tau \leq T_N]$ peut être calculé dès que les

suites $(q_k)_{k\leq N}$ et $(r_{k,j})_{k\leq N-1}$ sont connues. La première a été approchée dans la section précédente et il reste à trouver une expression de la seconde qui ne dépende que de la chaîne de Markov $(Z_k, T_k)_k$ afin de définir son approximation quantifiée $(\widehat{r}_{k,j})_{k\leq N-1}$. D'après l'hypothèse III.2, les mêmes arguments que dans la section précédente donnent

$$r_{k,j} = \mathbf{E}_\mu \left[\Big((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \Big)^j \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) \right]. \tag{5.3.4}$$

Ensuite, on définit naturellement les approximations quantifiées des suites $(r_{k,j})_{k\leq N-1}$ et $(p_{k,j})_{k\leq N}$.

Définition 5.3.8 *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(\widehat{r}_{k,j})_{k\in\{0,\dots,N-1\}}$ par*

$$\widehat{r}_{k,j} = \mathbf{E}_\mu \left[\Big((\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1} \Big)^j \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k) \mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1}) \right],$$

et la suite $(\widehat{p}_{k,j})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ par $\widehat{p}_{0,j} = 0$ et

$$\widehat{p}_{k+1,j} = \begin{cases} \frac{\widehat{p}_{k,j}\widehat{q}_k + \widehat{r}_{k,j}}{\widehat{q}_{k+1}}, & \text{si } \widehat{q}_{k+1} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout comme $\widehat{q}_k$ et $\widehat{r}_k(s)$ définis dans les sections précédentes, $\widehat{r}_{k,j}$ peut facilement être calculé à partir des grilles de quantification. En effet, on a :

$$\widehat{r}_{k,j} = \sum_{\substack{\theta=(z,t)\in\Gamma_k \\ z\in U}} \sum_{\substack{\theta'=(z',t')\in\Gamma_{k+1} \\ z'\notin U}} \Big((t + u^*(z)) \wedge t' \Big)^j \mathbf{P}(\widehat{\Theta}_k = \theta) \widehat{Q}_k(\theta;\theta').$$

La proposition suivante prouve la convergence de $\widehat{r}_{k,j}$ vers $r_{k,j}$.

Proposition 5.3.9 *Sous les hypothèses III.4.a, III.6, III.2 et III.7, pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\widehat{r}_{k,j}$ converge vers $r_{k,j}$ lorsque l'erreur de quantification $\|\Theta_l - \widehat{\Theta}_l\|_p$ tend vers zéro pour tout $l \in \{k, k+1\}$. Plus précisément, l'erreur est bornée par*

$$\begin{aligned} |r_{k,j} - \widehat{r}_{k,j}| \leq\ & j\Big((k+1)C_{t^*}\Big)^{j-1}\Big(\|T_k - \widehat{T}_k\|_p + [u^*]\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\|_p\Big) \\ & + \Big((k+1)C_{t^*}\Big)^j\Big(|q_k - \widehat{q}_k| + |q_{k+1} - \widehat{q}_{k+1}|\Big). \end{aligned}$$

Démonstration Soit $k \in \{0,\dots,N-1\}$ et $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$|r_{k,j} - \widehat{r}_{k,j}| \leq A + B.$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left| \mathbf{E}_\mu \left[\left(\Big((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \Big)^j - \Big((\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1} \Big)^j \right) \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) \right] \right|, \\ B &= \left| \mathbf{E}_\mu \left[\Big((\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1} \Big)^j \Big(\mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k) \mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1}) \Big) \right] \right|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse III.7, les durées inter-sauts S_i sont p.s. bornés par C_{t^*} si bien que $T_i \leq iC_{t^*}$ p.s. et $(T_i + u^*(Z_i)) \wedge T_{i+1} \leq (i+1)C_{t^*}$ p.s.. D'après la proposition 5.3.1, ces bornes sont également valides pour le processus quantifié $\widehat{T}_i \leq iC_{t^*}$ et $(\widehat{T}_i + u^*(\widehat{Z}_i)) \wedge \widehat{T}_{i+1} \leq \widehat{T}_{i+1} \leq (i+1)C_{t^*}$ p.s.

Considérons tout d'abord le terme A, on borne grossièrement les fontions indicatrices par 1. De plus, notons $\eta = \left|(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} - (\widehat{T}_k + u^*(\widehat{Z}_k)) \wedge \widehat{T}_{k+1}\right|$ et remarquons que la fonction $x \to x^j$ est lipschitzienne sur tout ensemble $[0, M]$ avec pour constante de Lipschitz jM^{j-1}. On obtient

$$A \leq \mathbf{E}_\mu \left[j\Big((k+1)C_{t^*}\Big)^{j-1} \eta \right] \leq j\Big((k+1)C_{t^*}\Big)^{j-1} \|\eta\|_p$$

et grâce à l'hypothèse III.4.a qui énonce la continuité Lipschitz de u^*, on a

$$A \leq j\Big((k+1)C_{t^*}\Big)^{j-1} \Big(\|T_k - \widehat{T}_k\|_p + [u^*]\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\|_p \Big).$$

De plus, le terme B est borné par :

$$\begin{aligned} B &\leq \Big((k+1)C_{t^*}\Big)^j \mathbf{E}_\mu \left| \mathbb{1}_U(Z_k)\mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) - \mathbb{1}_U(\widehat{Z}_k)\mathbb{1}_{U^c}(\widehat{Z}_{k+1}) \right| \\ &\leq \Big((k+1)C_{t^*}\Big)^j \Big(|q_k - \widehat{q}_k| + |q_{k+1} - \widehat{q}_{k+1}| \Big). \end{aligned}$$

On conclut avec la proposition 5.3.5. □

On peut maintenant énoncer l'autre résultat principal de ce chapitre : la convergence du schéma d'approximation des moments du temps de sortie avec une borne pour la vitesse de convergence.

Théorème 5.3.2 *Sous les hypothèses III.3, III.4.a, III.5, III.6, III.2 et III.7, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\widehat{p}_{k,j}$ converge vers $p_{k,j}$ lorsque l'erreur de quantification $\|\Theta_j - \widehat{\Theta}_j\|_p$ tend vers zéro pour tout $j \in \{0, ..., k\}$.*
Plus précisément, si l'erreur de quantification est telle que pour tout $l \leq k$ on ait

$$C^{\frac{p}{p+q}} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p+q}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p+q}} \right) \|Z_l - \widehat{Z}_l\|_p^{\frac{pq}{p+q}} \leq \frac{1}{2}\tilde{q},$$

alors on a

$$\begin{aligned} |p_{k,j} - \widehat{p}_{k,j}| \;\leq\; & \frac{2}{\tilde{q}} \Big((NC_{t^*})^j |q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + |p_{k-1,j} - \widehat{p}_{k-1,j}| + |r_{k-1,j} - \widehat{r}_{k-1,j}| \Big) \\ & + \frac{2((NC_{t^*})^j + 1)}{\tilde{q}^2} |q_k - \widehat{q}_k|. \end{aligned}$$

La vitesse de convergence dépend de la quantité $\tilde{q}$ dont la valeur exacte peut être inconnue dans les applications complexes. Dans ce cas, elle pourra toujours être approchées par des simulations de Monte-Carlo (voir les exemples du chapitre 6). Quoiqu'il en soit, les théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 prouvent la convergence de notre schéma d'approximation indépendamment de la valeur de $\tilde{q}$.

Démonstration Soit $j \in \mathbb{N}$. On applique la proposition 5.3.7 avec $(\sigma_k)_k = (r_{k,j})_k$ et $(\widehat{\sigma}_k)_k = (\widehat{r}_{k,j})_k$ si bien que $(\pi_k)_k = (p_{k,j})_k$ et $(\widehat{\pi}_k)_k = (\widehat{p}_{k,j})_k$. Enfin, ainsi que nous l'avions remarqué après la démonstration du lemme 5.3.7, on obtient une borne pour la vitesse de convergence puisque la suite $(p_{k,j})_{0\leq k\leq N}$ est bornée par :

$$p_{k,j} = \mathbf{E}_\mu\left[\tau^j \middle| \tau \leq T_k\right] \leq \mathbf{E}_\mu\left[T_k^j \middle| \tau \leq T_k\right] \leq \mathbf{E}_\mu\left[(kC_{t^*})^j \middle| \tau \leq T_k\right] \leq (kC_{t^*})^j \leq (NC_{t^*})^j.$$

D'où le résultat. □

Finalement, nous avons développé deux méthodes numériques permettant de calculer respectivement la fonction de survie et les moments d'un temps de sortie pour un PMDM. Nous avons prouvé leur convergence et obtenu une vitesse dans le cas des moments. Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats numériques obtenus sur deux exemples.

Chapitre 6

Exemples et résultats numériques

Dans ce chapitre, nous montrons comment mettre en œuvre nos méthodes sur deux exemples : le processus de Poisson avec flot (section 6.1) et le modèle de corrosion (section 6.2).

6.1 Processus de Poisson

On étudie ici l'exemple du processus de Poisson introduit dans la section 1.2.1.

Soit donc N_t un processus de Poisson. On fixe son paramètre à la valeur $\lambda = 1$ et on pose $Y_t = t + N_t$. On a vu que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un PMDM. On s'intéresse au calcul du temps τ_b de sortie de l'intervalle $]-\infty; b[$ pour le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$. Cette étude nous servira de cas test car il est possible de trouver la valeur exacte de la fonction de survie afin de la comparer avec les valeurs numériques fournies par notre schéma d'approximation.

Rappelons, on s'en servira à plusieurs reprises, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la durée inter-sauts S_k suit une loi exponentielle de paramètre 1. Ces mêmes durées inter-sauts étant indépendantes, on en déduit la loi de T_k. Il s'agit d'une loi gamma de paramètres k et 1 que l'on notera $\gamma(k, 1)$.

6.1.1 Vérification des hypothèses

Avant de se tourner vers les simulations numériques, vérifions que les hypothèses nécessaires sont satisfaites. Soit $b = 10$ i.e. $U =]-\infty, 10[$. On peut choisir $N = 10$ puisque $Y_{T_N} = T_N + N_{T_N} = T_N + N \geq N$. Par ailleurs, il est clair que pour tout $y \in]-\infty, 10[$, $u^*(y) = 10 - y$. Les hypothèses III.4 et III.5 sont clairement satisfaites. L'hypothèse III.6, quant à elle, résulte du lemme suivant.

Lemme 6.1.1 *Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $k \in \{0, ..., N\}$,*

$$\mathbf{P}_\mu \left(Z_k \in U^\alpha\right) \leq 2\alpha.$$

Démonstration Soit $k = 0$. On a $Z_0 = 0$ p.s. et $U^\alpha = [10 - \alpha, 10 + \alpha]$. Ainsi, on considère deux cas.
Si $\alpha < 10$ alors $\mathbf{P}_\mu(Z_0 \in U^\alpha) = 0 \leq 2\alpha$.
Si $\alpha \geq 10$ alors $\mathbf{P}_\mu(Z_0 \in U^\alpha) = 1 \leq \frac{1}{10}\alpha \leq 2\alpha$.

Soit maintenant $k \in \{1, ..., N\}$. Notons $f_{\gamma(k,1)}$ la densité de la loi $\gamma(k, 1)$ et $C_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1}$ sa borne supérieure. Puisque T_k suit la loi $\gamma(k, 1)$, $Z_k = k + T_k$ a pour densité $f_{Z_k}(\cdot) = f_{\gamma(k,1)}(\cdot - k)$ qui est également bornée par C_k. Enfin, on a :

$$\mathbf{P}_\mu(Z_k \in U^\alpha) = \mathbf{P}_\mu(Z_k \in [10 - \alpha, 10 + \alpha]) \leq 2C_k\alpha \leq 2\alpha.$$

En effet, la suite $(C_k)_{k\geq 0}$ est décroissante donc on a $C_k \leq C_1 = 1$ pour tout $k \in \{1, ..., N\}$. □

De plus, l'hypothèse III.2 est satisfaite puisque les trajectoires du processus sont croissantes. L'hypothèse III.7, au contraire, ne l'est pas car $t^*(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$. Cependant, comme nous l'avons remarqué dans la section 5.1, on peut contourner cet obstacle en considérant le processus tué lorsqu'il dépasse la valeur $b = 10$.

Rappelons que la valeur de T_k peut être obtenue à partir de Z_k puisque $T_k = Z_k - k$. Ainsi, il suffit de quantifier le processus $(Z_k)_{k\leq N}$ au lieu de $(Z_k, T_k)_{k\leq N}$. Cette réduction de dimension du processus à quantifier conduit à une amélioration du taux de convergence et nous constatons en effet, dans les tableaux suivants, que nos schémas convergent rapidement.

6.1.2 Approximation des moments

Nous décrivons ici les résultats obtenus lors de la mise en œuvre de l'approximation numérique des moments.

Temps moyen de sortie

Le tableau 6.1 présente les approximations de l'espérance du temps de sortie. On y trouve, pour différents nombres de points dans les grilles de quantification, la valeur de $\widehat{p}_{N,1}$, qui approche l'espérance de τ_{10}, ainsi que l'erreur relative par rapport à une valeur de référence obtenue par la méthode de Mote-Carlo (10^8 simulations) : $\mathbf{E}[\tau_{10}]_{\text{Monte Carlo}} = 5.1248$. Comme nous nous y attendions, l'erreur décroît avec le nombre de points dans les grilles de quantification.

Le second moment

On présente les résultats de l'approximation du second moment dans le tableau 6.2. Notre valeur de référence obtenue par la méthode de Monte-Carlo est $\mathbf{E}[\tau_{10}^2]_{\text{Monte Carlo}} = 27.5084$. A nouveau, l'erreur décroît avec le nombre de points dans les grilles de quantification.

Nombre de points	$\widehat{p}_{N,1}$	Erreur relative
20 points	5.1635	0.75 %
50 points	5.1029	0.43 %
100 points	5.1342	0.18 %
200 points	5.1177	0.14 %
500 points	5.1274	0.051 %
1000 points	5.1237	0.023 %
2000 points	5.1240	0.016 %
4000 points	5.1244	0.0078 %
Monte Carlo	5.1248	

TABLE 6.1 – Résultats des simulations pour la moyenne du temps de sortie pour le processus de Poisson.

Nombre de points	$\widehat{p}_{N,2}$	Erreur relative
20 points	27.9318	1.5 %
50 points	27.2522	0.93 %
100 points	27.5896	0.30 %
200 points	27.4346	0.27 %
500 points	27.5290	0.075 %
1000 points	27.4991	0.034 %
2000 points	27.5024	0.022 %
4000 points	27.5042	0.015 %
Monte Carlo	27.5084	

TABLE 6.2 – Résultats des simulations pour le second moment du temps de sortie pour le processus de Poisson.

La figure 6.1 représente la vitesse de convergence empirique pour l'approximation des deux premiers moments. Elle est estimée à travers un modèle de régression linéaire et vaut -0.88 pour le premier moment et -0.93 pour le deuxième. Ces vitesses sont du même ordre de grandeur que la vitesse de convergence du quantificateur optimal, énoncé par le Théorème 1.4.1, qui est de -1, la dimension étant ici 1.

6.1.3 Approximation de la fonction de survie

Ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, on peut obtenir la valeur exacte de la fonction de survie du temps de sortie.

Proposition 6.1.2 *Notons ent(.) la fonction partie entière. Pour tout $s, b \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\mathbf{P}[\tau_b \geq s] = \begin{cases} \mathbf{P}[T_{ent(b-s)+1} > s] & \text{pour tout } s \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

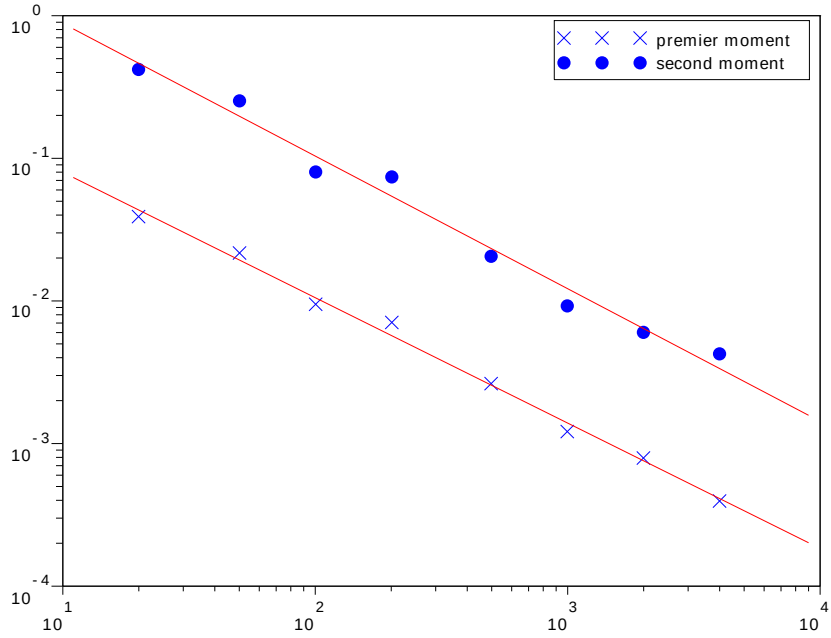

FIGURE 6.1 – Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour le premier et le second moments dans l'exemple du processus de Poisson. Les vitesses de convergence empiriques sont -0.88 et -0.93.

Rappelons que T_k suit la loi $\gamma(k,1)$, le terme de droite dans la proposition précédente peut donc être calculé facilement.

Démonstration Soit $s > 0$. Remarquons que $Y_s \geq s$, ainsi $\tau_b < s$ p.s. lorsque $s > b$. Supposons maintenant que $s \leq b$, on a :

$$\mathbf{P}[\tau_b \geq s] = \mathbf{P}[Y_s \leq b] = \mathbf{P}[N_s \leq b - s] = \mathbf{P}[N_s \leq ent(b-s)] = \mathbf{P}[T_{ent(b-s)+1} \geq s].$$

D'où le résultat. □

La figure 6.2 représente à la fois la fonction de survie exacte et son approximation par quantification. Le tableau 6.3 présente l'erreur empirique entre les deux fonctions. La vitesse empirique de convergence, présentée sur la figure 6.3, est estimée à travers un modèle de régression et vaut -0.94. Remarquons qu'elle est du même ordre de grandeur que celle du quantificateur optimal énoncée dans le théorème 1.4.1, qui est de -1, la dimension étant ici de 1.

Nous avons déjà insisté sur le fait que notre approche est flexible par rapport à U. Dans cet exemple, on peut obtenir très rapidement la moyenne ou la distribution d'un autre temps de sortie $U' =]-\infty, b']$ pour n'importe quel $0 < b' \leq b = 10$. En effet, $\mathbf{P}(\tau_{b'} > T_{10}) = 0$ et on peut donc utiliser les mêmes grilles de quantification.

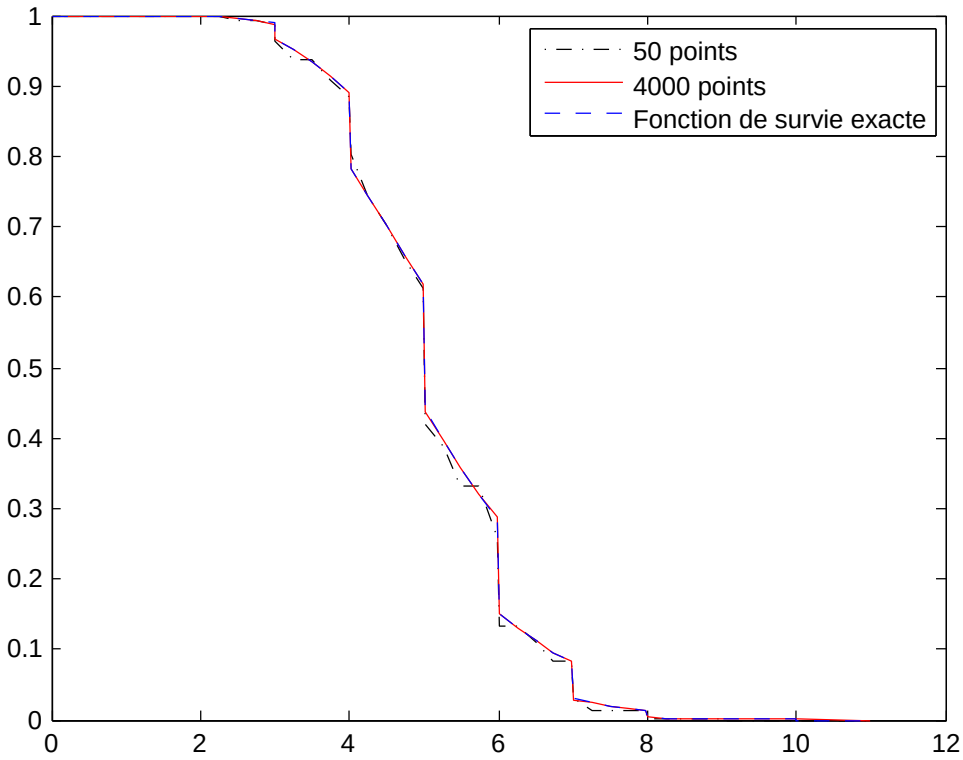

FIGURE 6.2 – Fonction de survie de τ_{10} et son approximation quantifiée avec 50 et 4000 points dans les grilles de quantification. La courbe exacte et celle obtenue avec 4000 points dans les grilles de quantification sont indistinguables.

Grilles de quantification	$\max_s \lvert p_N(s) - \widehat{p}_N(s)\rvert$
20 points	0.065
50 points	0.027
100 points	0.013
200 points	0.0056
500 points	0.0037
1000 points	0.0015
2000 points	0.00098
4000 points	0.00037

TABLE 6.3 – Résultats des simulations pour la distribution du temps de sortie pour le processus de Poisson.

6.1.4 Vitesse de convergence pour la distribution

On peut remarquer, d'après la preuve de la proposition 5.3.6, qu'une vitesse de convergence de la distribution du temps de sortie peut être obtenue dès que pour tout $k \in \{0, ..., N-1\}$, la fonction de survie de $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$, notée $\check{\varphi}_k$, est Lipschitz continue par morceaux. Bien qu'il soit difficile d'énoncer des hypothèses générales sous lesquelles cette assertion est vraie, la proposition suivante prouve que

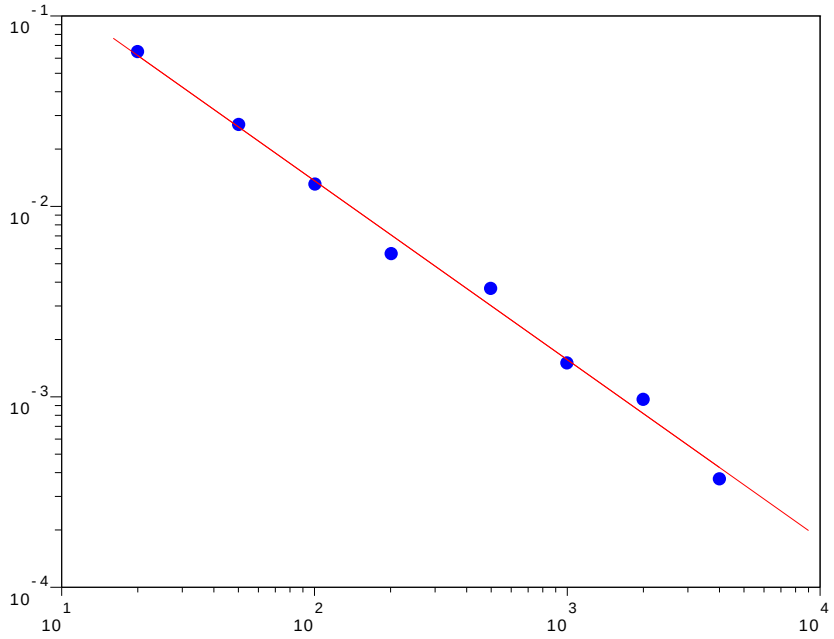

FIGURE 6.3 – Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour la fonction de survie dans l'exemple du processus de Poisson. La vitesse de convergence empirique est -0.94.

cette condition est satisfaite dans notre exemple.

Proposition 6.1.3 *Pour tout $k \in \{0, ..., N-1\}$, la fonction de survie, notée $\breve{\varphi}_k$, de $(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1}$ est lipschitzienne sur $]-\infty; b-k[$ et sur $]b-k; +\infty[$ avec pour constante de Lipschitz $[\breve{\varphi}_k] \leq 1$.*

Démonstration Soit $k = 0$ et $s > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\breve{\varphi}_0(s) &= \mathbf{P}_\mu((T_0 + u^*(Z_0)) \wedge T_1 > s) \\
&= \mathbf{P}_\mu(b \wedge T_1 > s) \\
&= \mathbb{1}_{\{b>s\}} \mathbf{P}_\mu(T_1 > s) \\
&= \mathbb{1}_{\{b>s\}} e^{-s},
\end{aligned}$$

puisque T_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1. Par conséquent, la fonction $\breve{\varphi}_0$ est égale à zéro sur $[b; +\infty[$ et est lipschitzienne avec pour constante de Lipschitz 1 sur $]0; b[$.

Soit $k \geq 1$ et $s > 0$. Rappelons que les variables aléatoires $(S_j)_{j\geq 0}$ sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètre 1 si bien qu'en particulier, T_k et S_{k+1} sont indépendantes et T_k suit la loi $\gamma(k, 1)$. Rappelons également que $Z_k = k + T_k$ et que $u^*(x) = b - x$.

$$\begin{aligned}
\breve{\varphi}_k(s) &= \mathbf{P}_\mu((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} > s) \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \mathbb{1}_{\{(t+(b-k-t))\wedge u>s\}} f_{\gamma(k,1)}(t) f_{\gamma(k+1,1)}(u) dt du,
\end{aligned}$$

où on note $f_{\gamma(j,1)}$ la fonction de densité de la loi $\gamma(j,1)$ pour $j \in \{k, k+1\}$.

Soit $s' > s > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|\check{\varphi}_k(s') - \check{\varphi}_k(s)| &\leq \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left| \mathbb{1}_{\{(b-k)\wedge u > s'\}} - \mathbb{1}_{\{(b-k)\wedge u > s\}} \right| f_{\gamma(k,1)}(t) f_{\gamma(k+1,1)}(u) dt du \\
&\leq \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \mathbb{1}_{\{(b-k)\wedge u \in]s;s']\}} f_{\gamma(k,1)}(t) f_{\gamma(k+1,1)}(u) dt du \\
&\leq \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left(\mathbb{1}_{\{b-k \in]s;s']\}} + \mathbb{1}_{\{u \in]s;s']\}} \right) f_{\gamma(k,1)}(t) f_{\gamma(k+1,1)}(u) dt du \\
&\leq \mathbb{1}_{\{b-k \in [s;s']\}} + C_{f_{\gamma(k+1,1)}} |s' - s| \\
&\leq \mathbb{1}_{\{b-k \in [s;s']\}} + |s' - s|,
\end{aligned}$$

puisque $C_{f_{\gamma(k+1,1)}} = \frac{1}{(k)!} \left(\frac{k}{e}\right)^k \leq 1$. Enfin, si s et s' appartiennent tous les deux à l'intervalle $]0; b-k[$ ou s'ils appartiennent tous les deux à $]b-k; +\infty[$, on a $|\check{\varphi}_k(s') - \check{\varphi}_k(s)| \leq |s' - s|$. D'où le résultat. □

Enfin, dans cet exemple, nous pouvons énoncer une borne pour la vitesse de convergence de l'approximation de la distribution du temps de sortie. La proposition suivante constitue donc une amélioration de la proposition 5.3.6 et du théorème 5.3.1.

Proposition 6.1.4 *Pour tout $k \in \{0, ..., N-1\}$, posons $s > 0$ et supposons que l'erreur de quantification soit suffisamment petite pour assurer que*

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\|T_k - \widehat{T}_k\|_p + \|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\|_p \right)^{\frac{p}{p+1}} < |b - k - s|,$$

on a alors

$$\begin{aligned}
|r_k(s) - \widehat{r}_k(s)| \leq 2 \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\frac{1}{p} + 1\right) \left(\|T_k - \widehat{T}_k\|_p + \|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\|_p \right)^{\frac{p}{p+1}} \\
+ \left| q_k - \widehat{q}_k \right| + \left| q_{k+1} - \widehat{q}_{k+1} \right|.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, si l'erreur de quantification est telle que pour tout $l \leq k$

$$2 \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\frac{1}{p} + 1\right) \|Z_l - \widehat{Z}_l\|_p^{\frac{p}{p+1}} \leq \frac{1}{2} \tilde{q},$$

on a alors

$$\begin{aligned}
|p_k(s) - \widehat{p}_k(s)| \leq & \frac{2}{\tilde{q}} \Big(|q_{k-1} - \widehat{q}_{k-1}| + |p_{k-1}(s) - \widehat{p}_{k-1}(s)| + |r_{k-1}(s) - \widehat{r}_{k-1}(s)| \Big) \\
& + \frac{4}{\tilde{q}^2} |q_k - \widehat{q}_k|.
\end{aligned}$$

Démonstration La preuve est une conséquence directe des preuves de la proposition 5.3.6 et du théorème 5.3.1. Il suffit de remarquer que le terme A de la preuve de la proposition 5.3.6 peut être borné grâce à la continuité Lipschitz des fonctions

$\check{\varphi}_k$ sur $]-\infty; b-k[$ et sur $]b-k; +\infty[$. Soit $s>0$, $s \neq b-k$, et soit $\alpha>0$ tel que $b-k \notin [s-\alpha; s+\alpha]$ i.e. $\alpha < |b-k-s|$, on a d'après la preuve de la proposition 5.3.6

$$A \leq \left|\check{\varphi}_k(s+\alpha) - \check{\varphi}_k(s-\alpha)\right| + \frac{\|\eta\|_p^p}{\alpha^p} \leq 2\alpha + \frac{\|\eta\|_p^p}{\alpha^p},$$

car $[\check{\varphi}_k] \leq 1$. La borne ci-dessus atteint son minimum en $\alpha = \left(\frac{p\|\eta\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ et celui-ci vaut $2\|\eta\|_p^{\frac{p}{p+1}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(1+\frac{1}{p}\right)$. On conclut en rappelant que

$$\|\eta\|_p \leq \|T_k - \widehat{T}_k\|_p + [u^*]\|Z_k - \widehat{Z}_k\|_p + \|T_{k+1} - \widehat{T}_{k+1}\|_p,$$

avec $[u^*] = 1$. □

On peut calculer la valeur exacte de $\tilde{q}$ qui est la première valeur strictement positive de la suite $\left(\mathbf{P}_\mu(Z_k \notin U)\right)_k$. On a $\tilde{q} = \mathbf{P}_\mu(Z_1 \notin]-\infty; 10[) = \mathbf{P}_\mu(T_1 \geq 9) = e^{-9}$ car T_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1.

