Diversité spatiale et compensation Doppler en communication sous-marine sur signaux large-bandes

Bastien Lyonnet

▶ **To cite this version:**

Bastien Lyonnet. Diversité spatiale et compensation Doppler en communication sous-marine sur signaux large-bandes. Autre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT124 . tel-00664710v2

HAL Id: tel-00664710

https://theses.hal.science/tel-00664710v2

Submitted on 11 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **traitement du signal**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Bastien LYONNET

Thèse dirigée par **Jean-Marc BROSSIER**
et codirigée par **Cyrille SICLET**

préparée au sein **du laboratoire Grenoble, Images, Parole, Signal, Automatique(GIPSA-lab)**
et de **l'école doctorale d'Électronique, Électrotechnique, Automatique et Traitement du signal(EEATS)**

Diversité spatiale et compensation Doppler en communication sous-marine sur signaux larges-bandes

Thèse soutenue publiquement le **19/12/2011**,
devant le jury composé de :

M. Benoît GELLER
ENSTA ParisTech, Rapporteur
M. Christophe LAOT
Telecom Bretagne, Rapporteur
M. Jean-Marie GORCE
INSA Lyon, Examinateur
M. Philippe POULIGUEN
DGA, Examinateur
M. Jean-Marc BROSSIER
GIPSA-lab, Directeur de thèse
M. Cyrille SICLET
GIPSA-lab, Co-Directeur de thèse

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
ÉCOLE DOCTORALE EEATS
Électronique, Électrotechnique, Automatique et Traitement du signal

T H È S E

pour obtenir le titre de

docteur en sciences

de l'Université de Grenoble

Mention : Traitement du signal

Présentée et soutenue par

Bastien LYONNET

Diversité spatiale et compensation Doppler en communication acoustique sous-marine sur signaux larges-bandes

Thèse dirigée par Jean-Marc BROSSIER et Cyrille SICLET

préparée au laboratoire Grenoble, images, parole, signal, automatique (GIPSA-lab)

soutenue le 19 Décembre 2011

Remerciements

Je remercie Jean-marie Gorce de l'INSA Lyon d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, ainsi que Benoit Geller et Christophe Laot qui ont bien voulu en être les rapporteurs. Leurs remarques dans leur domaine respectif m'ont permis d'améliorer ce document.

Merci également à Pascal POULIGUEN de la Direction Général de l'Armement pour avoir éxaminé ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux directeurs de thèse, Jean-Marc Brossier, professeur à G-INP, et Cyrille Siclet, maître de conférence à l'IUT de Grenoble. Ils ont toujours su m'écouter, me conseiller et me corriger et ce ne fût pas toujours facile !

Je remercie également Arnaud Bourré du GESMA, correspondant DGA qui a supervisé cette thèse.

Merci à tous les membres du laboratoires qui m'ont apporté leur aide durant ces trois années : Laurent Ros, Cornel Ioana, Jérome Mars, Olivier Michel, Jean-Marc Sache, Steeve Zozor.

Merci à tous les thésards du Gipsa-lab avec qui j'ai eu l'occasion de passer du temps : Cyrille, Loic, Jérome, Cécile, Raluca, Fabien, Hussein, Lionel, Damien, Émilie, Florian, Grégoire, Matthieu, Jonathan, Rodrigo, David, Benjamin, Zhongyang, Jérémie, Vincent, et d'autres encore que j'ai oubliés. Merci à tous les gens avec qui j'ai pu coincher.

Pour l'évasion qu'ils m'ont offert, je remercie mes collègues rôlistes, tous ceux du club et les autres amis de longue date : Luiz, Yoann, Jean-Marie, Marc, Sebastien, Edouard, Gaëtan, Hadrien, Thomas. Hommage à Gary Gygax et gloire aux Monty Pythons.

Merci à mes parents et à ma chtite soeur qui ont essayer régulièrement de comprendre mon travail. Votre présence est toujours un réconfort. Mamette, là où elle est, va surement "gonfler".

Et surtout, merci à Jeanne.

Table des matières

Introduction **5**

1 Problématique et état de l'art **9**
1.1 Le canal sous-marin 10
1.1.1 Contexte de l'étude 10
1.1.2 Équation de propagation et approche rayon 10
1.1.3 Durée de propagation 12
1.1.4 Modèle géométrique 14
1.1.5 Expression des retards 16
1.1.6 Remarques sur le modèle utilisé 20
1.2 Signaux de communication multiporteuses 21
1.2.1 Historique 21
1.2.2 Modèle discret pour l'OFDM classique 22
1.2.3 Intérêt de l'OFDM : cas multitrajet 26
1.2.4 DMT 31
1.2.5 Ordres de grandeurs 33
1.3 Effet Doppler sur signaux DMT large bande 34
1.3.1 Critère de Nyquist et largeur de bande 35
1.3.2 Puissance de l'interférence interporteuse 37
1.3.3 Débit et durée utile du symbole DMT 38
1.4 Signal considéré 43
1.5 Conclusion sur la problématique 45

2 Estimation de l'effet Doppler en monotrajet **47**
2.1 Modèle de transmission d'un signal DMT sur canal mono-trajet 48
2.2 Estimateur par le maximum de vraisemblance pour signal DMT 51
2.2.1 Vraisemblance 51
2.2.2 Borne de Cramér-Rao pour signal DMT 52
2.2.3 Maximum de vraisemblance et Borne de Cramér-Rao pour modulation linéaire de fréquence 54
2.2.4 Simulations 55
2.2.5 Données réelles 58
2.3 Estimation par porteuses connues du récepteur 59
2.3.1 Formation des signaux 60
2.3.2 Estimation par porteuses pilotes 61

2.3.3 Estimation par porteuses nulles 64
2.3.4 Comparaison de performances 67
2.4 Conclusion sur l'estimation du paramètre Doppler 69

3 Compensation de l'effet Doppler, cas monotrajet 71
3.1 Changement d'échelle temporelle par rééchantillonnage 72
3.1.1 Shannon et son application 72
3.1.2 Extension à l'interpolation 73
3.1.3 Erreur d'approximation 76
3.2 Filtre de mise en forme 87
3.2.1 Filtrage idéal 87
3.2.2 Base duale 87
3.2.3 Réalisation sur signal discret 89
3.3 Compensation par construction d'une matrice d'exponentielles complexes 90
3.4 Comparaison des méthodes de compensation 92
3.4.1 Méthode par interpolation 92
3.4.2 Méthode par matrice d'exponentielles 94
3.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal monotrajet 96

4 Compensation de l'effet Doppler, cas multitrajet 97
4.1 De la nécessité de considérer un paramètre Doppler différent sur chaque trajet 98
4.1.1 Du point de vue de la littérature 98
4.1.2 Point de vue adopté dans la thèse 98
4.2 Contexte de l'étude 103
4.3 Formation de voies classique 103
4.3.1 Résolution angulaire 105
4.3.2 Gain de Rapport signal sur bruit 112
4.3.3 Mise en place par simulation 113
4.4 Inversion matricielle pour la formation de voies 124
4.4.1 Concept de l'inversion matricielle 124
4.4.2 Inversion matricielle sur un signal DMT 126
4.4.3 Extension à la formation de voies 133
4.4.4 Compromis séparation des trajets/ SNR 134
4.4.5 Simulation de l'inversion matricielle 135
4.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal multitrajet 141

Conclusion 143

A Développement de l'équation d'onde 149

B Estimation du paramètre Doppler pour un signal réel quelconque 153

C Calcul du noyau d'erreur d'interpolation 155

D Noyau d'erreur et condition de biorthogonalité 161

E Integrale et somme, passage du continu au discret 165

Bibliographie 167

Liste des notations

Liste des variables utilisées

I	Nombre de trajets du canal
c	Vitesse du son dans l'eau
h	Profondeur du milieu sous-marin
v	Vitesse du mobile dans l'eau
$z(t)$	Profondeur de l'émetteur à l'instant t
h_r	Profondeur du récepteur
$x(t)$	Distance émetteur/récepteur
l_i	Longueur du trajet i
T_o	Temps mis par l'onde acoustique pour traverser le canal pour le trajet direct
N	Nombre de capteurs de l'antenne en réception
Δ_h	Écart entre deux capteurs de l'antenne de réception
$\delta(t)$	Impulsion de Dirac
c	Symbole QPSK pour la modulation OFDM
T_0	Durée utile d'un symbole OFDM
F_0	Écart entre deux porteuses d'un symbole OFDM
T_g	Durée de l'intervalle de garde d'un symbole OFDM
T	Durée totale d'un symbole OFDM
T_e	Période d'échantillonnage à l'émission
T_r	Période d'échantillonnage à la réception
M	Nombre de porteuses OFDM, $MT_e = T_0$
G	Nombre entier d'éléments dans l'intervalle de garde, $GT_r = T_g$
K	Nombre total d'éléments d'un symbole OFDM en réception, $K = T_0/T_r$
d	Paramètre Doppler induit par le canal
τ_i	Retard induit par le canal sur le trajet i

a_i	Atténuation du trajet i
$s(t)$	Signal à l'émission
$r(t)$	Signal en sortie du canal, avant prise en compte du filtre de réception
$y(t)$	Signal temporel après le filtre de réception
g_e	Filtre d'émission, réel et symétrique
$\tilde{g}_e$	Fonction duale à g_e
g_r	Filtre de réception, réel et symétrique
$\tilde{g}_r$	Fonction duale à g_r
ϕ_g	Fonction de la base d'interpolation
$\tilde{\phi}_g$	Fonction duale de la base d'interpolation
h	Réponse impulsionnelle du canal acoustique
b	Bruit additif apporté par le canal de transmission
SR	Facteur de suréchantillonnage en réception
*	Complexe conjugué
^{H}	Transposé complexe conjugué

Définition des fonctions usuelles

Fonction porte :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction sinus cardinal :

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Convolution :

$$f \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Sigles et acronymes utilisés

ADSL Asymmetric Digital Subscriber Line
ASM acoustique sous-marin
AUV Autonomous Underwater Vehicule
BABG Bruit additif blanc gaussien
BPSK Binary phase-shift keying
DAB Digital Audio Broadcasting
DMT Discrete MultiTone
DVB-T Digital Video Broadcasting Terrestrial
DSP Densité spectrale de puissance
DSSS Direct Sequence Spread Spectrum
DVB-T Digital Video Broadcasting - Terrestrial
FSK Frequency Shif Keying
GESMA Groupe d'études sous-marines de l'Atlantique
ICI Inter Carrier Interference
IES Interférence entre symboles
ISI Inter Symbol Interference
OFDM Orthogonal frequency division multiplexing
QAM Quadrature amplitude modulation
QPSK Quadrature phase-shift keying
SIMO Single Input Multiple Output
SNR Signal to Noise Ratio
TFD Transformée de Fourier Discrète
TFDI Transformée de Fourier Discrète Inverse

Introduction

L'exploration des fonds marins a depuis longtemps déjà fasciné l'humanité. Depuis les récits épiques d'Homère jusqu'aux voyages sous-marins de vingt mille lieues sous les mers de Jules Verne, en passant par la société idéale de l'Atlantide de Socrate, chaque époque a projeté sur la mer ses fantasmes et ses peurs.

Ceci est lié au fait que le milieu sous-marin reste avant tout méconnu. Ce n'est que depuis les XIXe et XXe siècle que l'humanité a pu, grâce au scaphandre, explorer les fonds marins. Au siècle dernier, les sous-marins ont encore permis d'avancer un peu plus loin et il est maintenant possible de se déplacer sous l'eau. Mais l'univers maritime reste le monde du silence. Les communications de plongeur à plongeur ou entre sous-marins sont toujours difficiles et les débits limités.

Les trente dernières années ont vu se développer un intérêt croissant pour les communications sous-marines. Pourtant les besoins ont existé depuis les premiers véhicules submersibles. Le choix d'utiliser alors des signaux acoustiques s'est fait naturellement compte tenu de la faible portée des ondes électromagnétiques. Cependant, du fait des nombreux trajets multiples liés aux réflexions sur la surface et sur le fond, le canal imposait d'utiliser des symboles de communication de durée inférieure au retard maximum du canal. En effet, dans les années 60, il n'existait pas de méthode efficace pour compenser la dispersion temporelle du canal sous-marin.

En parallèle, à la surface, les communications numériques hertziennes se sont développées. Depuis les années 80, il existe des modulations capables de dépasser le problème des trajets multiples. Les premiers résultats probants ont été obtenus sur des communications verticales en eau profonde. L'émetteur est alors profondément immergé (plusieurs milliers de mètres) et communique directement avec un navire à la surface [Baggeroer 1984]. Les modulations utilisées sont des modulations par saut de fréquence (FSK [1]) qui se révèlent très robustes et présentent une consommation minimale.
Au début des années 90, on peut voir l'apparition des premiers téléphones numériques sous-marins (notamment commercialisés par OTS, Ocean Tech-

1. Frequency Shif Keying

nology Systems). Il s'agit de matériel pour plongeurs qui fonctionne à de courtes distances et permet de transmettre des informations avec un faible débit, typiquement de la voix.

Dans le même temps, dans le domaine des communications hertziennes aériennes, des modulations multiporteuses se sont développées. Très résistantes aux trajets multiples elles permettent une égalisation aisée, [Cimini 1985], [Peled 1980]. Il s'agit des modulations de type OFDM [2]. Ces modulations apparaissent aussi comme une bonne solution aux problèmes de trajets multiples en milieu sous-marin peu profond (moins de 100 mètres) [Stojanovic 1996], [Chitre 2008], [Kilfoyle 2000], [Sozer 2000], [Tarbit 1994]. L'utilisation des modulations multiporteuses en milieu sous-marin apparaît ainsi dans les années 90. Les tests en mer sont très concluants [Li 2006]. Une expérimentation dans la mer Méditerranée [Frassati 2005], montre de bonnes performances pour l'OFDM, avec un taux d'erreur binaire inférieur à 2.10^{-3} pour un distance émetteur récepteur de 6 km, ce qui se révèle bien plus performant que d'autres modulations comme le DSSS [3].

Il est possible d'acheter de nos jours chez des fabricants des modems pour la communication acoustique sous-marine avec des débits pouvant aller jusqu'à 30 kb/s sur des distances de l'ordre du kilomètre. On peut citer Evologic en Europe et LinkQuest aux États-unis.

Cependant, un problème demeure : celui de l'effet Doppler. Tous les systèmes de communication déjà évoqués sont très efficaces à condition que le mouvement relatif entre émetteur et récepteur soit limité voir nul. Le mouvement va provoquer l'apparition d'un effet Doppler qui va comprimer ou dilater temporellement le signal transmis. Or, les signaux multiporteuses préconisés pour compenser les trajets multiples se révèlent très sensibles à l'effet Doppler. Ce dernier détruit l'orthogonalité entre les porteuses ce qui conduit à une perte totale de l'information, [Proakis 2008].
Ce type de modulation reste cependant la meilleure solution compte tenu de sa facilité d'égalisation pour compenser les trajets multiples.

La problématique de cette thèse est d'utiliser les diversités spatiale et temporelle en milieu sous-marin afin de proposer des solutions pour la compensation de l'effet Doppler sur des signaux multiporteuses pour des canaux mono et multitrajets. Les travaux développés ici s'inscrivent donc dans le prolongement des recherches effectuées dans le domaine sur les dix dernières années.

2. Orthogonal frequency division multiplexing
3. Direct Sequence Spread Spectrum

La première partie se concentre sur le développement de la problématique. Le contexte de l'étude est présenté ainsi que les équations d'ondes dans un environnement petits fonds. Le modèle du signal est alors obtenu en s'appuyant sur la théorie de propagation par rayons, qui convient à des signaux hautes fréquences. La construction des signaux de communication OFDM est également présentée ainsi que l'utilisation des intervalles de garde et les méthodes d'égalisation classiques. Finalement sont abordées, en conclusion de cette partie, les conséquences de l'effet Doppler sur un signal multiporteuse.

Dans une deuxième partie sont développées plusieurs méthodes d'estimation du paramètre Doppler en milieu sous-marin pour un canal mono-trajet. La première méthode porte sur un estimateur du maximum de vraisemblance. Les performances de cet estimateur dépendent du signal utilisé en émission, signal supposé parfaitement connu en réception. On compare alors les performances de l'estimateur du maximum de vraisemblance en fonction du type de signal transmis (OFDM, modulation linéaire de fréquence). Cette comparaison se fait par simulation. Il nous a été possible de tester l'estimation du maximum de vraisemblance avec une modulation linéaire de fréquence sur des données acquises en mer par le GESMA [4].

Nous avons également développé deux autres méthodes d'estimation, toutes les deux basées sur des porteuses pilotes connues du récepteur. Ces deux méthodes sont comparées par simulation.

La troisième partie de ces travaux porte sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal mono-trajet bruité. L'effet Doppler provoquant une dilatation ou une compression temporelle du signal reçu, une façon simple de le compenser est d'effectuer l'opération inverse. Pour une fréquence pure (signal monochromatique), cette opération est très aisée à réaliser car elle consiste alors en un décalage fréquentiel. Avec un signal multiporteuse, la compensation Doppler est réalisée classiquement par un rééchantillonnage du signal reçu. On compare par des simulations l'efficacité des différentes bases de rééchantillonnage. Nous développons également une estimation basée sur la projection du signal reçu sur un ensemble de signaux de fréquences pures discrétisées (c'est-à-dire des exponentielles complexes discrètes).

Finalement, dans une quatrième et dernière partie, on considère le problème de la compensation de l'effet Doppler sur un signal large bande en présence de trajets multiples. Étant donnée la géométrie du problème, nous considérons que l'effet Doppler est différent sur chaque trajet. Le problème en réception devient alors très difficile à résoudre car pour chaque trajet, le

4. Groupe d'études sous-marines de l'Atlantique

retard et le paramètre Doppler changent. Mais nous apportons une solution en tirant partie de la diversité spatiale du canal ASM [5]. En considérant, pour un trajet donné, que le paramètre Doppler est identique sur tous les capteurs de l'antenne, il est possible d'effectuer une séparation des différents trajets par formation de voie. Nous évaluons cette méthode par simulation.

Nous développons également une méthode permettant une complète séparation des trajets reçus. Elle s'appuie sur la propriété d'invariance par translation de la transformée de Fourier d'un signal retardé. Par la résolution d'un système d'équations simples sur chaque fréquence discrète, il est alors possible de retrouver le signal émis par la source virtuelle correspondant à un trajet donné, affecté par le bruit du canal.

5. acoustique sous-marin

Chapitre 1

Problématique et état de l'art

« Mobilis in mobili, mobile dans l'élément mobile. »
Devise du Capitaine Némo dans Vingt milles lieux sous les mers, Jules Verne.