6.2 Modèle de corrosion

On considère maintenant le modèle de corrosion, fourni par Astrium, que nous avons présenté dans la section 1.2.5. On cherche à approcher l'espérance et la fonction de survie du temps de dépassement du seuil critique de 0.2 mm de perte d'épaisseur.

L'état de la structure métallique est représentée par un PMDM qui a été décrit dans la section 1.2.5. Cependant, on modifie légèrement cette modélisation car il n'est pas nécessaire de considérer ici le processus augmenté du temps. On pose donc $M = \{1; 2; 3\}$, pour chaque $m \in M$, $E_m = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}]$ et

$$E = M \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}].$$

Pour $\zeta \in E_m$, ζ représente le triplet (d, s, ρ) où d est l'épaisseur corrodée, s le temps depuis le dernier saut et ρ le taux de corrosion. On définit $U_m = [0; 0.2] \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}]$ pour chaque $m \in M$ et

$$U = M \times [0; 0.2] \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7}; 10^{-5}].$$

Le temps de dépassement du seuil critique est ainsi le temps de sortie de U. Enfin, le flot dans le mode m est :

$$\Phi_m\left(\begin{pmatrix} d \\ s \\ \rho \end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix} d + d_m(t+s) - d_m(s) \\ t+s \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Le paramètre d évolue continûment entre les sauts alors que ρ est choisi aléatoirement et indépendamment après chaque saut.

6.2.1 Vérification des hypothèses

Les ensembles U_m étant convexes, l'hypothèse III.5 est satisfaite. Par ailleurs, remarquons que u^* est bornée (hypothèse III.4.a). En effet, $\rho \geq 10^{-7}$ et $\eta \leq 200000$ si bien que $d_m(t) \geq 10^{-7}(t-200000)$ et enfin $u^* \leq 0.2\times 10^7 + 200000 = 2.2\times 10^6$ heures. Notons C_{u^*} cette borne. Les hypothèses III.6 et III.4.b (continuité Lipschitz de u^*) proviennent respectivement des lemmes 6.2.1 et 6.2.2 ci-dessous. Enfin, l'hypothèse III.2 est satisfaite mais l'hypothèse III.7 ne l'est pas. Pour cette raison, on considère, comme indiqué dans la section 5.1, le processus tué au temps τ. On introduit donc un état cimetière Δ et on remplace le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par le suivant :

$$X^{\tau}_{t=} \begin{cases} X_t & \text{pour } t < \tau, \\ \Delta & \text{pour } t \geq \tau. \end{cases}$$

Lemme 6.2.1 *Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $k \in \{0, ..., N\}$,*

$$\mathbf{P}_\mu(Z_k \in U^\alpha) \leq 5\alpha.$$

Démonstration On introduit quelques notations supplémentaires. Soit M_k, D_k et R_k les valeurs de m, d et ρ après le k-ième saut. En d'autres termes, on a $Z_k = (M_k, D_k, 0, R_k)$. Remarquons alors que

$$\mathbf{P}_\mu\Big(Z_k \in U^\alpha\Big) = \mathbf{P}_\mu\Big(|D_k - 0.2| \leq \alpha\Big).$$

On étudie donc plus précisément la loi de D_k. Notons $F_k(s) = s + \eta_k\Big(e^{-\frac{s}{2\eta_k}} - 1\Big)$ où la suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ est déterministe. On a alors

$$\begin{cases} D_0 = 0 \\ D_k = D_{k-1} + R_k F_k(S_k) \qquad \text{pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Nous allons montrer que pour tout k, la variable aléatoire $R_k F_k(S_k)$ a une densité bornée. Rappelons que R_k suit une loi uniforme sur $[a_k; b_k] \subset [10^{-7}; 10^{-5}]$ et S_k une loi exponentielle de paramètre λ_k. Soit alors h une fonction mesurable bornée à valeurs réelles. On a

$$\mathbf{E}_\mu[h(R_k F_k(S_k))] = \int_0^{+\infty} \int_{a_k}^{b_k} h(\rho F_k(s)) \frac{1}{b_k - a_k} \lambda_k e^{-\lambda_k s} d\rho ds.$$

On introduit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = \rho \\ v = \rho F_k(s), \end{cases}$$

dont le jacobien est $\frac{1}{u}(F_k^{-1})'(\frac{v}{u})$ ainsi on a

$$\mathbf{E}_\mu[h(R_k F_k(S_k))] = \int_0^{+\infty} h(v) \left(\int_{a_k}^{b_k} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})} (F_k^{-1})'(\frac{v}{u})}{(b_k - a_k)u} du \right) dv.$$

Ainsi, on obtient la densité de la variable aléatoire $R_k F_k(S_k)$ et une intégration par parties fournit

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})}(F_k^{-1})'(\frac{v}{u})}{(b_k-a_k)u}du = \frac{1}{b_k-a_k}\int_{a_k}^{b_k} u \times \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})}(F_k^{-1})'(\frac{v}{u})}{u^2}du$$
$$= \frac{1}{b_k-a_k}\left(\left[ue^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})}\right]_{a_k}^{b_k} - \int_{a_k}^{b_k} e^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})}du\right).$$

Enfin, la densité de la variable aléatoire $R_k F_k(S_k)$ est bornée par

$$\left|\int_{a_k}^{b_k} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k F_k^{-1}(\frac{v}{u})}(F^{-1})'(\frac{v}{u})}{(b_k-a_k)u}du\right| \leq \frac{a_k+b_k}{b_k-a_k}+1 \leq \frac{2b_k}{b_k-a_k} \leq 2.$$

Ensuite, par récurrence on obtient que la variable aléatoire D_k suit la loi δ_0 pour $k=0$ et admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ψ_k bornée par 2 pour $k>0$. En effet, dans le second cas, la densité de D_k peut être obtenue par convolution puisque D_{k-1} et $R_k F_k(S_k)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Par conséquent, $\mathbf{P}_\mu\Big(|D_0-0.2|\leq\alpha\Big) = \mathbb{1}_{\{\alpha\geq 0.2\}} \leq 5\alpha$ puisque $D_0=0$ et pour $k>0$,

$$\mathbf{P}_\mu\Big(|D_k-0.2|\leq\alpha\Big) = \int_{0.2-\alpha}^{0.2+\alpha}\psi_k(v)dv \leq 4\alpha,$$

puisque $\psi_k \leq 2$. Le résultat suit. □

Lemme 6.2.2 *Soit $\widetilde{U} = M \times [0;0.2] \times \{0\} \times [10^{-7};10^{-5}]$. La fonction u^* est lipschitzienne sur l'ensemble $\widetilde{U}$ avec pour constante de Lipschitz*

$$[u^*] \leq 2\times 10^7 \times \Big(1 + C_{u^*} + 4\times 10^5\Big).$$

Démonstration Tout d'abord, remarquons que la continuité Lipschitz sur l'ensemble $\widetilde{U}$ suffit à notre discussion. En effet, bien que $U = M \times [0;0.2] \times \mathbb{R}^+ \times [10^{-7};10^{-5}]$, on a en fait $Z_k \in \widetilde{U}\cup\Delta$ p.s. et, d'après la proposition 5.3.1, $\hat{Z}_k \in \widetilde{U}\cup\Delta$ p.s. également. Il suffit ensuite de remarquer que, dans les sections précédentes, la fonction u^* n'est évaluée qu'en les positions après un saut c'est-à-dire en Z_k pour un $k\in\mathbb{N}$.

Montrons maintenant que la fonction u^* est lipschitzienne sur cet ensemble $\widetilde{U}$. Soit $(m,d,0,\rho)\in\widetilde{U}$, la quantité $u^*(m,d,0,\rho)$ est solution de l'équation suivante.

$$d + d_m(u^*) = d + \rho\left(u^* + \eta\left(e^{-\frac{u^*}{2\eta}}-1\right)\right) = 0.2.$$

Fixons $0\leq d,d'\leq 0.2$ et notons $u = u^*(m,d,0,\rho,0)$ et $u' = u^*(m,d',0,\rho,0)$. Remarquons que $d+d_m(u) = d'+d_m(u')$ puisque ces deux quantités sont égales à 0.2. Par conséquent, $|d_m(u)-d_m(u')| = |d'-d|$ et, en remarquant que $\eta \leq 2\times 10^5$,

on a

$$\begin{aligned}|d-d'| &= \rho\left|u-u'+\eta\left(e^{-\frac{u}{2\eta}}-e^{-\frac{u'}{2\eta}}\right)\right| \\ &\geq \rho\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{u\wedge u'}{2\eta}}\right)|u-u'| \\ &\geq \frac{10^{-7}}{2}|u-u'|,\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité Lipschitz de u^* par rapport à la variable d sur $\widetilde{U}$.

De la même manière, fixons $\rho, \rho' \in [10^{-7}; 10^{-5}]$ et notons $u = u^*(m, d, 0, \rho, 0)$ et $u' = u^*(m, d, 0, \rho', 0)$. On a encore $d+\rho\left(u+\eta\left(e^{-\frac{u}{2\eta}}-1\right)\right) = d+\rho'\left(u'+\eta\left(e^{-\frac{u'}{2\eta}}-1\right)\right)$ car ces deux quantités sont égales à 0.2. On soustrait $d+\rho\left(u'+\eta\left(e^{-\frac{u'}{2\eta}}-1\right)\right)$ dans les deux termes précédents pour obtenir

$$\rho\left|u-u'+\eta\left(e^{-\frac{u}{2\eta}}-e^{-\frac{u'}{2\eta}}\right)\right| = |\rho-\rho'|\left|u'+\eta\left(e^{-\frac{u'}{2\eta}}-1\right)\right|.$$

On a déjà calculé plus haut une borne inférieure pour le terme de gauche. Le terme de droite, quant à lui, est borné par $\left(C_{u^*}+4\times 10^5\right)|\rho-\rho'|$, puisque $\eta \leq 2\times 10^5$, on a donc

$$\left(C_{u^*}+4\times 10^5\right)|\rho-\rho'| \geq \frac{10^{-7}}{2}|u-u'|,$$

ce qui prouve la continuité Lipschitz de u^* par rapport à ρ sur $\widetilde{U}$. Enfin, la fonction u^* est lipschitzienne sur $\widetilde{U}$ avec $[u^*] \leq 2\times 10^7\left(1+C_{u^*}+4\times 10^5\right)$. □

6.2.2 Approximation de l'espérance

Les résultats des simulations pour l'approximation de l'espérance du temps de sortie sont donnés dans le tableau 6.4. Afin d'avoir une valeur de référence, on a obtenu par la méthode de Monte-Carlo (10^6 simulations) le résultat $E[\tau]_{Monte-Carlo} = 250.1\times 10^3$ h. La vitesse empirique de convergence est représentée sur la figure 6.4. Elle est estimée à -0.35 au moyen d'un modèle de régression. Remarquons qu'elle est du même ordre de grandeur que la vitesse de convergence du quantificateur optimal donnée par le théorème 1.4.1, la dimension étant ici de 3. En effet, comme dans la partie précédente (section 3.4.2), la succession des modes m est déterministe, s est égal à zéro après un saut, on ne quantifie donc que l'épaisseur corrodée, le taux de corrosion ρ et les instants de saut.

6.2.3 Approximation de la fonction de survie

Dans notre schéma d'approximation pour la distribution du temps de sortie, on peut remarquer que la valeur quantifiée $\hat{p}_N(s)$ n'est pas nécessairement plus petite que 1. Par conséquent, il apparaît naturel de remplacer $\hat{p}_N(s)$ par $\hat{p}_N(s)\wedge 1$. Ceci ne change rien à la convergence énoncée par notre théorème et ne peut qu'améliorer l'erreur d'approximation. Il est également possible, et c'est ce que nous faisons dans

Grilles de quantification	$\hat{p}_{N,1}$ ($\times 10^3$ h)	Erreur relative à 250.1×10^3h
20 points	287.0	15%
50 points	282.3	13%
100 points	273.3	9.3%
200 points	270.0	8.0%
500 points	264.6	5.8%
1000 points	261.6	4.6%
2000 points	259.2	3.6%
4000 points	257.0	2.8%
6000 points	255.6	2.2%
8000 points	255.0	2.0%
10000 points	254.5	1.8%
Monte Carlo	250.1	

TABLE 6.4 – Résultats des simulations pour l'espérance du temps de sortie dans le modèle de corrosion.

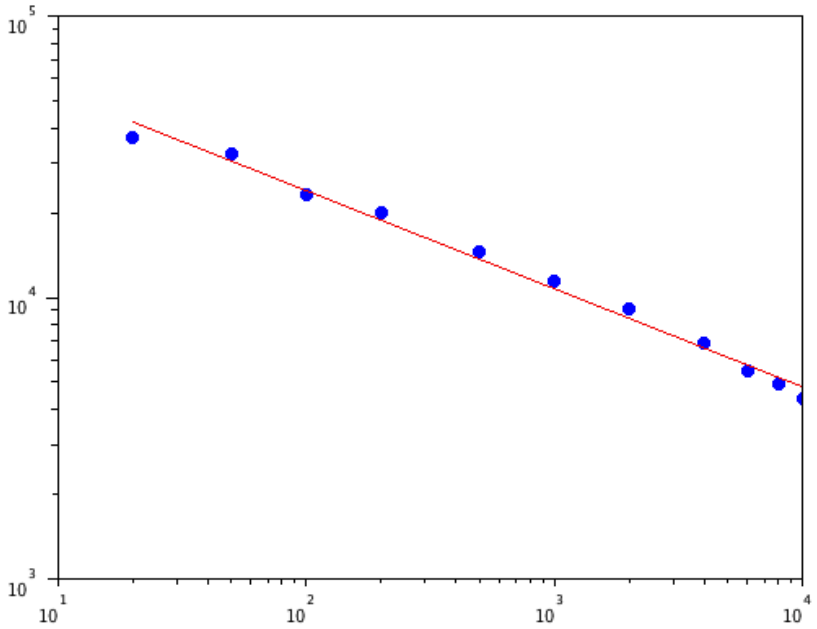

FIGURE 6.4 – Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour le premier moment dans l'exemple du modèle de corrosion. La vitesse de convergence empirique est -0.35.

les résultats présentés ci-dessous, de remplacer $\hat{p}_N(s)$ par $\hat{p}_N(s)/\hat{p}_N(0)$ puisque $\hat{p}_N(0)$ tend vers 1 lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification tend vers l'infini.

La figure 6.5 représente la fonction de survie de τ obtenue au moyen de simulations de Monte Carlo et obtenue grâce à notre schéma d'approximation. On observe

que les deux fonctions sont très proches.

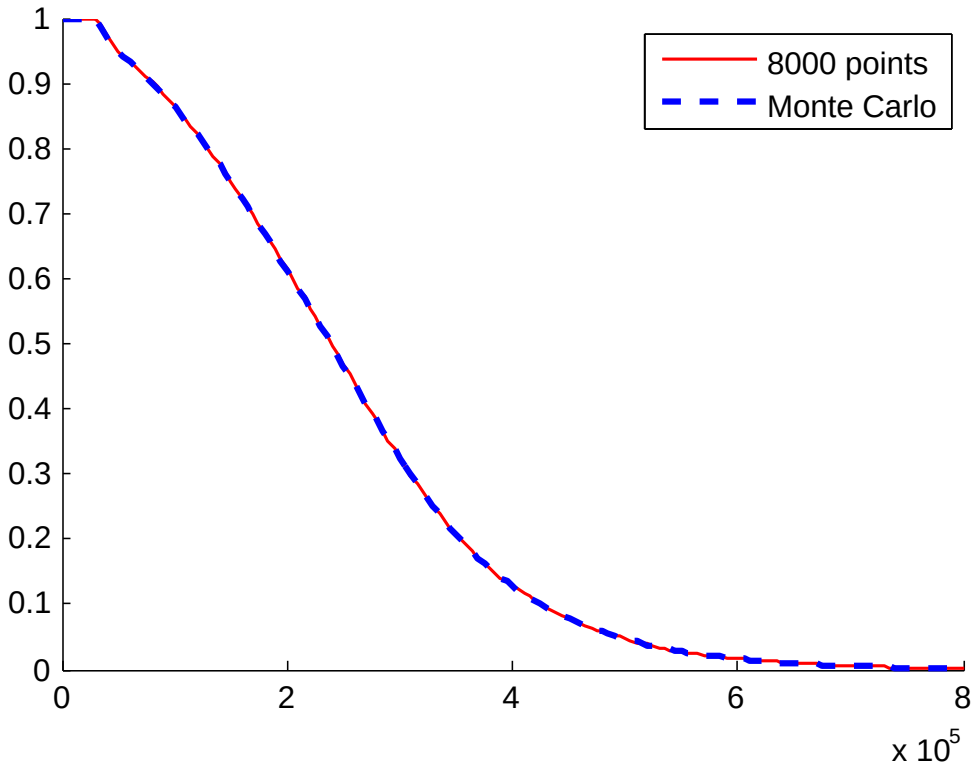

FIGURE 6.5 – Fonction de survie de τ obtenue par des simulations de Monte Carlo (courbe pointillée), par notre schéma d'approximation (courbe continue) avec 8000 points dans les grilles de quantification.

La tableau 6.5 contient l'erreur empirique en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse empirique de convergence est représentée sur la figure 6.6. Elle est estimée à -0.64 au moyen d'un modèle de régression. Remarquons qu'elle est meilleure que la vitesse de convergence du quantificateur optimal donnée par le théorème 1.4.1, qui est de -0.33, la dimension étant ici de 3. Ceci signifie probablement que notre schéma d'approximation de la fonction de survie converge, sur cet exemple, plus rapidement que le quantificateur optimal.

Au moyen de simulations de Monte Carlo, on peut approcher la valeur de $\tilde{q}$. On obtient ici $\tilde{q} \simeq 0.057$ avec 10^6 simulations.

Grilles de quantification	$\max_s \lvert p_N(s) - \widehat{p}_N(s) \rvert$
20 points	0.1041
50 points	0.0664
100 points	0.0447
200 points	0.0335
500 points	0.0112
1000 points	0.0091
2000 points	0.0058
4000 points	0.0039
6000 points	0.0028
8000 points	0.0024
10000 points	0.0023

TABLE 6.5 – Résultats des simulations pour la distribution du temps de sortie dans le modèle de corrosion.

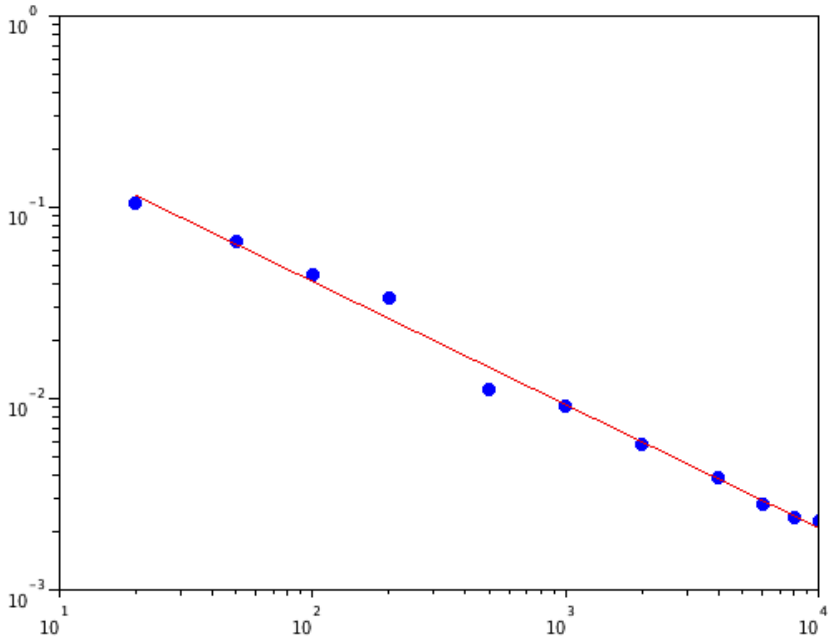

FIGURE 6.6 – Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour la fonction de survie dans l'exemple du modèle de corrosion. La vitesse de convergence empirique est -0.64.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté dans le chapitre 5 des méthodes numériques permettant d'approcher les moments et la fonction de survie d'un temps de sortie pour un PMDM. Nous avons prouvé la convergence de nos algorithmes et obtenu une vitesse dans le cas des moments. Nous avons ensuite mis en œuvre la méthode sur des applications pratiques dans le chapitre 6.

Dans le chapitre 4, nous avons également montré comment les résultats de la partie précédente pouvait permettre de calculer (ou du moins d'encadrer) l'espérance d'un temps de sortie. Cette approche est beaucoup moins ambitieuse car elle ne s'intéresse qu'à l'espérance et non aux autres moments ni à la distribution. Elle présente tout de même un intérêt car les hypothèses associées aux deux méthodes sont différentes. En effet, l'hypothèse III.2 est cruciale pour la méthode du chapitre 4 alors que nous avons vu que, dans le chapitre 5, elle peut être introduite par une transformation du processus si elle n'est pas vérifiée au départ. Au contraire, l'hypothèse III.4.a de continuité Lipschitz de u^* est essentielle dans le chapitre 5 alors qu'il est toujours possible d'obtenir un encadrement de l'espérance du temps de sortie grâce à la méthode du chapitre 4 même si la condition de continuité Lipschitz de u^* n'est pas remplie. De plus, on peut remarquer que la méthode du chapitre 4 repose sur des hypothèses de régularité, II.1, II.2 et II.3, des caractéristiques du processus alors que celle du chapitre 5 impose des contraintes à l'ensemble U duquel on cherche à calculer le temps de sortie, III.5 et III.6.

Nos méthodes, parce qu'elles s'appuient sur la quantification présentent certains avantages du point de vue pratique. Elles sont faciles à mettre en œuvre car il suffit de savoir simuler le processus. Par ailleurs, elles présentent une flexibilité appréciable. En effet, les grilles de quantification ne sont calculées qu'une fois pour toutes et peuvent servir plusieurs fins. Par exemple, il est important de signaler que, dans le cas du modèle de corrosion, nous avons utilisé, dans ce chapitre, les grilles qui avaient déjà été construites et utilisées dans le cadre du chapitre précédent. Ce sont les mêmes grilles qui ont servi, dans la partie II, à approcher l'espérance de fonctionnelle du PMDM et, dans ce chapitre, à approcher les moments et la fonction de survie du temps de sortie.

Concernant les méthodes développées dans cette partie en particulier, notons qu'une fois les grilles obtenues, la procédure permettant le calcul de $\widehat{p}_N(s)$ et de $\widehat{p}_{N,j}$ est simple et rapide car il ne s'agit que de calculer des sommes finies. Concernant la distribution, puisque $\widehat{p}_N(s)$ peut être calculé presque instantanément pour n'importe

quelle valeur de s, on peut obtenir très rapidement toute la fonction de survie. De la même manière, dans le cas des moments, $\widehat{p}_{N,j}$ peut être obtenu très rapidement pour n'importe quel j si bien que n'importe quel moment est disponible. De plus, dans les deux cas, on peut décider de changer l'ensemble U, c'est-à-dire de considérer le temps de sortie τ' d'un nouvel ensemble U'. Ceci changera les suites $(\widehat{q}_k)_{0\leq k\leq N}$, $(\widehat{r}_{k,j})_{0\leq k\leq N-1}$ et $(\widehat{p}_{k,j})_{0\leq k\leq N}$ dans le cas de l'approximation du j-ème moment ou les suites $(\widehat{q}_k)_{0\leq k\leq N}$, $(\widehat{r}_k(s))_{0\leq k\leq N-1}$ et $(\widehat{p}_k(s))_{0\leq k\leq N}$ si on s'intéresse à la distribution. Ces nouvelles suites seront obtenues rapidement et facilement puisque le processus quantifié restera le même et qu'on utilisera donc les mêmes grilles. Bien entendu, l'ensemble U' devra toujours satisfaire les hypothèses III.4 à III.2 et être tel que $\mathbf{P}_\mu(T_N < \tau')$ reste faible pour ne pas avoir à changer l'horizon de calcul N. Cette dernière condition est remplie si, par exemple, $U' \subset U$. Cette flexibilité est un avantage important vis-à-vis d'une méthode de Monte-Carlo classique.

Bibliographie

[Bouton and Pagès, 1997] Bouton, C. and Pagès, G. (1997). About the multidimensional competitive learning vector quantization algorithm with constant gain. *Ann. Appl. Probab.*, 7(3) :679–710.

[Brandejsky et al., 2012] Brandejsky, A., de Saporta, B., and Dufour, F. (2012). Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process. *Advances in Applied Probability*, 44(1) :196–225.

[Chiquet and Limnios, 2008] Chiquet, J. and Limnios, N. (2008). A method to compute the transition function of a piecewise deterministic Markov process with application to reliability. *Statist. Probab. Lett.*, 78(12) :1397–1403.

[Davis, 1993] Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

[de Saporta et al., 2010] de Saporta, B., Dufour, F., and Gonzalez, K. (2010). Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637.

[Feller, 1966] Feller, W. (1966). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons Inc., New York.

[Helmes et al., 2001] Helmes, K., Röhl, S., and Stockbridge, R. H. (2001). Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming. *Oper. Res.*, 49(4) :516–530.

[Kurtz and Stockbridge, 1998] Kurtz, T. G. and Stockbridge, R. H. (1998). Existence of Markov controls and characterization of optimal Markov controls. *SIAM J. Control Optim.*, 36(2) :609–653 (electronic).

[Lasserre, 2003] Lasserre, J. B. (2003). SDP versus LP relaxations for polynomial programming. In *Novel approaches to hard discrete optimization (Waterloo, ON, 2001)*, volume 37 of *Fields Inst. Commun.*, pages 143–154. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Lasserre and Prieto-Rumeau, 2004] Lasserre, J.-B. and Prieto-Rumeau, T. (2004). SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stoch. Models*, 20(4) :439–456.

Quatrième partie

Arrêt optimal partiellement observé

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème d'arrêt optimal partiellement observé pour les PMDM. Ce travail est inspiré de [Pham et al., 2005] qui s'intéresse au cas d'une chaîne de Markov à espace d'état fini. Les auteurs y étudient la question du filtrage optimal et proposent ensuite une méthode de quantification de ce processus de filtrage. Les résultats sont appliqués à un problème d'arrêt optimal partiellement observé dont ils approchent la fonction de valeur. Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre des PMDM. En particulier, il s'agit d'un problème en temps continu et non plus en temps discret. De plus, l'hypothèse **(H)** de [Pham et al., 2005] (il s'agit d'une hypothèse d'absolue continuité qui n'est pas satisfaite par la loi du PMDM) n'est pas vérifiée ce qui rend plus délicat l'étude du filtre. Par ailleurs, une étude fine de la structure des temps d'arrêt est nécessaire pour établir l'équation de programmation dynamique. Nous obtenons non seulement l'approximation de la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal mais surtout un temps d'arrêt ϵ-optimal calculable en pratique.

Plus précisément, nous considérons un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$, contenant les variables d'intérêt mais qui n'est pas observé directement. Le processus observé $(Y_t)_{t\geq 0}$ dépend du processus original $(X_t)_{t\geq 0}$ et d'un processus de bruit indépendant. Pour l'opérateur souhaitant arrêter le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ afin de maximiser une certaine récompense, la seule information disponible est $\mathfrak{F}^Y$, la filtration naturelle engendrée par $(Y_t)_{t\geq 0}$. Une propriété importante des PMDM réside dans le fait que tout l'aléa du processus est contenu dans une chaîne de Markov à temps discret $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous supposerons que les durées inter-sauts S_n sont parfaitement observées et que seules les positions après saut Z_n sont observées au travers d'un bruit.

Pour une fonction de récompense g donnée et un horizon de calcul $N \in \mathbb{N}$, nous nous intéressons au problème d'arrêt optimal partiellement observé suivant

$$\sup_{\sigma\leq T_N} \mathbf{E}\left[g(X_\sigma)\right],$$

où σ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration observée $\mathfrak{F}^Y$.

Contrairement aux deux parties précédentes, le cadre théorique nécessaire à la mise en place de méthodes numériques n'est pas directement disponible. En effet, dans la partie II, ce cadre est fourni par [Davis, 1993] : il s'agit de la construction de l'espérance de fonctionnelle par itération de l'opérateur G^A (voir section 2.2.2). Dans la partie III, les résultats théoriques qui sous-tendent les schémas numériques sont

développés in situ. Cependant, ils se limitent aux deux propositions 5.2.2 et 5.2.4 (qui donnent des formulations récursives originales de la fonction de survie et des moments). Dans le cas présent, nous commencerons donc par étudier le problème d'arrêt optimal partiellement observé d'un point de vue théorique (chapitres 7 et 8) avant de se tourner vers les méthodes numériques (chapitre 9).

Une méthodologie générale pour résoudre un tel problème consiste à le scinder en deux sous-problèmes. Le premier, l'étape de filtrage, a pour but d'obtenir le processus de filtre c'est-à-dire l'espérance conditionnelle de X_t par rapport à la tribu observée $\mathfrak{F}_t^Y$ afin de convertir le problème initial en un problème d'arrêt optimal standard, i.e. complètement observé, pour le processus de filtre. La seconde étape consiste à résoudre le problème ainsi reformulé. En contrepartie de son caractère "complètement observé", ce nouveau problème est de dimension accrue voire infinie. En effet, le processus de filtre est à valeurs dans un ensemble de mesures de probabilité. Un panorama des principales méthodes permettant d'aborder ces deux sous-problèmes est présenté dans [Ludkovski, 2009]. Concernant l'étape de filtrage, mentionnons simplement le filtre de Kalman-Bucy (voir [Kalman and Bucy, 1961]) qui correspond au cas d'un modèle linéaire gaussien et qui dispose d'une formule explicite. Remarquons cependant que, jusqu'ici, aucun résultat de ce genre n'avait été développé concernant le filtrage des PMDM. La principale difficulté repose dans la double nature, tantôt aléatoire tantôt déterministe, des sauts des PMDM.

Les résultats qui sont présentés dans cette partie sont inspirés de [Gugerli, 1986] et [de Saporta et al., 2010] qui étudient le problème d'arrêt optimal complètement observé pour les PMDM. Le premier établit l'équation de programmation dynamique tandis que le second présente des méthodes numériques pour approcher la fonction de valeur et un temps d'arrêt ϵ-optimal. Le point de départ dans [de Saporta et al., 2010] réside dans l'observation que tout l'aléa du PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ est contenu dans la chaîne de Markov à temps discret $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin de respecter la méthodologie à deux étapes décrite plus haut, la remarque précédente nous conduit à considérer le processus de filtrage Π_n à temps discret défini comme étant l'espérance conditionnelle de la position après saut Z_n par rapport à l'information disponible au temps T_n c'est-à-dire $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$. De plus, afin que le filtre soit de dimension finie, nous supposons que les positions après saut Z_n prennent un nombre fini de valeurs.