Sommaire

1.1 Le canal sous-marin 10
1.1.1 Contexte de l'étude 10
1.1.2 Équation de propagation et approche rayon 10
1.1.3 Durée de propagation 12
1.1.4 Modèle géométrique 14
1.1.5 Expression des retards 16
1.1.6 Remarques sur le modèle utilisé 20
1.2 Signaux de communication multiporteuses 21
1.2.1 Historique 21
1.2.2 Modèle discret pour l'OFDM classique 22
1.2.3 Intérêt de l'OFDM : cas multitrajet 26
1.2.4 DMT 31
1.2.5 Ordres de grandeurs 33
1.3 Effet Doppler sur signaux DMT large bande 34
1.3.1 Critère de Nyquist et largeur de bande 35
1.3.2 Puissance de l'interférence interporteuse 37
1.3.3 Débit et durée utile du symbole DMT 38
1.4 Signal considéré 43
1.5 Conclusion sur la problématique 45

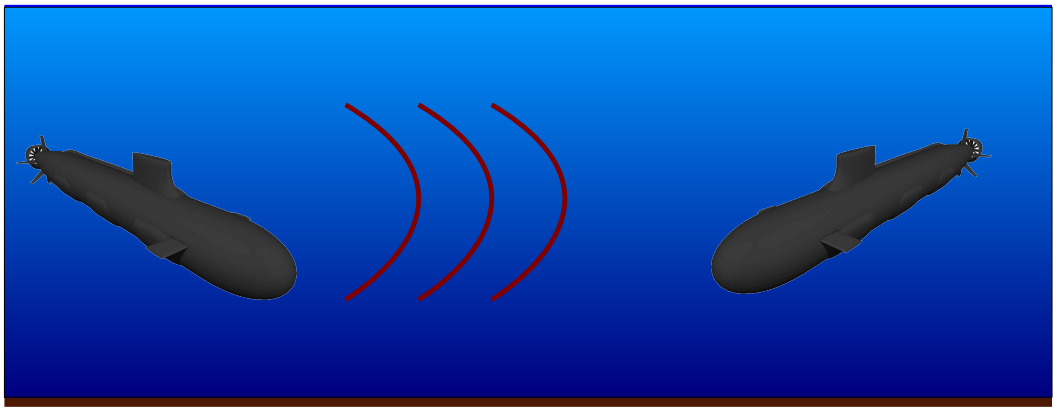


FIGURE 1.1 – Schéma du problème considéré.

1.1 Le canal sous-marin

1.1.1 Contexte de l'étude

Dans cette étude, nous considérons deux objets sous-marins désirant communiquer, sur une distance de l'ordre du kilomètre dans un environnement petit fond, d'environ une centaine de mètres de profondeur. Typiquement, il peut s'agir de sous-marins militaires, de petits sous-marins automatisés autonomes (AUV[1]) ou téléguidés, ou encore de sondes placées sous une bouée ou tirées par un navire. Les données transmises entre ces appareils sont variées : il peut par exemple s'agir de commandes de navigation pour un AUV, de données tomographiques, d'images, de signaux de parole... La figure 1.1 schématise le contexte de l'étude. En milieu sous-marin, les ondes éléctromagnétiques ne se propagent que sur de très courtes distances, de l'ordre du mètre, avant d'être absorbées par le milieu. Par contre, les ondes acoustiques peuvent se propager sur des dizaines voire des centaines de kilomètres selon les fréquences utilisées. C'est pourquoi nous utiliserons ici des ondes acoustiques pour communiquer en milieu sous-marin.

1.1.2 Équation de propagation et approche rayon

Il est nécessaire de s'interroger sur la propagation des ondes acoustiques dans l'eau. De nombreuses études expérimentales ont été réalisées sur le sujet [Tolstoy 1987], [Clark 1976], [Boden 1991], [Flanagan 1974], [Preisig 2007], [Munk 2006].

1. Autonomous Underwater Vehicule

Au cours de leur propagation dans l'eau, les ondes acoustiques subissent des effets de dispersion et d'absorption. Les pertes par absorption résultent de la transformation d'une onde acoustique en chaleur : le milieu sous-marin est dissipatif et absorbe une partie de l'énergie des ondes acoustiques. Plus précisément, l'absorption dépend de la fréquence de l'onde (cf. [Preisig 2007]). Ces deux phénomènes font que les communications sous-marines ne sont possibles que dans une plage de fréquences limitée dont la largeur décroît en fonction de la distance de la transmission. Des études sur ce point ont en particulier été menées dans [Stojanovic 2007]. Il en ressort que la capacité du canal de transmission acoustique sous-marin est liée à la plage de fréquences utilisée (et non pas uniquement la largeur de cette plage) ainsi qu'à la distance maximale de communication. De manière générale, plus la fréquence augmente et plus la distance de communication est limitée.

Les fréquences choisies pour les signaux de communication doivent prendre en compte ces considérations physiques. Pour une distance de communication de l'ordre du kilomètre, les largeurs de bandes de fréquences utilisées sont entre 5kHz et 30kHz.

Pour mieux comprendre ces phénomènes, intéressons-nous maintenant aux équations de propagation des ondes acoustiques. Physiquement, une onde acoustique est une variation locale de pression du milieu. La théorie des rayons, malgré ses approximations, est une méthode très efficace pour étudier la propagation de ces ondes dans le milieu. Par invariance du milieu de propagation, on peut se ramener à une étude en deux dimensions. Dans le repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on pose $\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{j}$, vecteur qui désigne un point du plan où l'on cherche l'expression de l'onde acoustique. On se place dans un répère à deux dimensions. L'onde acoustique s vérifie l'équation suivante :

$$\nabla^2 s(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 s(t, \vec{r})}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

∇^2 représente l'opérateur laplacien : $\nabla^2 s(t, \vec{r}) = \frac{\partial^2 s(t,\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(t,\vec{r})}{\partial z^2}$. $c(\vec{r})$ est la vélocité de l'onde acoustique au point de l'espace de coordonnées (x, z). On cherche des solutions à l'équation (1.1) sous la forme d'une onde plane monochromatique de fréquence ν_0 et de phase $2\pi\nu_0\tau(\vec{r})$. Sous cette forme, $\tau(\vec{r})$ représente le temps mis par l'onde acoustique pour atteindre le point

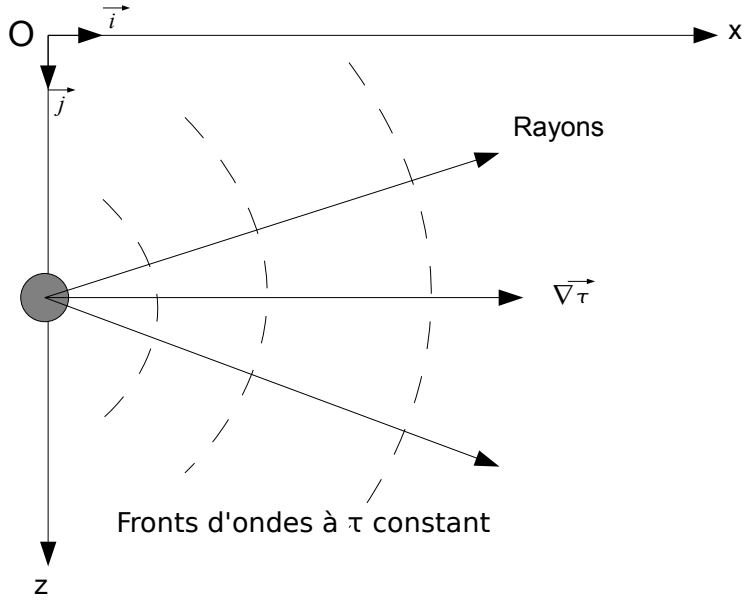


FIGURE 1.2 – Schéma représentant les rayons perpendiculaires aux fronts d'onde.

désigné par le vecteur position $\vec{r}$.
Les fronts d'ondes sont définis comme étant les surfaces de phase constante, ce qui revient à écrire $\tau(\vec{r}) =$ constante pour une onde monochromatique. Les rayons sont alors définis comme étant les trajectoires orthogonales aux fronts d'ondes. C'est une représentation du trajet de l'onde par une ligne continue, comme illustré sur la figure 1.2. Les rayons n'existent pas réellement, ce n'est qu'une représentation pratique du trajet de l'onde acoustique.

En considérant la définition des rayons et en s'appuyant sur l'approximation B.K.W. (pour Brillouin - Kramers - Wentzel , du nom des personnes qui l'ont développée) [Tolstoy 1987], [Jensen 1994], on va pouvoir connaître les trajets des rayons.

1.1.3 Durée de propagation

Après quelques calculs présentés en annexe A, on obtient, par intégration sur l'abscisse curviligne, l'expression de τ pour chaque abscisse du rayon.

$$\tau(l) = \tau(0) + \int_0^l \frac{dl'}{c(l')} \tag{1.2}$$

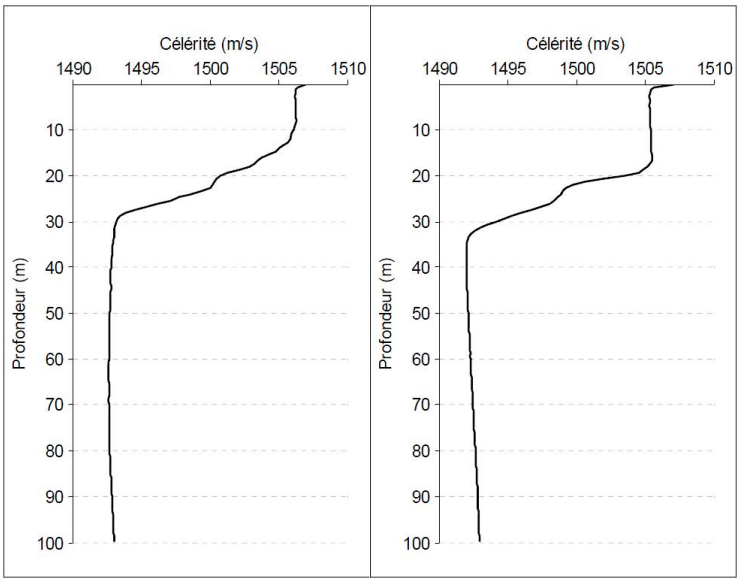


FIGURE 1.3 – Relevés bathycélérimétriques réalisés en mer d'Iroise les 29 et 30 septembre 2009.

Le terme de l'intégrale correspond à la durée du trajet entre l'origine du rayon et le point d'abscisse curviligne l. L'abscisse curviligne correspond à la longueur du trajet du rayon depuis son origine. D'un point de vue physique, l'onde est simplement retardée de la durée du temps de propagation.

Les rayons peuvent très bien suivre des trajectoires courbes et ne jamais atteindre le fond marin en fonction de l'évolution de la vélocité.

La vélocité des ondes acoustiques va grandement varier en fonction de la pression, de la température et de la salinité de l'eau [Defant 1961]. Les premières mesures de vélocité des ondes acoustiques ont été réalisées indirectement en utilisant des mesures expérimentales des ces trois quantités. Cependant, la plupart des mesures actuelles s'effectuent avec des vélocimètres. En pratique, la salinité n'affecte que très peu la vitesse de l'onde et il est courant de considérer la vitesse comme variant seulement selon la profondeur du milieu. C'est une approximation qui s'avère fiable. L'influence de la température peut faire changer le profil de vitesse selon les saisons et selon l'ensoleillement. Sur la figure 1.3, on peut voir un relevé de vitesse des ondes acoustiques réalisé en mer d'Iroise par le GESMA. D'autres profils de vitesse ont été mesurés dans [Clark 1976] pour des profondeurs allant jusqu'à plusieurs kilomètres.

Le contexte de la thèse se concentre sur les milieux dits petits fonds d'environ 100 mètres de profondeur. La vitesse de l'onde acoustique dans cette

configuration varie peu, sauf aux abords de la surface. Durant toute notre étude, afin de simplifier les modèles utilisés, on considérera que la vitesse du son dans l'eau est constante avec $c = 1500$ m/s. Les rayons suivront des trajectoires en lignes droites.

En considérant que la vélocité est constante dans tout le milieu, avec $\tau(0) = 0$, l'équation 1.2 devient :

$$\tau(l) = \int_0^l \frac{dl'}{c} = \frac{l}{c} \tag{1.3}$$

1.1.4 Modèle géométrique

On considère le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec l'origine O située au niveau de la mer, $\vec{i}$ vecteur unitaire selon l'horizontale orienté de telle sorte que l'émetteur soit situé en un point E d'abscisse $x(t)$ positive, et $\vec{j}$ vecteur unitaire du repère selon la verticale orientée vers le fond marin. On dispose ainsi d'un émetteur sous-marin situé au point E de profondeur $z(t)$ et à l'horizontale $x(t)$. La source va rentrer en mouvement au cours de la transmission. Le récepteur, au point R, est lui fixe et situé sous l'eau à une profondeur h_r (cf. figure (1.4)). On a donc $\overrightarrow{OE} = x(t)\vec{i}+z(t)\vec{j}$ et $\overrightarrow{OR} = h_r\vec{j}$. On note aussi h la profondeur du milieu. On se place dans un milieu peu profond ($h < 100$m). La distance de communication est de l'ordre du kilomètre. On nomme $x_0 = x(0)$ la distance horizontale qui sépare émetteur et récepteur en début de communication et $z_0 = z(0)$ la profondeur de la source au début de l'émission. L'émetteur se déplace à la vitesse $\vec{v}$ supposée constante sur la durée d'observation. On suppose aussi la vitesse des ondes acoustiques dans le milieu constante. Cette approche est valide pour les profondeurs étudiées et les fréquences utilisées comme précisé dans la partie précédente. Les rayons sont réfléchis par le fond marin et par la surface en suivant les lois de Snell-Descartes, [Munk 2006], [Tolstoy 1987].

On suppose que le signal reçu au niveau du récepteur est constitué de la réception des différents rayons ayant parcouru le canal. Si $s(t)$ est le signal émis, le signal reçu est de la forme :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t)s(t - \tau_i(t)) + b_r(t) \tag{1.4}$$

$\tau_i(t)$ est le retard du trajet i et $a_i(t)$ est son amplitude, dont la valeur dépend

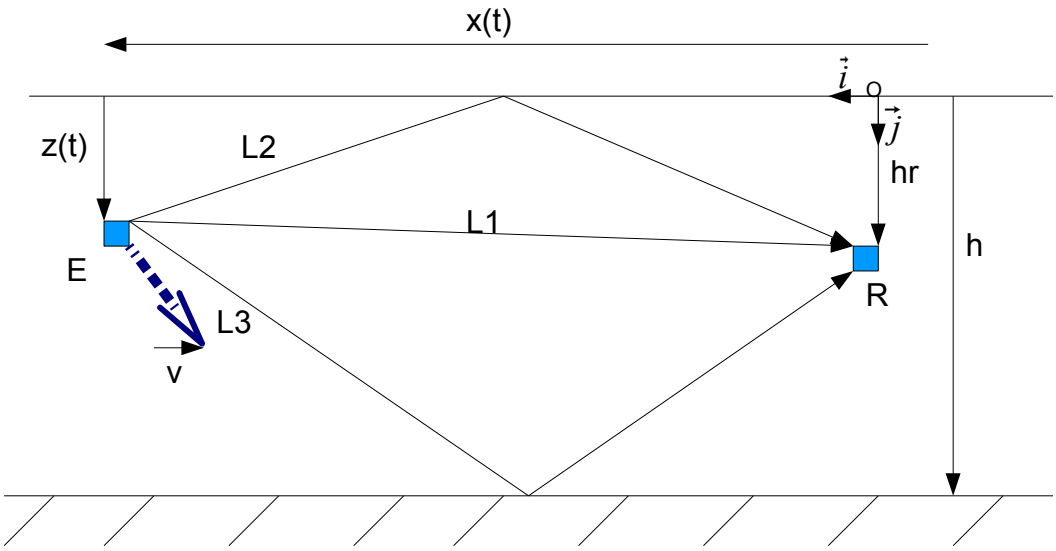


FIGURE 1.4 – Schéma de propagation des rayons acoustiques (trajet direct et trajets à une réflexion).

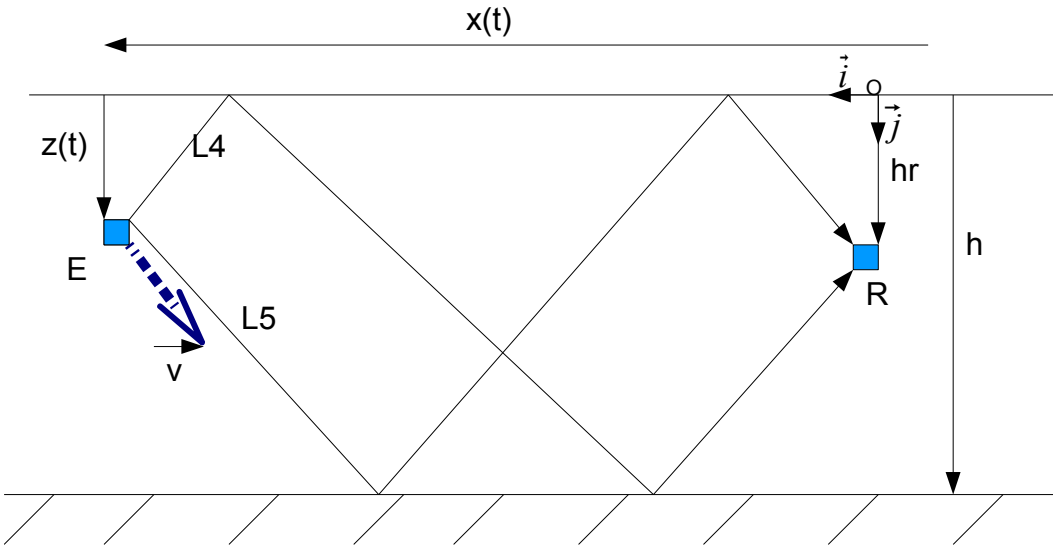


FIGURE 1.5 – Schéma de propagation des rayons acoustiques avec deux réflexions.

des pertes par atténuation et par réflexion. $b_r(t)$ est le bruit additif. On a :

$$\tau_i(t) = \frac{l_i(t)}{c} \tag{1.5}$$

Le bruit en milieu sous-marin a différentes origines et ses caractéristiques dépendent de la fréquence du signal ainsi que du vent, de la profondeur et de la salinité de l'eau. Plusieurs formules empiriques et des études ont été faites dans ce domaine [Stojanovic 2007]. Le bruit ambiant est généralement considéré comme statistiquement gaussien. Les bruits liés aux turbulences n'influencent que les très faibles fréquences ($\nu < 10$Hz). Le bruit apporté par l'activité du navire perturbe l'information entre 10Hz et 100Hz. Le bruit de surface apporté par le vent et les vagues apporte la plus grande contribution au bruit du signal en milieu peu profond. Ce bruit est présent entre 100Hz et 10kHz. Il s'agit donc du bruit qui gène le plus en communication sous-marine. Et enfin, quand $\nu > 100$ kHz, on retrouve le bruit apporté par les phénomènes thermiques. Des études relatives au rapport signal sur bruit possible en fonction de la fréquence du signal ont été réalisées dans [Stojanovic 2007]. Au cours de notre étude, on considérera que le bruit est additif gaussien et blanc dans la bande du signal.