Par conséquent, la première étape consiste désormais à donner une formulation explicite du processus de filtrage $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etant donné la nature à temps discret du filtre, nous sommes en mesure d'établir une formule de récurrence satisfaite par le filtre en utilisant la méthode de prédiction/correction issue du cas de Kalman-Bucy. Cependant, il est nécessaire de prendre certaines précaution en raison de la nature à la fois absolument continue et singulière de la loi du PMDM. En effet, la récurrence obtenue est similaire à celle présentée dans [Pham et al., 2005] dans le cas d'un chaîne de Markov mais son établissement est beaucoup moins direct car l'hypothèse **(H)** de [Pham et al., 2005] n'est pas vérifiée.

Ensuite, le problème initial est réduit à un problème d'arrêt optimal complète-

ment observé pour le processus à temps discret $(\Pi_n, S_n)_{0\leq n\leq N}$ pour lequel nous cherchons à établir l'équation de programmation dynamique. Les résultats concernant l'arrêt optimal complètement observé d'un PMDM de [Gugerli, 1986] ne peuvent s'appliquer parce que la chaîne $(\Pi_n, S_n)_{0\leq n\leq N}$ n'est pas la chaîne de Markov sous-jacente d'un PMDM. Cependant, nous sommes en mesure de définir les contreparties des opérateurs de programmation dynamique de [Gugerli, 1986]. Une différence importante réside dans le fait suivant : les opérateurs de [Gugerli, 1986] sont lipschitziens alors que les nôtres ne le sont qu'entre des points de discontinuité, même si on impose des contraintes de régularité aux caractéristiques du PMDM. Ceci constituera une importante difficulté lors de la preuve de convergence des méthodes numériques. Concernant l'équation de programmation dynamique, notre preuve s'appuie essentiellement sur la propriété de Markov du processus de filtrage, que nous établissons, et sur la structure fine des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt que nous détaillons à l'aide d'un résultat de [Brémaud, 1981] portant sur les processus ponctuels.

Enfin, nous proposons des méthodes numériques qui visent à la fois à approcher la fonction de valeur mais également à obtenir un temps d'arrêt ϵ-optimal. Il est à noter que notre méthode fournit un véritable temps d'arrêt adapté à la filtration observée et non pas seulement une approximation. Une façon naturelle de procéder consiste alors à suivre les idées développées dans [de Saporta et al., 2010] c'est-à-dire à remplacer, au sein de l'équation de programmation dynamique, le filtre Π_n et les durées inter-sauts S_n par leur approximation quantifiée. Cependant, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, la continuité Lipschitz des opérateurs, qui était un argument crucial dans [de Saporta et al., 2010], n'est plus valable en raison de points de discontinuité. Nous parvenons à surmonter cet obstacle en décomposant les opérateurs en leurs restrictions sur les intervalles sur lesquels ils sont continus. Par ailleurs, afin de prouver la convergence de nos algorithmes, nous avons besoin d'exprimer les opérateurs, qui sont définis comme des espérances, sous forme intégrale. Pour obtenir ces formes, la formulation récursive du filtre est à nouveau nécessaire. Enfin, la quantification $\widehat{\Pi}_n$ du filtre Π_n est effectuée selon les idées développées dans [Pham et al., 2005] i.e. elle s'appuie sur la formulation récursive du filtre plutôt que sur une discrétisation du processus d'observation Y_n à partir de laquelle le filtre peut être déduit.

Cette partie est organisée de la façon suivante. Dans le chapitre 7, nous définissons précisément le problème d'arrêt optimal, le processus d'observation et les hypothèses attachées à cette partie (section 7.1) puis nous explicitons le processus de filtrage (section 7.2). Dans le chapitre 8, après quelques résultats préliminaires (sections 8.1 et 8.2), nous convertissons le problème d'arrêt optimal partiellement observé pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ en un problème d'arrêt optimal complètement observé pour le processus $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (section 8.3). Enfin, nous exploitons cette nouvelle formulation pour établir l'équation de programmation dynamique (sections 8.4 et 8.5). Enfin, le chapitre 9 présente nos méthodes numériques et établit leur convergence (section 9.2) après avoir étudié la continuité Lipschitz des opérateurs de programmation dynamique (section 9.1). Enfin, nos méthodes sont appliquées à un exemple académique (section 9.3).

Chapitre 7

Arrêt optimal partiellement observé et filtrage

Dans ce chapitre, nous allons définir le problème que nous étudions, notamment en précisant le processus d'observation et en énonçant les hypothèses spécifiques à cette partie. Ensuite, avant de nous tourner vers le problème d'arrêt optimal proprement dit, nous établissons une formulation récursive du processus de filtrage. Ce résultat sera fondamental puisque le filtre jouera, dans la suite, le rôle qu'avaient, dans les deux parties précédentes, les positions après saut, ces dernières n'étant désormais observées qu'au travers d'un bruit.

7.1 Définition du problème et hypothèses

Nous considérons un PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ dont l'état initial $X_0 = Z_0$ est déterministe c'est-à-dire que le processus part d'un point $x_0 \in E$ fixé. Nous supposons que ce PMDM est observé de manière bruitée. Avant de définir le problème d'arrêt optimal que nous étudions, il convient de préciser le processus d'observation.

Nous supposons que les temps de sauts sont parfaitement observés mais pas les positions après saut. Si on se place dans le cadre d'une application pratique comme le modèle de corrosion décrit à la section 1.2.5, ceci correspond à la situation où on sait à quels moments se produisent les changements d'environnement mais où on prend en compte une imprécision des mesures des paramètres physiques au moment de ces changements d'ambiance. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous supposons que S_n est parfaitement observé mais que Z_n ne l'est pas (sauf l'état initial Z_0). Nous supposons que le processus *observé* lors de la mesure bruitée de Z_n, noté Y_n, est de la forme suivante : $Y_0 = x_0$ (déterministe) et pour $n \geq 1$,

$$Y_n = \varphi(Z_n) + W_n \tag{7.1.1}$$

où $\varphi : E \to \mathbb{R}^d$ et où le *bruit* $(W_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, identiquement distribuées admettant la même densité bornée f_W qui sont également indépendantes de $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Afin de définir des temps d'arrêt en temps continu adaptés au processus d'observation, nous devons considérer un processus d'observation en temps continu. Nous définissons donc un processus ponctuel (i.e. constant par morceaux) $(Y_t)_{t\geq 0}$, avec un léger abus de notation [1], par

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{[T_j, T_{j+1}[}(t) Y_j.$$

Notons $\mathfrak{F}^Y = (\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par $(Y_t)_{t\geq 0}$ (la filtration *observée*) et $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ (la filtration *totale*). Sans changer ces notations, nous complétons ces filtrations avec tous les ensembles **P**-négligeables. Ceci nous conduit à la définition de l'ensemble des temps d'arrêt observables.

Définition 7.1.1 *Notons Σ^Y l'ensemble des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt qui sont finis p.s. et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également*

$$\Sigma_n^Y = \left\{ \sigma \in \Sigma^Y \text{ tel que } \sigma \leq T_n \text{ p.s.} \right\}.$$

Notons qu'avec cette construction, le processus ponctuel $(Y_t)_{t\geq 0}$ saute aux mêmes instants T_n que le PMDM original $(X_t)_{t\geq 0}$. Ainsi, nous montrerons (lemme 8.2.1) que ces instants de sauts sont des temps d'arrêt adaptés à la filtration observée $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$.

La position après saut Z_n du processus d'origine, quant à elle, n'est connue qu'au travers de la tribu $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$. Par conséquent, nous allons introduire la loi conditionnelle de Z_n sachant $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$ que nous nommerons le *filtre*. Celui-ci est à valeur dans un espace de mesures qui est, a priori, de dimension infinie. Afin d'obtenir une méthode numérique utilisable en pratique, il est nécessaire de se restreindre à un filtre de dimension finie. Ceci nous conduit à la principale hypothèse de cette partie

Hypothèse IV.1 *Il existe un ensemble fini $E_0 = \{x_1, \ldots, x_q\} \subset E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $Q(x, E_0) = 1$.*

En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n ne prend ses valeurs que dans l'ensemble fini E_0. Remarquons que cette hypothèse est satisfaite dans l'exemple académique de la section 1.2.2 mais également pour le modèle d'atelier de maintenance de la section 1.2.3 si on ne considère plus le processus augmenté du temps. Cette hypothèse sur le noyau de transition Q est assez restrictive, cependant, si elle n'est pas vérifiée, il est toujours possible d'envisager une discrétisation préliminaire du noyau afin de l'introduire.

Avant de définir le processus de filtrage, introduisons quelques notations supplémentaires. Pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, on note $t_r^* = t^*(x_r)$ et on suppose que x_1, x_2,..., x_q sont numérotés de sorte que $t_1^* \leq t_2^* \leq \ldots \leq t_q^*$. De plus, on pose $t_0^* = 0$. Nous notons $\mathcal{M}(E_0)$ l'ensemble des mesures signées de masse finie sur E_0 et $\mathcal{M}_1(E_0)$

1. La quantité Y_n représente la valeur du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ à l'instant $t = T_n$ à ne pas confondre avec la valeur du processus à l'instant $t = n$.

le sous-ensemble des mesures de probabilités sur E_0. Nous munissons $\mathcal{M}(E_0)$ de la norme $|\cdot|$ donnée par $|\pi| = \sum_{i=1}^{q} |\pi^i|$ où $\pi(\{x_i\})$ est noté π^i.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons maintenant le filtre Π_n à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E_0)$. La quantité $\Pi_n(\{x_i\})$, notée Π_n^i, représente la probabilité de l'évènement $\{Z_n = x_i\}$ sachant l'information disponible à l'instant T_n i.e.

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \qquad \Pi_n^i = \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{Z_n = x_i\}} \Big| \mathfrak{F}_{T_n}^Y]. \tag{7.1.2}$$

Finalement, soit $N \in \mathbb{N}$ que nous nommerons *l'horizon* et $g \in B(\overline{E})$ une *fonction de récompense*, nous nous intéressons au problème d'arrêt optimal partiellement observé d'horizon T_N suivant

$$v(\pi) = \sup_{\sigma \in \Sigma_N^Y} \mathbf{E}\left[g(X_\sigma) \Big| \Pi_0 = \pi\right], \tag{7.1.3}$$

où π est une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}_1(E_0)$. On obtient enfin la valeur souhaité en posant $\pi = \delta_{x_0}$.

La fonction v se nomme la *fonction de valeur* du problème d'arrêt optimal. Par ailleurs, un temps d'arrêt $\sigma^* \in \Sigma_N^Y$ est dit *optimal* s'il vérifie

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma^*}) \Big| \Pi_0 = \pi\right] = v(\pi),$$

et un temps d'arrêt $\sigma^\epsilon \in \Sigma_N^Y$ est dit ϵ-*optimal* s'il vérifie

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma^\epsilon}) \Big| \Pi_0 = \pi\right] \geq v(\pi) - \epsilon.$$

En général, il n'existe pas de temps d'arrêt optimal mais des temps d'arrêt ϵ-optimaux existent toujours pour tout $\epsilon > 0$.

Dans le chapitre 9, on proposera un schéma d'approximation numérique de la fonction de valeur ainsi que le calcul d'un vrai temps d'arrêt ϵ-optimal. Cependant, avant de se tourner vers des considérations numériques, il est nécessaire de développer le cadre théorique dans lequel on pourra mettre en place une méthode d'approximation.

Ainsi que nous l'avons exposé plus haut, l'étude d'un tel problème partiellement observé se décompose en deux sous-problèmes.

- Le premier, qui est l'objet du reste de ce chapitre, est constitué du calcul du processus de filtrage car c'est lui qui permettra de reformuler le problème en un problème complètement observé.
- Le second, étudié dans le chapitre 8, consiste à résoudre ce nouveau problème en exhibant l'équation de programmation dynamique correspondante.

L'hypothèse suivante ne sera vraiment cruciale que pour prouver la convergence de nos schémas numériques dans le chapitre 9 mais nous l'introduisons d'ores et déjà par commodité.

Hypothèse IV.2 *Le temps de sortie déterministe t^* est borné sur E_0 i.e. pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, on a $0 < t_r^* < +\infty$.*

On en déduit que la fonction t^* est bornée sur E_0 par t_q^*. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la durée inter-sauts S_n satisfait $S_n \leq t_q^*$, $\mathbf{P}$ p.s.

Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude du processus de filtrage. Nous établissons dans la section suivante une formule de récurrence pour calculer le filtre.

7.2 Filtrage optimal

L'objectif de cette section est d'obtenir une formulation récursive du filtre Π_n. En effet, pour autant que nous le sachions, il n'existe pas, jusqu'alors, de tel résultat dans le cas des PMDM. Nous renvoyons cependant à [Arjas et al., 1992] pour une formulation récursive du filtre dans le cas des processus ponctuels qui constituent une sous-classe des PMDM.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons $\mathcal{G}_n = (Y_0, S_0, \ldots, Y_n, S_n)$. Le processus d'observation à temps continu $(Y_t)_{t\geq 0}$ étant un processus ponctuel au sens développé dans [Brémaud, 1981], on a $\mathfrak{F}_{T_n}^Y = \sigma(\mathcal{G}_n)$ (il s'agit du résultat [Brémaud, 1981, page 58, Theorem T2]). De plus, $\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n) \vee \mathfrak{F}_{T_n}^Y$. Concernant le filtre Π_n, notons tout d'abord que, puisqu'il s'agit d'une variable aléatoire $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$-mesurable, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction mesurable $\pi_n : \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^{n+1} \to \mathcal{M}_1(E_0)$ telle que

$$\Pi_n = \pi_n(\mathcal{G}_n).$$

Comme dans le cas du filtre de Kalman-Bucy, l'itération permettant de passer de la loi Π_{n-1} à la loi Π_n se décompose en deux étapes : prédiction et correction. On introduit donc pour tout $n \geq 1$, μ_n^- la loi conditionnelle de (Z_n, S_n) sachant $\mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y$. Ainsi, μ_n^- est un noyau de transition défini sur $\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n \times \mathcal{B}(E_0 \times \mathbb{R}^+)$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$ et pour tout $\gamma_{n-1} \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n$, on ait

$$\mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds) = \mathbf{P}(Z_n = x_j, S_n \in ds | \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}). \tag{7.2.1}$$

La relation de récurrence satisfaite par le filtre sera alors obtenue selon la méthode suivante.

Prédiction : $\Pi_{n-1} \to \mu_n^-$. La loi de (Z_n, S_n) est "prédite" à partir des observations jusqu'à l'instant T_{n-1}.

Correction : $\mu_n^- \to \Pi_n$. L'estimation précédente est "corrigée" à l'aide de la nouvelle observation Y_n.

Le lemme suivant constitue l'étape de prédiction, il s'agit d'un calcul d'espérance conditionnelle.

Lemme 7.2.1 *Pour tous* $n \geq 1$, $\gamma_{n-1} \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n$ *et* $j \in \{1, \ldots, q\}$, *la loi* μ_n^-, *définie par l'équation* (7.2.1), *satisfait*

$$\begin{aligned}
&\mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds) \\
&= \sum_{r=0}^{q-1} \mathbb{1}_{\{s \in]t_r^*; t_{r+1}^*[\}} \left(\sum_{i=r+1}^{q} \pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1}) \lambda(\Phi(x_i, s)) e^{-\Lambda(x_i, s)} Q(\Phi(x_i, s), x_j) \right) ds \\
&\quad + \sum_{r=1}^{q} \left(\pi_{n-1}^r(\gamma_{n-1}) e^{-\Lambda(x_r, t_r^*)} Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_j) \right) \delta_{t_r^*}(ds).
\end{aligned}$$

Démonstration Soit une fonction $h \in B(E_0 \times \mathbb{R}^+)$. Puisque $\sigma(\mathcal{G}_{n-1}) = \mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y \subset \mathfrak{F}_{T_{n-1}}$, la loi des espérances conditionnelles itérées donne

$$\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right]. \tag{7.2.2}$$

Par ailleurs, $\mathfrak{F}_{T_{n-1}} = \sigma(Z_0, S_0, W_0, \ldots, Z_{n-1}, S_{n-1}, W_{n-1})$ si bien que

$$\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] = \mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| Z_0, S_0, \ldots, Z_{n-1}, S_{n-1}\right],$$

par indépendance des suites $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On applique alors la propriété de Markov de la chaîne $(Z_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'obtenir

$$\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] = \mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| Z_{n-1}, S_{n-1}\right].$$

Finalement, la loi conditionnelle de (Z_n, S_n) sachant (Z_{n-1}, S_{n-1}) est connue (voir l'équation (1.1.6)), en particulier, on a

$$\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] = \mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| Z_{n-1}\right].$$

Enfin, dans l'équation (7.2.2), on explicite le terme ci-dessus, la loi conditionnelle étant donnée par l'équation (1.1.6).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{q} \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=x_i\}} \mathbf{E}\left[h(Z_n, S_n) \middle| Z_{n-1} = x_i\right] \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right] \\
&= \mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{q} \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=x_i\}} \sum_{j=1}^{q} \Big[\int_{\mathbb{R}^+} h(x_j, s) \lambda(\Phi(x_i, s)) e^{-\Lambda(x_i, s)} \mathbb{1}_{\{s<t_i^*\}} Q(\Phi(x_i, s), x_j) ds \\
&\quad + h(x_j, t_i^*) e^{-\Lambda(x_i, t_i^*)} Q(\Phi(x_i, t_i^*), x_j) \Big] \Big| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{q} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^+} h(x_j, s) \sum_{i=1}^{q} \pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1}) \lambda(\Phi(x_i, s)) e^{-\Lambda(x_i, s)} \mathbb{1}_{\{s<t_i^*\}} Q(\Phi(x_i, s), x_j) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q} h(x_j, t_i^*) \pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1}) e^{-\Lambda(x_i, t_i^*)} Q(\Phi(x_i, t_i^*), x_j) \Bigg].
\end{aligned}$$

En supprimant les fonctions indicatrices contenant les t_i^*, ceci s'écrit de façon équivalente.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h(Z_n,S_n)\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{q}\left[\sum_{r=0}^{q-1}\left(\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*} h(x_j,s)\sum_{i=r+1}^{q}\pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1})\lambda(\Phi(x_i,s))e^{-\Lambda(x_i,s)}Q(\Phi(x_i,s),x_j)\right)ds\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{q}h(x_j,t_i^*)\pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1})e^{-\Lambda(x_i,t_i^*)}Q(\Phi(x_i,t_i^*),x_j)\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

L'étape de correction a pour point de départ la formule de Bayes selon laquelle pour tous $\gamma_{n-1}\in\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\right)^n$, $y\in\mathbb{R}^d$ et $s\in\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(Z_n=x_j,Y_n\in dy,S_n\in ds\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right)=\\
&\qquad\mathbf{P}\left(Z_n=x_j\Big|\mathcal{G}_n=(\gamma_{n-1},y,s)\right)\times\mathbf{P}\left(Y_n\in dy,S_n\in ds\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la formule ci-dessus $\pi_n^j(\gamma_{n-1},y,s)=\mathbf{P}\left(Z_n=x_j\Big|\mathcal{G}_n=(\gamma_{n-1},y,s)\right)$, il convient donc d'étudier les lois conditionnelles de (Z_n,Y_n,S_n) et (Y_n,S_n) sachant $\mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y$. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 7.2.2 *Pour tout $\gamma_{n-1}\in\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\right)^n$, on a l'égalité de mesures de probabilités sur $E_0\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+$ suivante, pour tout $j\in\{1,\dots,q\}$,*

$$\mathbf{P}(Z_n=x_j,Y_n\in dy,S_n\in ds|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1})=\mu_n^-(\gamma_{n-1},\{x_j\},ds)f_W(y-\varphi(x_j))dy.$$

Démonstration Soit une fonction $h\in B\left(E_0\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\right)$, d'après l'équation (7.1.1) qui définit Y_n, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h(Z_n,Y_n,S_n)\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right]\\
&= \mathbf{E}\left[h(Z_n,\varphi(Z_n)+W_n,S_n)\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{q}\int h(x_j,\varphi(x_j)+w,s)\mathbf{P}(Z_n=x_j,S_n\in ds,W_n\in dw|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}).
\end{aligned}$$

De plus, W_n est indépendant de $\sigma(Z_n,S_n)\vee\mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y=\sigma(Z_n,S_n,\mathcal{G}_{n-1})$ et admet la densitéf_W. On a donc

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h(Z_n,Y_n,S_n)\Big|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{q}\int h(x_j,\varphi(x_j)+w,s)\mathbf{P}(Z_n=x_j,S_n\in ds|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1})f_W(w)dw\\
&= \sum_{j=1}^{q}\int h(x_j,y,s)\mathbf{P}(Z_n=x_j,S_n\in ds|\mathcal{G}_{n-1}=\gamma_{n-1})f_W(y-\varphi(x_j))dy.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par le changement de variable $y = \varphi(x_j) + w$ et donne le résultat attendu. □

En intégrant par rapport à la première variable dans le lemme précédent (i.e. en sommant sur les x_j), on obtient le résultat suivant.

Lemme 7.2.3 *Pour tout $\gamma_{n-1} \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n$, on a l'égalité de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ suivante,*

$$\mathbf{P}(Y_n \in dy, S_n \in ds | \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}) = \left[\sum_{j=1}^{q} \mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds) f_W(y - \varphi(x_j))\right] dy.$$

Nous énonçons maintenant le résultat principale de ce chapitre à savoir la formulation récursive du filtre $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 7.2.4 *Soit $\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^q) : \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_1(E_0)$ définie de la façon suivante : pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$,*

$$\Psi^j(\pi, y, s) = \sum_{r=0}^{q-1} \mathbb{1}_{\{s\in]t_r^*; t_{r+1}^*[\}} \frac{\Psi_r^j(\pi, y, s)}{\overline{\Psi}_r(\pi, y, s)} + \sum_{r=1}^{q} \mathbb{1}_{\{s=t_r^*\}} \frac{\Psi_r^{*j}(y)}{\overline{\Psi}_r^*(y)}$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
\Psi_r^j(\pi, y, s) &= \sum_{i=r+1}^{q} \pi^i \lambda(\Phi(x_i, s)) e^{-\Lambda(x_i, s)} Q(\Phi(x_i, s), x_j) f_W(y - \varphi(x_j)), \\
\overline{\Psi}_r(\pi, y, s) &= \sum_{j=1}^{q} \Psi_r^j(\pi, y, s), \\
\Psi_r^{*j}(y) &= Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_j) f_W(y - \varphi(x_j)), \\
\overline{\Psi}_r^*(y) &= \sum_{j=1}^{q} \Psi_r^{*j}(y).
\end{aligned}$$

Alors, le filtre, défini par l'équation (7.1.2)*, vérifie $\Pi_0^j = \mathbf{P}(Z_0 = x_j)$ et satisfait à la récurrence suivante : pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbf{P}\text{-}p.s., \qquad \Pi_n = \Psi(\Pi_{n-1}, Y_n, S_n).$$

Démonstration Soit γ_{n-1} un élément fixé de $\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la formule de Bayes fournit pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(Z_n = x_j, Y_n \in dy, S_n \in ds \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right) = \\
&\quad \mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, s)\right) \times \mathbf{P}\left(Y_n \in dy, S_n \in ds \middle| \mathcal{G}_{n-1} = \gamma_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Les lemmes 7.2.2 et 7.2.3 donnent alors

$$\begin{aligned}
&\mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds) f_W(y - \varphi(x_j)) dy \\
&\quad = \mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, s)\right) \left[\sum_{k=1}^{q} \mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_k\}, ds) f_W(y - \varphi(x_k))\right] dy.
\end{aligned}$$

Par rapport à y, on reconnaît l'égalité de deux mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ce qui implique l'égalité presque partout des densités. Ainsi, on a pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned}&\mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds) f_W(y - \varphi(x_j)) \\ &= \mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, s)\right) \left[\sum_{k=1}^{q} \mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_k\}, ds) f_W(y - \varphi(x_k))\right]. \quad (7.2.3)\end{aligned}$$

L'équation (7.2.3) énonce alors l'égalité de deux mesures sur $\mathbb{R}^+$ qui contiennent à la fois une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et des masses de Dirac. Notons $g_1(y,s)\nu_1(ds)$ (respectivement $g_2(y,s)\nu_2(ds)$) le terme de gauche (respectivement de droite) de l'équation précédente. L'équation (7.2.3) signifie que pour toute fonction $F \in B(\mathbb{R}^+)$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\int F(s) g_1(y,s) \nu_1(ds) = \int F(s) g_2(y,s) \nu_2(ds). \quad (7.2.4)$$

Rappelons alors que, d'après le lemme 7.2.1, la loi $\mu_n^-(\gamma_{n-1}, \{x_j\}, ds)$ admet une densité sur l'intervalle $]t_r^*; t_{r+1}^*[$, que nous noterons $f_r(\gamma_{n-1}, x_j, s)$, donnée par

$$f_r(\gamma_{n-1}, x_j, s) = \sum_{i=r+1}^{q} \pi_{n-1}^i(\gamma_{n-1}) \lambda(\Phi(x_i, s)) e^{-\Lambda(x_i, s)} Q(\Phi(x_i, s), x_j).$$

Dans l'équation (7.2.4), nous prenons tout d'abord $F(s) = H(s) \mathbb{1}_{\{s \in]t_r^*; t_{r+1}^*[\}}$ si bien que pour toute fonction $H \in B(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\begin{aligned}&\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*} H(s) f_r(\gamma_{n-1}, x_j, s) f_W(y - \varphi(x_j)) ds \\ &= \int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*} H(s) \mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, s)\right) \left(\sum_{k=1}^{q} f_r(\gamma_{n-1}, x_k, s) f_W(y - \varphi(x_k))\right) ds,\end{aligned}$$

et ainsi sur $]t_r^*; t_{r+1}^*[$, presque sûrement par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, s)\right) = \frac{f_r(\gamma_{n-1}, x_j, s) f_W(y - \varphi(x_j))}{\sum_{k=1}^{q} f_r(\gamma_{n-1}, x_k, s) f_W(y - \varphi(x_k))}.$$

Enfin, pour $r \in \{1, \ldots, q\}$, on choisit $F(s) = \mathbb{1}_{\{s = t_r^*\}}$ dans l'équation (7.2.4) ce qui fournit l'égalité des masses sur le point t_r^* d'où, en utilisant le lemme 7.2.1,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(Z_n = x_j \middle| \mathcal{G}_n = (\gamma_{n-1}, y, t_r^*)\right) \\ &= \frac{\pi_{n-1}^r(\gamma_{n-1}) e^{-\Lambda(x_r, t_r^*)} Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_j) f_W(y - \varphi(x_j))}{\sum_{k=1}^{q} \pi_{n-1}^r(\gamma_{n-1}) e^{-\Lambda(x_r, t_r^*)} Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_k) f_W(y - \varphi(x_k))} \\ &= \frac{Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_j) f_W(y - \varphi(x_j))}{\sum_{k=1}^{q} Q(\Phi(x_r, t_r^*), x_k) f_W(y - \varphi(x_k))}.\end{aligned}$$

Jusqu'ici, nous avons montré qu'il existe deux ensembles mesurables $N_y \subset \mathbb{R}^d$ et $N_s \subset \mathbb{R}^+ \backslash \{t_1^*, \ldots, t_q^*\}$, négligeables par rapport aux mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et

$\mathbb{R}^+$ respectivement, tels que pour tous $\gamma_{n-1} \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^n$, $y \in \mathbb{R}^d \backslash N_y$, $s \in \mathbb{R}^+ \backslash N_s$, on ait

$$\pi_n(\gamma_{n-1}, y, s) = \Psi(\pi_{n-1}(\gamma_{n-1}), y, s). \tag{7.2.5}$$

Par ailleurs, d'une part, nous avons

$$\mathbf{P}(Y_n \in N_y) \leq \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}(\varphi(x_j) + W_n \in N_y) = 0,$$

par absolue continuité de la loi de W_n. D'autre part,

$$\mathbf{P}(S_n \in N_s) = 0,$$

car la loi S_n est absolument continue sur $\mathbb{R}^+ \backslash \{t_1^*, \ldots, t_q^*\}$ et on a $N_s \cap \{t_1^*, \ldots, t_q^*\} = \emptyset$. Nous obtenons alors, d'après l'équation (7.2.5) que $\mathbf{P}$-p.s.,

$$\pi_n(\mathcal{G}_{n-1}, Y_n, S_n) = \Psi(\pi_{n-1}(\mathcal{G}_{n-1}), Y_n, S_n).$$

Nous concluons en rappelant que $\mathbf{P}$-p.s., on a $\Pi_n = \pi_n(\mathcal{G}_{n-1}, Y_n, S_n)$ et $\Pi_{n-1} = \pi_{n-1}(\mathcal{G}_{n-1})$. □

Notons que la structure spécifique des PMDM apparaît dans la formule du filtre que nous venons d'établir car elle contient à la fois une partie absolument continue et des masses ponctuelles.

Cette proposition jouera un rôle crucial dans la suite. D'une part, ce résultat nous permettra d'établir la propriété de Markov par rapport à la filtration observée des processus $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\geq 0}$, $(\Pi_n, S_n)_{n\geq 0}$ et $(\Pi_n)_{n\geq 0}$. D'autre part, cette formulation récursive permettra de simuler effectivement le processus $(\Pi_n)_{n\geq 0}$ et donc d'envisager sa quantification.

Munis de cette étude préliminaire du processus de filtrage, nous allons chercher à reformuler le problème d'arrêt optimal partiellement observé (7.1.3) pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ en un problème d'arrêt optimal complètement observé pour le processus $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour ensuite résoudre ce nouveau problème.

Chapitre 8

Programmation dynamique

Dans ce chapitre, nous allons établir l'équation de programmation dynamique pour le calcul de la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal partiellement observé (7.1.3). Après une étude préliminaire de la structure des temps d'arrêt de Σ_N^Y, la première étape consistera à convertir le problème d'arrêt optimal partiellement observé pour le PMDM $(X_t)_{t\geq 0}$ en un problème complètement observé pour le processus $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, à partir de cette nouvelle formulation, nous introduirons des opérateurs permettant de construire une suite de fonction $(v_n)_{0\leq n\leq N}$ dont nous montrerons qu'elles sont respectivement les fonction de valeur des problèmes d'arrêts optimaux d'horizon $(T_{N-n})_{0\leq n\leq N}$. En particulier, nous prouverons que v_0 est la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal (7.1.3) qui nous intéresse et nous détaillerons la construction d'une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux.

8.1 La chaîne de Markov $(\Pi_n, S_n)_{n\geq 0}$

Dans cette première section, nous établissons la propriété de Markov de plusieurs processus à l'aide de la formule de récurrence du filtre.