1.1.5 Expression des retards

Comme présenté sur les figures 1.4, 1.5 et 1.6, tout se passe comme si chaque rayon provenait d'une source virtuelle E_i située à la même abscisse que la source réelle mais dont l'ordonnée change en fonction du trajet du rayon et du nombre de réflexions.
Notons N le nombre de réflexions. Cinq cas peuvent alors se présenter :

1. Il n'y a pas de réflexion sur le fond ou la surface. La source virtuelle est confondue avec la source réelle d'abscisse $x(t)$ et de profondeur $z_i(t) = z(t)$.
2. la première réflexion a lieu au niveau de la surface, ainsi que la dernière : l'onde semble provenir d'un point E_i situé à la même abscisse $x(t)$ que l'émetteur, mais à la profondeur $z_i(t) = -z(t) - h(N-1)$;
3. la première réflexion a lieu sur le fond marin, ainsi que la dernière : l'onde semble provenir d'un point E_i situé à la même abscisse $x(t)$ que l'émetteur, mais à la profondeur $z_i(t) = -z(t) + h(N+1)$;
4. la première réflexion a lieu au niveau de la surface, et la dernière sur le fond marin : l'onde semble provenir d'un point E_i situé à la même abscisse $x(t)$ que l'émetteur, mais à l'ordonnée $z_i(t) = z(t) + hN$;

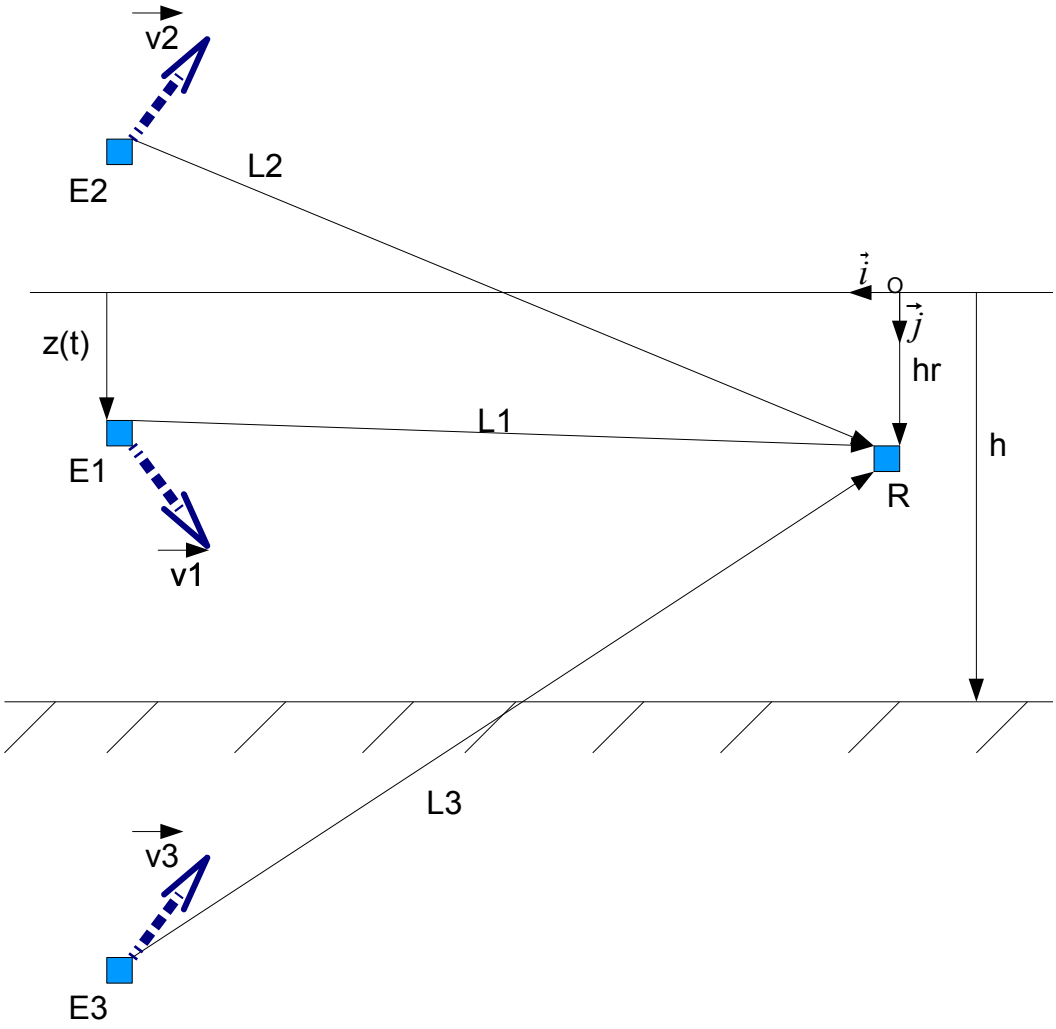


FIGURE 1.6 – Schéma de propagation des rayons acoustiques avec sources virtuelles.

5. la première réflexion a lieu sur le fond marin, et la dernière au niveau de la surface : l'onde semble provenir d'un point E_i situé à la même abscisse $x(t)$ que l'émetteur, mais à la profondeur $z_i(t) = z(t) - hN$.

Notons maintenant $\vec{l_i}(t) = \overrightarrow{RE_i}$ le vecteur rayon virtuel d'indice i : $\vec{l_i}(t) = x(t)\vec{i} + (z_i(t) - h_r)\vec{j}$. Pour illustrer notre propos, considérons les trajets à moins de deux réflexions, en adoptant la convention suivante pour les numéroter (cf. figures (1.4) et (cf. figure (1.5)) :

- indice 1 : trajet principal ($E = E_1$) ;
- indice 2 : trajet à une réflexion au niveau de la surface ;
- indice 3 : trajet à une réflexion sur le fond marin ;
- indice 4 : trajet à deux réflexions, la première au niveau de la surface ;
- indice 5 : trajet à deux réflexions, la première sur le fond marin.

Alors :

- $\vec{l_1}(t) = x(t)\vec{i} + (z(t) - h_r)\vec{j}$;
- $\vec{l_2}(t) = x(t)\vec{i} + (-z(t) - h_r)\vec{j}$;
- $\vec{l_3}(t) = x(t)\vec{i} + (-z(t) + 2h - h_r)\vec{j}$;
- $\vec{l_4}(t) = x(t)\vec{i} + (z(t) + 2h - h_r)\vec{j}$;
- $\vec{l_5}(t) = x(t)\vec{i} + (+z(t) - 2h - h_r)\vec{j}$;

On note $\vec{v_i}(t) = \frac{d\vec{l_i}(t)}{dt}$ le vecteur vitesse associé à la source virtuelle i :

$$\vec{v_i}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dz_i(t)}{dt}\vec{j} \tag{1.6}$$

$$= \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{j} & \text{dans les cas 1, 4 et 5,} \\ \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} - \frac{dz(t)}{dt}\vec{j} & \text{dans les cas 2 et 3.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Ainsi,

$$\vec{v_i}(t) = \vec{v_i} = v_x\vec{i} + v_{z,i}\vec{j} \tag{1.8}$$

avec $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$ et $v_{z,i} = \pm v_z = \pm\frac{dz(t)}{dt}$ deux constantes, la vitesse de l'émetteur étant supposée constante. On en déduit en particulier que :

$$\|\vec{v_i}(t)\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_z^2 \tag{1.9}$$

Dès lors, on peut développer l'expression de $\left\|\vec{l_i}(t)\right\|$:

$$\left\|\vec{l_i}(t)\right\|^2 = \left\|\vec{l_i}(0) + t\vec{v_i}\right\|^2 \tag{1.10}$$

$$= \left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2 + 2t\left\langle \vec{l_i}(0), \vec{v_i}\right\rangle + t^2 \left\|\vec{v_i}\right\|^2 \tag{1.11}$$

$$= \left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2 \left(1 + 2t\frac{\left\langle \vec{l_i}(0), \vec{v_i}\right\rangle}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2} + t^2\frac{\|\vec{v}\|^2}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2}\right) \tag{1.12}$$

avec

$$\left\langle \vec{l_i}(0), \vec{v_i}\right\rangle = \left\|\vec{l_i}(0)\right\| \|\vec{v_i}\| \cos(\theta_i) = \left\|\vec{l_i}(0)\right\| \|\vec{v}\| \cos(\theta_i) \tag{1.13}$$

et θ_i l'angle formé par les vecteurs $\vec{l_i}(0)$ et $\vec{v_i}$. On peut alors écrire :

$$\left\|\vec{l_i}(t)\right\|^2 = \left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2 \left(1 + 2t\frac{\|\vec{v}\| \cos(\theta_i)}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|} + t^2\frac{\|\vec{v}\|^2}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|^2}\right) \tag{1.14}$$

Afin d'aller plus loin, on peut faire une approximation. On considère que la distance parcourue par l'émetteur durant la durée de communication T est négligeable devant la distance $\left\|\vec{l_i}(0)\right\|$.

$$\forall t \in [0, T] \quad t\|\vec{v}\| << \left\|\vec{l_i}(0)\right\| \tag{1.15}$$

Dans notre cas, si on considère que la distance $\left\|\vec{l_i}(0)\right\|$ est de l'ordre du kilomètre et que T vaut environ 0.2 seconde, l'approximation 1.15 est tout à fait valable.

Par conséquent, on arrive à l'équation suivante :

$$l_i(t) = \left\|\vec{l_i}(0)\right\| \left(1 + t\frac{\|\vec{v}\| \cos(\theta_i)}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|} + o\left(t\frac{\|\vec{v}\|}{\left\|\vec{l_i}(0)\right\|}\right)\right) \tag{1.16}$$

où $o(\cdot)$ désigne une fonction négligeable devant son argument : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{o(x)}{x}\right) = 0$.

On relie alors le retard à la longueur du trajet l_i :

$$\tau_i(t) = \frac{l_i(t)}{c} \tag{1.17}$$

En considérant cette approximation, on va pouvoir réécrire l'expression du signal reçu au niveau du récepteur sous la forme :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) s(d_i t - \tau_i) + b(t) \tag{1.18}$$

Avec

$$\tau_i = \frac{\left\| \vec{l_i}(0) \right\|}{c} \tag{1.19}$$

$$d_i = 1 - \frac{\|\vec{v}\| \cos(\theta_i)}{c} + o\left(\frac{t \|\vec{v}\|}{c}\right) \tag{1.20}$$

Cette expression est valable quand on est éloigné de l'émetteur de façon à ce que les approximations faites soient correctes. ($x_0 \approx 1$ km et $h < 100$ m). Le modèle géométrique à base de rayons nous permet d'obtenir une expression relativement simple et réaliste du signal reçu. Dans notre approche, nous ne cherchons pas à retrouver les données du canal comme la vélocité des ondes ou la profondeur comme cela peut se faire en télémétrie. Il nous importe seulement de connaître la forme du signal reçu et les coefficients Doppler tout comme les retards. Par ailleurs, on peut remarquer que même si les rayons ne font pas des trajets en lignes droites, le signal reçu sera tout de même de la forme exprimée sur l'équation (1.18). En effet, tout se passera de la même manière à ceci près que les sources virtuelles auront des ordonnées différentes, et donc un retard associé différent.

1.1.6 Remarques sur le modèle utilisé

On peut s'interroger sur la validité du modèle de canal qui découle de l'expression (1.18). L'effet Doppler va provoquer un changement d'échelle du signal sur le trajet i. En fonction de la direction du mobile, le signal va donc être soit compressé, soit dilaté.

- Dans le modèle développé ici, on considère que l'effet Doppler est uniquement dû au mouvement entre l'émetteur et le récepteur. L'apport des courants sous-marins et des courants de surface est négligé. Cette approche se justifie si on considère que la vitesse de propulsion d'un AUV, d'un sous-marin ou d'une sonde tirée par un navire est de l'ordre de 10 nœuds, soit environ 5m/s. En comparaison, les courants marins ont des vitesses plus de dix fois inférieures et sont donc négligés.

- De plus, ce modèle ne prend pas en compte la nature changeante du canal, notamment les mouvements de la surface. Des approches ont été réalisées dans ce domaine [Bjerrum-Niese 1996]. Cependant, les mouvements de surface pendant la durée d'un symbole de communication seront négligés dans notre approche. Ce modèle a été confronté à des données réelles notamment dans [Josso 2009a], [Josso 2009b],[Kim 2000], [Li 2008], [Bjerrum-Niese 2000].
- Il est important de noter cependant qu'il n'existe pas de consensus parmi les chercheurs sur le modèle à adopter en milieu peu profond, [Middleton 1987]. En effet, une modélisation basée sur un canal stochastique de Rayleigh dans des milieux très peu profonds peut se montrer très précise et a été utilisée dans [Chitre 2007], [Ormondroyd 2007], [Yang 2001].

Comme expliqué précédemment, les vitesses du mobile entre émetteur et récepteur sont de l'ordre de 5m/s, avec une vitesse maximale d'environ 7m/s. Ceci correspond à un paramètre Doppler $d = 1 \pm 0.003$ sur des vitesses moyennées et $d = 1 \pm 0.005$ pour des pointes de vitesse. Si on considère un signal de communication de fréquence centrale 15kHz et de largeur de bande 10kHz, alors la variation de fréquence due à l'effet Doppler sera de l'ordre de 30Hz sur les basses fréquences et 60Hz sur les hautes fréquences du signal.
Dans le cadre d'une communication sur un kilomètre avec un fond à 100 mètres, les retards calculés par le modèle géométrique sont de l'ordre de 40 ms pour les trajets à une réflexion et peuvent atteindre 100 ms pour les trajets à deux réflexions. En pratique, des expériences réalisées avec des conditions expérimentales similaires donnent les mêmes ordres de grandeur [Josso 2009b]. On remarque cependant que les trajets à deux réflexions sont très atténués par les pertes induites par le canal. Ces rayons sont souvent négligés dans la littérature.

1.2 Signaux de communication multiporteuses

1.2.1 Historique

Le concept de modulation multiporteuse a tout d'abord été développé dans les années 50 et 60 pour des applications militaires. L'utilisation de signaux orthogonaux apparaît dans [Chang 1966], [Chang 1968]. L'objectif était alors d'avoir un meilleur débit en augmentant la largeur de bande de transmission. Cependant, la construction de filtres orthogonaux analogiques pour la communication posait un problème d'ordre financier. L'utilisation

de la transformée de Fourier discrète inverse à l'émission ainsi que de la transformée de Fourier directe à la réception a permis de résoudre ce problème [Weinstein 1971]. L'algorithme devient dès lors plus simple à utiliser et à implémenter. Les communications multiporteuses sont un succès.

Les premiers articles qui parlent de modulation OFDM remontent aux années 80, [Cimini 1985]. Les principales évolutions de l'OFDM qui ont suivi concernent le traitement des trajets multiples. La réception de plusieurs trajets peut entraîner de l'interférence entre symboles successifs, IES [2], ou ISI [3] en anglais. De plus, les trajets multiples peuvent provoquer la perte de l'orthogonalité entre les ondes retardées par le canal (ICI [4]). La mise au point d'un intervalle de garde de longueur suffisante permit dans les années 80 de résoudre le problème de l'interférence entre symboles. Puis l'utilisation du préfixe cyclique résolut celui de la perte d'orthogonalité [Peled 1980]. En recopiant à l'émission la fin du symbole au début et en s'appuyant sur les propriétés des fréquences pures, l'orthogonalité entre les différentes ondes retardées peut être conservée.

Des standards ont été développés dans les années 90 pour la radiodiffusion numérique terrestre DAB [5], [Sari 1995], ainsi que pour la télévision numérique terrestre avec la norme DVB-T [6], [Le Floch 1995]. L'OFDM est aussi utilisé dans les systèmes ADSL [7] (norme UIT-T / Recommandation G.992.1 (06/99)).

1.2.2 Modèle discret pour l'OFDM classique

L'idée maîtresse de l'OFDM consiste à partager la largeur de bande du signal en multiples sous-bandes relativement étroites, de largeur de bande F_0. Le signal dans chaque sous-bande peut être codé de façon indépendante au temps symbole $T_0 = 1/F_0$. Par ce choix de temps symbole, on s'assure de l'orthogonalité des sous-porteuses sur la durée T_0, et on occupe ainsi au mieux le plan temps-fréquence [Proakis 2008], [Biglieri 1998], [Cover 1991], [Siclet 2002]. Si la bande de fréquence F_0 est suffisamment étroite, la réponse fréquentielle du canal va pouvoir être considérée comme constante sur chaque

2. Interférence entre symboles
3. Inter Symbol Interference
4. Inter Carrier Interference
5. Digital Audio Broadcasting
6. Digital Video Broadcasting - Terrestrial
7. Asymmetric Digital Subscriber Line

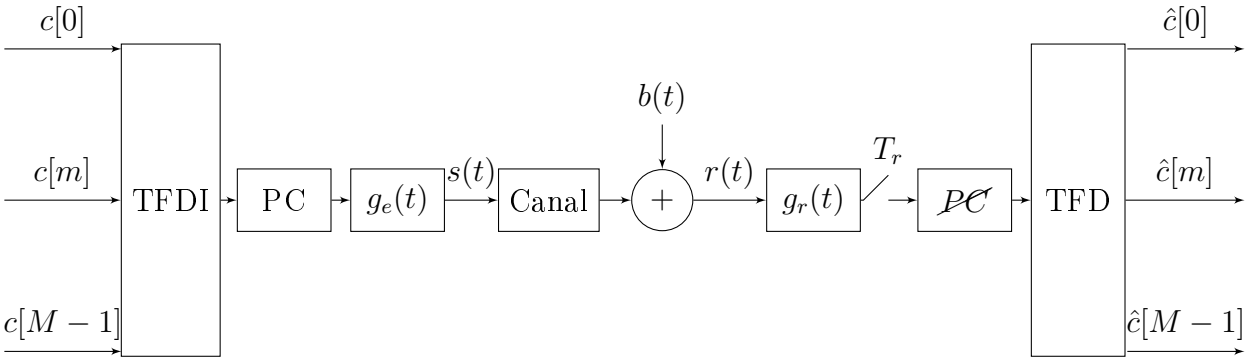


FIGURE 1.7 – Système OFDM en bande de base à temps discret.

sous-bande. Le schéma de la chaîne de transmission est exposé sur la figure 1.7.

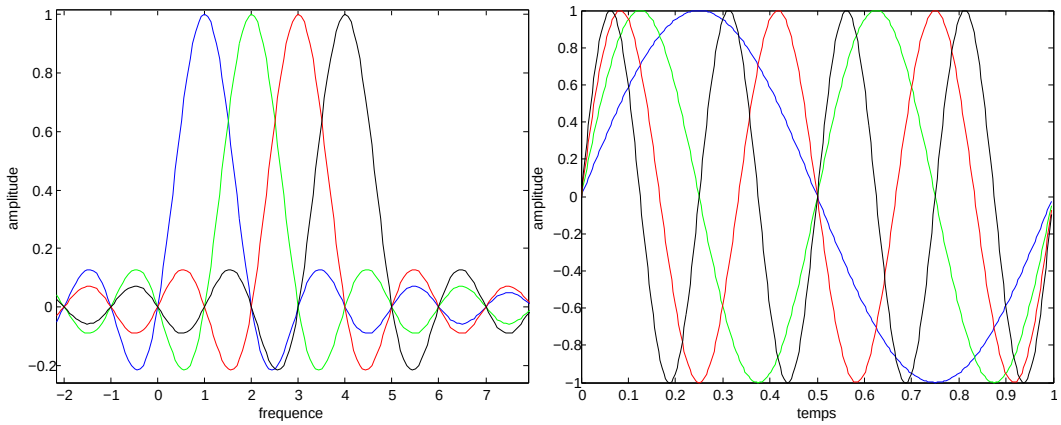


FIGURE 1.8 – Porteuses d'un signal OFDM.

La mise en œuvre d'un système OFDM en continu nécessite l'utilisation de M filtres analogiques en parallèle parfaitement orthogonaux. La réalisation de tels filtres est en pratique difficile. On réalise donc cette opération numériquement. Le système de synthèse de formation d'un signal OFDM à temps discret, en bande de base, est présenté figure 1.7. Les bancs de filtre de l'émetteur et du récepteur sont remplacés respectivement par une TFDI [8] et une TFD [9]. Le signal numérique passe alors par le filtre de mise en forme g_e

8. Transformée de Fourier Discrète Inverse
9. Transformée de Fourier Discrète

avant d'être transmis dans le canal. Du point de vue temporel, l'OFDM est vue comme l'addition de plusieurs fréquences pures différentes comme illustré sur les figures 1.8.
Pour la suite, on rappelle l'opérateur de convolution en continu pour deux fonctions continues f et g.

$$(f \otimes g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)dt \tag{1.21}$$

L'expression d'un signal OFDM en sortie de la TFDI, sera :

$$s[k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_n[m] e^{j2\pi m F_0 k T_e} \Pi_{T_0}(kT_e - nT_0) \tag{1.22}$$

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]\delta(t - kT_e) \tag{1.23}$$

Avec $T_e = T_0/M$ la période d'échantillonnage à l'émission. $c_n[m]$ représente l'élément transmis sur la porteuse m durant le symbole n. Π_{T_0} est la fonction porte de largeur T_0.

$$\Pi_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.24}$$

On désire mettre en forme le signal discret avant de l'émettre. On considère un filtre de mise en forme g_e réel et symétrique ainsi qu'un filtre en réception g_r qui est de même réel et symétrique.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] g_e(t - kT_e) \tag{1.25}$$

Le filtre de mise en forme va limiter la largeur de bande du signal. Sur l'équation (1.25), on voit que le signal émis $s(t)$ est une interpolation des échantillons $s[k]$ par la famille des $g_e(t - kT_e)$ (le filtre de mise en forme va interpoler le signal entre deux valeurs connues de la suite réelle de nombres $s[k]$). Si cette interpolation est parfaite, on aura :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_n[m] e^{j2\pi m F_0 t} \Pi_{T_0}(t - nT_0) \tag{1.26}$$

Si on considère dans un premier temps un canal parfait sans bruit, le signal reçu sera exactement égal au signal émis, $r(t) = s(t)$. La démodulation dos-à-dos s'effectue alors par une transformée de Fourier directe sur chaque symbole OFDM après passage dans un filtre en réception g_r.

$$y(t) = (r \otimes g_r)(t) \tag{1.27}$$

Parmi toutes les valeurs possible de $y(t)$, on désire en particulier avoir $y(k'T_e) = (g_e \otimes g_r)(0)s[k']$. Ceci est possible si :

$$(g_e \otimes g_r)((k' - k)T_e) = (g_e \otimes g_r)(0)\delta[k' - k] \tag{1.28}$$

Par cette condition sur les filtres d'émission et de réception, nous assurons l'absence d'interférence entre éléments $s[k]$ en réception. Ceci est possible si la fonction $g_e \otimes g_r$ vérifie le critère de Nyquist, [Glavieux A. 1996]. C'est-à-dire :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (G_e G_r)(\nu - \frac{n}{T_e}) = T_e \tag{1.29}$$

avec G_e et G_r les transformées de Fourier respectives de g_e et g_r. On sait que dans le cas particulier où le canal est uniquement constitué d'un bruit blanc additif gaussien, alors le meilleur filtre possible en réception, au sens de la maximisation du rapport signal sur bruit, est le filtre adapté à celui d'émission. Par conséquent, il est préférable d'avoir $g_r(t) = g_e(-t)$. Pour des raisons calculatoires, on impose de plus que $(g_e \otimes g_r)(0) = 1$.

En réception, le signal est échantillonné à la cadence de réception T_r, on aura :

$$y(qT_r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e \otimes g_r)(qT_r - kT_e) \tag{1.30}$$

On peut maintenant effectuer la démodulation en appliquant sur chaque symbole OFDM une transformée de Fourier discrète directe. Pour le symbole n, on a :

$$\hat{c}_n[m] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{K-1} y[k] e^{-j2\pi mkF_0T_r} \tag{1.31}$$

Avec $K = \frac{T_0}{T_r}$.

1.2.3 Intérêt de l'OFDM : cas multitrajet

Le débit d'une modulation OFDM classique est parfaitement équivalent à une modulation monoporteuse classique utilisant la même bande de fréquence MF_0 avec une durée symbole T_0/M. Cependant, la modulation monoporteuse va être beaucoup plus sensible aux trajets multiples.
Etant donné la construction d'un symbole OFDM, plus la durée symbole est importante et plus le nombre de porteuses sera élevé, à bande occupée constante.

On va exposer dans cette partie les effets des trajets multiples sur un signal OFDM et les solutions développées dans la littérature pour contrer l'interférence entre symboles ainsi que l'interférence entre porteuses. Si les filtres d'émission et de réception réalisent une interpolation parfaite du signal émis, alors en monotrajet, le signal reçu sera :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_n[m] e^{j2\pi m F_0 t} \Pi_{T_0}(t - nT_0) \tag{1.32}$$

Après discrétisation à la cadence de réception T_r, on aura :

$$y[k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_n[m] e^{j2\pi m k F_0 T_r} \Pi_{T_0}(kT_r - nT_0) \tag{1.33}$$

Le canal va évoluer dans le temps. Les retards et les amplitudes des trajets vont donc évoluer. Cependant, on considère ici que le canal est constant sur la durée d'un symbole OFDM. Etant donné la durée d'un symbole OFDM ($\approx 0.2s$) et le temps de cohérence du canal (plusieurs secondes), cette approximation est valide.

On note $u(k, n)$ les échantillons du nième symbole.

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(k, n) \Pi_{T_0}(kT_r - nT_0) \tag{1.34}$$

Pour $0 \leq k \leq K - 1$, et $K = T_0/T_r$, on aura :

$$u(k, n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c_n[m] e^{j2\pi m k F_0 T_r} \tag{1.35}$$

On se place cependant dans le cas d'un canal multitrajet, sans aucun effet Doppler. On suppose que la durée d'un symbole OFDM est supérieure au retard maximal du canal.

On suppose que la réponse impulsionnelle discrète du canal est finie et d'ordre P. L'ordre est obtenu en divisant le retard maximum du canal par la période d'échantillonnage T_r. On note $h(p,n)$ les coefficients de la réponse impulsionnelle pour le symbole n.

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{P} h(p,n) u(k-p,n) \Pi_{T_0}((k-p)T_r - nT_0) \tag{1.36}$$

On peut développer ici une écriture matricielle en posant :

$$\mathbf{u}[n] = (u(k,n))_{0 \leq k \leq K-1} \tag{1.37}$$

$$\mathbf{c}[n] = (c_n[m])_{0 \leq m \leq M-1} \tag{1.38}$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi mkF_0T_r} \right)_{0 \leq m \leq M-1, 0 \leq k \leq K-1} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{u}[n] = \mathbf{F}^H \mathbf{c}[n] \tag{1.40}$$

Avec ^{H} le transposé conjugué. On développe ici le même formalisme que dans [Wang 2000].

On se concentre maintenant sur la réception d'un seul symbole OFDM. En faisant l'hypothèse que la durée du canal de transmission est plus courte que la durée d'un symbole OFDM, on va avoir :

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{H}_0[n]\mathbf{u}[n] + \mathbf{H}_1[n]\mathbf{u}[n-1] \tag{1.41}$$

$\mathbf{H}_0[n]$ et $\mathbf{H}_1[n]$ sont des matrices carrées $K \times K$ contenant les coefficients en temps discret de la réponse impulsionnelle du canal.

$$\mathbf{H}_0[n] = \begin{pmatrix} h(0,n) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & h(0,n) & 0 & \dots & 0 \\ h(P,n) & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & h(P,n) & \cdots & h(0,n) \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$\mathbf{H}_1[n] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & h(P,n) & \dots & h(1,n) \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & h(P,n) \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

À cause des retards du canal, chaque symbole OFDM sera affecté par le précédent (ISI).
Une méthode classique pour supprimer l'interférence entre symboles consiste à introduire à l'émission un intervalle de garde entre deux symboles successifs. En rallongeant ainsi chaque symbole, on perd de l'efficacité spectrale mais on diminue les causes possibles d'erreurs. Un intervalle de garde de durée T_g est considéré. On pose G tel que $GT_r = T_g$, $G \in \mathbb{N}^*$. La durée totale d'un symbole OFDM est alors $T = T_0 + T_g$. On définit la matrice $\mathbf{P}_c$, de taille $(K+G) \times K$ qui, multipliée par le vecteur $\mathbf{u}[n]$, va rajouter l'intervalle de garde et rallonger le signal temporellement. On introduit également la matrice $\tilde{\mathbf{P}}_c$ qui va enlever le préfixe. Le signal reçu devient :

$$\tilde{\mathbf{y}}[n] = \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{y}[n] \tag{1.44}$$

Si la durée de l'intervalle de garde est supérieure au retard maximum du canal, $G > P$, alors l'interférence entre symboles sera nulle.

$$\tilde{\mathbf{y}}[n] = \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{H}_0[n] \mathbf{P}_c \mathbf{u}[n] \tag{1.45}$$

Un intervalle de garde suffisamment long peut permettre d'éliminer l'ISI. Cependant, l'orthogonalité entre porteuses est perdue du fait des retards des trajets multiples. Cependant, un choix judicieux pour l'intervalle de garde peut permettre de corriger ce problème.

1.2.3.1 CP-OFDM

Il faut maintenant étudier l'usage de l'intervalle de garde pour que la correction de l'interférence entre porteuses puisse se faire de la façon la plus simple et la plus efficace possible.
Il existe dans la littérature deux formes de préfixes très utilisés [Proakis 2008]. La première utilise un préfixe cyclique qui copie la fin de chaque symbole OFDM au début.

$$\mathbf{P}_c = \left[\frac{\mathbf{0}_{G \times K-G} | \mathbf{I}_G}{[I]_K} \right]^T \tag{1.46}$$

$\mathbf{0}_{G \times (K-G)}$ est une matrice nulle rectangulaire, $\mathbf{I}_G$ et $\mathbf{I}_K$ des matrices identités carrées de taille $G \times G$ et $K \times K$. En réception, les G premiers éléments sont écartés, ce qui correspond à la matrice $\tilde{\mathbf{P}}_c$ suivante :

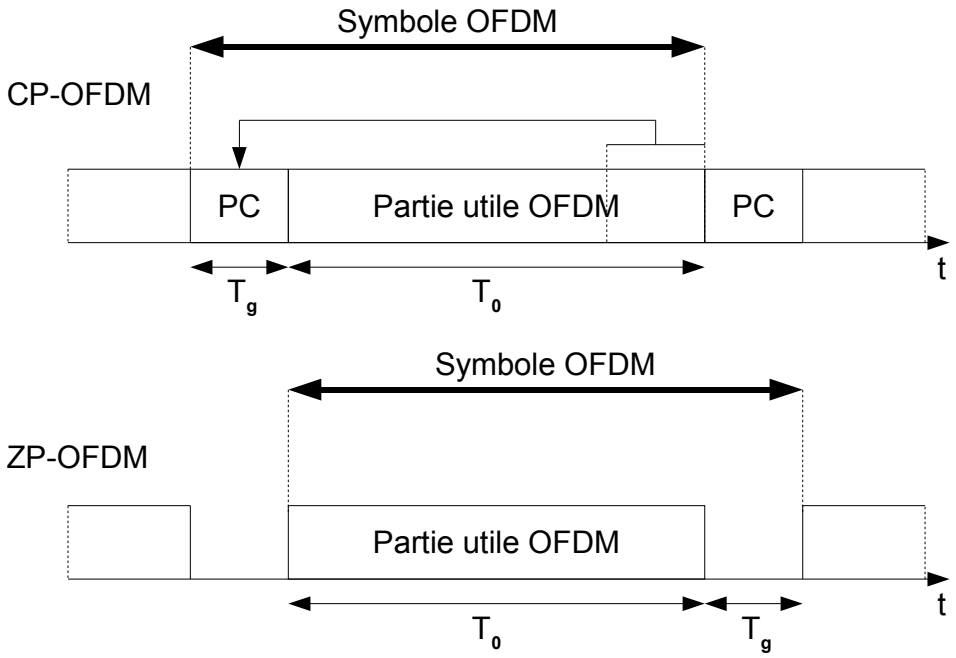


FIGURE 1.9 – Différents types d'intervalles de garde.

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \left[\frac{\mathbf{0}_{G\times K}}{\mathbf{I}_K}\right] \tag{1.47}$$

On peut ainsi assurer le fait que $\tilde{\mathbf{P}}_c\mathbf{H}_1[n] = \mathbf{0}_{(G+K)\times K}$.
Il est alors important de remarquer que la matrice $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{P}}_c\mathbf{H}_0[n]\mathbf{P}_c$ ainsi formée est une matrice circulante de taille $K \times K$, [Wang 2000]. Le préfixe cyclique a permis de transformer la matrice de convolution du canal en une matrice circulante et d'éliminer l'interférence entre symboles.
Quand on désire retrouver les éléments c_n transmis sur le symbole OFDM n, il est nécessaire d'effectuer une transformée de Fourier discrète directe après avoir rejeté le préfixe cyclique.

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{y}}[n] = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^H\mathbf{c}[n] \tag{1.48}$$

Il est important de rappeler ici que la multiplication d'une matrice circulante par des matrices de TFD et de TFDI provoque une diagonalisation.

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^H = \mathbf{D}_H \tag{1.49}$$

Avec $\mathbf{D}_H$ une matrice diagonale dont les éléments non nuls sont les résultantes de la transformée de Fourier discrète directe des coefficients du canal $h(p)$.

$$\mathrm{diag}(\mathbf{D}_H) = \left(\sum_{p=0}^{P} h[p] e^{-j2\pi i F_0 p T_r} \right)_{1 \leq i \leq K} \tag{1.50}$$

Au final, après transformée de Fourier directe en réception, on retrouve sur chaque porteuse les éléments émis mais affectés par un coefficient qui correspond à la transformée de Fourier du canal sur cette fréquence. L'avantage de cette formulation et de la matrice diagonale est qu'elle permet une égalisation simple avec un coefficient par sous porteuse, [Gorokhov 2000]. Cependant, on peut avoir des problèmes d'inversion matricielle si certains des éléments de la diagonale sont nuls.

1.2.3.2 ZP-OFDM

Une autre option souvent utilisée pour les préfixes de l'OFDM consiste à remplir l'intervalle de garde de zéros, [Muquet 2000], [Giannakis 1997]. Cela correspond à choisir $\mathbf{P}_c$ tel que $\mathbf{H}_1[n]\mathbf{P}_c = \mathbf{0}_{(G+K)\times K}$. Ainsi, on peut s'assurer qu'il n'y aura pas d'interférence entre symboles car les éléments retardés du symbole précédent seront dans le préfixe. Pour le zero padding, on choisit $\mathbf{P}_c = \left[\frac{\mathbf{I}_K}{\mathbf{0}_{G\times K}} \right]$. Comme dans le cas du préfixe cyclique, on parvient à éliminer l'ISI.

Il existe deux versions du zero padding qui se différencient par leur traitement en réception.
Dans une première version, il est possible, comme dans le cas du préfixe cyclique, de se ramener à une matrice circulante. Il faut pour cela, en réception, copier la fin du symbole ZP-OFDM au début. À ce moment-là, il faut choisir :

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \left[\mathbf{I}_K | \frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{0}_{(K-G)\times G}} \right] \tag{1.51}$$

Cette copie d'une partie du signal en réception permet d'obtenir une matrice circulante comme dans le cas du préfixe cyclique. Cependant, l'ajout d'une partie du signal en réception va rehausser le bruit. De la même manière que précédemment, à cause de la présence d'une transformée de Fourier discrète inverse en émission et directe en réception, la matrice équivalente du canal va être diagonalisée. L'égalisation sera donc tout aussi simple à mettre en œuvre. De plus, le zero padding a comme avantage de consommer moins

d'énergie puisqu'on n'émet pas dans la partie non utile du signal.