Proposition 8.1.1 *Les suites* $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des chaînes de Markov pour la filtration* $(\mathfrak{F}_{T_n}^Y)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration Soit une fonction $h \in B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$. On a d'après la loi des espérances conditionnelles itérées

$$\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right]\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}^Y\right].$$

Nous utilisons alors la proposition 7.2.4 d'après laquelle pour tout $n \geq 1$, $\Pi_n = \Psi(\Pi_{n-1}, Y_n, S_n)$ et l'équation (7.1.1) qui définit Y_n. On obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, \varphi(Z_n)+W_n, S_n), \varphi(Z_n)+W_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{q}\int h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, \varphi(x_j)+w, s), \varphi(x_j)+w, s\Big) \\
&\quad \times \mathbf{P}(Z_n = x_j, W_n \in dw, S_n \in ds\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}).
\end{aligned}$$

De plus, en remarquant que W_n est indépendante de $\sigma(Z_n, S_n) \vee \mathfrak{F}_{T_{n-1}}$ et admet la fonction de densité f_W et en posant le changement de variable $y = \varphi(x_j) + w$ on a, comme dans la preuve du lemme 7.2.2,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{q}\int h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, y, s), y, s\Big)\mathbf{P}(Z_n = x_j, S_n \in ds\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}})f_W(y-\varphi(x_j))dy.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons $\mathbf{P}(Z_n = x_j, S_n \in ds\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}) = \mathbf{P}(Z_n = x_j, S_n \in ds\Big|Z_{n-1})$, cette loi conditionnelle étant décrite par l'équation (1.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}_{T_{n-1}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=x_i\}}\sum_{j=1}^{q}\int\Bigg(\int_0^{t_i^*} h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, y, s), y, s\Big)\lambda(\Phi(x_i,s))e^{-\Lambda(x_i,s)}Q(\Phi(x_i,s),x_j)ds \\
&\quad + h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, y, t_i^*), y, t_i^*\Big)e^{-\Lambda(x_i,t_i^*)}Q\Big(\Phi(x_i,t_i^*),x_j\Big)\Bigg)f_W(y-\varphi(x_j))dy.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathfrak{F}^Y_{T_{n-1}}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}^Y_{T_{n-1}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{q}\Pi^i_{n-1}\sum_{j=1}^{q}\int\Bigg(\int_0^{t_i^*} h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, y, s), y, s\Big)\lambda(\Phi(x_i,s))e^{-\Lambda(x_i,s)}Q(\Phi(x_i,s),x_j)ds \\
&\quad + h\Big(\Psi(\Pi_{n-1}, y, t_i^*), y, t_i^*\Big)e^{-\Lambda(x_i,t_i^*)}Q\Big(\Phi(x_i,t_i^*),x_j\Big)\Bigg)f_W(y-\varphi(x_j))dy.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{E}\left[h\Big(\Pi_n, Y_n, S_n\Big)\Big|\mathfrak{F}^Y_{T_{n-1}}\right]$ n'est fonction que de Π_{n-1} ce qui établit la propriété de Markov des trois processus. □

Nous aurons besoin de la propriété de Markov des trois processus précédents. Celle de $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permettra d'étudier dans la section suivante la structure

des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. La propriété de Markov de la chaîne $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera nécessaire pour pouvoir envisager sa quantification lorsque nous mettrons en place un schéma d'approximation numérique dans le chapitre 9. Enfin, c'est la propriété de Markov de la chaîne $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous utiliserons pour démontrer les théorèmes 8.5.1 et 8.5.2 qui établissent l'équation de programmation dynamique.

8.2 Les $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt

Le problème d'arrêt optimal qui nous intéresse porte sur les $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt, il semble ainsi naturel de les étudier et, plus précisément, de mettre en évidence une structure similaire à celle utilisée dans [Gugerli, 1986]. Cette section contient donc quelques résultats préliminaires techniques qui seront nécessaires pour établir l'équation de programmation dynamique et qui détaillent la structure des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

Commençons par le résultat suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 8.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.*

Démonstration Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y_n = Y_{n+1}) = 0$. Ceci résulte de l'absolue continuité des lois des variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque

$$\{Y_n = Y_{n+1}\} \subset \bigcup_{1\leq i,j\leq q} \{W_n - W_{n+1} = \varphi(x_i) - \varphi(x_j)\}.$$

Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a, à un ensemble $\mathbf{P}$ négligeable près, $\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$ où on note $N_t = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Y_{s^-}\}}$. Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est $\mathfrak{F}^Y$-adapté ainsi $\{N_t \geq n\} \in \mathfrak{F}_t^Y$ et puisque la filtration $\mathfrak{F}^Y$ contient les ensembles $\mathbf{P}$ négligeables, on a $\{T_n \leq t\} \in \mathfrak{F}_t^Y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est donc un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. □

Nous rappelons alors un résultat de P. Brémaud ([Brémaud, 1981, théorème A2 T33]) concernant la structure des temps d'arrêt pour les processus ponctuels. C'est ce résultat qui était utilisé dans [Gugerli, 1986] pour établir l'équation de programmation dynamique. Nous montrons ensuite comment l'appliquer dans notre cas.

Définition 8.2.2 *Soit la filtration $(\mathfrak{F}_t^p)_{t\geq 0}$ définie par*

$$\mathfrak{F}_t^p = \sigma\left(\mathbb{1}_{\{Y_n\in A\}}\mathbb{1}_{\{T_n\leq s\}}; n \geq 1, 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right).$$

Théorème 8.2.3 *Soit σ un $(\mathfrak{F}_t^p)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une variable aléatoire positive R_n, qui est $\mathfrak{F}_{T_n}^p$ mesurable et telle que sur l'évènement $\{\sigma \geq T_n\}$, on ait*

$$\sigma \wedge T_{n+1} = \left(T_n + R_n\right) \wedge T_{n+1}.$$

Notre processus d'observation à temps continu $(Y_t)_{t\geq 0}$ étant un processus ponctuel qui entre dans le cadre étudié par [Brémaud, 1981], nous cherchons à appliquer le théorème ci-dessus à des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Ceci est permis d'après le résultat suivant selon lequel la filtration $(\mathfrak{F}_t^p)_{t\geq 0}$ est en réalité notre filtration $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$.

Proposition 8.2.4 *Pour tout $t \geq 0$, on a $\mathfrak{F}_t^Y = \mathfrak{F}_t^p$.*

Démonstration D'une part, montrons que $\mathfrak{F}_t^Y \subset \mathfrak{F}_t^p$. Soit un évènement $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $0 \leq s \leq t$, on a

$$\{Y_s \in A\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \Big(\{T_n \leq s < T_{n+1}\} \cap \{Y_n \in A\} \Big) \in \mathfrak{F}_s^p \subset \mathfrak{F}_t^p.$$

Dans l'équation ci-dessus, nous avons utilisé le fait que T_0 et Y_0 sont, par hypothèse, déterministes.

D'autre part, on a $\mathfrak{F}_t^p \subset \mathfrak{F}_t^Y$. En effet, soit un évènement $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq s \leq t$. Rappelons que, avec un léger abus de notation, $Y_n = Y_{T_n}$. On a $\{Y_{T_n} \in A\} \in \mathfrak{F}_{T_n}^Y$ puisque $(Y_t)_{t\geq 0}$ est $\mathfrak{F}^Y$ adapté et puisque T_n est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt d'après le lemme 8.2.1. Par conséquent, on a

$$\{Y_n \in A\} \cap \{T_n \leq s\} \in \mathfrak{F}_s^Y \subset \mathfrak{F}_t^Y.$$

D'où le résultat. □

Nous pouvons donc appliquer le théorème 8.2.3 aux $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. En d'autres termes, on dispose du résultat suivant.

Théorème 8.2.5 *Soit σ un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une variable aléatoire positive R_n qui est $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$ mesurable et telle que, sur l'évènement $\{\sigma \geq T_n\}$, on ait*

$$\sigma \wedge T_{n+1} = \Big(T_n + R_n\Big) \wedge T_{n+1}.$$

Nous énonçons alors le résultat suivant, qui est une conséquence directe du théorème 8.2.5, car il sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 8.2.6 *Soit σ un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\{T_n \leq \sigma < T_{n+1}\} = \{T_n \leq \sigma\} \cap \{S_{n+1} > R_n\}.$$

Démonstration D'après le théorème 8.2.5, sur l'évènement $\{T_n \leq \sigma\}$, on a $\sigma \wedge T_{n+1} = T_n + \Big(R_n \wedge S_{n+1}\Big)$ si bien que, toujours sur cet évènement $\{T_n \leq \sigma\}$, on a

$$\sigma < T_{n+1} \Leftrightarrow R_n < S_{n+1}.$$

On en déduit le résultat. □

Nous cherchons maintenant à étudier l'effet de l'opérateur de translation de la chaîne de Markov $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur les $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. Nous avons déjà prouvé (voir la proposition 8.1.1) que $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathfrak{F}_{T_n}^Y)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov. Nous considérons alors son espace canonique $\Omega = (\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega$, on a $(\Pi_n, Y_n, S_n)(\omega) = \omega_n$. Par ailleurs, nous définissons *l'opérateur de translation* par

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \Omega \\ (\omega_0, \omega_1, \ldots) & \to & (\omega_1, \omega_2, \ldots). \end{array} \right.$$

Nous posons alors $\theta^0 = Id_\Omega$ et par récurrence pour $l \geq 2$, $\theta^l = \theta \circ \theta^{l-1}$. Ainsi, pour tous $n, l \in \mathbb{N}$, on a $(\Pi_n, Y_n, S_n) \circ \theta^l = (\Pi_{n+l}, Y_{n+l}, S_{n+l})$. En rappelant que $T_0 = 0$, on a enfin

$$T_n \circ \theta^l = \sum_{k=1}^{n} S_k \circ \theta^l = \sum_{k=1}^{n} S_{k+l} = T_{n+l} - T_l.$$

Les résultats suivants de cette section, le lemme 8.2.7, la définition 8.2.8, les propositions 8.2.9 et 8.2.10 et le corollaire 8.2.11, sont énoncés sans preuve car leur démonstration est similaire à celle détaillée dans [de Saporta et al., 2010] et dont ils sont adaptés (lemme B2, définition B3, propositions B4 et B5 et corrolaire B6). Cependant, il est important de remarquer que les résultats qui sont obtenus dans [de Saporta et al., 2010] ne peuvent être appliqués directement ici car la suite $(\Pi_n, Y_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bien que ce soit une chaîne de Markov, n'est pas la chaîne de Markov sous-jacente d'un PMDM.

Soit $\sigma \in \Sigma^Y$. On rappelle que, d'après le théorème 8.2.5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une variable aléatoire positive R_n qui est $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$ mesurable et telle que, sur l'évènement $\{\sigma \geq T_n\}$, on ait

$$\sigma \wedge T_{n+1} = \Big(T_n + R_n\Big) \wedge T_{n+1}.$$

Lemme 8.2.7 *Soit $\overline{R}_0 = R_0$ et pour $k \geq 1$, $\overline{R}_k = R_k \mathbb{1}_{\{S_k \leq \overline{R}_{k-1}\}}$. On a alors*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{R}_{n-1} \wedge S_n.$$

Ce lemme prouve que, dans le théorème 8.2.5, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être remplacée par $(\overline{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, dans la suite, nous supposerons, sans perte de généralité que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la condition suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = 0$ sur l'évènement $\{S_{n+1} > R_n\}$.

Comme, $\mathfrak{F}_{T_k}^Y = \sigma(Y_j, S_j, j \leq k)$, il existe une suite de fonctions mesurables réelles $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies sur $\Big(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\Big)^{k+1}$ telles que

$$R_k = r_k(\mathcal{G}_k),$$

où $\mathcal{G}_k = (Y_0, S_0, \ldots, , Y_k, S_k)$.

Définition 8.2.8 *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\widetilde{R}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\Big(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\Big)^{l+1} \times \Omega$ par*

$$\widetilde{R}_0^l(\gamma, \omega) = r_l(\gamma),$$

et pour $k \geq 1$,

$$\widetilde{R}_k^l(\gamma, \omega) = r_{l+k}(\gamma, \mathcal{G}_{k-1}(\omega)) \mathbb{1}_{\{S_k \leq \widetilde{R}_{k-1}^l\}}(\gamma, \omega).$$

Proposition 8.2.9 *Supposons que $T_l \leq \sigma \leq T_N$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{R}_k^l(\mathcal{G}_l, \theta^l) = \overline{R}_{l+k}$ et*

$$\sigma = T_l + \widetilde{\sigma}(\mathcal{G}_l, \theta^l),$$

avec $\widetilde{\sigma} : \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^{l+1} \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ défini de la façon suivante

$$\widetilde{\sigma}(\gamma, \omega) = \sum_{n=1}^{N-l} \widetilde{R}_{n-1}^l(\gamma, \omega) \wedge S_n(\omega).$$

Proposition 8.2.10 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires positives telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n soit $\mathfrak{F}_{T_n}^Y$ mesurable et $U_{n+1} = 0$ sur l'évènement $\{S_{n+1} > U_n\}$. On définit*

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-1} \wedge S_n.$$

Alors U est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.

Corollaire 8.2.11 *Pour tout $\gamma \in \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\right)^{p+1}$, $\widetilde{\sigma}(\gamma, \cdot)$ est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.*

Ces résultats qui concluent nos sections préliminaires, seront cruciaux pour démontrer les théorèmes 8.5.1 et 8.5.4 qui établissent l'équation de programmation dynamique.

8.3 Problème d'arrêt optimal complètement observé

Dans cette section, nous montrons que notre problème d'arrêt optimal partiellement observé pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ peut être converti en un problème d'arrêt optimal complètement observé pour la chaîne de Markov $(\Pi_n, S_n)_{0\leq n\leq N}$. Remarquons que, non seulement le problème devient complètement observé, mais également nous substituons au processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à temps continu la chaîne $(\Pi_n, S_n)_{0\leq n\leq N}$ qui est à temps discret. Cependant, ce résultat ne signifie pas que nous sommes ramenés au problème d'arrêt optimal complètement observé étudié du point de vue théorique dans [Gugerli, 1986] et numérique dans [de Saporta et al., 2010] car la suite $(\Pi_n, S_n)_{n\geq 0}$, bien qu'elle soit une chaîne de markov, n'est pas la chaîne de Markov sous-jacente d'un PMDM.

Avant de nous tourner vers la formulation "complètement observée" du problème d'arrêt optimal, nous établissons un résultat technique, un calcul d'espérance conditionnelle, dont nous aurons besoin et qui s'appuie sur le théorème suivant qui est très classique (voir par exemple [Ouvrard, 2004]).

Théorème 8.3.1 *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs respectivement dans deux ensembles*

mesurables F_1 et F_2. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ telle que X soit $\mathcal{B}$ mesurable et Y soit indépendante de $\mathcal{B}$. Soit $f \in B(F_1 \times F_2)$, on a alors

$$\mathbf{E}\left[f(X,Y)\middle|\mathcal{B}\right] = \widetilde{f}(X),$$

où

$$\widetilde{f}(x) = \mathbf{E}\left[f(x,Y)\right].$$

Il sera également nécessaire de rappeler brièvement la construction des variables aléatoires $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que nous avons déjà évoquée à la section 3.3.4 (on pourra trouver davantage de détails dans [Davis, 1993, section 24]).

Après un saut du processus au point $z \in E$, la fonction de survie de la durée jusqu'au prochain saut est

$$\varphi_S(t,z) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ e^{-\Lambda(z,t)} & \text{if } 0 \leq t < t^*(z), \\ 0 & \text{if } t \geq t^*(z). \end{cases}$$

On définit son inverse généralisée

$$\psi_S(u,z) = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } \varphi_S(t,z) \leq u\}.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{k+1} = \psi_S(\Upsilon_k, Z_k), \tag{8.3.1}$$

où les Υ_k sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0;1]$ et indépendantes de $\mathfrak{F}_{T_k}$.

Le lemme technique que nous évoquions plus haut est alors le suivant.

Lemme 8.3.2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{k+1}>R_k\}}\middle|\mathfrak{F}_{T_k}\right] = \mathbb{1}_{\{R_k<t^*(Z_k)\}}e^{-\Lambda(Z_k,R_k)}.$$

Démonstration On a $\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{k+1}>R_k\}}\middle|\mathfrak{F}_{T_k}\right] = \mathbf{E}\left[f(\Upsilon_k,Z_k,R_k)\middle|\mathfrak{F}_{T_k}\right]$ où $f(u,z,r) = \mathbb{1}_{\{\psi_S(u,z)>r\}}$. On remarque alors que (Z_k,R_k) est $\mathfrak{F}_{T_k}$ mesurable et que Υ_k est indépendante de $\mathfrak{F}_{T_k}$. Enfin, on obtient le résultat en appliquant le théorème 8.3.1 et en remarquant que $\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\psi_S(\Upsilon_k,z)>r\}}\right] = \mathbb{1}_{\{r<t^*(z)\}}e^{-\Lambda(z,r)}$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section à savoir la reformulation de notre problème initial, partiellement observé pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$, en un problème complètement observé pour le processus $(\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour tout temps d'arrêt $\sigma \in \Sigma^Y$, le lemme suivant interprète la quantité $\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\middle|\Pi_0 = \pi\right]$ comme étant l'espérance d'une fonctionnelle qui ne dépend que du $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt (plus précisément de la décomposition qu'en donne le théorème 8.2.5), du filtre et des temps de sauts (ou de façon équivalente des durées inter-sauts).

Lemme 8.3.3 *Soit un temps d'arrêt $\sigma \in \Sigma^Y$ et $n \geq 1$. Pour tout $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$ on a*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\Big|\Pi_0 = \pi\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}\mathbb{1}_{\{R_k<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)e^{-\Lambda(x_i,R_k)}\Pi_k^i\Big|\Pi_0=\pi\right]\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_n\leq\sigma\}}g(x_i)\Pi_n^i\Big|\Pi_0=\pi\right].
\end{aligned}$$

Démonstration Nous commençons par décomposer $\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\Big|\Pi_0 = \pi\right]$ en discriminant selon la position du temps d'arrêt σ par rapport aux temps de sauts T_k

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\Big|\Pi_0 = \pi\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma<T_{k+1}\}}\mathbb{1}_{\{Z_k=x_i\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)\Big|\Pi_0=\pi\right]\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_n\leq\sigma\}}\mathbb{1}_{\{Z_n=x_i\}}g(x_i)\Big|\Pi_0=\pi\right].
\end{aligned}$$

On note alors

$$\left\{\begin{array}{rl} A_{k,i} & = \mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma<T_{k+1}\}}\mathbb{1}_{\{Z_k=x_i\}}g\circ\Phi(x_i,R_k), \\ B_i & = \mathbb{1}_{\{T_n\leq\sigma\}}\mathbb{1}_{\{Z_n=x_i\}}g(x_i). \end{array}\right.$$

D'une part, on a $\mathbf{E}\left[B_i\Big|\mathfrak{F}_{T_n}^Y\right] = g(x_i)\mathbb{1}_{\{T_n\leq\sigma\}}\Pi_n^i$ puisque $\{T_n \leq \sigma\} \in \mathfrak{F}_{T_n}^Y$ (voir par exemple [Brémaud, 1981, page 298, Theorem T7]).

D'autre part, pour calculer $\mathbf{E}\left[A_{k,i}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right]$, nous commençons par rappeler que, selon le lemme 8.2.6, on a

$$\{T_k \leq \sigma < T_{k+1}\} = \{T_k \leq \sigma\} \cap \{S_{k+1} > R_k\}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[A_{k,i}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right] &= \mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{k+1}>R_k\}}\mathbb{1}_{\{Z_k=x_i\}}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_k=x_i\}}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{k+1}>R_k\}}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}\right]\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right].
\end{aligned}$$

On applique alors le lemme 8.3.2 qui donne l'expression de $\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{k+1}>R_k\}}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[A_{k,i}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right] &= \mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_k=x_i\}}\mathbb{1}_{\{R_k<t^*(Z_k)\}}e^{-\Lambda(Z_k,R_k)}\Big|\mathfrak{F}_{T_k}^Y\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)\mathbb{1}_{\{R_k<t_i^*\}}e^{-\Lambda(x_i,R_k)}\Pi_k^i.
\end{aligned}$$

Le résultat suit. □

Ce lemme est le point de départ de la résolution du problème d'arrêt optimal. Nous allons l'exploiter dans le reste du chapitre pour établir l'équation de programmation dynamique.

8.4 Opérateurs de programmation dynamique

En se basant sur la décomposition donnée par le lemme 8.3.3, nous sommes maintenant en mesure d'introduire les opérateurs qui interviendront dans l'équation de programmation dynamique satisfaite par la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal (7.1.3).

Définition 8.4.1 *L'opérateur*

$$H : B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+),$$

est défini pour tout $h \in B(E)$ par

$$Hh(\pi, u) = \mathbf{E}\left[h \circ \Phi(Z_0, u)\mathbb{1}_{\{S_1 > u\}} \middle| \Pi_0 = \pi\right],$$

pour tout $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$.

Le lemme suivant donne une forme développée de l'espérance ci-dessus.

Lemme 8.4.2 *Pour tout $h \in B(E)$ et pour tout $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$, l'opérateur H satisfait*

$$Hh(\pi, u) = \sum_{i=1}^{q} \pi^i \mathbb{1}_{\{u < t_i^*\}} e^{-\Lambda(x_i, u)} h \circ \Phi(x_i, u).$$

Démonstration Soit $h \in B(E)$ et $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} Hh(\pi, u) &= \mathbf{E}\left[h \circ \Phi(Z_0, u)\mathbb{1}_{\{S_1 > u\}} \middle| \Pi_0 = \pi\right] \\ &= \sum_{i=1}^{q} h \circ \Phi(x_i, u)\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_0 = x_i\}}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 > u\}} \middle| Z_0\right] \middle| \Pi_0 = \pi\right]. \end{aligned}$$

La loi conditionnelle de S_1 est donnée par l'équation (1.1.6), on en déduit que sur l'évènement $\{Z_0 = x_i\}$, on a $\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 > u\}} \middle| Z_0\right] = \mathbb{1}_{\{u < t_i^*\}} e^{-\Lambda(x_i, u)}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} Hh(\pi, u) &= \sum_{i=1}^{q} h \circ \Phi(x_i, u)\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_0 = x_i\}} \middle| \Pi_0 = \pi\right] \mathbb{1}_{\{u < t_i^*\}} e^{-\Lambda(x_i, u)} \\ &= \sum_{i=1}^{q} h \circ \Phi(x_i, u)\pi^i \mathbb{1}_{\{u < t_i^*\}} e^{-\Lambda(x_i, u)}. \end{aligned}$$

La dernière ligne résulte de la définition du filtre. □

La fonction $u \to Hh(\pi, u)$ est continue à droite avec des limites à gauche, est continue sur les intervalles de la forme $]t_r^*; t_{r+1}^*[$ pour tout $r \in \{0, \ldots, q-1\}$ et est nulle pour $u \geq t_q^*$. Elle n'est cependant pas continue sur $\mathbb{R}^+$ tout entier car elle saute aux points t_r^*. Anticipons légèrement sur le chapitre suivant : afin de prouver la convergence de la méthode numérique que nous développerons, il sera nécessaire, comme nous l'avons fait dans la partie II, de s'intéresser aux propriétés de continuité Lipschitz de l'opérateur H (et des suivants). Dans cette optique, nous considérons pour tout $h \in B(E)$, la restriction de Hh à $\mathcal{M}_1(E_0) \times [t_r^*; t_{r+1}^*[$ que nous prolongeons ensuite continûment par des constantes à $\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$ tout entier. Nous notons $H^r h$ la fonction obtenue.

Définition 8.4.3 *Pour tout $r \in \{0, \dots, q-1\}$, nous définissons l'opérateur*

$$H^r : B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+)$$

de la façon suivante

- *si $u < t_r^*$, $H^r h(\pi, u) = Hh(\pi, t_r^*)$,*
- *si $u \geq t_r^*$, $H^r h(\pi, u) = \sum_{i=r+1}^{q} \pi^i e^{-\Lambda(x_i, u \wedge t_{r+1}^*)} h \circ \Phi(x_i, u \wedge t_{r+1}^*)$.*

Pour tout $r \in \{0, \dots, q-1\}$ et pour tout $h \in B(E)$, $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, la fonction $u \to H^r h(\pi, u)$ est continue. De plus, elle est constante sur $[0; t_r^*]$ et sur $[t_{r+1}^*; +\infty[$. Enfin, on a

$$Hh(\pi, u) = \sum_{r=0}^{q-1} \mathbb{1}_{[t_r^*, t_{r+1}^*[}(u) H^r h(\pi, u).$$

Définition 8.4.4 *Les opérateurs*

$$\begin{aligned} I &: B(\mathcal{M}_1(E_0)) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+), \\ G &: B(\mathcal{M}_1(E_0)) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+), \\ K &: B(\mathcal{M}_1(E_0)) \to B(\mathcal{M}_1(E_0)), \end{aligned}$$

sont définis pour tout $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$ par

$$\begin{aligned} Iv(\pi, u) &= \mathbf{E}\left[v(\Pi_1) \mathbb{1}_{\{S_1 < u \wedge t^*(Z_0)\}} \middle| \Pi_0 = \pi \right], \\ Gv(\pi, u) &= \mathbf{E}\left[v(\Pi_1) \mathbb{1}_{\{S_1 \leq u\}} \middle| \Pi_0 = \pi \right], \\ Kv(\pi) &= \mathbf{E}\left[v(\Pi_1) \middle| \Pi_0 = \pi \right] = Gv(\pi, t_q^*), \end{aligned}$$

pour tout $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$.

Comme dans le cas de l'opérateur H, on donne des formes développées des espérances ci-dessus.

Lemme 8.4.5 *Pour tous $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$ et $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$, on a*

$$\begin{aligned} Iv(\pi, u) &= \sum_{i=1}^{q} \pi^i \int_0^{u \wedge t_i^*} \Big(\lambda \circ \Phi(x_i, s') e^{-\Lambda(x_i, s')} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} v\Big(\Psi(\pi, y', s')\Big) \sum_{j=1}^{q} Q\Big(\Phi(x_i, s'), x_j\Big) f_W(y' - \varphi(x_j)) dy' \Big) ds', \\ Gv(\pi, u) &= Iv(\pi, u) + \sum_{i=1}^{q} \pi^i \mathbb{1}_{\{t_i^* \leq u\}} e^{-\Lambda(x_i, t_i^*)} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} v\Big(\Psi(\pi, y', t_i^*)\Big) \sum_{j=1}^{q} Q\Big(\Phi(x_i, t_i^*), x_j\Big) f_W(y' - \varphi(x_j)) dy'. \end{aligned}$$

Démonstration Soit $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$ et $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$. En utilisant l'équation (7.1.1) qui définit Y_1 ainsi que la formule de récurrence satisfaite par le filtre et énoncée par la proposition 7.2.4, on a

$$\begin{aligned} Iv(\pi,u) &= \mathbf{E}\Big[v\Big(\Psi(\pi,\varphi(Z_1)+W_1,S_1)\Big)\mathbb{1}_{\{S_1<u\wedge t^*(Z_0)\}}\Big|\Pi_0=\pi\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\Big[\mathbb{1}_{\{Z_0=x_i\}}\mathbf{E}\Big[v\Big(\Psi(\pi,\varphi(Z_1)+W_1,S_1)\Big)\mathbb{1}_{\{S_1<u\wedge t_i^*\}}\Big|Z_0\Big]\Big|\Pi_0=\pi\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\Big[\mathbb{1}_{\{Z_0=x_i\}}\sum_{j=1}^{q}\int v\Big(\Psi(\pi,\varphi(x_j)+w,s)\Big) \\ &\qquad \mathbb{1}_{\{s<u\wedge t^*(x_i)\}}\times\mathbf{P}\left(Z_1=x_j,W_1\in dw,S_1\in ds\Big|Z_0\right)\Big|\Pi_0=\pi\Big]. \end{aligned}$$

On conclut alors, comme dans la preuve de la proposition 8.1.1, en explicitant la loi conditionnelle $\mathbf{P}(Z_1 = x_j, W_1 \in dw, S_1 \in ds\big|Z_0)$. Celle-ci est en effet égale à $\mathbf{P}(Z_1 = x_j, S_1 \in ds\big|Z_0)f_W(w)dw$ par indépendance de W_1 et de $\mathfrak{F}_{T_1}$ avec la loi $\mathbf{P}(Z_1 = x_j, S_1 \in ds\big|Z_0)$ donnée par l'équation (1.1.6). Le calcul est similaire dans le cas de l'opérateur G. □

Comme dans le cas de l'opérateur H, remarquons que la fonction $u \to Gv(\pi, u)$ est continue à droite avec des limites à gauche et est continue sur les intervalles de la forme $]t_r^*; t_{r+1}^*[$ avec $r \in \{0, \ldots, q-1\}$. Pour tout $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$, on considère la restriction de Gv à $\mathcal{M}_1(E_0) \times [t_r^*; t_{r+1}^*[$ que nous prolongeons continûment et par des constantes à $\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$ tout entier. On note $G^r v$ la fonction obtenue.

Définition 8.4.6 *Pour tout $r \in \{0, \ldots, q-1\}$, nous définissons l'opérateur*

$$G^r : B(\mathcal{M}_1(E_0)) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+),$$

par

- *si $u < t_r^*$, $G^r v(\pi, u) = Gv(\pi, t_r^*)$*
- *si $u \geq t_r^*$,*

$$\begin{aligned} G^r v(\pi,u) &= Iv(\pi,u\wedge t_{r+1}^*)+\sum_{i=1}^{r}\pi^i e^{-\Lambda(x_i,t_i^*)} \\ &\qquad \times\int_{\mathbb{R}^d} v\Big(\Psi(\pi,y',t_i^*)\Big)\sum_{j=1}^{q}Q\Big(\Phi(x_i,t_i^*),x_j\Big)f_W(y'-\varphi(x_j))dy'. \end{aligned}$$

Pour tout $r \in \{0, \ldots, q-1\}$ et pour tout $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$, $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, la fonction $u \to G^r v(\pi, u)$ est continue. De plus, elle est constante sur $[0; t_r^*]$ et sur $[t_{r+1}^*; +\infty[$. Enfin, on a

$$Gv(\pi,u)=\sum_{r=0}^{q-1}\mathbb{1}_{[t_r^*;t_{r+1}^*[}(u)G^r v(\pi,u)+\mathbb{1}_{[t_q^*;+\infty[}(u)Kv(\pi).$$

Définition 8.4.7 *Les opérateurs*

$$\begin{aligned} J &: B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+), \\ L &: B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0)), \end{aligned}$$

et pour tout $r \in \{0, \dots, q-1\}$,

$$J^r : B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+),$$

sont définis pour tout $(v, h) \in B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E)$ *par*

$$\begin{aligned} J^r(v,h)(\pi,u) &= H^r h(\pi,u) + G^r v(\pi,u), \\ J(v,h)(\pi,u) &= Hh(\pi,u) + Gv(\pi,u), \\ L(v,h)(\pi) &= \sup_{u \geq 0} J(v,h)(\pi,u), \end{aligned}$$

pour tout $(\pi, u) \in \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$.

Comme dans les cas des opérateurs H et G, pour tout $r \in \{0, \dots, q-1\}$ et $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$, $h \in B(E)$, $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, la fonction $u \to J^r(v,h)(\pi,u)$ est continue. De plus, elle est constante sur $[0; t_r^*]$ et sur $[t_{r+1}^*; +\infty[$. Enfin, on a

$$J(v,h)(\pi,u) = \sum_{r=0}^{q-1} \mathbb{1}_{[t_r^*, t_{r+1}^*[}(u) J^r(v,h)(\pi,u) + \mathbb{1}_{[t_q^*; +\infty[}(u) Kv(\pi).$$

Au vu des définitions ci-dessus, il semble naturel de distinguer les cas où $t_r^* = t_{r+1}^*$ et où $t_r^* < t_{r+1}^*$.

Définition 8.4.8 *Soit* $\mathcal{Q}_0 \subset \{0, \dots, q-1\}$ *l'ensemble des indices* m *qui sont tels que* $t_r^* < t_{r+1}^*$.

Remarquons que $\mathcal{Q}_0$ est non vide. En effet, il contient au moins l'indice 0 puisque nous avons supposé que $t_1^* > 0 = t_0^*$.

Le lemme suivant est une conséquence directe des définitions précédentes.

Lemme 8.4.9 *Pour* $(v, h) \in B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E)$ *et* $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, *on a*

$$\begin{aligned} L(v,h)(\pi) &= \left(\max_{0 \leq r \leq q-1} \left(\sup_{u \in [t_r^*; t_{r+1}^*[} J^r(v,h)(\pi,u) \right) \right) \vee Kv(\pi) \\ &= \left(\max_{r \in \mathcal{Q}_0} \left(\sup_{u \in [t_r^*; t_{r+1}^*[} J^r(v,h)(\pi,u) \right) \right) \vee Kv(\pi). \end{aligned}$$

L'intérêt de cette formulation de l'opérateur de maximisation L réside dans le fait qu'elle ne dépende que des opérateurs J^r et K dont nous prouverons qu'ils sont, en un certain sens, lipschitziens. Ce n'est pas le cas de l'opérateur J, nous avons vu en effet que la fonction $u \to J(v,h)(\pi,u) = Hh(\pi,u) + Gv(\pi,u)$ est sujette à des sauts aux points t_r^*. Par ailleurs, cette écriture est comparable à la définition de l'opérateur de programmation dynamique L de [Gugerli, 1986] car nous avons distingué le cas où on est sûr de ne pas s'arrêter avant l'instant de saut (l'opérateur K).

Nous allons montrer que l'on peut construire la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal en itérant l'opérateur L qui correspond à la maximisation du gain

jusqu'au premier temps de saut. Une interprétation des différents opérateurs décrits ci-dessus permet de mieux comprendre cette construction. La quantité $J(v,h)(\pi,u)$ correspond à la stratégie qui consiste à s'arrêter à l'instant $u \wedge S_1$ lorsque Z_0 suit la distribution π, lorsque la fonction de gain est h et lorsque v est la quantité que l'on gagne en ne s'arrêtant pas avant le prochain temps de saut. Cette quantité $J(v,h)(\pi,u)$ est alors décomposée en la somme de $Hh(\pi,u)$ et $Gv(\pi,u)$ qui correspondent respectivement au cas $S_1 > u$ et $S_1 \leq u$. La stratégie qui consiste à ne pas s'arrêter avant le prochain saut est représentée par l'opérateur K, il s'agit ici d'un cas particulier de la précédente puisque $S_1 \leq t_q^*$, $\mathbf{P}$ p.s. et on a donc $Kv(\pi) = J(v,h)(\pi,t_q^*) = Gv(\pi,t_q^*)$. Enfin, l'opérateur L correspond à la maximisation du gain parmi toutes ces stratégies. Il s'agit bien d'une maximisation parmi toutes les stratégies ayant pour horizon le premier temps de saut car le théorème 8.2.5 assure que tous les temps d'arrêt σ, majoré par le premier instant de saut $T_1 = S_1$ sont de la forme $\sigma = R_0 \wedge T_1$ avec R_0 déterministe.

Définition 8.4.10 *Nous définissons par récurrence la suite $(v_n)_{0\leq n\leq N}$ de fonctions de $\mathcal{M}_1(E_0)$ sur $\mathbb{R}$ par*

$$\left\{ \begin{array}{rl} v_N(\pi) & = \sum_{i=1}^q g(x_i)\pi^i, \\ v_{n-1}(\pi) & = L(v_n,g)(\pi). \end{array} \right.$$

Dans le reste de ce chapitre, on s'attachera à montrer que les fonctions v_n sont les fonctions de valeur des problèmes d'arrêts optimaux d'horizon T_{N-n}. En particulier, v_0 est celle du problème (7.1.3). On donnera également la construction d'une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux.

8.5 Construction récursive de la fonction de valeur et d'un temps d'arrêt ϵ-optimal

Les deux théorèmes suivants, 8.5.1 et 8.5.4, établissent que v_n est la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal partiellement observé d'horizon T_{N-n}. De plus, le théorème 8.5.4 fournit une construction explicite d'une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux. Certains arguments de cette section sont adaptés de [Gugerli, 1986]. Remarquons, par ailleurs, que les résultats contenus dans ce dernier article ne peuvent s'appliquer directement à notre cas puisque le problème complètement observé formulé dans le lemme 8.3.3 n'est pas un problème d'arrêt optimal complètement observé pour un PMDM.

Ce premier résultat montre que v_n majore la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal d'horizon T_{N-n}.

Théorème 8.5.1 *Pour tous $1 \leq n \leq N$ et $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, on a*

$$\sup_{\sigma\in\Sigma_n^Y} \mathbf{E}\left[g(X_\sigma)\middle|\Pi_0 = \pi\right] \leq v_{N-n}(\pi).$$

Démonstration La preuve se fait par récurrence. Soit $\sigma \in \Sigma^Y$. Pour $n = 1$, le lemme 8.3.3 donne

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_1})\middle|\Pi_0 = \pi\right] &= \underbrace{\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{R_0<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_0)e^{-\Lambda(x_i,R_0)}\Pi_0^i\middle|\Pi_0=\pi\right]}_{(a)}\\ &\quad+\underbrace{\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_1\le\sigma\}}g(x_i)\Pi_1^i\middle|\Pi_0=\pi\right]}_{(b)}.\end{aligned}$$

Puisque R_0 est déterministe, nous reconnaissons dans le terme (a), l'opérateur H (plus précisément la forme donnée dans le lemme 8.4.2), ainsi

$$(a) = Hg(\pi, R_0).$$

Nous nous tournons à présent vers le terme (b) dans lequel nous reconnaissons l'opérateur G défini en 8.4.4. En effet, le lemme 8.2.6 énonce que $\{T_1 \le \sigma\} = \{S_1 \le R_0\}$ et on a donc

$$\begin{aligned}(b) &= \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1\le R_0\}}\sum_{i=1}^{q}g(x_i)\Pi_1^i\middle|\Pi_0=\pi\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1\le R_0\}}v_N(\Pi_1)\middle|\Pi_0=\pi\right]\\ &= Gv_N(\pi,R_0).\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la définition 8.4.7 on a $J(v_N, g) = Hg + Gv_N$, ainsi, en ajoutant (a) et (b), on a

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_1})\middle|\Pi_0=\pi\right] = J(v_N,g)(\pi,R_0) \le \sup_{u\ge 0}J(v_N,g)(\pi,u) = L(v_N,g)(\pi) = v_{N-1}(\pi).$$

Soit alors $2 \le n \le N$, supposons que pour tout $\tau \in \Sigma_{n-1}^Y$,

$$\mathbf{E}\left[g(X_\tau)\middle|\Pi_0=\pi\right] \le v_{N-(n-1)}(\pi).$$

Le lemme 8.3.3 donne

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\middle|\Pi_0=\pi\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_k\le\sigma\}}\mathbb{1}_{\{R_k<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)e^{-\Lambda(x_i,R_k)}\Pi_k^i\middle|\Pi_0=\pi\right]\\ &\quad+\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_n\le\sigma\}}g(x_i)\Pi_n^i\middle|\Pi_0=\pi\right].\end{aligned}$$

Comme dans le cas $n = 1$, le terme correspondant à $k = 0$ est égal à $Hg(\pi, R_0)$. Remarquons que les autres termes sont nuls sur l'évènement $\{T_1 > \sigma\}$, ainsi, on peut factoriser par $\mathbb{1}_{\{T_1\le\sigma\}} = \mathbb{1}_{\{S_1\le R_0\}}$ qui est par ailleurs $\mathfrak{F}_{T_1}^Y$ mesurable. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathfrak{F}_{T_1}^Y$ dans ces termes, on obtient

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\middle|\Pi_0=\pi\right] = Hg(\pi,R_0) + \mathbf{E}\left[\Xi\mathbb{1}_{\{S_1\le R_0\}}\middle|\Pi_0=\pi\right], \tag{8.5.1}$$

où on définit Ξ par

$$\Xi = \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}\mathbb{1}_{\{R_k<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_k)e^{-\Lambda(x_i,R_k)}\Pi_k^i+\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_n\leq\sigma\}}g(x_i)\Pi_n^i\Big|\mathfrak{F}_{T_1}^Y\Big].$$

Nous utilisons alors la propriété de Markov de la chaîne $(\Pi_k)_{k\geq 0}$. En effet, pour $k\geq 1$, on a $\Pi_k=\Pi_{k-1}\circ\theta$. De plus, lorsque $T_1\leq\sigma$, on a, d'après la proposition 8.2.9, $R_k=\widetilde{R}_{k-1}^1\circ\theta$ (en effet, nous avons remarqué après avoir énoncé le lemme 8.2.7 que les R_k peuvent être remplacés par les $\overline{R}_k$ définis dans le lemme 8.2.7) et $\sigma=T_1+\widetilde{\sigma}\circ\theta$ où $\widetilde{R}_{k-1}^1$ et $\widetilde{\sigma}$ sont définis dans la définition 8.2.8 et la proposition 8.2.9 (avec $l=1$ dans le cas présent). Ainsi, puisque pour $k\geq 1$, $T_k=T_1+T_{k-1}\circ\theta$, on a

$$\mathbb{1}_{\{T_k\leq\sigma\}}=\mathbb{1}_{\{T_{k-1}\leq\widetilde{\sigma}\}}\circ\theta.$$

Enfin, la propriété de Markov de la chaîne $(\Pi_k)_{k\geq 0}$ donne

$$\begin{aligned}\Xi &= \mathbf{E}_{\Pi_1}\Big[\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_k\leq\widetilde{\sigma}\}}\mathbb{1}_{\{\widetilde{R}_k^1<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,\widetilde{R}_k^1)e^{-\Lambda(x_i,\widetilde{R}_k^1)}\Pi_k^i\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_{n-1}\leq\widetilde{\sigma}\}}g(x_i)\Pi_{n-1}^i\Big].\end{aligned}$$

En d'autres termes, nous définissons

$$w(\pi)=\mathbf{E}\left[g(X_{\widetilde{\sigma}\wedge T_{n-1}})\Big|\Pi_0=\pi\right],$$

et en utilisant le lemme 8.3.3, nous reconnaissons que $\Xi=w(\Pi_1)$. De plus, on a $w(\pi)\leq v_{N-(n-1)}(\pi)$ par hypothèse de récurrence puisque $\widetilde{\sigma}\wedge T_{n-1}\in\Sigma_{n-1}^Y$ (en effet, $\widetilde{\sigma}$ et T_{n-1} sont des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt d'après le corollaire 8.2.11 et la proposition 8.2.1 respectivement). On a alors

$$\Xi\leq v_{N-(n-1)}(\Pi_1). \tag{8.5.2}$$

Enfin, en combinant les équations (8.5.1) et (8.5.2), on obtient

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\Big|\Pi_0=\pi\right]\leq Hg(\pi,R_0)+\mathbf{E}\left[v_{N-(n-1)}(\Pi_1)\mathbb{1}_{\{S_1\leq R_0\}}\Big|\Pi_0=\pi\right].$$

Dans le second terme, on reconnaît l'opérateur G ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[g(X_{\sigma\wedge T_n})\Big|\Pi_0=\pi\right] &\leq Hg(\pi,R_0)+Gv_{N-(n-1)}(\pi,R_0)\\ &= J(v_{N-(n-1)},g)(\pi,R_0)\\ &\leq \sup_{u\geq 0}J(v_{N-(n-1)},g)(\pi,u)\\ &= L(v_{N-(n-1)},g)(\pi)\\ &= v_{N-n}(\pi),\end{aligned}$$

ce qui prouve la récurrence. □

Le théorème 8.5.1 prouve que v_n est une borne supérieur de la fonction de valeur du problème d'horizon T_{N-n}. Nous établissons à présent l'inégalité inverse en construisant une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux.

Définition 8.5.2 *Pour $\epsilon > 0$, $1 \leq n \leq N$ et pour $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, nous définissons*

$$r_n^\epsilon(\pi) = \inf\left\{u > 0 \,:\, J(v_{N-n}, g)(\pi, u) > v_{N-n-1}(\pi) - \epsilon\right\}.$$

Posons $R_{1,0}^\epsilon = r_0^\epsilon(\Pi_0)$ et pour $2 \leq n \leq N$,

$$\left\{\begin{array}{ll} R_{n,0}^\epsilon & = r_{n-1}^{\epsilon/2}(\Pi_0), \\ R_{n,k}^\epsilon & = r_{n-1-k}^{\epsilon/(2^{k+1})}(\Pi_k)\mathbb{1}_{\{R_{n,k-1}^\epsilon \geq S_k\}} \text{ for } 1 \leq k \leq n-2, \\ R_{n,n-1}^\epsilon & = r_0^{\epsilon/(2^{n-1})}(\Pi_{n-1})\mathbb{1}_{\{R_{n,n-2}^\epsilon \geq S_{n-1}\}}, \end{array}\right.$$

et enfin

$$U_n^\epsilon = \sum_{k=1}^{n} R_{n,k-1}^\epsilon \wedge S_k.$$

Le lemme suivant concerne les effets de l'opérateur de translation θ sur la suite $(R_{n,k}^\epsilon)_{1\leq n\leq N, 0\leq k\leq n-1}$, il sera utile afin d'appliquer la propriété de Markov dans la preuve du théorème suivant.

Lemme 8.5.3 *Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, sur l'évènement $\{T_1 \leq U_n^{2\epsilon}\}$, on a*

$$R_{n-1,k-1}^\epsilon \circ \theta = R_{n,k}^{2\epsilon}.$$

Démonstration Pour $n = 2$, il suffit de montrer que sur l'évènement $\{T_1 \leq U_2^{2\epsilon}\}$, on a $R_{1,0}^\epsilon \circ \theta = R_{2,1}^{2\epsilon}$. Or, d'après la définition de la suite $(R_{n,k}^\epsilon)_{1\leq n\leq N, 0\leq k\leq n-1}$, on a

$$\begin{aligned} R_{1,0}^\epsilon \circ \theta &= r_0^\epsilon(\Pi_1), \\ R_{2,1}^{2\epsilon} &= r_0^{\frac{2\epsilon}{2}}(\Pi_1)\mathbb{1}_{\{R_{2,0}^{2\epsilon} \geq S_1\}}. \end{aligned}$$

On a le résultat car on est sur l'évènement $\{T_1 \leq U_2^{2\epsilon}\} = \{R_{2,0}^{2\epsilon} \geq S_1\}$.

Pour $n \geq 3$ fixé, nous prouvons le lemme par récurrence sur $1 \leq k \leq n-1$. Soit donc $k = 1$. On a d'après la définition de la suite $(R_{n,k}^\epsilon)_{1\leq n\leq N, 0\leq k\leq n-1}$,

$$\begin{aligned} R_{n-1,0}^\epsilon \circ \theta &= r_{n-2}^{\frac{\epsilon}{2}}(\Pi_1), \\ R_{n,1}^{2\epsilon} &= r_{n-2}^{\frac{2\epsilon}{4}}(\Pi_1)\mathbb{1}_{\{R_{n,0}^{2\epsilon} \geq S_1\}}. \end{aligned}$$

On obtient $R_{n-1,0}^\epsilon \circ \theta = R_{n,1}^{2\epsilon}$ parce que nous avons supposé que nous sommes sur l'évènement $\{T_1 \leq U_n^{2\epsilon}\} = \{R_{n,0}^{2\epsilon} \geq S_1\}$. La propagation de la récurrence est similaire au cas $k = 1$. □

Munis de ce résultat préliminaire (qui jouera dans la démonstration suivante le rôle que jouait la proposition 8.2.9 dans la preuve du théorème précédent), nous pouvons maintenant prouver que $(U_n^\epsilon)_{1\leq n\leq N}$ est une suite de temps d'arrêt ϵ-optimaux.

Théorème 8.5.4 *Pour tout $1 \leq n \leq N$ et $\epsilon > 0$, on a $U_n^\epsilon \in \Sigma_n^Y$ et*

$$\mathbf{E}\left[g(X_{U_n^\epsilon})\middle|\Pi_0 = \pi\right] \geq v_{N-n}(\pi) - \epsilon.$$

Démonstration Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. Remarquons tout d'abord qu'en conséquence directe de la proposition 8.2.10, la variable aléatoire U_n^ϵ est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt. En effet, par construction, les $R_{n,k}^\epsilon$ sont $\mathfrak{F}_{T_k}^Y$ mesurables et satisfont la condition $R_{n,k}^\epsilon = 0$ sur l'évènement $\{S_k > R_{n,k-1}^\epsilon\}$. Il est également clair que $U_n^\epsilon \leq \sum_{k=1}^n S_k = T_n$. Enfin, on a bien $U_n^\epsilon \in \Sigma_n^Y$.

Nous prouvons maintenant la deuxième assertion par récurrence. Soit $n = 1$. Soit $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$, nous notons $r_0^\epsilon = r_0^\epsilon(\pi)$. Puisque $R_{1,0}^\epsilon = r_0^\epsilon$ est déterministe, on a clairement $R_{1,0}^\epsilon \in \Sigma^Y$ et nous pouvons appliquer le lemme 8.3.3 à $\sigma = R_{1,0}^\epsilon$ (et $n = 1$) ce qui donne (nous utilisons aussi le fait que $T_1 = S_1$)

$$\mathbf{E}\left[g(X_{R_{1,0}^\epsilon \wedge S_1})\middle|\Pi_0 = \pi\right] = \underbrace{\sum_{i=1}^q \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{r_0^\epsilon < t_i^*\}} g\circ\Phi(x_i, r_0^\epsilon) e^{-\Lambda(x_i, r_0^\epsilon)}\Pi_0^i\middle|\Pi_0 = \pi\right]}_{(c)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^q \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 \leq r_0^\epsilon\}} g(x_i)\Pi_1^i\middle|\Pi_0 = \pi\right]}_{(d)}.$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, nous reconnaissons respectivement les opérateurs H et G dans les termes (c) et (d). Plus précisément,

$$(c) = Hg(\pi, r_0^\epsilon),$$
$$(d) = \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 \leq r_0^\epsilon\}} \sum_{i=1}^q g(x_i)\Pi_1^i\middle|\Pi_0 = \pi\right] = \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 \leq r_0^\epsilon\}} v_N(\Pi_1)\middle|\Pi_0 = \pi\right] = Gv_N(\pi, r_0^\epsilon),$$

si bien que, en ajoutant (c) et (d),

$$\mathbf{E}\left[g(X_{R_{1,0}^\epsilon \wedge S_1})\middle|\Pi_0 = \pi\right] = J(v_N, g)(\pi, r_0^\epsilon).$$

Enfin, la définition de r_0^ϵ donne $J(v_N, g)(\pi, r_0^\epsilon) \geq v_{N-1}(\pi) - \epsilon$ et ainsi

$$\mathbf{E}\left[g(X_{R_{1,0}^\epsilon \wedge S_1})\middle|\Pi_0 = \pi\right] \geq v_{N-1}(\pi) - \epsilon.$$

Soit maintenant $2 \leq n \leq N$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, on ait

$$\mathbf{E}\left[g(X_{U_{n-1}^\epsilon})\middle|\Pi_0 = \pi\right] \geq v_{N-(n-1)}(\pi) - \epsilon.$$

Le lemme 8.3.3 donne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[g(X_{U_n^{2\epsilon}})\middle|\Pi_0 = \pi\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^q \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_k \leq U_n^{2\epsilon}\}}\mathbb{1}_{\{R_{n,k}^{2\epsilon} < t_i^*\}} g\circ\Phi(x_i, R_{n,k}^{2\epsilon}) e^{-\Lambda(x_i, R_{n,k}^{2\epsilon})}\Pi_k^i\middle|\Pi_0 = \pi\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^q \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_n \leq U_n^{2\epsilon}\}} g(x_i)\Pi_n^i\middle|\Pi_0 = \pi\right].
\end{aligned}$$

Notons $r_{n-1}^\epsilon = r_{n-1}^\epsilon(\pi)$. Comme dans le cas $n = 1$, le terme pour $k = 0$ est égal à $Hg(\pi, r_{n-1}^\epsilon)$ puisque $R_{n,0}^{2\epsilon} = r_{n-1}^\epsilon(\Pi_0)$. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport $\mathfrak{F}_{T_1}^Y$ dans les autres termes, on obtient

$$\mathbf{E}\left[g(X_{U_n^{2\epsilon}})\middle|\Pi_0 = \pi\right] = Hg(\pi, r_{n-1}^\epsilon) + \mathbf{E}\left[\Xi'\mathbb{1}_{\{T_1 \leq U_n^{2\epsilon}\}}\middle|\Pi_0 = \pi\right], \tag{8.5.3}$$

avec

$$\begin{aligned}\Xi' &= \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_k\le U_n^{2\epsilon}\}}\mathbb{1}_{\{R_{n,k}^{2\epsilon}<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_{n,k}^{2\epsilon})e^{-\Lambda(x_i,R_{n,k}^{2\epsilon})}\Pi_k^i \\ &\qquad +\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_n\le U_n^{2\epsilon}\}}g(x_i)\Pi_n^i\Big|\mathfrak{F}_{T_1}^Y\Big].\end{aligned}$$

On souhaite appliquer la propriété de Markov de $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le terme Ξ'. Rappelons que, d'après le lemme 8.5.3, on a $R_{n-1,k-1}^{\epsilon}\circ\theta = R_{n,k}^{2\epsilon}$ pour $n\ge 2$ et $1\le k\le n-1$ sur l'évènement $\{T_1\le U_n^{2\epsilon}\} = \{S_1\le R_{n,0}^{2\epsilon}\}$ (l'égalité de ces évènements résulte du lemme 8.2.6). Ainsi, sur cet ensemble, on a

$$\begin{aligned}U_n^{2\epsilon} &= S_1+\sum_{k=2}^{n}R_{n,k-1}^{2\epsilon}\wedge S_k \\ &= T_1+\sum_{k=2}^{n}(R_{n-1,k-2}^{\epsilon}\circ\theta)\wedge(S_{k-1}\circ\theta) \\ &= T_1+U_{n-1}^{\epsilon}\circ\theta.\end{aligned}$$

Par ailleurs, rappelons que pour $k\ge 1$, on a $T_k = T_1+T_{k-1}\circ\theta$ et ainsi

$$\mathbb{1}_{\{T_k\le U_n^{2\epsilon}\}} = \mathbb{1}_{\{T_{k-1}\le U_{n-1}^{\epsilon}\}}\circ\theta.$$

Par conséquent, la propriété de Markov de la chaîne $(\Pi_k)_{k\ge 0}$ donne

$$\begin{aligned}\Xi' &= \mathbf{E}_{\Pi_1}\Big[\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_k\le U_{n-1}^{\epsilon}\}}\mathbb{1}_{\{R_{n-1,k}^{\epsilon}<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,R_{n-1,k}^{\epsilon})e^{-\Lambda(x_i,R_{n-1,k}^{\epsilon})}\Pi_k^i \\ &\qquad +\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_{n-1}\le U_{n-1}^{\epsilon}\}}g(x_i)\Pi_{n-1}^i\Big].\end{aligned}$$

En d'autres termes, on a

$$w'(\pi) = \mathbf{E}\left[g(X_{U_{n-1}^{\epsilon}})\Big|\Pi_0=\pi\right],$$

et en utilisant le lemme 8.3.3, nous reconnaissons que $\Xi' = w'(\Pi_1)$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $w'(\pi)\ge v_{N-(n-1)}(\pi)-\epsilon$ si bien que

$$\Xi'\ge v_{N-(n-1)}(\Pi_1)-\epsilon. \tag{8.5.4}$$

Enfin, en combinant les équations (8.5.3) et (8.5.4) et en remarquant que $\{T_1\le U_n^{2\epsilon}\} = \{S_1\le r_{n-1}^{\epsilon}\}$ (le lemme 8.2.6), on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[g(X_{U_n^{2\epsilon}})\Big|\Pi_0=\pi\right] \\ &\quad\ge Hg(\pi,r_{n-1}^{\epsilon})+\mathbf{E}\left[v_{N-(n-1)}(\Pi_1)\mathbb{1}_{\{S_1\le r_{n-1}^{\epsilon}\}}\Big|\Pi_0=\pi\right]-\epsilon \\ &\quad= Hg(\pi,r_{n-1}^{\epsilon})+Gv_{N-(n-1)}(\pi,r_{n-1}^{\epsilon})-\epsilon \\ &\quad= J(v_{N-(n-1)},g)(\pi,r_{n-1}^{\epsilon})-\epsilon \\ &\quad\ge v_{N-n}(\pi)-2\epsilon,\end{aligned}$$

d'après la définition de r^{ϵ}_{n-1}. Ceci prouve la récurrence. □

Les théorèmes 8.5.1 et 8.5.4 établissent que v_n est la fonction de valeur du problème d'horizon T_{N-n} et en particulier que v_0 est celle du problème (7.1.3). La récurrence qui définit la suite $(v_n)_{0\leq n\leq N}$ peut se traduire en une récurrence, plus facile à manier, sur des variables aléatoires. Introduisons ainsi la suite $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aléatoires définies par

$$V_n = v_n(\Pi_n).$$

En d'autres termes, on a $V_N = \sum_{i=1}^{q} g(x_i)\Pi_N^i$ et pour $0 \leq n \leq N-1$, l'équation de programmation dynamique suivante

$$\begin{aligned} V_n &= \sup_{u\in[0;t_q^*]} \mathbf{E}\Big[g\circ\Phi(Z_n,u)\mathbb{1}_{\{S_{n+1}>u\}} + V_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1}\leq u\}}\Big|\Pi_n\Big] \\ &= \max_{r\in\mathcal{Q}_0}\Big(\sup_{u\in[t_r^*;t_{r+1}^*[} \mathbf{E}\Big[g\circ\Phi(Z_n,u)\mathbb{1}_{\{S_{n+1}>u\}} + V_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1}\leq u\}}\Big|\Pi_n\Big]\Big) \\ &\quad \vee \mathbf{E}\left[V_{n+1}\middle|\Pi_n\right]. \end{aligned}$$

Notre objectif dans le chapitre suivant consiste ainsi à fournir un schéma numérique basé sur la discrétisation de cette récurrence rétrograde afin d'obtenir une approximation de la fonction de valeur V_0. Nous fournirons également une preuve de convergence de notre schéma ainsi qu'une borne de la vitesse de convergence. De plus, nous avons construit une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux, nous nous baserons sur cette construction pour expliciter une nouvelle famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux qui peuvent être calculés en pratique.

Chapitre 9

Schéma d'approximation et exemple numérique

Après avoir étudié le filtrage et le problème de l'arrêt optimal du point de vue théorique, nous nous tournons à présent vers l'aspect numérique. Dans ce chapitre, nous proposons un schéma d'approximation pour la fonction de valeur et une construction explicite d'un temps d'arrêt ϵ-optimal qui peut être calculé numériquement. Nous les illustrons ensuite en les mettant en œuvre sur l'exemple académique présenté à la section 1.2.2.

Afin d'établir la convergence de nos schémas, nous introduisons deux hypothèses supplémentaires. La première, concernant le taux de saut, est vérifiée dans tous nos exemples.

Hypothèse IV.3 *Le taux de saut λ appartient à $B(\overline{E})$ i.e. est borné par C_λ.*

La deuxième est une hypothèse de régularité de type Lipschitz le long du flot concernant la fonction de récompense g associée au problème d'arrêt optimal.

Hypothèse IV.4 *La fonction g appartient à $B(\overline{E})$ i.e. est bornée par C_g et il existe $[g]_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $i \in \{1, \dots, q\}$ et $t, u \in [0, t_i^*]$, on ait*

$$|g(\Phi(x_i, t)) - g(\Phi(x_i, u))| \leq [g]_2 |t - u|.$$

Remarquons que cette hypothèse est moins forte qu'une hypothèse de continuité Lipschitz le long du flot au sens de la partie II. Elle est également moins forte que celles de l'arrêt optimal complètement observé de [de Saporta et al., 2010], ceci tient au fait que nous supposons que Z_n prend ses valeurs dans un ensemble fini.

A l'instar de la partie II, la preuve de convergence du schéma s'appuiera sur les propriétés de continuité Lipschitz des opérateurs impliqués dans la récurrence satisfaite par la fonction de valeur. Ce sera donc l'objet de la section suivante.

9.1 Continuité Lipschitz des opérateurs

Dans cette section, nous allons établir des propriétés de continuité Lipschitz des opérateurs H^r, I, G^r, K et L afin d'en déduire la continuité Lipschitz des fonctions de valeur $(v_n)_{0\leq n\leq N}$.

Proposition 9.1.1 *Pour $r \in \mathcal{Q}_0$, pour tous (π, u), $(\tilde{\pi}, \tilde{u}) \in \Big(\mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+\Big)^2$, on a*

$$|H^r g(\pi, u) - H^r g(\tilde{\pi}, \tilde{u})| \leq C_g|\pi - \tilde{\pi}| + \Big([g]_2 + C_g C_\lambda\Big)|u - \tilde{u}|,$$

où $[g]_2$ est défini dans l'hypothèse IV.4.