Dans une deuxième version, on décide en réception de rejeter les éléments contenus dans l'intervalle de garde, on aura alors :

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = [\mathbf{I}_K | \mathbf{0}_{K \times G}] \tag{1.52}$$

On a :

$$\tilde{\mathbf{y}}[n] = \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{H}_0[n] \mathbf{P}_c \mathbf{F}^H \mathbf{c}[n] \tag{1.53}$$

À ce moment, on peut remarquer que la matrice carrée de taille K, $\tilde{\mathbf{H}}_0[n] = \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{H}_0[n] \mathbf{P}_c$ a la propriété d'être une matrice de Toeplitz. Les coefficients des diagonales en descendant de gauche à droite sont les mêmes. Si la diagonale de $\mathbf{H}_0[n]$ ne contient aucun élément nul, elle est alors de rang plein et donc tout le temps inversible. À ce moment, il peut être intéressant d'effectuer une correction des trajets multiples par inversion de la matrice $\tilde{\mathbf{H}}_0[n]$. Alors que dans le cas du préfixe cyclique, il suffisait qu'un seul des éléments de la matrice diagonale soit nul pour que l'égalisation ne soit pas réalisable, ce n'est pas le cas ici. L'égalisation est bien plus souvent réalisable. C'est un des avantages de cette version du zero padding sur le préfixe cyclique, qui cependant reste plus usitée car l'égalisation y est plus simple à réaliser.

1.2.4 DMT

La modulation DMT [10] nous permet une formulation bien plus simple de notre problème dans le cas d'un canal sous-marin à trajets multiples avec un effet Doppler différent selon chaque trajet, problème qui sera abordé dans le chapitre 4.

L'interférence entre symboles est supposée nulle grâce à l'utilisation d'un intervalle de garde de durée suffisante. Grâce à l'indépendance entre symboles ainsi obtenue, on considère dans la suite la propagation d'un seul symbole OFDM ou DMT.
Discrete Multi Tones (DMT) est un type de modulation apparentée à l'OFDM. On peut la voir comme un cas particulier de l'OFDM qui présente donc les mêmes bases de fonctionnement et les mêmes problèmes. Cette modulation a d'abord été introduite par Peled et Ruiz en 1980, [Peled 1980], l'idée principale étant de tirer avantage de la transformée de Fourier discrète inverse.

10. Discrete MultiTone

Le modèle de base a été améliorée dans [Ruiz 1992]. La formulation la plus avancée de la modulation DMT est utilisée pour les communications de type ADSL.
Comme pour l'ADSL, on va utiliser un signal OFDM en bande de base. La DMT utilise plusieurs porteuses orthogonales. Mais contrairement à l'OFDM, cette modulation utilise deux fois plus de porteuses à l'émission pour transmettre le même nombre de symboles en un temps donné. L'avantage du DMT réside dans sa construction qui permet de construire un signal réel en sortie de la TFDI par un choix astucieux des valeurs des sous porteuses.
Comme expliqué dans [Cioffi 1991], on va tout d'abord considérer un symbole DMT, de durée T_0, sans intervalle de garde. Les résultats présentés ici peuvent s'étendre au cas avec zero padding ou préfixe cyclique de façon similaire à l'OFDM. On transmet des éléments d'informations $\tilde{c}[m]$ (de type BPSK [11], QPSK [12] ou QAM [13]). en utilisant M porteuses pour transmettre $M/2$ éléments. On construit les M éléments $c[m]$ comme suit :

$$c[m] = \begin{cases} \tilde{c}[m] & m = 1, ..., M/2 - 1 \\ \Re\{\tilde{c}[M/2]\} & m = 0 \\ \Im\{\tilde{c}[M/2]\} & m = M/2 \\ \tilde{c}^*[M-m] & m = M/2+1, ..., M-1 \end{cases} \tag{1.54}$$

avec * désignant l'opérateur du complexe conjugué. En s'y prenant ainsi, on va pouvoir définir le signal discret et réel émis s tel que :

$$s[k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi F_0 m k T_e} \tag{1.55}$$

Avec F_0 l'écart interporteuse à l'émission, $F_0 = 1/T_0$, et T_e la période d'échantillonnage à l'émission, $T_e = T_0/M$. Comme pour l'OFDM, on passe par une TFDI.

$$s[k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{\frac{j2\pi mk}{M}} \tag{1.56}$$

Le grand avantage de cette formulation est que les échantillons du signal $s[k]$

11. Binary phase-shift keying
12. Quadrature phase-shift keying
13. Quadrature amplitude modulation

sont réels.

$$\sqrt{M}s[k] = \Re\{\tilde{c}[M/2]\} + \sum_{m=1}^{M/2-1} \tilde{c}[m]e^{\frac{j2\pi mk}{M}} + \sum_{m=M/2+1}^{M-1} \tilde{c}^*[M-m]e^{\frac{j2\pi mk}{M}} + (-1)^k \Im\{\tilde{c}[M/2]\} \tag{1.57}$$

Par un changement de variable dans la deuxième somme, on obtient :

$$\sqrt{M}s[k] = \Re\{\tilde{c}[M/2]\} + (-1)^k \Im\{\tilde{c}[M/2]\} + \sum_{m=1}^{M/2-1} \tilde{c}[m]e^{\frac{j2\pi mk}{M}} + \sum_{m=1}^{M/2-1} \tilde{c}^*[m]e^{\frac{-j2\pi mk}{M}} \tag{1.58}$$

Dès lors, on peut voir que les deux termes contenus dans les sommes sont conjugués l'un de l'autre. Finalement :

$$\sqrt{M}s[k] = \Re\{\tilde{c}[M/2]\} + (-1)^k \Im\{\tilde{c}[M/2]\} + 2\sum_{m=1}^{M/2-1} \tilde{c}_R[m]\cos(2\pi\frac{mk}{M}) - \tilde{c}_I[m]\sin(2\pi\frac{mk}{M}) \tag{1.59}$$

avec : $\tilde{c}[m] = \tilde{c}_R[m] + j\tilde{c}_I[m]$. Ainsi, il n'est pas nécessaire de réaliser une opération de modulation autour d'une fréquence porteuses f_0 par l'utilisation d'un signal en phase et en quadrature, comme ce qu'on peut voir en OFDM. Le signal est déjà réel et centré autour d'une fréquence $f_0 = F_0M/2$ avec une largeur de bande F_0M.
Au niveau de la réception, on va devoir effecteur une TFD sur M points. Cependant, nous n'aurons besoin que des porteuses entre $M/2$ et $M-1$ ainsi que de la première porteuse pour récupérer l'ensemble de l'information envoyée. Par commodité, on prendra souvent $\tilde{c}[M/2] = 0$, afin de n'avoir à récupérer que les porteuses de $M/2+1$ à $M-1$. Au final, on émet bien sur toutes les fréquences entre 0 et F_0M.

1.2.5 Ordres de grandeurs

Les trajets multiples sont nombreux dans le canal sous-marin et constituent une limitation à la communication et à la télémétrie. Différentes méthodes ont été utilisées par le passé pour compenser cet effet [Jarvis 1995]. L'OFDM avec préfixe utilisé comme dans les communications hertziennes représente une bonne méthode pour la compensation de l'étalement temporel du signal.
L'OFDM avec différents intervalles de garde a déjà été utilisé lors d'expériences en mer [Li 2006], [Frassati 2005]. Comme précisé dans [Chitre 2008], il s'agit d'une modulation qui apporte beaucoup de promesses du fait de son

aptitude à résister aux canaux dispersifs en fréquence, comme les canaux ASM.
La distance de communication envisagée est de l'ordre du kilomètre dans un milieu petits fonds, comme précisé dans la section précédente. Or, d'après [Stojanovic 2007], la fréquence idéale pour communiquer à cette distance est de l'ordre de la dizaine de kilohertz. Si on choisit $M = 4000$ porteuses pour un signal DMT, avec une durée symbole $T_0 = 200$ ms, la fréquence centrale du signal vaut 10 kHz. L'intervalle de garde considéré doit être plus long que le retard maximal du canal, estimé à environ 40 ms. La bande de cohérence du canal observé dans ces conditions est d'environ 25Hz. Avec notre choix de durée symbole, on pourra bien considérer le canal constant sur chaque sous-bande ($F_0 = 5$ Hz).
On a supposé également que le canal évoluait lentement dans le temps de façon à ce que ses paramètres soient les mêmes sur toute la durée d'un bloc. En pratique, il faut quelques secondes au canal pour évoluer, la principale influence étant les mouvements de la houle.
Considérant la formation du signal DMT, on choisit de ne pas émettre sur les premières et dernières fréquences du signal afin d'avoir une largeur de bande entre 5 et 15 kHz. Ce choix permet aussi en réception de respecter le théorème de Shannon pour l'échantillonnage. Au final, on transmet donc sur 2000 porteuses 1000 éléments QPSK. On note M_{min} la fréquence discrète minimale sur laquelle on émet et M_{max} la fréquence discrète maximale.
Notre étude est cependant généraliste. Les résultats démontrés et exposés ici peuvent s'étendre à des bandes de fréquences plus grandes ainsi qu'à d'autres modulations multiporteuses inspirées de l'OFDM.

1.3 Effet Doppler sur signaux DMT large bande

Comme précisé dans le modèle géométrique, le paramètre Doppler aura pour ordre de grandeur $d = 1 \pm 0.003$. Ceci correspond à un décalage d'une trentaine de Hertz de la fréquence centrale du signal. Or, le décalage fréquentiel est supérieur à l'écart interporteuse ($|d-1| F_0 M/2 > F_0$). Le Doppler va donc avoir un effet dévastateur sur le signal multiporteuses. Nous allons étudier cela pour un canal monotrajet.

1.3.1 Critère de Nyquist et largeur de bande

On se place dans le cas particulier d'un canal monotrajet avec effet Doppler et présence d'un bruit additif gaussien et blanc dans la bande du signal.
On se concentre sur les effets du Doppler sur le signal transmis.

$$r(t) = s(dt) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] g_e(dt - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] g_e\left(d\left(t - k\frac{T_e}{d}\right)\right) \quad (1.60)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] g_e^d(t - kT_d) \quad (1.61)$$

Ainsi, en présence de Doppler, tout se passe comme si le signal reçu était le même que le signal émis mais mis en forme avec un filtre $g_e^d(t) = g_e(dt)$ à une période d'échantillonnage $T_d = T_e/d$. Le signal que l'on obtiendra après le filtre de mise en forme sera :

$$y(t) = (r \otimes g_r)(t) \quad (1.62)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^d \otimes g_r)(t - k\frac{T_e}{d}) \quad (1.63)$$

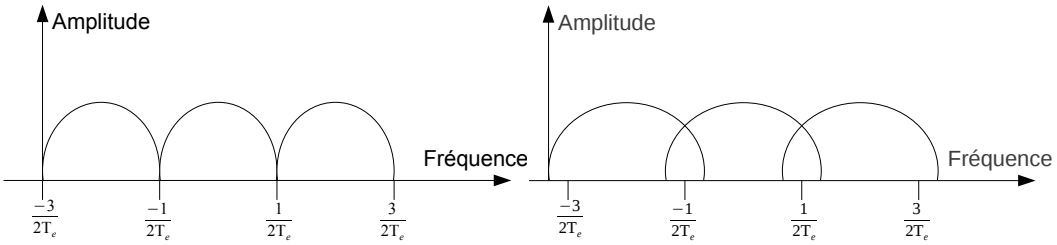
Dans l'expression (1.63), on retrouve bien le fait que le signal y est une version rééchantillonnée du signal s. On retrouve le formalisme utilisé précédemment. Si on désire imposer la conditon suivante :

$$y(k'\frac{T_e}{d}) = s[k'](g_e^d \otimes g_r)(0) \quad (1.64)$$

Alors, les filtres g_e^d et g_r doivent vérifier le critère de Nyquist mais pour une période $T_d = T_e/d$ au lieu de T_e. Cela signifierait :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_e(\frac{\nu}{d} - n/T_e) G_r(\nu - \frac{nd}{T_e}) = T_e \quad (1.65)$$

Cette dernière condition est impossible à remplir dans le sens où le filtre de réception doit alors s'adapter au paramètre Doppler du canal. Cela signifierait adapter en temps réel le filtre de réception à l'effet Doppler du canal et supposerait de plus une connaissance en réception du paramètre Doppler avant tout traitement.



(a) Largeur de bande $1/T_e$ (b) Largeur de bande d/T_e

FIGURE 1.10 – Illustration du théorème de Shannon pour un signal échantillonné à T_e.

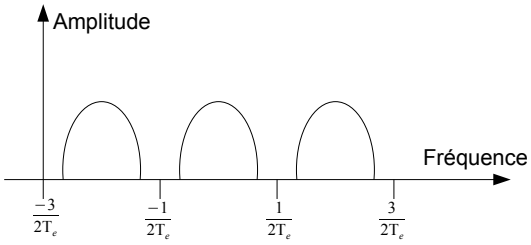


FIGURE 1.11 – Illustration du théorème de Shannon avec suréchantillonnage d'un facteur 2.

Il est bon de s'interroger sur la largeur de bande du signal en réception.

Les figures 1.10 illustrent les conséquences de l'effet Doppler pour différentes périodes d'échantillonnages. On ne peut pas se contenter en réception de prendre une période d'échantillonnage qui est à la limite de respecter le théorème de Shannon sans Doppler. En effet, la périodisation du spectre provoquerait alors du repliement en présence de Doppler si ce dernier contracte le signal temporel. Il est donc nécessaire de suréchantillonner le signal en réception si on veut pouvoir conserver toute l'information. Compte tenu de l'ordre de grandeur du facteur Doppler, le spectre ne devrait pas s'étaler de plus de 1% ($|d-1| < 10^{-2}$). Par conséquent, un suréchantillonnage d'un facteur 2 est suffisant pour récupérer toute l'information en réception.

Après le filtre de réception, le signal est échantillonné à la cadence Tr :

$$y[q] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^d \otimes g_r)(qT_r - k\frac{T_e}{d}) \tag{1.66}$$

1.3.2 Puissance de l'interférence interporteuse

On étudie maintenant l'effet du mouvement entre l'émetteur et le récepteur sur le décodage de l'information en réception. On considère que l'intervalle de garde est de durée suffisante pour qu'il n'y ait pas d'interférence entre symboles DMT. On rappelle l'expression d'un symbole DMT :

$$s[k] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 k T_e} \Pi_{T_0}(kT_e) \tag{1.67}$$

Après échantillonnage à la cadence T_r en réception, on a donc :

$$y[q] = s(dqT_r) \tag{1.68}$$

$$y[q] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 dq T_r} \Pi_{T_0}(dqT_r) \tag{1.69}$$

La période d'échantillonnage est choisie de façon à respecter le critère de Shannon [Shannon 1949]. Pour éviter tout repliement, on suréchantillonne d'un facteur 2, soit $T_r = 1/(2MF_0)$. Si on opère sur ce signal discret une démodulation dos à dos par une transformée de Fourier discrète directe, on aura :

$$\hat{c}[m'] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{q=0}^{2M-1} y[q] e^{-j2\pi \frac{m'q}{2M}} \tag{1.70}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{2M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi q \frac{(dm-m')}{2M}} \Pi_{T_0}(dqT_r) \tag{1.71}$$

Ce que traduit cette dernière équation est le fait qu'un symbole placé sur une fréquence à l'émission peut être décalé par l'effet Doppler sur une fréquence proche. Ainsi, en réception, on ne retrouvera pas $\hat{c}[m'] = c[m']$ si $d \neq 1$. L'effet Doppler détruit l'orthogonalité des porteuses DMT. On peut remarquer que $\forall \quad q \in \mathbf{Z}, 0 \leq q < \frac{T_0}{dT_r}$, on aura :

$$\sum_{q=0}^{2M-1} e^{j2\pi q \frac{(dm-m')}{2M}} = \begin{cases} M\delta[m,m'] \quad \text{si} \quad d=1 \\ \begin{cases} M \quad \text{si} \quad md = m' \\ \frac{1-e^{j2\pi \frac{M(md-m')}{2M}}}{1-e^{j2\pi \frac{(md-m')}{2M}}} \quad \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \tag{1.72}$$

avec δ le symbole de Kronecker. L'effet Doppler détruit l'orthogonalité entre les porteuses en les décalant.

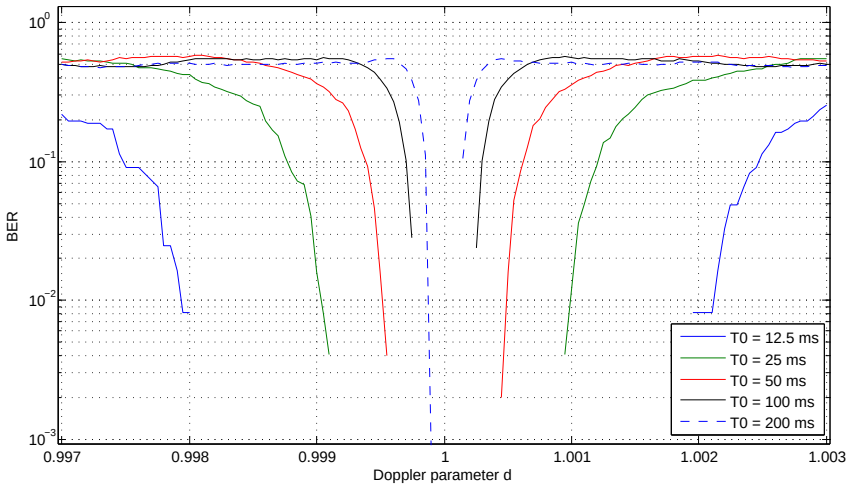


FIGURE 1.12 – Taux d'erreur binaire dans un canal monotrajet sans bruit avec effet Doppler pour un symbole DMT composé d'éléments QPSK.

1.3.3 Débit et durée utile du symbole DMT

En théorie, un Doppler très faible suffit à provoquer cet effet. Cependant, en pratique, on voit des erreurs apparaître à partir du moment où le décalage fréquentiel est plus grand que l'écart interporteuse. Cela revient à exprimer la condition suivante :

$$F_0 M_{max} \left| d - 1 \right| < \frac{F_0}{2} \tag{1.73}$$

On peut à ce moment imaginer une solution simple pour éviter un effet Doppler important, il suffirait de prendre un écart interporteuse élevé, tout en gardant la même bande de fréquence utilisée. Du fait de la construction du signal DMT, cela revient à diminuer la durée T_0 et donc le nombre de porteuses M.