Démonstration Puisque la fonction $u \to H^r h(\pi, u)$ est constante sur les intervalles $[0; t_r^*]$ et $[t_{r+1}^*; +\infty[$, nous pouvons supposer, sans perte de généralité afin de prouver la continuité Lipschitz, que u, $\tilde{u} \in [t_r^*; t_{r+1}^*]$ si bien qu'on a

$$H^r g(\pi, u) = \sum_{i=r+1}^{q} \pi^i e^{-\Lambda(x_i,u)} g \circ \Phi(x_i, u),$$

et une équation similaire pour $H^r g(\tilde{\pi}, \tilde{u})$. Alors, d'une part, on a

$$\begin{aligned} |H^r g(\pi, u) - H^r g(\tilde{\pi}, u)| &= \left| \sum_{i=r+1}^{q} \Big(\pi^i - \tilde{\pi}^i\Big) e^{-\Lambda(x_i,u)} g \circ \Phi(x_i, u) \right| \\ &\leq C_g \sum_{i=r+1}^{q} \Big|\pi^i - \tilde{\pi}^i\Big|. \end{aligned}$$

D'autre part, le lemme A.1 de [de Saporta et al., 2010] fournit

$$|e^{-\Lambda(x_i,u)} g \circ \Phi(x_i, u) - e^{-\Lambda(x_i,\tilde{u})} g \circ \Phi(x_i, \tilde{u})| \leq \Big([g]_2 + C_g C_\lambda\Big)|u - \tilde{u}|.$$

Le résultat suit. □

Le lemme technique suivant sera utile pour établir la continuité Lipschitz de l'opérateur I, il établit, dans un certain sens, la continuité Lipschitz de la fonction Ψ qui donne la formulation récursive du filtre dans la proposition 7.2.4. La première partie de la preuve est adaptée de [Pham et al., 2005].

Lemme 9.1.2 *Pour tous π, $\tilde{\pi} \in \mathcal{M}_1(E_0)$, on a*

$$\sum_{r=0}^{q-1} \int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*} \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\Psi(\pi, y', s') - \Psi(\tilde{\pi}, y', s')\Big| \overline{\Psi}_r(\pi, y', s') dy' ds' \leq 2|\pi - \tilde{\pi}|.$$

Démonstration Soit $s' \in]t_r^*; t_{r+1}^*[$ et $y' \in \mathbb{R}^d$. Rappelons que $\Psi^j(\pi, y', s') = \frac{\Psi_r^j(\pi, y', s')}{\overline{\Psi}_r(\pi, y', s')}$ et $\overline{\Psi}_r(\pi, y', s') = \sum_{k=1}^{q} \Psi_r^k(\pi, y', s')$. Dans les calculs suivants, nous notons

$\omega = (\pi, y', s')$ et $\tilde{\omega} = (\tilde{\pi}, y', s')$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\Psi(\omega) - \Psi(\tilde{\omega})\Big|\overline{\Psi}_r(\omega) &= \sum_{j=1}^{q}\left|\frac{\Psi_r^j(\omega)}{\overline{\Psi}_r(\omega)} - \frac{\Psi_r^j(\tilde{\omega})}{\overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})}\right|\overline{\Psi}_r(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{q}\left|\frac{\Psi_r^j(\omega)\overline{\Psi}_r(\tilde{\omega}) - \Psi_r^j(\tilde{\omega})\overline{\Psi}_r(\omega)}{\overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})}\right|\\ &\leq \sum_{j=1}^{q}\Big|\Psi_r^j(\omega) - \Psi_r^j(\tilde{\omega})\Big| + \sum_{j=1}^{q}\frac{\Psi_r^j(\tilde{\omega})}{\overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})}\Big|\overline{\Psi}_r(\omega) - \overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})\Big|.\end{aligned}$$

On remarque que $\sum_{j=1}^{q}\Psi_r^j(\tilde{\omega}) = \overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})$ et le second terme devient alors le même que le premier $\Big|\overline{\Psi}_r(\omega) - \overline{\Psi}_r(\tilde{\omega})\Big| = \sum_{j=1}^{q}\big|\Psi_r^j(\omega) - \Psi_r^j(\tilde{\omega})\big|$. Enfin, on a

$$\Big|\Psi(\omega) - \Psi(\tilde{\omega})\Big|\overline{\Psi}_r(\omega) \leq 2\sum_{j=1}^{q}\Big|\Psi_r^j(\omega) - \Psi_r^j(\tilde{\omega})\Big|.$$

On abandonne maintenant les notations ω et $\tilde{\omega}$ et on utilise l'inégalité ci-dessus pour évaluer la quantité qui fait l'objet du lemme.

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{q-1}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi, y', s') - \Psi(\tilde{\pi}, y', s')\Big|\overline{\Psi}_r(\pi, y', s')dy'ds'\\ &\quad\leq 2\sum_{r=0}^{q-1}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi_r^j(\pi, y', s') - \Psi_r^j(\tilde{\pi}, y', s')\Big|dy'ds'\\ &\quad\leq 2\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{i=r+1}^{q}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\pi^i - \tilde{\pi}^i\Big|\lambda(\Phi(x_i, s'))e^{-\Lambda(x_i, s')}\\ &\qquad\times Q(\Phi(x_i, s'), x_j)f_W(y' - \varphi(x_j))dy'ds'.\end{aligned}$$

On simplifie l'expression ci-dessus en notant que $\int_{\mathbb{R}^d} f_W\Big(y' - \varphi(x_j)\Big)dy' = 1$ et que $\sum_{j=1}^{q} Q\Big(\Phi(x_i, s'), x_j\Big) = 1$. On obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{q-1}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi, y', s') - \Psi(\tilde{\pi}, y', s')\Big|\overline{\Psi}_r(\pi, y', s')dy'ds'\\ &\quad\leq 2\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{i=r+1}^{q}\Big|\pi^i - \tilde{\pi}^i\Big|\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\lambda(\Phi(x_i, s'))e^{-\Lambda(x_i, s')}ds'.\end{aligned}$$

En changeant l'ordre des sommations, on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{q-1}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi, y', s') - \Psi(\tilde{\pi}, y', s')\Big|\overline{\Psi}_r(\pi, y', s')dy'ds'\\ &\quad\leq 2\sum_{i=1}^{q}\Big|\pi^i - \tilde{\pi}^i\Big|\int_0^{t_i^*}\lambda(\Phi(x_i, s'))e^{-\Lambda(x_i, s')}ds'.\end{aligned}$$

Enfin, le résultat est obtenu en remarquant que $\int_0^{t_i^*}\lambda(\Phi(x_i, s'))e^{-\Lambda(x_i, s')}ds' = 1 - e^{-\Lambda(x_i, t_i^*)} \leq 1$. □

On peut maintenant établir la continuité Lipschitz de l'opérateur I.

Proposition 9.1.3 *Pour $v \in BL(\mathcal{M}_1(E_0))$ et pour tous (π,u), $(\tilde\pi,\tilde u) \in \Big(\mathcal{M}_1(E_0)\times\mathbb{R}^+\Big)^2$, on a*

$$|Iv(\pi,u)-Iv(\tilde\pi,\tilde u)| \le \Big(C_v+2[v]\Big)|\pi-\tilde\pi| + C_vC_\lambda|u-\tilde u|.$$

Démonstration D'une part, il est clair que

$$|Iv(\pi,u)-Iv(\pi,\tilde u)| \le \sum_{i=1}^q \pi^i\Big|u\wedge t_i^* - \tilde u\wedge t_i^*\Big|C_vC_\lambda \le C_vC_\lambda|u-\tilde u|.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&|Iv(\pi,u)-Iv(\tilde\pi,u)|\\
&\le\ C_v|\pi-\tilde\pi| + \sum_{i=1}^q \pi^i\int_0^{t_i^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|v\Big(\Psi(\pi,y',s')\Big)-v\Big(\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big)\Big|\\
&\quad\times\sum_{j=1}^q Q\Big(\Phi(x_i,s'),x_j\Big)f_W(y'-\varphi(x_j))\lambda\circ\Phi(x_i,s')e^{-\Lambda(x_i,s')}dy'ds'.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons supposé que la fonction v est lipschitzienne donc

$$\Big|v\Big(\Psi(\pi,y',s')\Big)-v\Big(\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big)\Big| \le [v]\Big|\Psi(\pi,y',s')-\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big|.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&|Iv(\pi,y,s,u)-Iv(\tilde\pi,y,s,u)|\\
&\le\ C_v|\pi-\tilde\pi| + [v]\sum_{i=1}^q\pi^i\int_0^{t_i^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi,y',s')-\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big|\\
&\quad\sum_{j=1}^q Q\Big(\Phi(x_i,s'),x_j\Big)f_W(y'-\varphi(x_j))\lambda\circ\Phi(x_i,s')e^{-\Lambda(x_i,s')}dy'ds'\\
&\le\ C_v|\pi-\tilde\pi| + [v]\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{i=r+1}^q\pi^i\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi,y',s')-\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big|\\
&\quad\times\sum_{j=1}^q Q\Big(\Phi(x_i,s'),x_j\Big)f_W(y'-\varphi(x_j))\lambda\circ\Phi(x_i,s')e^{-\Lambda(x_i,s')}dy'ds'.
\end{aligned}$$

Dans l'équation ci-dessus, nous reconnaissons $\overline{\Psi}_m(\pi,y',s')$ d'où

$$\begin{aligned}
&|Iv(\pi,y,s,u)-Iv(\tilde\pi,y,s,u)|\\
&\le\ C_v|\pi-\tilde\pi| + [v]\sum_{r=0}^{q-1}\int_{t_r^*}^{t_{r+1}^*}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\Psi(\pi,y',s')-\Psi(\tilde\pi,y',s')\Big|\overline{\Psi}_m(\pi,y',s')dy'ds'.
\end{aligned}$$

On conclut à l'aide du lemme précédent. □

On s'intéresse maintenant aux opérateurs G^r dont la continuité Lipschitz se déduit en partie de celle de I.

Proposition 9.1.4 *Pour $r\in\mathcal{Q}_0$, pour $v\in BL(\mathcal{M}_1(E_0))$ et pour tous (π,u), $(\tilde\pi,\tilde u)\in\Big(\mathcal{M}_1(E_0)\times\mathbb{R}^+\Big)^2$, on a*

$$|G^rv(\pi,u)-G^rv(\tilde\pi,\tilde u)| \le \Big(2C_v+2[v]\Big)|\pi-\tilde\pi| + C_vC_\lambda|u-\tilde u|.$$

Démonstration Comme dans la proposition 9.1.1, nous pouvons supposer, sans perte de généralité que u, $\tilde{u} \in [t_r^*; t_{r+1}^*]$ si bien que

$$G^r v(\pi, u) = Iv(\pi, u) + \sum_{i=1}^{r} \pi^i e^{-\Lambda(x_i, t_i^*)} \times \sum_{j=1}^{q} \int_{\mathbb{R}^d} v\Big(\Psi(\pi, y', t_i^*)\Big) Q\Big(\Phi(x_i, t_i^*), x_j\Big) f_W(y' - \varphi(x_j)) dy',$$

avec une équation similaire pour $G^r v(\tilde{\pi}, \tilde{u})$. Le second terme ne dépend pas de u d'où

$$|G^r v(\pi, u) - G^r v(\pi, \tilde{u})| = |Iv(\pi, u) - Iv(\pi, \tilde{u})|.$$

De plus, rappelons que $\Psi(\pi, y', t_i^*) = \Psi(\tilde{\pi}, y', t_i^*)$ (voir la définition de Ψ dans la proposition 7.2.4). Par conséquent, on a

$$|G^r v(\pi, u) - G^r v(\tilde{\pi}, u)| \leq |Iv(\pi, u) - Iv(\tilde{\pi}, u)| + C_v |\pi - \tilde{\pi}|.$$

D'où le résultat. □

Puisque $Kv(\pi) = Gv(\pi, t_q^*)$, on peut aisément adapter la preuve précédente pour obtenir la continuité Lipschitz de l'opérateur K.

Proposition 9.1.5 *Pour tout $v \in BL(\mathcal{M}_1(E_0))$ et pour tous π, $\tilde{\pi} \in \mathcal{M}_1(E_0)^2$, on a*

$$|Kv(\pi) - Kv(\tilde{\pi})| \leq \Big(2C_v + 2[v]\Big) |\pi - \tilde{\pi}|.$$

Démonstration Cette preuve est en tout point similaire à la preuve précédente puisque $Kv(\pi) = Gv(\pi, t_q^*)$. □

La continuité Lipschitz de l'opérateur de maximisation L découle de celles des opérateurs H^r, G^r et K.

Proposition 9.1.6 *Pour $v \in BL(\mathcal{M}_1(E_0))$ et pour tous π, $\tilde{\pi} \in \mathcal{M}_1(E_0)^2$, on a*

$$|L(v, g)(\pi) - L(v, g)(\tilde{\pi})| \leq (C_g + 2C_v + 2[v]) |\pi - \tilde{\pi}|.$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned} &\Big|L(v, g)(\pi) - L(v, g)(\tilde{\pi})\Big| \\ &\leq \max_{r \in \mathcal{Q}_0} \left(\sup_{u \in [t_r^*; t_{r+1}^*[} \Big|J^r(v, g)(\pi, u) - J^r(v, g)(\tilde{\pi}, u)\Big| \right) \vee \Big|Kv(\pi) - Kv(\tilde{\pi})\Big| \\ &\leq (C_g + 2C_v + 2[v]) |\pi - \tilde{\pi}|, \end{aligned}$$

en conséquence directe des propositions 9.1.1, 9.1.4 et 9.1.5 puisque notamment $J^r(v, g) = H^r g + G^r v$. □

Enfin, en itérant le résultat précédent, on obtient la continuité Lipschitz des fonctions de valeur $(v_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Proposition 9.1.7 *Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on a $v_n \in BL(\mathcal{M}_1(E_0))$ avec*

$$C_{v_n} \leq C_g,$$
$$[v_n] \leq \Big(2^{N-n+2} - 3\Big)C_g.$$

Démonstration Nous avons prouvé que v_n est la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal d'horizon T_{N-n} ainsi on a

$$v_n(\pi) = \sup_{\sigma \in \Sigma_{N-n}^Y} \mathbf{E}\Big[g(X_\sigma)\Big|\Pi_0 = \pi\Big] \leq C_g.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, la fonction v_n est bornée par $C_{v_n} \leq C_g$. On prouve la deuxième assertion par récurrence rétrograde. Soit π, $\tilde{\pi} \in \mathcal{M}_1(E_0)$. On a

$$\Big|v_N(\pi) - v_N(\tilde{\pi})\Big| \leq \sum_{j=1}^{N} g(x_j)\Big|\pi^j - \tilde{\pi}^j\Big| \leq C_g\Big|\pi - \tilde{\pi}\Big|,$$

donc nous avons le résultat pour $n = N$ with $[v_N] \leq C_g$. De plus, puisque $v_n = L(v_{n+1}, g)$ pour $0 \leq n \leq N-1$, la proposition 9.1.6 fournit

$$[v_n] \leq 3C_g + 2[v_{n+1}],$$

ce qui prouve la propagation de la récurrence. □

Nous nous tournons à présent vers les schémas d'approximation numériques proprement dits. Les résultats que nous venons d'établir permettront de prouver leur convergence.

9.2 Approximation numérique par quantification

Dans le chapitre précédent, nous avons établi l'équation de programmation dynamique fournissant la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal partiellement observé (7.1.3) et nous avons construit une famille de temps d'arrêt ϵ-optimaux. Nous nous intéressons maintenant à l'approximation numérique. Comme dans les deux parties précédentes, notre approche est basée sur la quantification d'un processus à temps discret. Il s'agit dans cette partie de la chaîne $(\Pi_n, S_n)_{0 \leq n \leq N}$ car elle détermine complètement notre équation de programmation dynamique. Nous noterons donc désormais

$$(\Theta_n)_{n \leq N} = (\Pi_n, S_n)_{n \leq N}.$$

Remarquons néanmoins que dans les deux parties précédentes, cette notation désignait successivement $(Z_n, S_n)_{n \leq N}$ et $(Z_n, T_n)_{n \leq N}$. Ces dernières jouaient alors exactement le même rôle que celui qui sera rempli par $(\Pi_n, S_n)_{n \leq N}$ dans le reste de ce chapitre et c'est pourquoi nous conservons la même notation.

Pour approcher le filtre, une première idée consisterait à discrétiser le processus d'observation $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un processus $(\widehat{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et à approcher le filtre Π_n par la loi conditionnelle de Z_n sachant $\widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_n$. Cependant, comme dans [Pham et al., 2005,

Section 3.1], il est possible de quantifier directement, en raison de son caractère markovien, le processus $(\Pi_n, S_n)_{0\leq n\leq N}$. Par ailleurs, nous disposons de la récurrence formulée dans la proposition 7.2.4 qui nous permet de simuler effectivement le processus de filtrage et donc d'envisager la mise en oeuvre pratique de l'algorithme de quantification.

Celui-ci fournit ainsi pour chaque pas de temps $0 \leq n \leq N$ une grille finie $\Gamma_n \subset \mathcal{M}_1(E_0) \times \mathbb{R}^+$ ainsi que des matrices de transitions $(\widehat{Q}_n)_{0\leq n\leq N-1}$ de Γ_n vers Γ_{n+1} et on pose

$$(\widehat{\Pi}_n, \widehat{S}_n) = proj_{\Gamma_n}(\Pi_n, S_n). \tag{9.2.1}$$

Nous notons également Γ_n^{Π}, la projection de Γ_n sur $\mathcal{M}_1(E_0)$, et par Γ_n^S, la projection de Γ_n sur $\mathbb{R}^+$.

9.2.1 Approximation de la fonction de valeur

Notre schéma d'approximation de la suite $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ suit les idées développées dans [de Saporta et al., 2010] mais, encore une fois, les résultats qui y sont obtenus ne peuvent s'appliquer directement car le processus $(\Theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas la chaîne de Markov sous-jacente d'un PMDM. Nous procèderons en deux étapes. La première consiste à discrétiser l'opérateur L de maximisation en temps continu en un opérateur L^d de discrétisation sur un ensembe fini. L'étape suivante consiste, comme dans les deux parties précédentes, à remplacer la chaîne de Markov $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Pi_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son approximation quantifié $(\widehat{\Theta}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\widehat{\Pi}_n, \widehat{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'équation de programmation dynamique. Ainsi, les espérances conditionnelles deviendront de simples sommes finies.

Commençons par construire une grille de temps adaptée à notre problème afin de discrétiser l'opérateur de maximisation en temps continu.

Définition 9.2.1 *Soit $\Delta > 0$ tel que*

$$\Delta < \frac{1}{2}\min\left\{|t_i^* - t_j^*| \text{ avec } 0 \leq i, j, \leq q \text{ tel que } t_i^* \neq t_j^*\right\}. \tag{9.2.2}$$

Pour tout $r \in \mathcal{Q}_0$ i.e. lorsque $t_r^* < t_{r+1}^*$, soit $Gr_r(\Delta)$ la grille finie sur $[t_r^*; t_{r+1}^*]$ définie par

$$Gr_r(\Delta) = \left\{t_r^* + i\Delta, 1 \leq i \leq i_r\right\} \cup \left\{t_{r+1}^* - \Delta\right\}$$

où $i_r = \max\left\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que } t_r^* + i\Delta < t_{r+1}^* - \Delta\right\}$. Enfin, on notera également

$$Gr(\Delta) = \underset{r\in\mathcal{Q}_0}{\cup} Gr_r(\Delta).$$

Remarque 9.2.2 *Soit $r \in \mathcal{Q}_0$. D'après l'équation (9.2.2), la grille $Gr_r(\Delta)$ est non vide. De plus, elle satisfait les propriétés suivantes qui seront cruciales dans la suite :*

a. *pour tout $t \in [t_r^*; t_{r+1}^*]$, il existe $u \in Gr_r(\Delta)$ tel que $|u - t| \leq \Delta$,*

b. *pour tout $u \in Gr_r(\Delta)$ et pour tout $0 < \eta < \Delta$, on a $[u - \eta; u + \eta] \subset]t_r^*; t_{r+1}^*[$.*

C'est lors de la définition des grilles $Gr_r(\Delta)$ que l'hypothèse IV.2 selon laquelle le temps de sortie déterministe t^* est borné devient nécessaire. En effet, elle permet d'assurer que les grilles sont bien finies.

L'opérateur de maximisation discrétisé L^d approchant l'opérateur L est alors défini de la manière suivante.

Définition 9.2.3 *Soit*

$$L^d : B(\mathcal{M}_1(E_0)) \times B(E) \to B(\mathcal{M}_1(E_0)),$$

défini pour tout $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$ *par*

$$L^d(v,h)(\pi) = \left(\max_{u \in Gr(\Delta)} J(v,h)(\pi,u) \right) \vee Kv(\pi).$$

En d'autres termes, on a

$$L^d(v,h)(\pi) = \left(\max_{r \in \mathcal{Q}_0} \left(\max_{u \in Gr_r(\Delta)} J^r(v,h)(\pi,u) \right) \right) \vee Kv(\pi).$$

Nous procédons maintenant à notre deuxième étape : remplacer la chaîne de Markov $(\Theta_n)_{0\le n\le N} = (\Pi_n, S_n)_{0\le n\le N}$ par son approximation quantifiée $(\widehat{\Theta}_n)_{0\le n\le N} = (\widehat{\Pi}_n, \widehat{S}_n)_{0\le n\le N}$ au sein des opérateurs impliqués dans la construction de la fonction de valeur. Par ailleurs, à la différence de la chaîne originale, la chaîne quantifiée n'est pas homogène en temps. Ainsi, il est nécessaire de définir un opérateur par pas de temps.

Définition 9.2.4 *Nous définissons les* opérateurs quantifiés $\widehat{H}_n$, $\widehat{G}_n$, $\widehat{K}_n$, $\widehat{J}_n$ *et* $\widehat{L}^d_n$ *pour* $n \in \{1,\dots,N\}$, $v \in B(\Gamma_n)$, $h \in B(E)$, $\pi \in \Gamma^{\Pi}_{n-1}$ *et* $u \ge 0$ *par*

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_n h(\pi,u) &= \sum_{i=1}^{q} \pi^i \mathbb{1}_{\{u<t_i^*\}} h\circ\Phi(x_i,u) \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_n > u\}} \middle| \widehat{\Pi}_{n-1} = \pi \right], \\
\widehat{G}_n v(\pi,u) &= \mathbf{E}\left[v(\widehat{\Pi}_n) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_n \le u\}} \middle| \widehat{\Pi}_{n-1} = \pi \right], \\
\widehat{K}_n v(\pi) &= \mathbf{E}\left[v(\widehat{\Pi}_n) \middle| \widehat{\Pi}_{n-1} = \pi \right], \\
\widehat{J}_n(v,h)(\pi,u) &= \widehat{H}_n h(\pi,u) + \widehat{G}_n v(\pi,u), \\
\widehat{L}^d_n(v,h)(\pi) &= \left(\max_{r \in \mathcal{Q}_0} \left(\max_{u \in Gr_r(\Delta)} \widehat{J}_n(v,h)(\pi,u) \right) \right) \vee \widehat{K}_n v(\pi).
\end{aligned}$$

L'approximation quantifiée de la fonction de valeur suit naturellement.

Définition 9.2.5 *Pour* $0 \le n \le N$, *nous définissons les fonctions* $\widehat{v}_n$ *sur* Γ^{Π}_n *par*

$$\begin{cases} \widehat{v}_N(\pi) &= \sum_{i=1}^q g(x_i)\pi^i \quad \textit{pour tout } \pi \in \Gamma^{\Pi}_N, \\ \widehat{v}_{n-1}(\pi) &= \widehat{L}^d_n(\widehat{v}_n, g)(\pi) \quad \textit{pour tout } \pi \in \Gamma^{\Pi}_{n-1}. \end{cases}$$

Pour $0 \le n \le N$, *soit*

$$\widehat{V}_n = \widehat{v}_n(\widehat{\Pi}_n).$$

Nous pouvons alors énoncer l'un de nos principaux résultats dans ce chapitre concernant l'approximation numérique.

Théorème 9.2.6 *Soit $\Delta > 0$ tel que pour tout $0 \leq n \leq N-1$,*

$$\Delta > \left(\frac{\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p}{2C_\lambda} \right)^{\frac{1}{2}},$$

alors, on a la borne suivante de l'erreur d'approximation

$$\begin{aligned} \|V_n - \widehat{V}_n\|_p \quad \leq \quad & \left\| V_{n+1} - \widehat{V}_{n+1} \right\|_p + a\Delta + b\Big(\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p \Big)^{\frac{1}{2}} \\ & + c_n \left\| \Pi_n - \widehat{\Pi}_n \right\|_p + 2[v_{n+1}] \left\| \Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1} \right\|_p, \end{aligned}$$

où $a = [g]_2 + 2C_g C_\lambda$, $b = 4C_g\Big(2C_\lambda\Big)^{\frac{1}{2}}$ et $c_n = [v_n] + 4C_g + 2[v_{n+1}]$ et avec $[v_n]$ et $[v_{n+1}]$ définis dans la proposition 9.1.7 et $[g]_2$ défini dans l'hypothèse IV.4.

Le théorème 9.2.6 établit la convergence de notre schéma d'approximation numérique et fournit une borne de la vitesse de convergence. Plus précisément, il donne une vitesse de la convergence au sens de la norme L^p de $\widehat{V}_0$ vers V_0. En effet, on a $\|V_N - \widehat{V}_N\|_p = \| \sum_{i=1}^q g(x_i)\Big(\Pi_N^i - \widehat{\Pi}_N^i\Big)\|_p \leq C_g \|\Pi_N - \widehat{\Pi}_N\|_p$ si bien que $\left|V_0 - \widehat{V}_0\right|$ peut devenir arbitrairement petit lorsque les erreurs de quantification $(\|\Theta_n - \widehat{\Theta}_n\|_p)_{0 \leq n \leq N}$ tendent vers zéro i.e. lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification tend vers l'infini (voir théorème 1.4.1).

9.2.2 Démonstration du théorème 9.2.6

Afin de prouver le théorème 9.2.6, nous procédons comme dans la preuve du théorème 2.4.2 et nous décomposons l'erreur d'approximation en quatre termes

$$\|V_n - \widehat{V}_n\|_p \leq \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4,$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \|v_n(\Pi_n) - v_n(\widehat{\Pi}_n)\|_p, \\ \Xi_2 &= \|L(v_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n) - L^d(v_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n)\|_p, \\ \Xi_3 &= \|L^d(v_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n)\|_p, \\ \Xi_4 &= \|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{\Pi}_n)\|_p. \end{aligned}$$

Il y a ici quatre termes, et non trois comme dans la démonstration du théorème 2.4.2. En effet, le terme Ξ_2 qui correspond à l'approximation de la maximisation en temps continu (opérateur L) par la maximisation sur une grille finie (opérateur L^d) n'a pas son équivalent dans le cas du théorème 2.4.2 (dans lequel il n'y a pas d'opérateur de maximisation).

Premier terme de l'erreur

La borne du premier terme est une conséquence immédiate de la proposition 9.1.7 qui énonce la continuité Lipschitz de la fonction de valeur.

Lemme 9.2.7 *Le premier terme Ξ_1 est borné de la façon suivante*

$$\|v_n(\Pi_n) - v_n(\widehat{\Pi}_n)\|_p \leq [v_n]\|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n\|_p,$$

avec $[v_n]$ défini dans la proposition 9.1.7.

Deuxième terme de l'erreur

Pour le deuxième terme Ξ_2, nous étudions l'erreur qui résulte du remplacement de l'opérateur de maximisation en temps continu par l'opérateur de maximisation sur la grille finie $Gr(\Delta)$.

Lemme 9.2.8 *Pour tout $r \in \mathcal{Q}_0$, pour tout $v \in B(\mathcal{M}_1(E_0))$ et pour tout $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$ on a*

$$\left| \sup_{u\in[t_r^*;t_{r+1}^*]} J^r(v,g)(\pi,u) - \max_{u\in Gr_r(\Delta)} J^r(v,g)(\pi,u) \right| \leq ([g]_2 + C_g C_\lambda + C_v C_\lambda)\,\Delta,$$

où $[g]_2$ est défini dans l'hypothèse IV.4.

Démonstration La fonction $u \to J^r(v,h)(\pi,u)$ étant continue, il existe $\bar{t} \in [t_r^*; t_{r+1}^*]$ tel que $\sup_{u\in[t_r^*;t_{r+1}^*]} J^r(v,h)(\pi,u) = J^r(v,h)(\pi,\bar{t})$. De plus, d'après la remarque 9.2.2.a, on peut choisir $\overline{u} \in Gr_r(\Delta)$ tel que $|\overline{u} - \bar{t}| \leq \Delta$. Les propositions 9.1.1 et 9.1.4 énonçant la continuité Lipschitz de J^r donnent alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{u\in[t_r^*;t_{r+1}^*]} J^r(v,h)(\pi,u) - \max_{u\in Gr_r(\Delta)} J^r(v,h)(\pi,u) \\
&\leq J^r(v,h)(\pi,\bar{t}) - J^r(v,h)(\pi,\overline{u}) \\
&\leq ([g]_2 + C_g C_\lambda + C_v C_\lambda)\,|\bar{t} - \overline{u}| \\
&\leq ([g]_2 + C_g C_\lambda + C_v C_\lambda)\,\Delta.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On en déduit la borne du deuxième terme.