Cette idée atteint pourtant très vite ses limites. En effet, si on considère que le paramètre Doppler va atteindre une valeur moyenne de $d = 1 \pm 0.002$, cela implique que pour vérifier la condition (1.73), avec une largeur de bande de 20kHz, on aurait $M = 250$ porteuses, soit environ $F_0 = 80$ Hz. Ceci correspondrait à une durée symbole de $T_0 = 12.5$ms. La durée d'un symbole DMT serait alors bien plus courte que le retard maximal du canal. L'intervalle de garde, qui doit faire plus de 50ms, serait donc plus grand que la durée symbole ce qui provoquerait une trop forte chute du débit.
Sur les figures 1.12, 1.13 et 1.14, on peut voir l'évolution du taux d'erreur

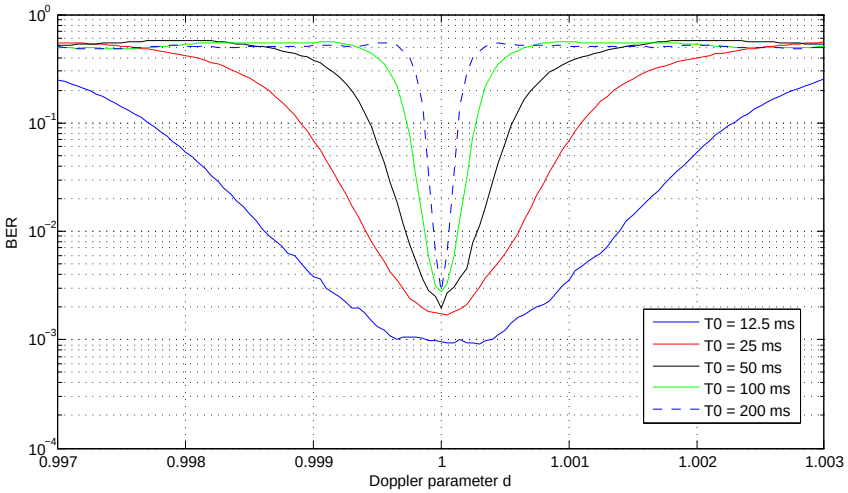


FIGURE 1.13 – Taux d'erreur binaire dans un canal monotrajet pour un symbole DMT composé d'éléments QPSK avec un Rapport signal sur bruit de 4.7.

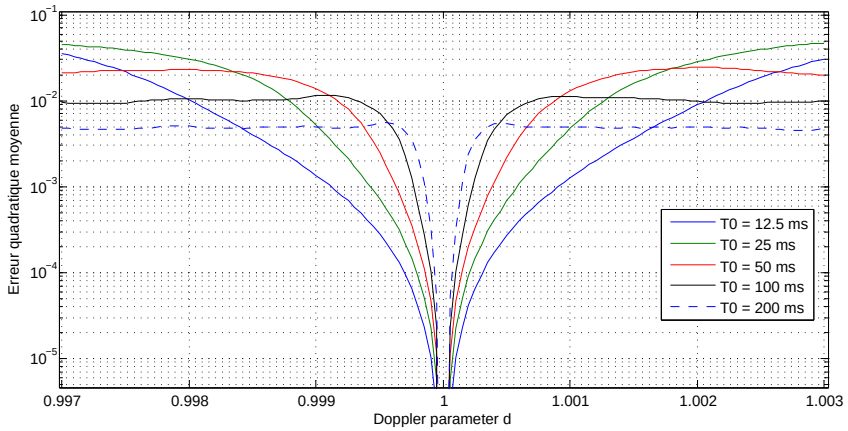


FIGURE 1.14 – Erreur quadratique moyenne dans un canal monotrajet sans bruit avec effet Doppler pour un symbole DMT composé d'éléments QPSK.

binaire en fonction du paramètre Doppler pour un canal monotrajet sans bruit. On vérifie bien que plus on augmente F_0 et plus le système est résistant à de forts effets Doppler. Cependant, on ne peut retrouver les éléments transmis en réception pour des paramètres Doppler que nous rencontrons en milieu sous-marin. Par conséquent, réduire la durée symbole n'est pas la bonne solution ici pour lutter contre l'effet Doppler. Nous sommes obligés d'y faire face en utilisant un grand nombre de porteuses pour assurer un débit conséquent.

La puissance de l'interférence interporteuse est un bon outil pour voir l'effet du paramètre Doppler d sur le signal DMT.
La puissance reçue sur la porteuse m' due à l'émission du symbole $c[m]$ sur la porteuse m est :

$$P_{m',m} = \left| \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi q \frac{(dm-m')}{2M}} \Pi_{T_0}(dqT_r) \right|^2 \tag{1.74}$$

On en déduit la puissance de l'interférence interporteuse.

$$P_{IEP}(m') = \sum_{m=0, m\neq m'}^{M-1} P_{m',m} \tag{1.75}$$

Sur la figure 1.15, on peut voir l'évolution de la puissance interporteuse sur la fréquence discrète $M/2$ pour différentes valeurs de T_0 à bande occupée constante. De même que précédemment, on voit que la puissance augmente très vite avec le paramètre Doppler.

Si on poursuit notre réflexion, on voit que pour éviter que l'effet Doppler ne détruise l'orthogonalité entre les porteuses, il faut utiliser des signaux OFDM de durée utile inférieure à l'intervalle de garde si on communique sur des distances d'un kilomètre. Ce n'est donc pas une solution viable car le débit est alors fortement limité. On peut exprimer le débit sur un signal DMT pour des éléments à N_e états :

$$\text{Débit} = \frac{N_e(M_{max} - M_{min})}{2(T_0 + T_g)} = \frac{N_e(f_{max} - f_{min})T_0}{2(T_0 + T_g)} \tag{1.76}$$

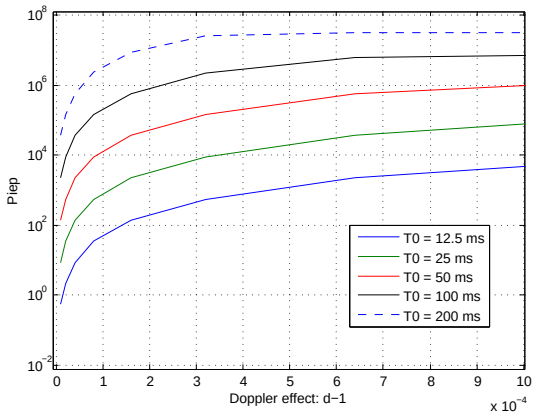


FIGURE 1.15 – Puissance des interférences interporteuses sur la fréquence $M/2$.

On a $f_{min} = 5000$ Hz et $f_{max} = 15000$ Hz. Si on considère une communication sur une distance d'un kilomètre, le modèle géométrique nous permet d'envisager un intervalle de garde de durée $T_g = 50$ ms. Suivant cette expression, le débit est maximal si on considère une durée utile T_0 très grande. Cependant, plus la durée utile augmente et plus le signal est sensible à une faible variation Doppler. Dans la suite, après avoir estimé l'effet Doppler on obtient l'estimé $\hat{d}$. Après compensation Doppler sur le signal reçu en monotrajet, on aura encore destruction de l'orthogonalité entre les porteuses si la précision Doppler $\left|\hat{d} - d\right|$ est telle que :

$$f_{max} \left|\hat{d} - d\right| < \frac{1}{2T_0} \tag{1.77}$$

La précision de l'estimation Doppler va conditionner la taille maximale de la durée utile du signal OFDM. On se retrouve donc face à un compromis entre la nécessité d'avoir un T_0 grand pour augmenter le débit mais l'obligation de le limiter pour ne pas être trop sensible à l'effet Doppler.

En utilisant les équations (1.76) et (1.77), on arrive à avoir une condition sur le débit maximal en fonction des paramètres du canal et de la bande du signal.

$$\text{Débit} < \frac{N_e(f_{max} - f_{min})}{4T_g \left|\hat{d} - d\right| f_{max} + 1} \tag{1.78}$$

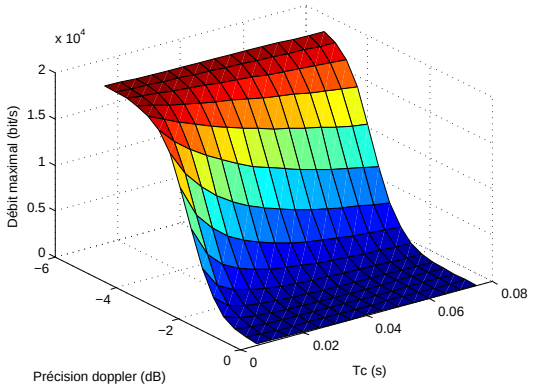


FIGURE 1.16 – Débit maximum en fonction de la précision de l'estimation Doppler et de l'intervalle de garde pour des éléments QPSK.

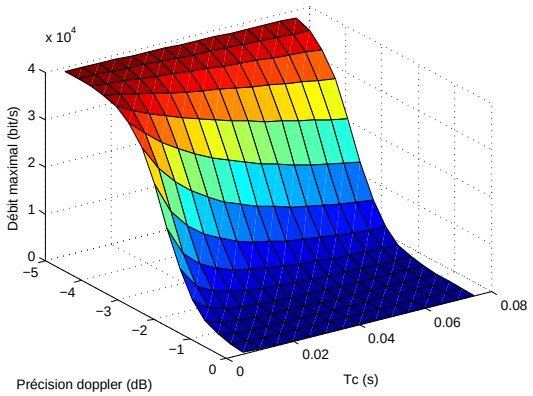


FIGURE 1.17 – Débit maximum en fonction de la précision de l'estimation Doppler et de l'intervalle de garde pour des éléments 8QAM.

En fonction de la bande de fréquences utilisée, de l'intervalle de garde et de la précision de l'estimation Doppler, on peut en déduire une valeur du débit maximum possible. Les figures 1.16 et 1.17 montrent l'évolution du débit maximal pour un signal OFDM en bande de base.

Si on arrive à avoir une précision de l'estimation Doppler de l'ordre de 10^{-4} pour une bande de fréquences de 5 kHz à 15 kHz, avec un intervalle de garde de 50 ms, pour des éléments QPSK, on peut espérer atteindre au maximum un débit de 17.391 kb/s. Au final, on se place légèrement en dessous de cette limite avec un débit de 16 kb/s. On aura alors $T_0 = 200$ ms.

En conclusion, si nous désirons un débit de plus de 16 kb/s, nous devons faire face à l'effet Doppler et à ses conséquences sur le signal DMT. La

suite de la thèse se concentre donc sur l'estimation et la compensation de l'effet Doppler.

1.4 Signal considéré

Compte tenu de ce que nous avons développé dans ce chapitre, nous allons considérer dans la suite de la thèse l'émission d'un signal réel s de type DMT. Dans le cas d'un canal multitrajet, l'expression du signal reçu sera :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) s(d_i t - \tau_i) + b_r(t) \tag{1.79}$$

L'intervalle de garde étant pris supérieur à la durée maximale du retard, les symboles DMT seront indépendants. Dans la suite, on se focalise sur la propagation d'un seul symbole. Chaque symbole est suffisamment court pour que l'amplitude des trajets soit considérée constante durant un symbole DMT. Soit $a_i(t) = a_i$.

Après passage dans le filtre de réception, d'après l'équation (1.66), on aura :

$$y(t) = (r \otimes g_r)(t) + b(t) \tag{1.80}$$

Le bruit du canal après filtrage est noté $b = (b_r \otimes g_r)$. On nomme Γ_b la fonction d'autocorrélation du bruit après filtrage.

$$\Gamma_b(t) = E[b(\tau) b^*(\tau - t)] \tag{1.81}$$

On peut alors remarquer que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du bruit filtré γ_b s'écrit :

$$\gamma_b(f) = \widehat{\Gamma_b}(t) \tag{1.82}$$

$$\gamma_b(f) = \gamma_{br}(f) \left| G_r(f) \right|^2 \tag{1.83}$$

Avec γ_{br} la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du bruit avant filtrage. On suppose $\gamma_{br}(f) = N_0/2$ dans la bande de fréquence $\left[\frac{-1}{2T_b}, \frac{1}{2T_b}\right]$. On désire que les échantillons du bruit filtré par le filtre de réception pris à des instants T_r, avec $T_r \geq T_b$, soient indépendants les uns des autres. Soit :

$$\forall q \in \mathbf{Z}, \quad \Gamma_b(qT_r) = \Gamma_b(0)\delta(qT_r) \tag{1.84}$$

Nous allons choisir le filtre de réception pour qu'il remplisse cette condition. En considérant que G_r à support fréquentiel fini, $\left[\frac{-1}{2T_r}, \frac{1}{2T_r}\right]$ avec $T_r \geq T_b$, on déduit de l'équation (1.83) :

$$\gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} |G_r(f)|^2 \tag{1.85}$$

d'après l'hypothèse (1.84) on voit que le filtre de réception doit vérifier :

$$\forall q \in \mathbf{Z}, \quad TF^{-1}\left[|G_r|^2\right](qT_r) = \frac{2\Gamma_b(0)}{N_0}\delta(qT_r) \tag{1.86}$$

avec TF^{-1} l'opérateur de transformée de Fourier inverse. La condition d'indépendance des échantillons du bruit après échantillonnage se traduit par une condition sur la transformée de Fourier du filtre de réception. Après quelques calculs, on obtient :

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left| G_r(f - \frac{q}{T_r}) \right|^2 = \frac{2T_r\Gamma_b(0)}{N_0} \tag{1.87}$$

Le calcul est le même que pour le critère de Nyquist, [Glavieux A. 1996]. En particulier, on peut remarquer que cette condition est remplie pour un filtre fréquentiel de type porte avec une largeur $1/T_r$. Dans ce cas précis, $\Gamma_b(0) = N_0/(2T_r)$.
Dans la suite, on note $\sigma^2 = \Gamma_b(0)$ la variance des échantillons indépendants du bruit discret.

En utilisant les équations (1.80) et (1.25), on peut obtenir l'expression du signal reçu après le filtre de réception :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^{d_i} \otimes g_r)(t - k\frac{T_e}{d_i} - \tau_i) + b(t) \tag{1.88}$$

Après discrétisation :

$$y[q] = \sum_{i=1}^{I} a_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^{d_i} \otimes g_r)(qT_r - k\frac{T_e}{d_i} - \tau_i) + b[q] \tag{1.89}$$

Le signal émis s étant à bande limitée, sous respect du théorème de Shannon en réception, le filtre $(g_e^{d_i} \otimes g_r)$ réalisant une interpolation parfaite, on aura :

$$y[q] = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i q T_r - \tau_i) + b[q] \tag{1.90}$$

Avec, d'après l'équation (1.26) :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 t} \Pi_{T_0}(t) \tag{1.91}$$

Finalement :

$$y[q] = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i q T_r - \tau_i) + b[q] \tag{1.92}$$

Le tableau ci-dessous rappelle les caractéristiques du signal DMT émis compte tenu du canal de transmission.

Bande de fréquences utilisée	$[5000, 15000]$
Nombre total de porteuses	$M = 4096$
Nombre de porteuses utiles	2048
Éléments $c[m]$ transmis	QPSK
Durée utile du signal DMT	$T_0 = 200$ ms
Écart interporteuse	$F_0 = 5$ Hz
Durée de l'intervalle de garde	$T_g = 50$ ms
Retard maximum du canal considéré	40 ms
Variation Doppler maximale considérée	$d = 1 \pm 0.01$
Période d'échantillonnage à l'émission	$T_e = 1/20000$ s
Période d'échantillonnage en réception	$T_r = 1/40000$ s

1.5 Conclusion sur la problématique

Dans ce chapitre, en partant de l'équation d'onde, nous avons développé une expression du signal reçu dans une approche rayon qui se révèle correcte pour des signaux hautes fréquences. Afin de contrer l'effet d'étalement temporel provoqué par les trajets multiples du canal de transmission, l'utilisation de signaux OFDM, et plus particulièrement DMT, est favorisée. Seulement, le

fort effet Doppler, dû à la faible vitesse de propagation des ondes acoustiques, détruit l'orthogonalité interporteuse. Le mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur empêche toute transmission. Dans ce chapitre, nous avons vu qu'un mouvement relativement faible, de l'ordre du mètre par seconde, suffit à obtenir un effet Doppler trop important.

L'utilisation d'un écart interporteuse plus important n'apparaît pas comme une solution viable car limitant considérablement le débit du fait des trajets multiples. Une estimation et une compensation de l'effet Doppler par un traitement en réception doivent être développées afin d'assurer un débit correct. La précision de l'estimateur du paramètre Doppler d va directement affecter la durée utile du symbole OFDM et donc le débit possible.

Chapitre 2

Estimation de l'effet Doppler en monotrajet

« C'est à tort que les hommes se plaignent de la fuite du temps, en l'accusant d'être trop rapide, sans voir qu'il s'écoule à la bonne vitesse. » Leonardo Da Vinci

Sommaire

2.1 Modèle de transmission d'un signal DMT sur canal mono-trajet 48
2.2 Estimateur par le maximum de vraisemblance pour signal DMT 51
2.2.1 Vraisemblance 51
2.2.2 Borne de Cramér-Rao pour signal DMT 52
2.2.3 Maximum de vraisemblance et Borne de Cramér-Rao pour modulation linéaire de fréquence 54
2.2.4 Simulations 55
2.2.5 Données réelles 58
2.3 Estimation par porteuses connues du récepteur . . . 59
2.3.1 Formation des signaux 60
2.3.2 Estimation par porteuses pilotes 61
2.3.3 Estimation par porteuses nulles 64
2.3.4 Comparaison de performances 67
2.4 Conclusion sur l'estimation du paramètre Doppler . 69

Les problèmes d'estimation sont nombreux en communication acoustique sous-marine. Il est nécessaire de connaître le nombre de trajets, leurs temps d'arrivée respectifs ainsi que les amplitudes et le paramètre Doppler correspondant. Les problèmes de synchronisation fréquentielle ont été déjà abordés longuement dans la littérature [Brossier 1991], [Knight 1981], de même que la synchronisation temporelle, sur l'estimation du temps d'arrivée du premier trajet [Carter 1981], [Kilfoyle 2000]. Ces problèmes ne seront pas abordés ici. Seule l'estimation du paramètre Doppler d dans le cas d'un canal mono-trajet bruité est considérée dans ce chapitre.
L'estimation du paramètre Doppler a été longuement abordée par la littérature ces dernières années, [Li 2007c], [Li 2006], [Lyonnet 2010], [Kibangou 2010b], [Sharif 2000a]. Ceci est lié à l'intérêt croissant pour les modulations multi-porteuses. Compte tenu des remarques du chapitre précédent, on considère qu'il est nécessaire d'avoir un estimateur précis avec une variance inférieure à 10^{-10} sur le facteur d'échelle. Différents estimateurs sont développés dans la suite du chapitre. On considère que le paramètre Doppler reste inchangé pendant la durée d'un symbole OFDM. Les estimateurs présentés utilisent soit une partie connue du signal émis, soit c'est l'ensemble du signal qui est connu.