Lemme 9.2.9 *Le deuxième terme Ξ_2 est borné de la façon suivante*

$$\|L(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n) - L^d(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\|_p \leq ([g]_2 + 2C_g C_\lambda)\,\Delta.$$

Démonstration C'est une conséquence directe du lemme précédent une fois qu'on a remarqué que pour tout a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, on a $|a \vee b - c \vee d| \leq |a - c| \vee |b - d|$. Remarquons également que la proposition 9.1.7 fournit $C_{v_{n+1}} \leq C_g$. □

Troisième terme de l'erreur

Le troisième terme Ξ_3 est le terme le plus délicat à borner. En effet, il contient des fonctions indicatrices qui en particulier ne sont pas lipschitziennes. Comme dans [de Saporta et al., 2010], nous parvenons à surmonter cette difficulté en montrant que l'évènement sur lequel se trouve la discontinuité est de probabilité suffisamment faible. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 9.2.10 *Pour tout* $0 \leq n \leq N-1$, *pour tout* $r \in \mathcal{Q}_0$ *et pour tout* $0 < \eta < \Delta$, *on a*

$$\left\| \max_{u \in Gr_r(\Delta)} \mathbf{E}\left[\left| \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \leq u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \leq u\}} \right| \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \right\|_p \leq \frac{\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p}{\eta} + 2\eta C_\lambda.$$

Démonstration Soit $0 < \eta < \Delta$, remarquons que la différence des fonctions indicatrices est égale à 1 si et seulement si S_{n+1} et $\widehat{S}_{n+1}$ sont de part et d'autre de u. Par conséquent, si la différence des fonctions indicatrices est égale à 1, on a l'alternative suivante : $|S_{n+1} - u| \leq \eta$ ou $|S_{n+1} - u| > \eta$ et, dans ce dernier cas, on a également $|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > \eta$ puisque $|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > |S_{n+1} - u|$. On obtient

$$\left| \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \leq u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \leq u\}} \right| \leq \mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > \eta\}} + \mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - u| \leq \eta\}},$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\left\| \max_{u \in Gr_r(\Delta)} \mathbf{E}\left[\left| \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \leq u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \leq u\}} \right| \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \right\|_p \\ &\qquad \leq \|\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > \eta\}}\|_p + \left\| \max_{u \in Gr_r(\Delta)} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - u| \leq \eta\}} \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \right\|_p. \end{aligned}$$

D'une part, l'inégalité de Markov donne

$$\|\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > \eta\}}\|_p = \mathbf{P}\left(|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}| > \eta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p}{\eta}.$$

D'autre part, puisque $u \in Gr_r(\Delta)$, on a (voir remarque 9.2.2.b) $[u - \eta; u + \eta] \subset]t_r^*; t_{r+1}^*[$ ainsi la loi de S_{n+1} est absolument continue sur l'intervalle $[u - \eta; u + \eta]$ (puisqu'il ne contient aucun des t_i^*). Par ailleurs, rappelons que $\widehat{\Theta}_n = proj_{\Gamma_n}(\Theta_n)$, d'où, $\sigma(\widehat{\Pi}_n) \subset \sigma(\widehat{\Theta}_n) \subset \sigma(\Theta_n)$. Nous avons également $\sigma(\Theta_n) \subset \mathfrak{F}_{T_n}^Y \subset \mathfrak{F}_{T_n}$, la loi des espérances conditionnelles itérées fournit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - u| \leq \eta\}} \middle| \widehat{\Pi}_n \right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - u| \leq \eta\}} \middle| \mathfrak{F}_{T_n} \right] \middle| \mathfrak{F}_{T_n}^Y \right] \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\int_{u-\eta}^{u+\eta} \lambda\Big(\Phi(Z_n, s)\Big) e^{-\Lambda(Z_n, s)} ds \middle| \mathfrak{F}_{T_n}^Y \right] \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{q} \Pi_n^i \int_{u-\eta}^{u+\eta} \lambda\Big(\Phi(x_i, s)\Big) e^{-\Lambda(x_i, s)} ds \middle| \widehat{\Pi}_n \right]. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{|S_{n+1} - u| \leq \eta\}} \middle| \widehat{\Pi}_n \right] \leq 2\eta C_\lambda,$$

d'où le résultat. □

On s'intéresse alors à l'erreur commise en remplaçant la chaîne de Markov $(\Theta_n)_{0\leq n\leq N}$ par son approximation quantifiée $(\widehat{\Theta}_n)_{0\leq n\leq N}$ dans l'espérance conditionnelle de l'opérateur K.

Lemme 9.2.11 *Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on a*

$$\begin{aligned}\left|Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right| \\ \leq [v_{n+1}]\mathbf{E}\left[\left|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right] + \left(2C_g + 2[v_{n+1}]\right)\mathbf{E}\left[|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n|\middle|\widehat{\Pi}_n\right],\end{aligned}$$

où $[v_{n+1}]$ est défini dans la proposition 9.1.7.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}\left|Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right| &= \left|\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|}_{(a)} \\ &\quad + \underbrace{\left|\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1}) - v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|}_{(b)}.\end{aligned}$$

D'une part, la proposition 9.1.7 donne

$$(b) \leq [v_{n+1}]\mathbf{E}\left[\left|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right].$$

D'autre part, on cherche à borner le terme (a). On a $(\widehat{\Pi}_n, \widehat{S}_n) = proj_{\Gamma_n}(\Pi_n, S_n)$ si bien que $\sigma(\widehat{\Pi}_n) \subset \sigma(\Pi_n, S_n)$. D'après la loi des espérances conditionnelles itérées , on a

$$\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n, S_n\right]\middle|\widehat{\Pi}_n\right].$$

De plus, rappelons que nous avons prouvé, dans la proposition 8.1.1, que la loi conditionnelle de Π_{n+1} sachant (Π_n, S_n) ne dépend que de Π_n dans le sens où elle vérifie

$$\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n, S_n\right] = \mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n\right].$$

On a alors

$$\begin{aligned}(a) &= \left|\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[v_{n+1}(\Pi_{n+1})\middle|\Pi_n\right]\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right| \\ &= \left|\mathbf{E}\left[Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - Kv_{n+1}(\Pi_n)\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|.\end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 9.1.5 qui énonce la continuité Lipschitz de l'opérateur K et la proposition 9.1.7 selon laquelle $C_{v_{n+1}} \leq C_g$. □

En combinant au résultat précédent un résultat similaire relatif cette fois aux opérateurs J^r, on obtient une borne pour le troisième terme.

Lemme 9.2.12 *Pour tout $0 < \eta < \Delta$, le troisième terme Ξ_3 est majoré par*

$$\begin{aligned}
&\left\|L^d(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p \\
&\leq \ [v_{n+1}]\left\|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\right\|_p + (4C_g + 2[v_{n+1}])\left\|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n\right\|_p \\
&\quad +2C_g\left(\frac{\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p}{\eta} + 2\eta C_\lambda\right),
\end{aligned}$$

où $[v_{n+1}]$ est défini dans la proposition 9.1.7.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
&\left|L^d(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right| \\
&\leq \ \max_{r\in\mathcal{Q}_0}\left(\max_{u\in Gr_r(\Delta)}\left|J^r(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u) - \widehat{J}_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u)\right|\right) \\
&\quad \vee \left|Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right|.
\end{aligned}$$

Le terme impliquant l'opérateur K a été étudié dans le lemme précédent et on se tourne à présent vers le terme contenant J^r. Soit u un élément fixé de $Gr_r(\Delta)$. Nous définissons $\alpha(\pi,\pi',s') = \sum_{i=1}^q \pi^i g\Big(\Phi(x_i,u)\Big)\mathbb{1}_{\{s'>u\}} + v_{n+1}(\pi')\mathbb{1}_{\{s'\leq u\}}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\left|J^r(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u) - \widehat{J}_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u)\right| \\
&\qquad = \left|\mathbf{E}\left[\alpha(\Pi_n,\Pi_{n+1},S_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[\alpha(\widehat{\Pi}_n,\widehat{\Pi}_{n+1},\widehat{S}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|.
\end{aligned}$$

En procédant comme dans le lemme 9.2.11, on obtient

$$\left|\mathbf{E}\left[\alpha(\Pi_n,\Pi_{n+1},S_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[\alpha(\widehat{\Pi}_n,\widehat{\Pi}_{n+1},\widehat{S}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right| \leq A + B,$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \left|\mathbf{E}\left[\alpha(\Pi_n,\Pi_{n+1},S_{n+1}) - \alpha(\widehat{\Pi}_n,\widehat{\Pi}_{n+1},\widehat{S}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|, \\
B &= \left|\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\alpha(\Pi_n,\Pi_{n+1},S_{n+1})\middle|\Pi_n = \widehat{\Pi}_n\right] - \mathbf{E}\left[\alpha(\Pi_n,\Pi_{n+1},S_{n+1})\middle|\Pi_n\right]\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right|.
\end{aligned}$$

La proposition 9.1.7 énonce que $C_{v_{n+1}} \leq C_g$, ainsi on a

$$\begin{aligned}
A \ &\leq \ C_g\mathbf{E}\left[\left|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right] + [v_{n+1}]\mathbf{E}\left[\left|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right] \\
&\quad +2C_g\mathbf{E}\left[\left|\mathbb{1}_{\{S_{n+1}\leq u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1}\leq u\}}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right]. \qquad (9.2.3)
\end{aligned}$$

Dans le terme B, on reconnaît l'opérateur J^r,

$$B = \mathbf{E}\left[J^r(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u) - J^r(v_{n+1},g)(\Pi_n,u)\middle|\widehat{\Pi}_n\right],$$

et d'après les propositions 9.1.1 et 9.1.4, on a

$$B \leq \Big(3C_g + 2[v_{n+1}]\Big)\mathbf{E}\left[\left|\widehat{\Pi}_n - \Pi_n\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right]. \qquad (9.2.4)$$

Enfin, en combiant les équations (9.2.3) et (9.2.4) ainsi que le lemme 9.2.11, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|L^d(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right| \\
&\leq [v_{n+1}]\mathbf{E}\left[\left|\Pi_{n+1}-\widehat{\Pi}_{n+1}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right] \\
&\quad+\left(\left(4C_g+2[v_{n+1}]\right)\vee\left(2C_g+2[v_{n+1}]\right)\right)\mathbf{E}\left[|\Pi_n-\widehat{\Pi}_n|\middle|\widehat{\Pi}_n\right] \\
&\quad+2C_g\max_{u\in Gr_r(\Delta)}\mathbf{E}\left[\left|\mathbb{1}_{\{S_{n+1}\leq u\}}-\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1}\leq u\}}\right|\middle|\widehat{\Pi}_n\right].
\end{aligned}$$

On conclut en prenant la norme L^p dans l'équation ci-dessus et en utilisant le lemme 9.2.10 pour borner le dernier terme contenant les fonctions indicatrices. □

Quatrième terme de l'erreur

Enfin, dans le dernier terme, on ne compare que deux sommes finies.

Lemme 9.2.13 *Le quatrième terme de l'erreur Ξ_4 est borné par*

$$\|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\|_p\leq[v_{n+1}]\left\|\Pi_{n+1}-\widehat{\Pi}_{n+1}\right\|_p+\left\|V_{n+1}-\widehat{V}_{n+1}\right\|_p,$$

où $[v_{n+1}]$ est défini dans la proposition 9.1.7.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p \\
&= \left\|\max_{r\in\mathcal{Q}_0}\max_{u\in Gr_r(\Delta)}\left(\widehat{H}_{n+1}g(\widehat{\Pi}_n,u)+\widehat{G}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n,u)\right)\vee\widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right. \\
&\quad\left.-\max_{r\in\mathcal{Q}_0}\max_{u\in Gr_r(\Delta)}\left(\widehat{H}_{n+1}g(\widehat{\Pi}_n,u)+\widehat{G}_{n+1}\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_n,u)\right)\vee\widehat{K}_{n+1}\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p,
\end{aligned}$$

que nous majorons par la plus grande des différences

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p \\
&\leq \left\|\max_{r\in\mathcal{Q}_0}\max_{u\in Gr_r(\Delta)}\mathbf{E}\left[\left(v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})-\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\right)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1}\leq u\}}\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right. \\
&\quad\left.\vee\mathbf{E}\left[v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})-\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\middle|\widehat{\Pi}_n\right]\right\|_p \\
&\leq \left\|v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})-\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\right\|_p.
\end{aligned}$$

On intercale alors le terme $v_{n+1}(\Pi_{n+1})$ pour obtenir la somme de deux différences.

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p \\
&\leq \left\|v_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})-v_{n+1}(\Pi_{n+1})\right\|_p+\left\|v_{n+1}(\Pi_{n+1})-\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_{n+1})\right\|_p.
\end{aligned}$$

La continuité Lipschitz de v_{n+1} énoncée par la proposition 9.1.7 nous permet de majorer le premier terme tandis qu'on reconnaît V_{n+1} et $\widehat{V}_{n+1}$ dans le second.

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{L}^d_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)-\widehat{L}^d_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n)\right\|_p\\ &\quad\leq\ [v_{n+1}]\left\|\Pi_{n+1}-\widehat{\Pi}_{n+1}\right\|_p+\left\|V_{n+1}-\widehat{V}_{n+1}\right\|_p.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On a donc établi la convergence de notre schéma d'approximation numérique de la fonction de valeur. Cependant, dans les applications, on imagine aisément que c'est moins la fonction de valeur que la construction pratique d'un temps d'arrêt permettant d'approcher cette fonction de valeur qui est intéressante. C'est donc le point que nous abordons dans la section suivante : l'approximation en pratique d'un temps d'arrêt ϵ-optimal.

9.2.3 Construction numérique d'un temps d'arrêt ϵ-optimal

Dans la définition 8.5.2, nous avons décrit la construction d'un temps d'arrêt ϵ-optimal. Dans cette section, nous allons remplacer dans son expression la chaîne de Markov $(\Theta_n)_{0\leq n\leq N}$ par son approximation quantifiée $(\widehat{\Theta}_n)_{0\leq n\leq N}$. Ceci fournira une suite de variables aléatoires $(\widehat{U}_n)_{0\leq n\leq N}$. Nous vérifierons d'une part, que ce sont de véritables temps d'arrêt adaptés à la filtration observée $(\mathfrak{F}^Y_t)_{t\geq 0}$ et d'autre part, que la récompense espérée lorsqu'on s'arrêt au temps $\widehat{U}_N$ constitue une bonne approximation de la fonction de valeur V_0.

Pour tous $(\pi,s)\in\mathcal{M}_1(E_0)\times\mathbb{R}^+$ et $0\leq n\leq N$, nous notons $(\widehat{\pi}_n,\widehat{s}_n)=proj_{\Gamma_n}(\pi,s)$ où nous rappelons que $proj_{\Gamma_n}$ représente la projection au plus proche voisin de $\mathcal{M}_1(E_0)$ sur Γ_n. Soit

$$\begin{aligned}\widehat{s^*}_{N-n}(\pi,s)=\min\Big\{&t\in Gr(\Delta)\text{ tel que}\\ &\widehat{J}_n(\widehat{v}_n,g)(\widehat{\pi}_{n-1},t)=\max_{u\in Gr(\Delta)}\widehat{J}_n(\widehat{v}_n,g)(\widehat{\pi}_{n-1},u)\Big\}.\end{aligned}$$

Pour $1\leq n\leq N$ et pour $\pi\in\mathcal{M}_1(E_0)$, nous définissons

$$\widehat{r}_{N-n}(\pi,s)=\begin{cases}t^*_q & \text{si } \widehat{K}_n\widehat{v}_n(\widehat{\pi}_{n-1})>\max_{u\in Gr(\Delta)}\widehat{J}_n(\widehat{v}_n,g)(\widehat{\pi}_{n-1},u),\\ \widehat{s^*}_{N-n}(\pi,s) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit alors pour $n\geq 1$,

$$\begin{cases}\widehat{R}_{n,0} &= \widehat{r}_{n-1}(\Pi_0,S_0),\\ \widehat{R}_{n,k} &= \widehat{r}_{n-1-k}(\Pi_k,S_k)\mathbb{1}_{\{\widehat{R}_{n,k-1}\geq S_k\}}\text{ pour } 1\leq k\leq n-2,\end{cases}$$

et enfin, on pose

$$\widehat{U}_n=\sum_{k=1}^{n}\widehat{R}_{n,k-1}\wedge S_k.$$

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 8.2.10. C'est un résultat très fort car il affirme que les variables aléatoires $\widehat{U}_n$, qui peuvent être calculées numériquement, constituent de véritables temps d'arrêt pour la filtration observée $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$.

Théorème 9.2.14 *Pour $0 \leq n \leq N$, la variable aléatoire $\widehat{U}_n$ est un $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt.*

Nous cherchons maintenant à prouver qu'en s'arrêtant au temps $\widehat{U}_N$, on obtient une bonne approximation de la fonction de valeur V_0. Pour tous $\pi \in \mathcal{M}_1(E_0)$ et $0 \leq n \leq N$ nous introduisons donc la récompense moyenne attendue lorsqu'on s'arrête au temps $(\widehat{U}_n)_{0\leq n\leq N}$:

$$\overline{v}_n(\pi) = \mathbf{E}\left[g(X_{\widehat{U}_{N-n}})\Big|\Pi_0 = \pi\right],$$

et les variables aléatoires correspondantes

$$\overline{V}_n = \overline{v}_n(\Pi_n).$$

Théorème 9.2.15 *Soit $\Delta > 0$ tel que pour tout $0 \leq n \leq N-1$,*

$$\Delta > \left(\frac{\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p}{2C_\lambda}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on a alors la borne suivante pour l'erreur entre la récompense moyenne attendue en s'arrêtant au temps $\widehat{U}_n$ et la fonction de valeur

$$\begin{aligned}\|V_n - \overline{V}_n\|_p \;\leq\; & \left\|V_{n+1} - \overline{V}_{n+1}\right\|_p + \left\|V_n - \widehat{V}_n\right\|_p + \left\|V_{n+1} - \widehat{V}_{n+1}\right\|_p \\ & + d_n\left\|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n\right\|_p + 2[v_{n+1}]\left\|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\right\|_p \\ & + b\Big(\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_p\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

où $b = 4C_g\Big(2C_\lambda\Big)^{\frac{1}{2}}$ et $d_n = 6C_g + 4[v_{n+1}]$ avec $[v_{n+1}]$ défini dans la proposition 9.1.7. Ainsi, $\widehat{U}_n$ est un temps d'arrêt ϵ-optimal pour le problème d'arrêt optimal d'horizon T_{N-n} où ϵ est donné par la borne ci-dessus.

Il est important de remarquer que $\overline{v}_N(\pi) = \sum_{i=1}^q g(x_i)\pi^i = v_N(\pi)$ et ainsi $\overline{V}_N = V_N$. Par conséquent, le théorème précédent prouve que $|V_0 - \overline{V}_0|$ tend vers zéro lorsque l'erreur de quantification $(\|\Theta_n - \widehat{\Theta}_n\|_p)_{0\leq n\leq N}$ tend vers zéro. En d'autres termes, la récompense attendue $\overline{V}_0$ en s'arrêtant a temps $\widehat{U}_N$ peut être rendue arbitrairement proche de la fonction de valeur V_0 du problème d'arrêt optimal partiellement observé (7.1.3) et ainsi $\widehat{U}_N$ est un temps d'arrêt ϵ-optimal.

Démonstration Dans la première partie de cette preuve, nous cherchons à trouver une relation de récurrence satisfaite par la suite $(\overline{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ afin de comparer celle-ci

avec l'équation de programmation dynamique d'où est issu $(\widehat{V}_n)_{0\leq n\leq N}$. Soit $0 \leq n \leq N-1$. Tout d'abord, le lemme 8.3.3 donne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[g(X_{\widehat{U}_{N-n}})\middle|\Pi_0\right] \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-n-1}\sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_k\leq\widehat{U}_{N-n}\}}\mathbb{1}_{\{\widehat{R}_{N-n,k}<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,\widehat{R}_{N-n,k})e^{-\Lambda(x_i,\widehat{R}_{N-n,k})}\Pi_k^i\middle|\Pi_0\right] \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_{N-n}\leq\widehat{U}_{N-n}\}}g(x_i)\Pi_n^i\middle|\Pi_0\right].
\end{aligned}$$

Le terme correspondant à $k=0$ dans la somme ci-dessus est égal à $Hg(\Pi_0,\widehat{R}_{N-n,0})$. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathfrak{F}_{T_1}^Y$ dans les autres termes et en remarquant que $\{T_1\leq\widehat{U}_{N-n}\}=\{S_1\leq\widehat{R}_{N-n,0}\}$ (d'après le lemme 8.2.6), on a

$$\mathbf{E}\left[g(X_{\widehat{U}_{N-n}})\middle|\Pi_0\right] = Hg(\Pi_0,\widehat{R}_{N-n,0}) + \mathbf{E}\left[\Xi''\mathbb{1}_{\{S_1\leq\widehat{R}_{N-n,0}\}}\middle|\Pi_0\right],$$

avec

$$\begin{aligned}
\Xi'' \;=\; \mathbf{E}\Big[&\sum_{k=1}^{N-n-1}\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_k\leq\widehat{U}_{N-n}\}}\mathbb{1}_{\{\widehat{R}_{N-n,k}<t_i^*\}}g\circ\Phi(x_i,\widehat{R}_{N-n,k})e^{-\Lambda(x_i,\widehat{R}_{N-n,k})}\Pi_k^i \\
&+\sum_{i=1}^{q}\mathbb{1}_{\{T_{N-n}\leq\widehat{U}_{N-n}\}}g(x_i)\Pi_n^i\middle|\mathfrak{F}_{T_1}^Y\Big].
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à appliquer la propriété de Markov à la suite $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le terme Ξ''. En raisonnant de façon similaire à la démonstration du lemme 8.5.3, on obtient pour $n\geq 1$, que sur l'ensemble $\{T_1\leq\widehat{U}_{N-n}\}$, on a

$$\widehat{R}_{N-n-1,k-1}\circ\theta = \widehat{R}_{N-n,k},$$

pour tout $1\leq k\leq n-1$. Ainsi, sur l'ensemble $\{T_1\leq\widehat{U}_{N-n}\}$, on a

$$\widehat{U}_{N-n} = T_1 + \widehat{U}_{N-n-1}\circ\theta.$$

Enfin, rappelons que pour $k\geq 1$, $T_k = T_1 + T_{k-1}\circ\theta$ d'où

$$\mathbb{1}_{\{T_k\leq\widehat{U}_{N-n}\}} = \mathbb{1}_{\{T_{k-1}\leq\widehat{U}_{N-n-1}\}}\circ\theta.$$

Nous pouvons donc appliquer la propriété de Markov et utiliser le lemme 8.3.3, nous reconnaissons alors que $\Xi'' = \overline{v}_{n+1}(\Pi_1)$ puisque $\overline{v}_{n+1}(\pi) = \mathbf{E}\left[g(X_{\widehat{U}_{N-n-1}})\middle|\Pi_0=\pi\right]$. Enfin, nous obtenons

$$\overline{v}_n(\Pi_0) = Hg(\Pi_0,\widehat{R}_{N-n,0}) + G\overline{v}_{n+1}(\Pi_0,\widehat{R}_{N-n,0}) = J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_0,\widehat{R}_{N-n,0}).$$

Rappelons que $\widehat{R}_{N-n,0} = \widehat{r}_{N-n-1}(\Pi_0,S_0)$ et appliquons l'opérateur de translation θ^n afin d'obtenir la récurrence suivante

$$\overline{V}_n = J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{r}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)). \tag{9.2.5}$$

Nous sommes désormais en mesure d'étudier l'erreur entre $\overline{V}_n$ et $\widehat{V}_n$ en comparant l'équation (9.2.5) et l'équation de programmation dynamique. Commençons par rappeler que, d'après sa définition, $\widehat{r}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)$ est égal à $\widehat{s^*}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)$ lorsque

$\widehat{K}_{n+1}\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)$ est plus petit que $\max_{u\in Gr(\Delta)} \widehat{J}_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u)$ ou à t_q^* si on a l'inégalité inverse. Dans ce dernier cas, remarquons que $J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_n,t_q^*) = K\overline{v}_{n+1}(\Pi_n)$. Enfin, on a

$$\left|\overline{V}_n - \widehat{V}_n\right| \leq \mathbb{1}_{\{\widehat{r}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)=t_q^*\}}A + \mathbb{1}_{\{\widehat{r}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)=\widehat{s^*}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)\}}B \leq A\vee B,$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} A & = \left|K\overline{v}_{n+1}(\Pi_n) - \widehat{K}_{n+1}\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right|, \\ B & = \left|J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{s^*}_{N-n-1}(\Pi_n)) - \max_{u\in Gr(\Delta)} \widehat{J}_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,u)\right|. \end{array}\right.$$

Commençons par majorer le terme A. Nous intercalons la fonction v_{n+1} et mettons à profit sa continuité Lipschitz

$$\begin{aligned} A \leq & \underbrace{\left|K\overline{v}_{n+1}(\Pi_n) - Kv_{n+1}(\Pi_n)\right|}_{(c)} + \underbrace{\left|Kv_{n+1}(\Pi_n) - Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right|}_{(d)} \\ & + \underbrace{\left|Kv_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right|}_{(e)} + \underbrace{\left|\widehat{K}_{n+1}v_{n+1}(\widehat{\Pi}_n) - \widehat{K}_{n+1}\widehat{v}_{n+1}(\widehat{\Pi}_n)\right|}_{(f)}. \end{aligned}$$

Dans la somme ci-dessus, on a $(c) \leq \mathbf{E}\left[|\overline{V}_{n+1} - V_{n+1}|\middle|\Pi_n\right]$. Pour majorer le terme (d), on utilise la proposition 9.1.5 qui énonce la continuité Lipschitz de l'opérateur K. On majore le terme (e) à l'aide du lemme 9.2.11. Quant au terme (f), il est borné dans la preuve du lemme 9.2.13. Nous nous tournons à présent vers le terme B. Dans les calculs suivants, nous notons $\widehat{s^*} = \widehat{s^*}_{N-n-1}(\Pi_n,S_n)$. On a

$$B = \left|J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{s^*}) - \widehat{J}_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,\widehat{s^*})\right|.$$

Encore une fois, on intercale la fonction v_{n+1} et puisqu'on a

$$\left|J(\overline{v}_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{s^*}) - J(v_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{s^*})\right| \leq \mathbf{E}\left[|\overline{V}_{n+1} - V_{n+1}|\middle|\Pi_n\right],$$

il suffit de borner

$$\left|J(v_{n+1},g)(\Pi_n,\widehat{s^*}) - \widehat{J}_{n+1}(\widehat{v}_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,\widehat{s^*})\right|.$$

Nous procédons comme dans le cas de l'opérateur K et intercalons les quantités $J(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,\widehat{s^*})$ et $\widehat{J}_{n+1}(v_{n+1},g)(\widehat{\Pi}_n,\widehat{s^*})$. Nous obtenons la somme de trois différences. La première est majorée par les propositions 9.1.1 et 9.1.4 qui énoncent la continuité Lipschitz de l'opérateur J. Les deux suivantes sont majorées à l'aide d'arguments similaires à ceux développés respectivement dans les lemmes 9.2.12 et 9.2.13. □

On a établi la convergence de nos schémas numériques pour la fonction de valeur et pour le temps d'arrêt ϵ-optimal. Dans la prochaine et dernière section, nous illustrons ces résultats avec un exemple numérique.

9.3 Exemple numérique

Dans cette section, nous appliquons notre méthode au cas du PMDM académique présenté dans la section 1.2.2. Rappelons brièvement ces caractéristiques. L'espace d'état est $E = [0;1[$. Pour $x \in E$ et $t \geq 0$, le flot est donné par $\Phi(x,t) = x + vt$ d'où $t^*(x) = (1-x)/v$. Le taux de saut est $\lambda(x) = ax$ pour un certain $a > 0$ et le noyau de transition $Q(x,\cdot)$ est celui d'une loi uniforme sur un ensemble fini $E_0 \subset E$. Ainsi, le processus évolue linéairement vers 1 et saute vers un point de E_0 avec une probabilité d'autant plus importante qu'il se rapproche de 1.

Ce processus est partiellement observé. Plus précisément, comme dans l'équation (7.1.1), l'observation de la n-ième position après saut Z_n est $Y_n = \varphi(Z_n) + W_n$ où on pose $\varphi(x) = x$ et $W_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ pour un certain $\sigma^2 > 0$. Enfin, on choisit la fonction de récompense $g(x) = x$ ce qui signifie qu'on cherche à s'arrêter lorsque le processus est proche de 1. Nos hypothèses sont clairement satisfaites.

Les simulations sont effectuées avec $a = 3$, $v = 1$, $E_0 = \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\}$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ et $N = 9$. La valeur exacte de V_0 est inconnue mais, puisque le temps d'arrêt $\widehat{U}_N$ décrit à la section 9.2.3 appartient à l'ensemble Σ_N^Y des $(\mathfrak{F}_t^Y)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt majorés par T_N, on a, comme dans [de Saporta et al., 2010],

$$\overline{V}_0 = \mathbf{E}\left[g(X_{\widehat{U}_N})\right] \leq V_0 = \sup_{\sigma\in\Sigma_N^Y} \mathbf{E}\left[g(X_\sigma)\right] \leq \mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T_N} g(X_t)\right]. \tag{9.3.1}$$

Le premier et le dernier termes peuvent tout deux être estimés par simulations de Monte Carlo. On a ainsi, avec 10^6 trajectoires, $\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T_N} g(X_t)\right] = 0.9944$. Les valeurs de $\overline{V}_0$, qui dépendent du nombre de point dans les grilles de quantification, sont également obtenues par simulations de Monte Carlo et sont rassemblées dans le tableau 9.1. Celui-ci contient également l'approximation $\widehat{V}_0$ de V_0 ainsi que la borne théorique de l'erreur $|V_0 - \widehat{V}_0|$ fournie par le théorème 9.2.6 (notée B_{th}). Nous remarquons que cette borne décroit avec le nombre de points dans les grilles de quantification ainsi que nous l'attendions. De plus, l'équation (9.3.1) fournit une borne empirique de l'erreur (noté B_{em}),

$$|V_0 - \widehat{V}_0| \leq \max\left(|\overline{V}_0 - \widehat{V}_0|, |\mathbf{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T_N} g(X_t)\right] - \widehat{V}_0|\right).$$

Quantization grids	Δ	$\overline{V}_0$	$\widehat{V}_0$	B_{em}	B_{th}
50 points	0.1179	0.7900	0.8135	0.181	683
100 points	0.0970	0.8031	0.8250	0.169	467
300 points	0.0731	0.8182	0.8407	0.154	271
500 points	0.0634	0.8250	0.8477	0.147	211
1000 points	0.0535	0.8313	0.8545	0.140	152
2000 points	0.0453	0.8361	0.8599	0.135	110
4000 points	0.0381	0.8408	0.8643	0.130	80
6000 points	0.0345	0.8430	0.8666	0.128	67
8000 points	0.0321	0.8479	0.8725	0.122	58
10000 points	0.0303	0.8497	0.8742	0.120	53
12000 points	0.0290	0.8521	0.8771	0.117	49

TABLE 9.1 – Résultats des simulations. Les termes B_{em} et B_{th} représentent respectivement la borne empirique et celle fournie par le théorème 9.2.6 pour l'erreur $|V_0 - \widehat{V}_0|$.

Conclusion

Dans cette partie, notre but était de développer des méthodes numériques pour l'arrêt optimal partiellement observé des PMDM. Contrairement aux parties précédentes, il a été nécessaire de développer tout le cadre théorique dans lequel s'inscrivent nos méthodes numériques. En effet, dans la partie II, ce cadre est fourni par [Davis, 1993] (voir la section 2.2.2) tandis que dans la partie III, il se limite aux formulations de la fonction de survie et des moments des propositions 5.2.2 et 5.2.4.

Ainsi, dans le chapitre 7, nous avons explicité le processus de filtrage sous forme récursive, ce qui constitue un résultat original dans la théorie des PMDM. L'étude du filtre représente une étape essentielle dans la résolution d'un problème partiellement observé car c'est ce processus qui permet de convertir le problème initial en un nouveau problème complètement observé.

Dans le chapitre 8, après avoir reformulé le problème à l'aide du filtre et nous avons établi l'équation de programmation dynamique donnant la fonction de valeur. Nous avons également détaillé la construction d'un temps d'arrêt ϵ-optimal.

Comme dans les parties précédentes, les méthodes numériques que nous proposons ici (chapitre 9) sont basées sur la quantification d'une chaîne de Markov à temps discret. De ce fait, elles bénéficient de certains avantages parmi lesquels une grande flexibilité d'utilisation. Dans le cas présent, nous pouvons remarquer que les grilles de quantification ne dépendent pas de la fonction de récompense. Par conséquent, pour un processus donné, il est possible de réutiliser les mêmes grilles pour étudier plusieurs problèmes d'arrêts optimaux correspondant à des fonctions de récompense différentes, les différentes approximations étant alors obtenues très rapidement.