2.1 Modèle de transmission d'un signal DMT sur canal mono-trajet

On considère l'équation (1.92) dans le cas d'un canal mono-trajet, $I = 1$. Le signal est supposé synchronisé temporellement sur l'arrivée du trajet, $\tau_1 = 0$. De plus, on normalise le trajet reçu, ce qui revient à considérer $a_1 = 1$. Dans cette approche on se focalise sur le paramètre Doppler. On a le signal discret suivant :

$$\text{pour} \quad q = 0, ..., Q-1 \qquad y[q] = s(dqT_r) + b[q] \tag{2.1}$$

$$= s[q](d) + b[q] \tag{2.2}$$

avec $s[q](d) = s(dqT_r)$. D'après (1.91) :

$$\text{pour} \quad q = 0, ..., Q-1 \qquad s(dqT_r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 dqT_r} \Pi_{T_0}(dqT_r) \tag{2.3}$$

On rappelle que les coefficients sont choisis à l'émission de façon à ce que le signal DMT s soit réel.

Dans cette approche, le signal y discret est considéré comme dépendant du paramètre continu d. L'intervalle de garde étant pris suffisamment grand, on peut considérer la propagation d'un seul symbole DMT indépendamment des autres. Les derniers éléments considérés vont faire partie de l'intervalle de garde qui suit la partie utile du signal comme illustré sur la figure 2.1.

Nous devons nous interroger sur le nombre d'échantillons que nous allons traiter en réception. Comme spécifié sur la figure 2.1, nous désirons avoir un nombre d'échantillons suffisant pour englober entièrement un signal de communication. Seulement, le signal étant dilaté ou compressé par effet Doppler, il est possible qu'il soit d'une durée supérieure à T_0. À ce moment du traitement en réception, nous n'avons pas connaissance de la valeur du paramètre Doppler. Nous allons donc considérer un nombre d'échantillons Q suffisamment grand pour que $(Q-1)T_r$ soit d'une durée supérieure à la durée symbole affectée par le plus grand paramètre Doppler possible dans notre configuration. Soit $(Q-1)T_r > d_{max}T_0$. Cependant, il ne faut pas prendre un nombre d'échantillons Q trop grand car on risque alors de déborder sur le symbole suivant. Dans les faits, nous choisissons Q tel que $(Q-1) = \left\lfloor \frac{d_{max}T_0}{T_r} \right\rfloor + 1$, avec $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Il est possible de réécrire l'équation (2.2) sous forme vectorielle. On pose $\mathbf{y} = [y[0], \ldots, y[Q-1]]$, $\mathbf{s}(d) = [s[0](d), \ldots, s[Q-1](d)]$, et $\mathbf{b} = [b[0], \ldots, b[Q-1]]$. Soit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}(d) + \mathbf{b} \tag{2.4}$$

Dans cette approche, le paramètre continu d est supposé constant sur la durée T_0. Cette hypothèse reste valable pour tout instant qT_r tel que la distance parcourue depuis le début du symbole reste très inférieure à la distance émetteur/récepteur, voir chapitre 1. [1]

Le filtre de réception vérifiant la condition (1.87), comme précisé dans le chapitre 1, les échantillons du bruit $b[q]$ sont réels, gaussiens, indépendants. Par conséquent, y sera un processus gaussien dont la variance est notée σ^2.

Nous considérons la matrice $\mathbf{F}_\delta$ de taille $Q \times M$suivante :

$$\mathbf{F}_\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi n F_0 q T_r \delta} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) \right)_{0 \leq q \leq Q-1 \;\; ; \;\; 0 \leq n \leq M-1} \tag{2.5}$$

1. $qT_r \left\| \vec{v}_1 \right\| << \left\| \vec{l_1}(0) \right\|$

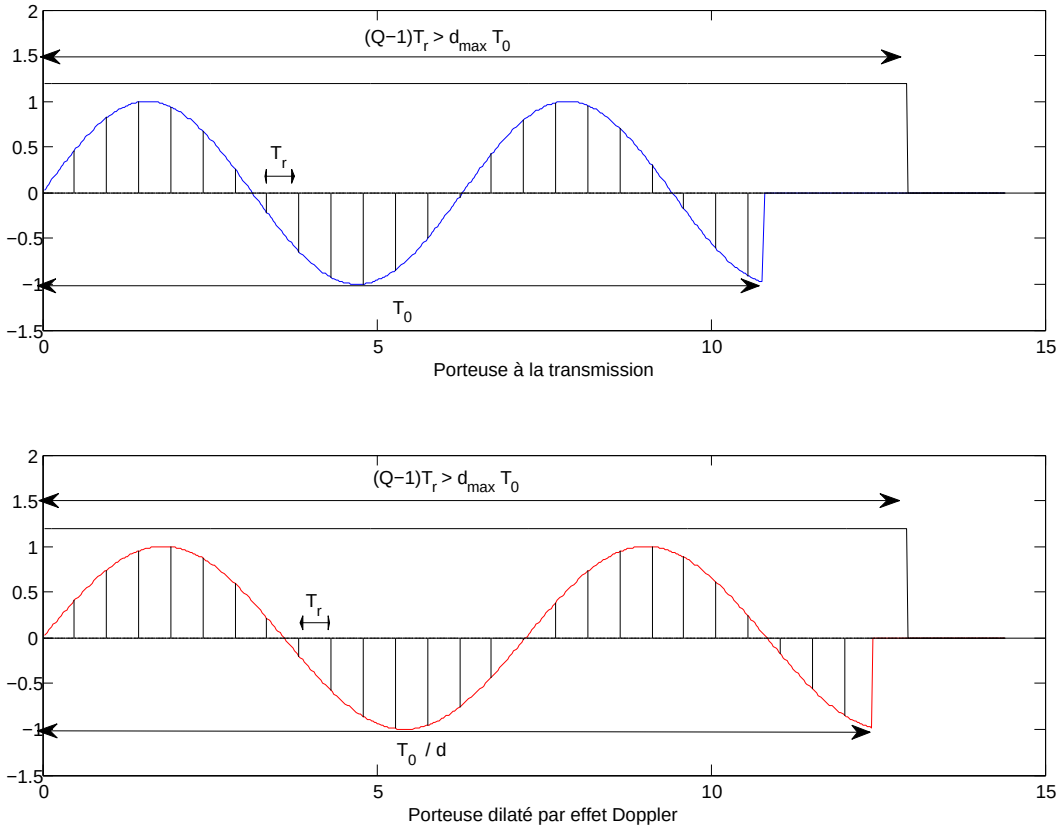


FIGURE 2.1 – Illustration du nombre d'échantillons Q récoltés en réception pour une porteuse.

Le nombre de colonnes de la matrice $\mathbf{F}_\delta$ est égal au nombre de fréquences présentes dans le signal DMT. Il s'agit d'un peigne de fréquences décalées les unes par rapport aux autres d'une valeur δF_0. On rappelle également l'expression du vecteur des éléments transmis, $\mathbf{c} = [c[0], \ldots, c[M-1]]$. On peut réécrire le signal DMT reçu :

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_d \mathbf{c} + \mathbf{b} \tag{2.6}$$

2.2 Estimateur par le maximum de vraisemblance pour signal DMT

Les éléments transmis $\mathbf{c}$ sont supposés connus du récepteur. On peut donc en réception construire le signal $\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}$ pour toutes les valeurs du facteur d'échelle δ.

Nous développons tout d'abord un estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre Doppler d. Il s'agit d'une méthode classique qui a été utilisée de nombreuses fois dans la littérature [VanTrees 2001]. Les travaux présentés dans cette partie ont fait l'objet d'une publication, [Lyonnet 2010].

2.2.1 Vraisemblance

On cherche à estimer le paramètre d par le maximum de vraisemblance pour une réalisation de $\mathbf{y}$ en connaissant $\mathbf{c}$. La vraisemblance est une fonction de δ dont le maximum nous donne une estimation de d, noté $\hat{d}$. Ce maximum correspond à la valeur de δ qui a le plus de probabilités d'apparaître pour une réalisation de $\mathbf{y}$. La vraisemblance de δ est notée :

$$\Lambda(\delta) = p_{\mathbf{c},\delta}(\mathbf{y}) \tag{2.7}$$

Par indépendance des composantes du vecteur $\mathbf{b}$, on peut écrire :

$$\Lambda(\delta) = \prod_{q=0}^{Q-1} p_{\mathbf{c},\delta}(y[q]) \tag{2.8}$$

Comme précisé dans le chapitre 1, les échantillons de bruit après filtrage en réception sont gaussiens, de variance σ^2. Par conséquent :

$$\Lambda(\delta) = \prod_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)} e^{-\frac{(y[q]-(\mathbf{F}_\delta \mathbf{c})[q])^2}{2\sigma^2}} \tag{2.9}$$

avec

$$(\mathbf{F}_\delta \mathbf{c})[q] = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 \delta q T_r} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) \tag{2.10}$$

Finalement, on obtient :

$$\Lambda(\delta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.11}$$

$$\ln(\Lambda(\delta)) = -\frac{Q}{2} \ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}\|^2}{2\sigma^2} \tag{2.12}$$

En remarquant que $\|\mathbf{y}\|^2$ est indépendant de δ, on obtient :

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{F}_\delta \mathbf{c} \rangle - \frac{\|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}\|^2}{2} \right) \tag{2.13}$$

Ce résultat est rapide à obtenir dans le cas d'un bruit additif gaussien blanc dans la bande $\left[\frac{-1}{2T_r}, \frac{1}{2T_r}\right]$ et qui assure l'indépendance entre les échantillons du signal reçu. L'estimateur du maximum de vraisemblance dépend des éléments $\mathbf{c}$ émis.
On peut faire un parallèle entre cet estimateur et l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un retard pur qui correspond à l'expression de la corrélation entre le signal reçu et le signal émis mais retardé [Knapp 1976], [Carter 1981]. En effet, l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas de l'effet Doppler, présenté dans l'équation (2.13), correspond à une recherche du maximum de la corrélation entre le signal reçu et le signal émis mais basé sur une variation d'échelle.

2.2.2 Borne de Cramér-Rao pour signal DMT

On peut obtenir l'expression de la borne de Cramér-Rao dans le cas d'un estimateur non biaisé. Le nombre d'échantillons considéré pour calculer la vraisemblance Q ne dépendant pas du paramètre à déterminer d, et sous réserve de condition d'existence de la dérivée de la log-vraisemblance, on peut calculer l'information de Fischer puis la borne de Cramér-Rao pour l'estimation du paramètre d.

$$BCR = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln(\Lambda(d))}{\partial d^2}\right]} \tag{2.14}$$

La borne de Cramér-Rao nous donne une limite inférieure de la variance de l'estimateur. C'est donc une information précieuse afin de déterminer s'il est envisageable à un rapport signal sur bruit donné d'obtenir un estimateur suffisamment précis pour compenser l'effet Doppler et retrouver l'information transmise.

$$\frac{\partial}{\partial d}\ln(\Lambda(d)) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{q=0}^{Q-1}\frac{\partial}{\partial d}(y[q]-(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q])^2 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial d}\ln(\Lambda(d)) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{q=0}^{Q-1}\left(\frac{\partial}{\partial d}(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]\right)(y[q]-(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\ln(\Lambda(d)) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{q=0}^{Q-1}\left((y[q]-(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q])\left(\frac{\partial^2(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]}{\partial d^2}\right)-\left(\frac{\partial(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]}{\partial d}\right)^2\right) \tag{2.17}$$

Si on dispose d'un estimateur non biaisé, $E[y[q]-\mathbf{f}_d\mathbf{c}[q]]=0$, alors, on aura :

$$BCR = \frac{\sigma^2}{\sum_{q=0}^{Q-1}\left(\frac{\partial(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]}{\partial d}\right)^2} \tag{2.18}$$

Avec

$$\frac{\partial(\mathbf{F}_d\mathbf{c})[q]}{\partial d} = \frac{j2\pi F_0 qT_r}{\sqrt{M}}\sum_{m=0}^{M-1} mc[m]e^{j2\pi mF_0 dqT_r}\Pi_{T_0}(dqT_r) \tag{2.19}$$

On pose :

$$\mathbf{c'} = (mc[m])_{0\leq m\leq M-1} \tag{2.20}$$

et

$$\mathbf{F'}_\delta = \left(\frac{j2\pi F_0 qT_r}{\sqrt{M}}e^{-j2\pi nF_0 qT_r\delta}\Pi_{T_0}(\delta qT_r)\right)_{0\leq q\leq Q-1\ ;\ 0\leq n\leq M-1} \tag{2.21}$$

Finalement :

$$BCR = \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{F'}_d\mathbf{c'}\|^2} \tag{2.22}$$

Il est bon de remarquer que la Borne de Cramér-Rao dépend des éléments d'information **c'** pour l'estimation ainsi que de la valeur du paramètre Doppler d à estimer. La borne de Cramér-Rao va donc être différente pour chaque signal.
Il est possible de généraliser ce calcul pour un signal complexe. Ceci est présenté en annexe, B. Toutefois, nous resterons dans cette thèse sur l'étude de signaux réels.

2.2.3 Maximum de vraisemblance et Borne de Cramér-Rao pour modulation linéaire de fréquence

En communication acoustique sous-marine, il est souvent fait usage de modulation linéaire de fréquence (noté chirp en langue anglaise) pour effectuer la synchronisation temporelle. Ces signaux connus du récepteur et émis à intervalle régulier peuvent aussi être utilisés pour l'estimation du paramètre Doppler, ce que l'on peut appeler la synchronisation échelle. Une modulation linéaire de fréquence d'amplitude A, de fréquence minimale f_{min} et maximale f_{max}, d'une durée T_0, aura comme expression à l'émission :

$$\text{chirp}(t) = A\Re\left[e^{j2\pi(f_{min}+\frac{f_{max}-f_{min}}{T0}t)t}\Pi_{T_0}(t)\right] \tag{2.23}$$

En réception, après passage dans le canal monotrajet et après échantillonnage, on aura, pour $q = 0, ...Q-1$:

$$\text{chirp}(dqT_r) = A\Re\left[e^{j2\pi(f_{min}+\frac{f_{max}-f_{min}}{T0}dqT_r)dqT_r}\Pi_{T_0}(dqT_r)\right] \tag{2.24}$$

On note $\mathbf{chirp}(d)$ le vecteur de taille Q contenant les éléments $\text{chirp}(dqT_r)$. En utilisant les calculs développés en annexe B nous obtenons l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance et de la borne de Cramér-Rao pour un signal réel de type modulation linéaire de fréquence.

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\text{argmax}}\left(\Re\left(\langle\mathbf{y}, \mathbf{chirp}(\delta)\rangle\right) - \frac{\|\mathbf{chirp}(\delta)\|^2}{2}\right) \tag{2.25}$$

et

$$BCR = \frac{\sigma^2}{\left\| \frac{\partial \mathbf{chirp}(d)}{\partial d} \right\|^2} \tag{2.26}$$

avec, pour $q = 0, ..., Q-1$,

$$\frac{\partial \text{chirp}(dqT_r)}{\partial d} = \Re\left\{ j2\pi qT_r(f_{min} + 2\frac{f_{max} - f_{min}}{T0} dqT_r) A e^{j2\pi(f_{min} + \frac{f_{max}-f_{min}}{T0} dqT_r)dqT_r} \Pi_{T_0}(dqT_r) \right\} \tag{2.27}$$

On va pouvoir calculer la borne de Cramer-Rao théorique pour une estimation du paramètre Doppler non biaisée avec le maximum de vraisemblance en utilisant un signal de type modulation linéaire de fréquence.

2.2.4 Simulations

L'estimateur du maximum de vraisemblance dépend du signal utilisé lors de la transmission comme le montrent les équations (2.13), (2.22) et (B.8). Nous décidons de comparer dans cette partie les performances entre deux types de signaux pour l'estimation du paramètre Doppler.

On considère une modulation linéaire de fréquence, signal couramment utilisé en tomographie sous-marine ainsi qu'en communication sous-marine pour la synchronisation. La modulation linéaire de fréquence utilisée a une fréquence centrale de 10 kHz, une fréquence minimale à 5 kHz et une fréquence maximale de 15 kHz. En réception, on considère un échantillonnage à $T_r = \frac{1}{40000}$ s. Le suréchantillonnage est largement suffisant pour compenser tout effet de recouvrement fréquentiel. La durée du signal à l'émission est de 200 ms.

On considère également un signal DMT de même durée, occupant la même bande de fréquence et de même énergie. Il s'agit du signal décrit dans le chapitre 1. Les éléments d'information QPSK $\mathbf{c}$ sont tirés aléatoirement.

Les deux bornes de Cramer-Rao sont présentées sur la figure 2.2. Les résultats sont proches avec un avantage pour la modulation linéaire de fréquence. Le tracé de la fonction de vraisemblance sur la figure 2.3 nous

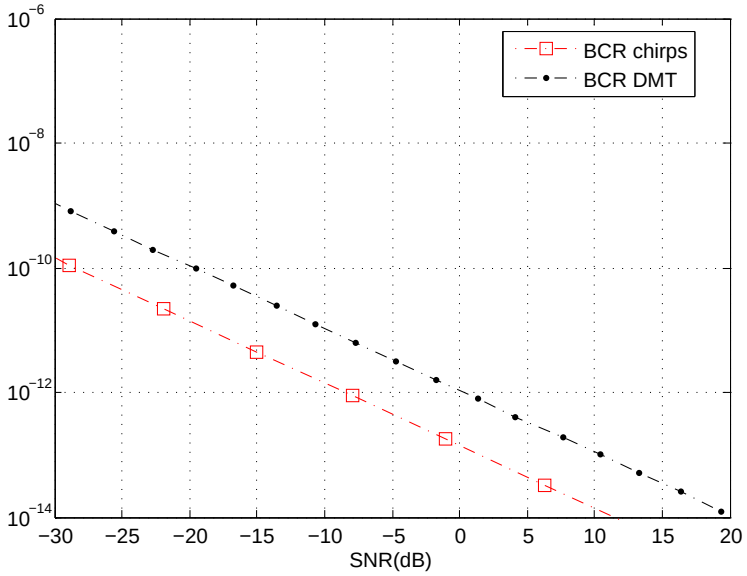


FIGURE 2.2 – Borne de Cramér-Rao pour l'estimation Doppler avec une modulation linéaire de fréquence et pour un signal DMT.

donne le même résultat, les deux fonctions de vraisemblance sont très similaires, avec une bonne localisation du pic principal.
Tout ceci se confirme finalement sur le calcul de la variance comme montré sur la figure 2.4. L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance avec une modulation linéaire de fréquence est légèrement plus robuste que que celle avec un signal DMT.