Bibliographie

[Arjas et al., 1992] Arjas, E., Haara, P., and Norros, I. (1992). Filtering the histories of a partially observed marked point process. *Stochastic Process. Appl.*, 40(2) :225–250.

[Brémaud, 1981] Brémaud, P. (1981). *Point processes and queues*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.

[Davis, 1993] Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

[de Saporta et al., 2010] de Saporta, B., Dufour, F., and Gonzalez, K. (2010). Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637.

[Gugerli, 1986] Gugerli, U. S. (1986). Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process. *Stochastics*, 19(4) :221–236.

[Kalman and Bucy, 1961] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.*, 83 :95–108.

[Ludkovski, 2009] Ludkovski, M. (2009). A simulation approach to optimal stopping under partial information. *Stochastic Process. Appl.*, 119(12) :4061–4087.

[Ouvrard, 2004] Ouvrard, J.-Y. (2004). *Probabilités 2*. Enseignement des mathématiques. Cassini.

[Pham et al., 2005] Pham, H., Runggaldier, W., and Sellami, A. (2005). Approximation by quantization of the filter process and applications to optimal stopping problems under partial observation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(1) :57–81.

Conclusion générale

En conclusion de cette thèse, rappelons brièvement les résultats obtenus avant de présenter quelques perspectives de travaux futurs.

Bilan

Dans cette thèse, nous avons développé des méthodes numériques pour les PMDM concernant trois problèmes. Après avoir développé les cadres théoriques nécessaires à la mise en place de schémas numériques, nous avons prouvé la convergence de nos algorithmes et obtenu, dans presque tous les cas [1], une borne de la vitesse de convergence. Nous avons testé nos méthodes aussi bien sur des exemples académiques que sur des applications réelles. Toutes nos méthodes sont basées sur la quantification d'une chaîne de Markov. Celle-ci est en effet particulièrement bien adaptée puisque les PMDM possèdent une structure sous-jacente à temps discret dans le sens où tout l'aléa du processus à temps continu est contenu dans une chaîne de Markov à temps discret.

Le premier point que nous avons abordé est celui de l'approximation d'espérances de fonctionnelles de PMDM (chapitres 2 et 3). En partant d'une formulation récursive, fournie par [Davis, 1993], de l'espérance à calculer, nous avons développé, dans le chapitre 2, une méthode numérique basée sur la quantification d'une chaîne de Markov sous-jacente au PMDM en suivant les idées exposées dans [de Saporta et al., 2010]. Cette méthode permet de calculer des espérances de fonctionnelles dont l'horizon aléatoire est un temps de saut du processus et nécessite des hypothèses de continuité Lipschitz des caractéristiques du PMDM et des fonctions de coût. Notre principale contribution réside alors dans le chapitre 3 dans lequel nous étudions le cas de fonctionnelles dépendant du temps. D'une part, nous montrons que ce nouveau problème peut être réduit au précédent si on considère le processus augmenté du temps en établissant que celui-ci vérifie les hypothèses de continuité Lipschitz requises. D'autre part, nous généralisons également la méthode précédente au cas de fonctionnelles à horizon déterministe. Cette extension est non triviale car elle fait apparaître dans la fonctionnelle des fonctions indicatrices qui ne sont, en particulier, pas lipschitziennes. Nous montrons que cette difficulté peut être surmontée en relâchant l'hypothèse de continuité Lipschitz dans certains cas ou en encadrant la fonction indicatrice par deux approximations lipschitziennes dans le cas

1. c'est-à-dire pour tous nos algorithmes sauf celui concernant l'approximation de la distribution du temps de sortie.

général. Notre méthode est mise en œuvre dans trois exemples d'applications réelles et fournit des résultats que nous comparons avec des simulations de Monte-Carlo et qui s'avèrent très satisfaisants.

Ensuite, nous nous tournons vers l'évaluation d'un temps de sortie d'un PMDM (chapitres 4, 5 et 6). L'approximation de son espérance et de sa distribution constituait le problème à l'origine de cette thèse. Nous commençons, dans le chapitre 4 par étudier plusieurs pistes qui ne s'avèrent que peu satisfaisantes ; notamment l'utilisation des résultats de la partie précédente. Dans le chapitre 5, nous développons alors une nouvelle méthode numérique permettant d'approcher les moments et la fonction de survie du temps de sortie et qui a pour point de départ une formulation récursive originale des quantités d'intérêt. A la différence de la partie précédente, les hypothèses de continuité Lipschitz sur les caractéristiques du PMDM ne sont pas requises. En revanche, nous rencontrons une difficulté nouvelle : les équations de récurrence sont moins régulières et les preuves de convergences de nos schémas s'appuient alors sur une propriété fine de l'algorithme de quantification. Le chapitre 6 présente les résultats numériques obtenus sur deux exemples.

Enfin, notre dernière partie concerne l'arrêt optimal partiellement observé (chapitres 7, 8 et 9). Le cas complètement observé avait en effet été étudié du point de vue théorique dans [Gugerli, 1986] et numérique dans [de Saporta et al., 2010]. Dans cette partie, avant de se tourner vers les aspects numériques, il est nécessaire d'étudier ce problème du point de vue théorique. Ainsi, nous commençons par étudier le processus de filtrage dans le chapitre 7 pour ensuite établir l'équation de programmation dynamique dans le chapitre 8. L'étude du filtre dans le cas des PMDM est, pour autant que nous le sachions, originale. Nous parvenons à expliciter une relation de récurrence à laquelle il satisfait. Cette étude préliminaire nous permet de reformuler le problème partiellement observé concernant le PMDM en un problème complètement observé concernant le processus de filtrage. Nous établissons ensuite l'équation de programmation dynamique de ce nouveau problème et donnons une construction explicite d'un temps d'arrêt ϵ-optimal. Dans le chapitre 9, nous développons des méthodes numériques permettant d'approcher la fonction de valeur et de calculer un temps d'arrêt ϵ-optimal et qui sont illustrées par un exemple académique.

Nous avons établi la convergence de chacun de nos algorithmes lorsque l'erreur de quantification tend vers zéro i.e. lorsque le nombre ν de points dans les grilles tend vers l'infini. De plus, nous avons obtenu pour la plupart de nos algorithmes une borne de la vitesse de convergence. Celle-ci est de l'ordre de $\nu^{-\frac{1}{d}}$ ou de $\nu^{-\frac{1}{2d}}$ dans le cas de l'arrêt optimal (d étant la dimension). Les vitesses empiriques observées sur nos exemples numériques confirment ces bornes et suggèrent que, dans certains cas, les vitesses de convergence de nos schémas numériques peuvent être meilleures que les bornes que nous avons obtenues (voir la section 6.2.3).

Toutes nos méthodes sont basées sur la méthode de quantification. De ce fait, elles possèdent certains avantages et certains inconvénients. Nos méthodes sont caractérisées par un calcul préalable des grilles de quantification nécessaire avant de

pouvoir appliquer les schémas numériques proprement dits. Cette étape préalable de construction des grilles concentre l'essentiel de la complexité du calcul. En effet, dans nos exemples, elle a nécessité de quelques minutes pour des petites grilles à quelques jours pour des grilles de 12000 points. La mise en œuvre de nos schémas numériques ne prend alors que quelques secondes puisqu'il suffit de calculer des sommes finies. L'intérêt principal de cette décomposition en deux étapes est qu'elle engendre une grande flexibilité de la méthode. En effet, les grilles de quantification, qui ne dépendent que de la dynamique du processus, peuvent être stockées et utilisées à plusieurs fins. Ainsi, dans le cadre de la partie II, après avoir obtenu les grilles de quantification, il est possible de calculer l'espérance de la fonctionnelles pour n'importe quelles fonctions de coût l et c (qui vérifient nos hypothèses) sans avoir à reprendre l'intégralité des calculs. Pour chaque choix de fonctions de coût, seule la deuxième étape des calculs est à effectuer et on obtient le résultat en quelques secondes. Il en est de même dans la partie III concernant le temps de sortie : chaque moment et chaque valeur de la fonction de survie peut être obtenu très rapidement une fois que les grilles ont été construites. Il est également possible de considérer un nouveau temps de sortie tout en conservant les mêmes grilles. Dans la partie IV, on obtient la même flexibilité vis-à-vis de la fonction de récompense. En résumé, tous les paramètres qui n'influent pas sur la dynamique du processus peuvent être modifiés sans que l'on ait à calculer de nouvelles grilles de quantification. Remarquons enfin que nous avons utilisé les mêmes grilles de quantification dans les parties II et III pour le modèle de corrosion. Cette flexibilité est un avantage certain par rapport à des simulations de Monte Carlo. Cependant, elle ne présente pas d'intérêt si on cherche seulement à effectuer un calcul ponctuel et des simulations de Monte Carlo semblent alors plus adaptées. Par ailleurs, la flexibilité de nos méthodes connaît certaines limites. D'une part, les grilles de quantification dépendent de l'état initial du processus qui n'est donc pas un paramètre que l'on peut modifier. D'autre part, les grilles de quantification sont calculées jusqu'au N-ième temps de saut pour un certain horizon N fixé à l'avance. Ainsi, par exemple, on peut considérer un temps de sortie τ dans la mesure où il respecte la condition (énoncée à la section 5.1) selon laquelle la probabilité $\mathbf{P}(\tau > T_N)$ doit être petite. Il en est de même concernant l'horizon déterministe des fonctionnelles de la section 3.3. La valeur, fixé à l'avance, de l'horizon de calcul N limite donc la flexibilité de notre méthode. Enfin, la nécessité de satisfaire certaines hypothèses constitue une contrainte de notre méthode par rapport à celle de Monte Carlo. Cependant, cette contrainte est à relativiser. En effet, nos hypothèses sont vérifiées dans de nombreuses applications et nous avons vu qu'il est parfois possible de les contourner lorsqu'elles ne le sont pas (voir par exemple la section 3.4.2).

Perspectives

La méthode numérique que nous avons développée dans le chapitre 2, c'est-à-dire pour l'approximation d'espérances de fonctionnelles ne dépendant pas explicitement du temps, est largement adaptée de celle de [de Saporta et al., 2010] concernant l'arrêt optimal complètement observé de fonction de récompense $g(x)$ et dont l'horizon

est le N-ième temps de saut T_N. Par conséquent, en introduisant dans ce dernier problème le concept de continuité Lipschitz locale le long du flot et le processus augmenté du temps, la méthode de [de Saporta et al., 2010] peut être généralisée à un problème d'arrêt optimal dont la fonction de récompense $g(x,t)$ dépend explicitement du temps. Il serait alors légitime de considérer, comme nous l'avons fait à la section 3.3 dans le cas des espérances de fonctionnelles, le cas d'un problème d'arrêt optimal à horizon déterministe t_f. Une façon naturelle d'aborder un tel problème serait alors de l'assimiler à un problème d'arrêt optimal de fonction de récompense $g(x,t)\mathbb{1}_{\{t\leq t_f\}}$ et d'horizon T_N choisi de telle sorte qu'avec une forte probabilité, on ait $T_N > t_f$. Ce problème ne rentre pas tout à fait dans le cadre précédent car la fonction de récompense n'est pas lipschitzienne mais nous sommes en mesure d'encadrer la fonction de valeur du problème d'arrêt optimal à horizon déterministe en encadrant cette fonction indicatrice par deux approximations lipschitziennes (comme dans la section 3.3.2). Nous pouvons alors nous demander, d'une part, s'il est parfois possible de relâcher l'hypothèse de continuité Lipschitz (comme nous l'avons fait pour le terme de coût instantané à la section 3.3.1) et d'autre part, ce que devient la construction du temps d'arrêt ϵ-optimal.

Dans les exemples que nous avons traités, le flot Φ qui détermine les trajectoires déterministes du processus était connu explicitement. Or celui-ci étant défini par l'équation différentielle ordinaire (1.1.1), il peut arriver qu'il ne possède pas de formule explicite. Dans ce cas, il est toujours possible de mettre en œuvre nos méthodes en approchant le flot à l'aide d'un schéma d'approximation de la solution d'une équation différentielle ordinaire. Il serait alors intéressant d'étudier les effets d'une telle approche. Il y a fort à parier qu'elle n'aura qu'une influence limitée sur la vitesse de convergence puisque ce type de méthodes convergent en règle générale plus rapidement que les méthodes probabilistes comme celles que nous proposons. On pourra se référer à [Riedler, 2011] qui aborde ce point.

Par ailleurs, concernant nos résultats sur l'arrêt optimal partiellement observé, remarquons que l'hypothèse IV.1, selon laquelle les positions après saut sont à valeurs dans un ensemble fini, a été introduite afin que le filtre soit de dimension finie et puisse être quantifié. Par conséquent, les questions du filtrage et de la programmation dynamique devraient pouvoir être envisagées sans cette hypothèse.

De plus, nous avons fait l'hypothèse que les temps de saut sont parfaitement observés. Cette hypothèse est cruciale pour notre méthode qui ne semble pas pouvoir s'adapter au cas de temps de saut partiellement observés. Ce dernier cas représente un enjeu important du point de vue industriel mais également un problème beaucoup plus délicat mathématiquement.

Enfin, une extension naturelle, mais difficile, de ce problème est le contrôle impulsionnel partiellement observé dans lequel le contrôleur choisit non seulement les instants de contrôle mais également les positions après un contrôle. En effet, le cas complètement observé est étudié dans [de Saporta and Dufour, 2011] et l'arrêt optimal partiellement observé constitue la brique élémentaire du contrôle impulsionnel

partiellement observé. Dans les applications, ce dernier problème correspond, par exemple, au cas où on peut effectuer des maintenances partielles sur un système.

Table des figures

1.1 Exemple de trajectoire d'un PMDM. Les deux composantes connexes de l'espace d'état peuvent correspondre à deux modes. 16

1.2 Une trajectoire du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ (avec $\lambda = 1$) représentée jusqu'au $10^{ème}$ temps de saut. 24

1.3 Une trajectoire du processus représentée jusqu'au $9^{\text{ème}}$ temps de saut avec $a = 3$, $v = 1$ et $E_0 = \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\}$. Les lignes pointillées représentent les valeurs vers lesquelles il est possible de sauter. 25

1.4 Un exemple de trajectoire du modèle d'atelier de maintenance. Le processus part du point Z_0 dont le mode est $m = 1$ (machine en fonctionnement). La machine peut être envoyée à l'atelier pour réparation ($m = 2$) ou maintenance ($m = 3$). 27

1.5 Transitions entre les états dans le modèle d'assurance "garantie de revenus". 29

1.6 Un exemple de trajectoire du modèle d'assurance. 30

1.7 Mis en service en septembre 2010, *Le Terrible* est le quatrième sous-marin nucléaire lanceur d'engins nouvelle génération de la marine française. 30

1.8 Exemple de trajectoire de l'évolution de la perte d'épaisseur (en millimètres) au cours du temps (en heures). Au-delà de 0.2 mm, la structure est réputée inutilisable. 32

1.9 Grille de quantification de 200 points associée à une variable aléatoire gaussienne centrée réduite en dimension 2. 36

2.1 La fonction $t \to \delta^A(x,t)$ est une approximation lipschitzienne de la fonction indicatrice $t \to \mathbb{1}_{\{t=t^*(x)\}}$. 54

3.1 La fonction $t \to \mathbb{1}_{\{t\leq t_f\}}$ (courbe continue) et ses deux approximations lipschitziennes. 81

3.2 La fonction $x \to B(x)$ calculée avec 500 points dans les grilles de quantification en tout point $x = \frac{k}{100}$, pour $0 \leq k \leq 100$. 89

3.3 Logarithme de l'erreur dans l'approximation du bénéfice moyen optimal par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -1.08. 90

3.4 Logarithme de l'erreur dans l'approximation de la perte d'épaisseur par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -0.35. 95
3.5 La fonction $t_f \to \mathbf{E}_{(1,0,0)}\left[\int_0^{t_f} e^{-\rho t}\mathbb{1}_{\{m_t=3\}}dt\right]$ (coût de l'assurance en fonction de la durée du contrat) calculée par quantification avec 100 points, 200 points et 2000 points. La courbe obtenue par simulations de Monte-Carlo n'est pas représentée ici pour plus de clarté car elle est pratiquement confondue avec celle obtenue par quantification avec 2000 points. 98
3.6 Logarithme de l'erreur dans l'approximation de la valeur de l'assurance par rapport au logarithme du nombre de points dans les grilles de quantification. La vitesse de convergence empirique, estimée par modèle de régression, est -0.89. 99
3.7 Quantification d'une loi uniforme sur $[0;1] \times [0;1000]$. Algorithme standard. 100
3.8 Quantification d'une loi uniforme sur $[0;1] \times [0;1000]$. Algorithme pondéré. 101

4.1 La fonction indicatrice $\mathbb{1}_U$ et ses approximations lipschitziennes avec $D = 2$ et $U =]-1;1[$. 120

6.1 Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour le premier et le second moments dans l'exemple du processus de Poisson. Les vitesses de convergence empiriques sont -0.88 et -0.93. 142
6.2 Fonction de survie de τ_{10} et son approximation quantifiée avec 50 et 4000 points dans les grilles de quantification. La courbe exacte et celle obtenue avec 4000 points dans les grilles de quantification sont indistinguables. 143
6.3 Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour la fonction de survie dans l'exemple du processus de Poisson. La vitesse de convergence empirique est -0.94. 144
6.4 Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour le premier moment dans l'exemple du modèle de corrosion. La vitesse de convergence empirique est -0.35. 150
6.5 Fonction de survie de τ obtenue par des simulations de Monte Carlo (courbe pointillée), par notre schéma d'approximation (courbe continue) avec 8000 points dans les grilles de quantification. 151
6.6 Représentation log-log de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification pour la fonction de survie dans l'exemple du modèle de corrosion. La vitesse de convergence empirique est -0.64. 152

Liste des tableaux

1.1 Valeurs des paramètres du modèle de corrosion. 31

3.1 Résultat des simulations pour le bénéfice moyen optimal dans le modèle d'atelier de maintenance. 89
3.2 Résultat des simulations pour l'approximation de la perte d'épaisseur moyenne (en mm) dans l'environnement 2 en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification et une approximation par la méthode Monte-Carlo (10^8 simulations). 95
3.3 Temps de calcul nécessaire à l'approximation de l'espérance dans le modèle de corrosion. 96
3.4 Résultats des simulations pour l'évaluation de l'assurance garantie de revenus de durée de contrat $t_f = 25$ années. 98
3.5 Temps de calcul nécessaire à l'approximation de l'espérance dans le modèle d'assurance. 99

6.1 Résultats des simulations pour la moyenne du temps de sortie pour le processus de Poisson. 141
6.2 Résultats des simulations pour le second moment du temps de sortie pour le processus de Poisson. 141
6.3 Résultats des simulations pour la distribution du temps de sortie pour le processus de Poisson. 143
6.4 Résultats des simulations pour l'espérance du temps de sortie dans le modèle de corrosion. 150
6.5 Résultats des simulations pour la distribution du temps de sortie dans le modèle de corrosion. 152

9.1 Résultats des simulations. Les termes B_{em} et B_{th} représentent respectivement la borne empirique et celle fournie par le théorème 9.2.6 pour l'erreur $|V_0 - \widehat{V}_0|$. 212

Bibliographie

[Arjas et al., 1992] Arjas, E., Haara, P., and Norros, I. (1992). Filtering the histories of a partially observed marked point process. *Stochastic Process. Appl.*, 40(2) :225–250.

[Bally and Pagès, 2003] Bally, V. and Pagès, G. (2003). A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6) :1003–1049.

[Bally et al., 2005] Bally, V., Pagès, G., and Printems, J. (2005). A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options. *Math. Finance*, 15(1) :119–168.

[Bouton and Pagès, 1997] Bouton, C. and Pagès, G. (1997). About the multidimensional competitive learning vector quantization algorithm with constant gain. *Ann. Appl. Probab.*, 7(3) :679–710.

[Brandejsky et al., 2012a] Brandejsky, A., de Saporta, B., and Dufour, F. (2012a). Numerical method for expectations of piecewise-deterministic markov processes. *CAMCoS*, 7(1) :63–104.

[Brandejsky et al., 2012b] Brandejsky, A., de Saporta, B., and Dufour, F. (2012b). Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process. *Advances in Applied Probability*, 44(1) :196–225.

[Brémaud, 1981] Brémaud, P. (1981). *Point processes and queues*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.

[Busic et al., 2012] Busic, A., Gaujal, B., and Pin, F. (2012). Perfect Sampling of Markov Chains with Piecewise Homogeneous Events. *Performance Evaluation*.

[Chiquet and Limnios, 2008] Chiquet, J. and Limnios, N. (2008). A method to compute the transition function of a piecewise deterministic Markov process with application to reliability. *Statist. Probab. Lett.*, 78(12) :1397–1403.

[Chiquet et al., 2009] Chiquet, J., Limnios, N., and Eid, M. (2009). Piecewise deterministic Markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *J. Statist. Plann. Inference*, 139(5) :1657–1667.

[Çinlar and Jacod, 1981] Çinlar, E. and Jacod, J. (1981). Representation of semimartingale Markov processes in terms of Wiener processes and Poisson random measures. In *Seminar on Stochastic Processes, 1981 (Evanston, Ill., 1981)*, volume 1 of *Progr. Prob. Statist.*, pages 159–242. Birkhäuser Boston, Mass.

[Cocozza-Thivent et al., 2006a] Cocozza-Thivent, C., Eymard, R., and Mercier, S. (2006a). A finite-volume scheme for dynamic reliability models. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(3) :446–471.

[Cocozza-Thivent et al., 2006b] Cocozza-Thivent, C., Eymard, R., Mercier, S., and Roussignol, M. (2006b). Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, pages Art. ID 92156, 18.

[Costa, 1991] Costa, O. L. V. (1991). Impulse control of piecewise-deterministic processes via linear programming. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36(3) :371–375.

[Costa and Davis, 1989] Costa, O. L. V. and Davis, M. H. A. (1989). Impulse control of piecewise-deterministic processes. *Math. Control Signals Systems*, 2(3) :187–206.

[Costa and Dufour, 2008] Costa, O. L. V. and Dufour, F. (2008). Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 47(2) :1053–1077.

[Costa et al., 2000] Costa, O. L. V., Raymundo, C. A. B., and Dufour, F. (2000). Optimal stopping with continuous control of piecewise deterministic Markov processes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 70(1-2) :41–73.

[Dassios and Embrechts, 1989] Dassios, A. and Embrechts, P. (1989). Martingales and insurance risk. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 5(2) :181–217.

[Davis, 1984] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3) :353–388. With discussion.

[Davis, 1993] Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London.

[Davis et al., 1987] Davis, M. H. A., Dempster, M. A. H., Sethi, S. P., and Vermes, D. (1987). Optimal capacity expansion under uncertainty. *Adv. in Appl. Probab.*, 19(1) :156–176.

[de Saporta and Dufour, 2011] de Saporta, B. and Dufour, F. (2011). Numerical method for impulse control of piecewise deterministic markov processes. *Available at http ://arxiv.org/abs/1011.5812*.

[de Saporta et al., 2010] de Saporta, B., Dufour, F., and Gonzalez, K. (2010). Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637.

[Dempster, 1991] Dempster, M. A. H. (1991). Optimal control of piecewise deterministic Markov processes. In *Applied stochastic analysis (London, 1989)*, volume 5 of *Stochastics Monogr.*, pages 303–325. Gordon and Breach, New York.

[Dempster and Ye, 1995] Dempster, M. A. H. and Ye, J. J. (1995). Impulse control of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 5(2) :399–423.

[Dufour and Costa, 1999] Dufour, F. and Costa, O. L. V. (1999). Stability of piecewise-deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 37(5) :1483–1502 (electronic).

[Embrechts and Schmidli, 1994] Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994). Ruin estimation for a general insurance risk model. *Adv. in Appl. Probab.*, 26(2) :404–422.

[Everdij and Blom, 2005] Everdij, M. H. C. and Blom, H. A. P. (2005). Piecewise deterministic Markov processes represented by dynamically coloured Petri nets. *Stochastics*, 77(1) :1–29.

[Eymard et al., 2008] Eymard, R., Mercier, S., and Prignet, A. (2008). An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 222(2) :293–323.

[Faggionato et al., 2010] Faggionato, A., Gabrielli, D., and Crivellari, M. R. (2010). Averaging and large deviation principles for fully-coupled piecewise deterministic Markov processes and applications to molecular motors. *Markov Process. Related Fields*, 16(3) :497–548.

[Faggionato et al., 2009] Faggionato, A., Gabrielli, D., and Ribezzi Crivellari, M. (2009). Non-equilibrium thermodynamics of piecewise deterministic Markov processes. *J. Stat. Phys.*, 137(2) :259–304.

[Feller, 1966] Feller, W. (1966). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons Inc., New York.

[Gonzalez, 2010] Gonzalez, K. (2010). *Contribution à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux.* PhD thesis, Université Bordeaux 1.

[Graham and Robert, 2009] Graham, C. and Robert, P. (2009). Interacting multiclass transmissions in large stochastic networks. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6) :2334–2361.

[Graham and Robert, 2010] Graham, C. and Robert, P. (2010). A multi-class mean-field model with graph structure for TCP flows. In *Progress in industrial mathematics at ECMI 2008*, volume 15 of *Math. Ind.*, pages 125–131. Springer, Heidelberg.

[Gray and Neuhoff, 1998] Gray, R. M. and Neuhoff, D. L. (1998). Quantization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(6) :2325–2383. Information theory : 1948–1998.

[Gugerli, 1986] Gugerli, U. S. (1986). Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process. *Stochastics*, 19(4) :221–236.

[Helmes et al., 2001] Helmes, K., Röhl, S., and Stockbridge, R. H. (2001). Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming. *Oper. Res.*, 49(4) :516–530.

[Jacobsen, 2006] Jacobsen, M. (2006). *Point process theory and applications.* Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. Marked point and piecewise deterministic processes.

[Kalman and Bucy, 1961] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.*, 83 :95–108.

[Koroliuk and Limnios, 2005] Koroliuk, V. S. and Limnios, N. (2005). *Stochastic systems in merging phase space.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

[Kurtz and Stockbridge, 1998] Kurtz, T. G. and Stockbridge, R. H. (1998). Existence of Markov controls and characterization of optimal Markov controls. *SIAM J. Control Optim.*, 36(2) :609–653 (electronic).

[Lasserre, 2003] Lasserre, J. B. (2003). SDP versus LP relaxations for polynomial programming. In *Novel approaches to hard discrete optimization (Waterloo, ON, 2001)*, volume 37 of *Fields Inst. Commun.*, pages 143–154. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Lasserre and Prieto-Rumeau, 2004] Lasserre, J.-B. and Prieto-Rumeau, T. (2004). SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stoch. Models*, 20(4) :439–456.

[Lenhart, 1989] Lenhart, S. M. (1989). Viscosity solutions associated with impulse control problems for piecewise-deterministic processes. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 12(1) :145–157.

[Ludkovski, 2009] Ludkovski, M. (2009). A simulation approach to optimal stopping under partial information. *Stochastic Process. Appl.*, 119(12) :4061–4087.

[Ouvrard, 2004] Ouvrard, J.-Y. (2004). *Probabilités 2*. Enseignement des mathématiques. Cassini.

[Pagès, 1998] Pagès, G. (1998). A space quantization method for numerical integration. *J. Comput. Appl. Math.*, 89(1) :1–38.

[Pagès et al., 2004] Pagès, G., Pham, H., and Printems, J. (2004). Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance. In *Handbook of computational and numerical methods in finance*, pages 253–297. Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[Pakdaman et al., 2010] Pakdaman, K., Thieullen, M., and Wainrib, G. (2010). Fluid limit theorems for stochastic hybrid systems with application to neuron models. *Adv. in Appl. Probab.*, 42(3) :761–794.

[Pham et al., 2005] Pham, H., Runggaldier, W., and Sellami, A. (2005). Approximation by quantization of the filter process and applications to optimal stopping problems under partial observation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(1) :57–81.

[Riedler, 2011] Riedler, M. G. (2011). Almost sure convergence of numerical approximations for piecewise deterministic markov processes. *available at http ://arxiv.org/abs/1112.1190*.

[Schäl, 1998] Schäl, M. (1998). On piecewise deterministic Markov control processes : control of jumps and of risk processes in insurance. *Insurance Math. Econom.*, 22(1) :75–91. The interplay between insurance, finance and control (Aarhus, 1997).

[Tyran-Kamińska, 2009] Tyran-Kamińska, M. (2009). Substochastic semigroups and densities of piecewise deterministic Markov processes. *J. Math. Anal. Appl.*, 357(2) :385–402.

[Vermes, 1985] Vermes, D. (1985). Optimal control of piecewise deterministic Markov process. *Stochastics*, 14(3) :165–207.

[Zeiser et al., 2010] Zeiser, S., Franz, U., and Liebscher, V. (2010). Autocatalytic genetic networks modeled by piecewise-deterministic Markov processes. *J. Math. Biol.*, 60(2) :207–246.

Méthodes numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux

mots-clés : Processus markovien déterministe par morceaux ; Méthode numérique ; Quantification ; Arrêt optimal.

résumé : Les processus markoviens déterministes par morceaux (PMDM) ont été introduits dans la littérature par M.H.A. Davis en tant que classe générale de modèles stochastiques non-diffusifs. Les PMDM sont des processus hybrides caractérisés par des trajectoires déterministes entrecoupées de sauts aléatoires. Dans cette thèse, nous développons des méthodes numériques adaptées aux PMDM en nous basant sur la quantification d'une chaîne de Markov sous-jacente au PMDM. Nous abordons successivement trois problèmes : l'approximation d'espérances de fonctionnelles d'un PMDM, l'approximation des moments et de la distribution d'un temps de sortie et le problème de l'arrêt optimal partiellement observé. Dans cette dernière partie, nous abordons également la question du filtrage d'un PMDM et établissons l'équation de programmation dynamique du problème d'arrêt optimal. Nous prouvons la convergence de toutes nos méthodes (avec le plus souvent des bornes de la vitesse de convergence) et les illustrons par des exemples numériques.

Numerical methods for piecewise-deterministic Markov processes

key-words: Piecewise-deterministic Markov process ; Numerical method ; Quantization ; Optimal stopping.

abstract: Piecewise-deterministic Markov processes (PDMP’s) have been introduced by M.H.A. Davis as a general class of non-diffusive stochastic models. PDMP’s are hybrid Markov processes involving deterministic motion punctuated by random jumps. In this thesis, we develop numerical methods that are designed to fit PDMP's structure and that are based on the quantization of an underlying Markov chain. We deal with three issues : the approximation of expectations of functional of a PDMP, the approximation of the moments and of the distribution of an exit time and the partially observed optimal stopping problem. In the latter one, we also tackle the filtering of a PDMP and we establish the dynamic programming equation of the optimal stopping problem. We prove the convergence of all our methods (most of the time, we also obtain a bound for the speed of convergence) and illustrate them with numerical examples.