Si on s'intéresse au côté pratique de la transmission, on voit que pour estimer l'effet Doppler, une solution consiste à utiliser un symbole DMT pilote qui sera réémis à intervalle de temps régulier, les données étant transmises entre chaque symbole pilote. Une autre solution serait d'envoyer un signal en continu pour estimer l'effet Doppler qui occuperait d'autres fréquences que celles occupées par le signal d'information, ce qui permettrait une communication continue.
Dans tous les cas, l'envoi d'un signal pour l'estimation Doppler consommant de l'énergie en émission, il peut être intéressant de limiter la fréquence d'envoi du signal pilote en réalisant une estimation de l'évolution du paramètre Doppler entre deux estimations (Doppler tracking). Ce problème ne sera pas abordé dans cette thèse mais des travaux ont déjà été réalisés sur ce sujet dans [Johnson 1997], [Eggen 2000], [Eggen 2001], [Sharif 2000b].

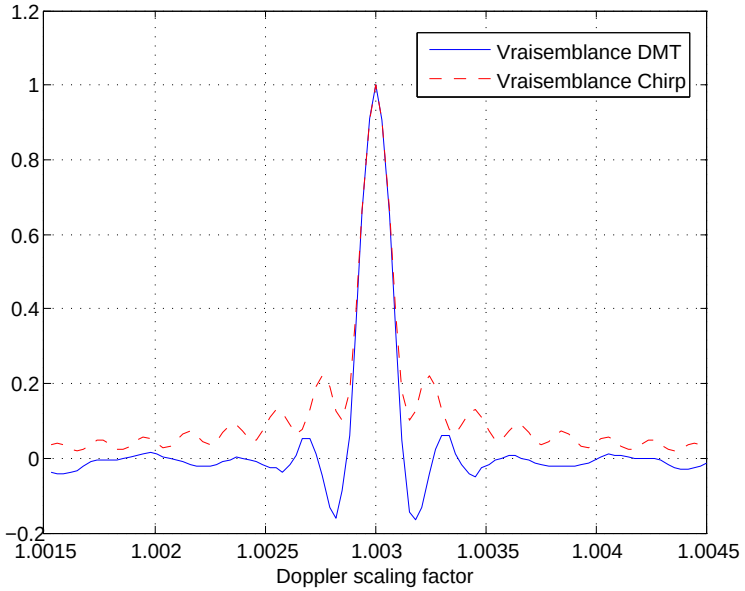


FIGURE 2.3 – Fonction de vraisemblance pour des signaux de type DMT et modulation linéaire de fréquence.

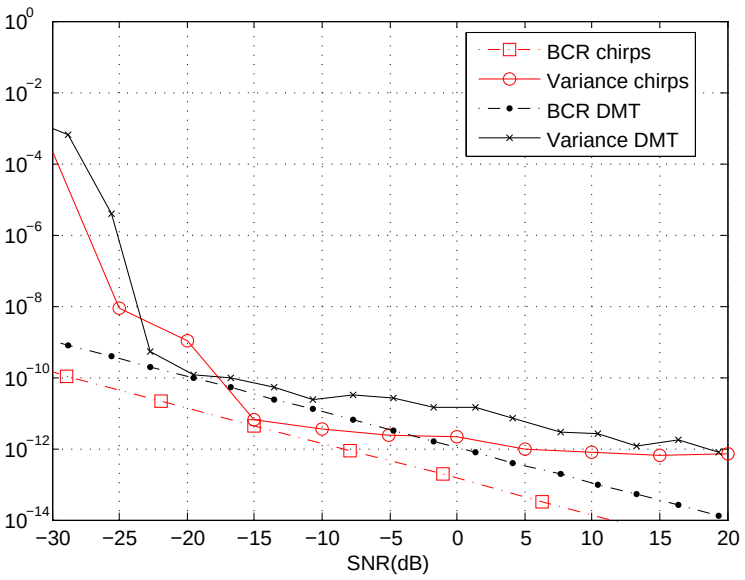


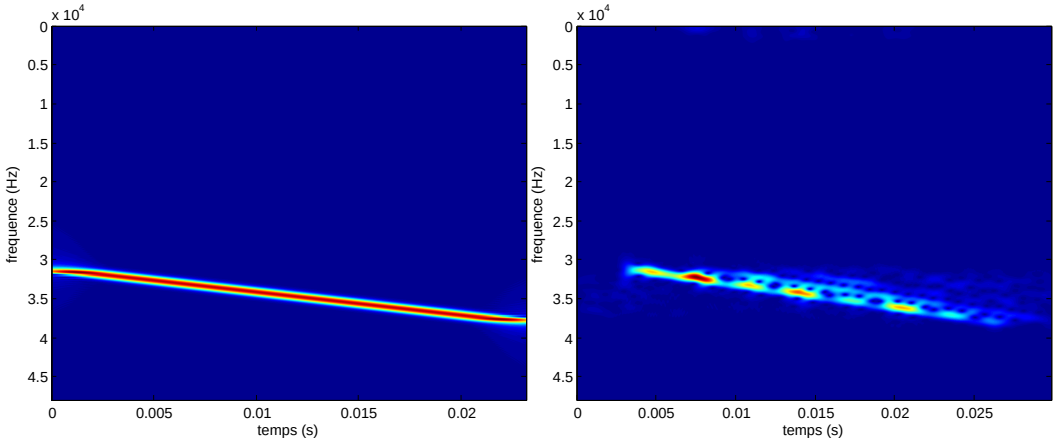
FIGURE 2.4 – Variances des estimateurs du maximum de vraisemblance et bornes de Cramér-Rao correspondantes pour des signaux DMT et modulation linéaire de fréquence.

2.2.5 Données réelles

Par l'intermédiaire de la Direction Générale de l'Armement qui finance cette thèse pour moitié, nous avons pu tester l'estimateur du maximum de vraisemblance sur des signaux acquis en mer. Les signaux concernés ont été recueillis dans la baie de Douarnenez le 26 juin 2006. Le mode opératoire était le suivant : un sous-marin autonome (AUV redermor) se trouve immergé à environ 15 mètres de profondeur pour une hauteur d'eau de 25 mètres. Il se déplace à une vitesse de 1.5m/s. Des signaux de type modulation linéaire de fréquence sont envoyés sur une ligne de capteurs immergés à 10 mètres de profondeur à l'aplomb du bâtiment d'expérimentation de guerre des mines (BEGM) Thétis du Groupe d'études sous-marines de l'Atlantique (GESMA). On considère le signal émis :

$$\forall \;\; t \in [0, T_0] \qquad \text{chirp}(t) = \Re\left[e^{j2\pi(f_{min} + \frac{f_{max}-f_{min}}{T0}t)t}\Pi_{T_0}(t)\right] \tag{2.28}$$

La modulation linéaire de fréquence utilisée a une fréquence centrale de $f_0 = 34.483$ kHz, une fréquence minimale à $f_{min} = 0.9f_0 = 31.034$ kHz et une fréquence maximale de $f_{max} = 1.1f_0 = 37.931$ kHz. En réception, on considère un échantillonnage à $T_r = \frac{1}{96000}$ s. Le suréchantillonnage est largement suffisant pour compenser tout effet de recouvrement fréquentiel. La durée du signal à l'émission est de $T_0 = \frac{800}{f_0} = 23.2$ ms. Le spectrogramme du signal reçu est représenté sur la figure 2.5. On peut le comparer au signal théoriquement émis.



(a) En émission (b) En réception

FIGURE 2.5 – Signature temps-fréquence de modulations linéaire de fréquence.

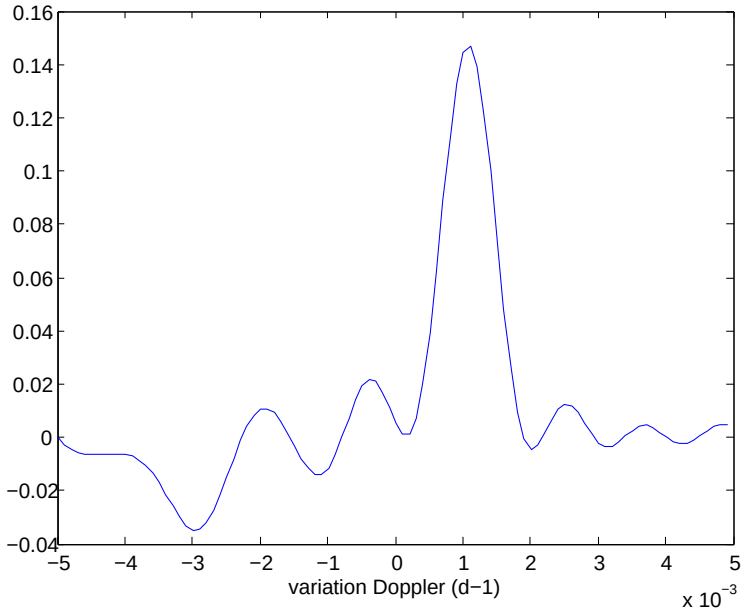


FIGURE 2.6 – Fonction de vraisemblance sur signaux réels acquis dans la baie de Douarnenez.

En réception, on cherche le maximum de la fonction de vraisemblance en utilisant l'algorithme du simplex de Nelder-Mead [Lagarias 1996] pour obtenir une estimation du paramètre Doppler d.

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} \left(\Re \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}(\delta) \rangle - \frac{\|\mathbf{s}(\delta)\|^2}{2} \right) \tag{2.29}$$

La fonction de vraisemblance calculée pour différentes valeurs de d est représentée sur la figure 2.6. La maximum est obtenu en $\hat{d} = 1.00109$. On peut calculer une approximation sommaire de la vitesse du mobile v en considérant $d = 1 - \frac{v}{c}$. On obtient une vitesse de 1.635 m/s.

2.3 Estimation par porteuses connues du récepteur

L'estimateur du maximum de vraisemblance donne de bons résultats. Cependant, comme il est nécessaire de connaître le signal transmis, on ne communique aucune information quand on veut estimer l'effet Doppler. Ceci limite le débit de la transmission. Voilà pourquoi nous désirons développer un estima-

teur du paramètre Doppler d qui se base sur un certain nombre de porteuses pilotes du signal DMT connues du récepteur.

2.3.1 Formation des signaux

Parmi les M porteuses du signal DMT, on choisit M_p porteuses, dites porteuses pilotes, qui sont connues du récepteur. On note V l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et $(M-1)$. V_p représente l'ensemble des entiers naturels désignant les porteuses pilotes alors que V_i est l'ensemble des entiers naturels désignant les porteuses d'information. Le nombre de porteuses d'information est noté M_i, avec $M_i + M_p = M$. $V_p \bigcup V_i = V$ et $V_p \bigcap V_i = \emptyset$. On définit $\mathbf{c}_p = (c_p[m])_{m\in V}$ le vecteur des porteuses pilotes et $\mathbf{c}_i = (c_i[m])_{m\in V}$ le vecteur des porteuses d'information :

$$\forall m \in V, \quad c_p[m] = \begin{cases} c[m] & \text{si } m \in V_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\forall m \in V, \quad c_i[m] = \begin{cases} c[m] & \text{si } m \in V_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.31}$$

On remarque $\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_i = \mathbf{c}$.
Le signal discret s est de la forme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}_1(\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_i) \tag{2.32}$$

$$s(qT_r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\sum_{m\in V_p} c[m] e^{j2\pi m F_0 q T_r} + \sum_{m\in V_i} c[m] e^{j2\pi m F_0 q T_r} \right) \Pi_{T_0}(qT_r) \tag{2.33}$$

On peut dès lors considérer le signal émis comme la somme de deux signaux indépendants, le premier $\mathbf{f}_1\mathbf{c}_p$ comportant les porteuses pilotes connues du récepteur, le deuxième $\mathbf{F}_1\mathbf{c}_i$ portant l'information. La figure 2.7 montre la construction du signal DMT avec les porteuses pilotes apparaissant en rouge.

En considérant comme précédemment un canal monotrajet, le signal reçu après le filtre de réception et échantillonnage à la cadence T_r sera de la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_d(\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_i) + \mathbf{b} \tag{2.34}$$

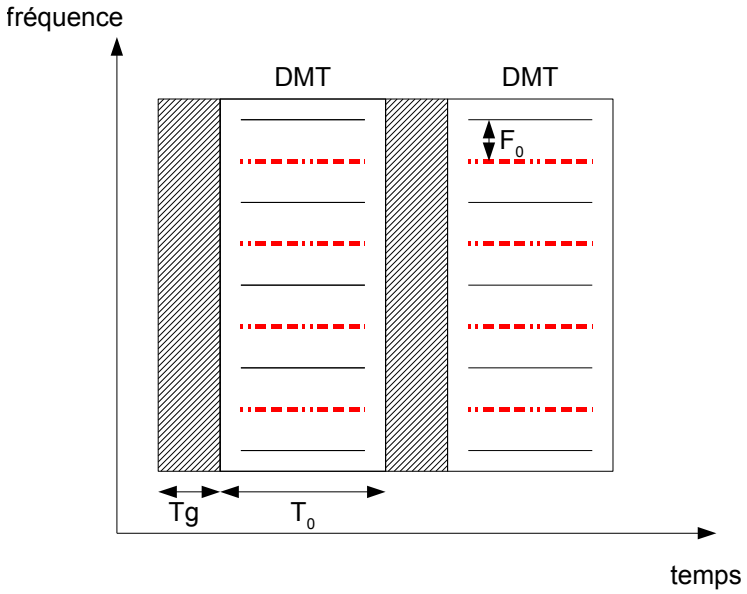


FIGURE 2.7 – Représentation temps-fréquences d'un signal DMT avec porteuses pilotes.

Avec **b** un vecteur comprenant les éléments indépendants du bruit additif gaussien et blanc dans la bande $[-1/(2T_r), 1/(2T_r)]$.

2.3.2 Estimation par porteuses pilotes

En utilisant les Q acquisitions de $y[q]$, on désire estimer le paramètre Doppler d. Notre première idée consiste à calculer la vraisemblance, seulement, on ne connaît cette fois-çi qu'une partie du signal reçu :

$$\Lambda(d) = p_{\mathbf{c}_p,\delta}(\mathbf{y}) \tag{2.35}$$

On note ξ l'alphabet de modulation des différents éléments de $\mathbf{c}$. ξ^{M_i} représente l'ensemble des valeurs que peuvent être prise par $\mathbf{c}_i$. La vraisemblance peut ainsi s'écrire :

$$\Lambda(\delta) = \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} p(\mathbf{c}_i) p_{\mathbf{c}_p,\mathbf{c}_i,\delta}(\mathbf{y}) \tag{2.36}$$

$$\Lambda(\delta) = \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} p(\mathbf{c}_i) p_{\mathbf{c},\delta}(\mathbf{y}) \tag{2.37}$$

La vraisemblance dépend ici de toutes les valeurs qui peuvent être prises par $\mathbf{c}_i$. Sachant que les composantes du vecteur $\mathbf{b}$ sont indépendantes, gaussiennes, centrées de variance σ^2, nous avons :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{c}|\delta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta(\mathbf{c}_p+\mathbf{c}_i)\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.38}$$

On pose comme hypothèse que tous les messages d'information ont la même probabilité d'apparition. Si on note N_e le nombre d'états possibles pour les éléments transmis sur les porteuses pilotes, on a : $p(\mathbf{c}_i) = 1/(N_e^{M_i})$.
On peut réécrire la vraisemblance :

$$\Lambda(\delta) = \frac{1}{N_e^{M_i}} \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta(\mathbf{c}_p+\mathbf{c}_i)\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.39}$$

Afin de trouver la valeur de δ qui maximise la vraisemblance, il est nécessaire en réception de calculer une somme comportant ξ^{M_i} termes. Dans notre cas, l'alphabet de modulation ξ est composé d'éléments QPSK et $N_e = 4$. Le coût de calcul devient alors très élevé.

Compte tenu de cette observation, nous développons un encadrement de la fonction de vraisemblance.

Dans l'équation (2.39) la sommation d'exponentielles complexes est réalisée. Tous les termes de la sommes sont strictement positifs. La valeur de la somme sera nécessairement supérieure à celle d'un de ces éléments. En particulier, la somme sera supérieure au terme avec $\mathbf{c}_i = 0$.

$$\Lambda(\delta) \geq \frac{1}{N_e^{M_i}(\sqrt{2\pi\sigma^2})^Q} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.40}$$

Il nous faut maintenant développer un majorant de la fonction de vraisemblance. Pour cela on peut remarquer que :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta(\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_i)\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|^2 - 2\,\langle(\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p), \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\rangle + \|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\|^2 \tag{2.41}$$

Or

$$|\langle(\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p), \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\rangle| \leq \|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\|\,\|\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\| \tag{2.42}$$

Avec égalité si $(\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p)$ est proportionnelle à $\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $(\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p) = \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i$, alors :

$$\langle (\mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p), \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \rangle \leq \alpha \left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2 \tag{2.43}$$

Soit

$$e^{-\frac{\left\| \mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta (\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_i) \right\|^2}{2\sigma^2}} \leq e^{-\frac{\left\| \mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p \right\|^2}{2\sigma^2}} e^{-(1-2\alpha)\frac{\left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.44}$$

Par conséquent, on aura la majoration de la fonction de vraisemblance suivante :

$$\Lambda(\delta) \leq e^{-\frac{\left\| \mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p \right\|^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{N_e^{M_i}} \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} e^{-(1-2\alpha)\frac{\left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.45}$$

On pose

$$\mu(\delta) = \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} e^{-(1-2\alpha)\frac{\left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.46}$$

On peut développer une majoration de la fonction $\mu(\delta)$ en fonction de la valeur de α.

1. Si $(1 - 2\alpha) \leq 0$ alors on remarque tout d'abord en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2 \leq \frac{2M_i^2}{M} \tag{2.47}$$

$$-(1-2\alpha) \left\| \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i \right\|^2 \leq -(1-2\alpha)\frac{2M_i^2}{M} \tag{2.48}$$

Dans ce cas, on obtient un premier majorant de μ :

$$\mu(\delta) \leq \mu_1 = \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} \frac{e^{\frac{(2\alpha-1)(2M_i^2)}{2\sigma^2 M}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} \tag{2.49}$$

On en déduit une première majoration de la vraisemblance :

$$\Lambda(\delta) \leq \frac{\mu_1}{N_e^{M_i}} e^{-\frac{\left\| \mathbf{y} - \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p \right\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.50}$$

2. Si $(1-2\alpha) \geq 0$ alors on aura :

$$\|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\|^2 \geq 0 \tag{2.51}$$
$$-(1-2\alpha)\|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_i\|^2 \leq 0 \tag{2.52}$$

Soit le deuxième majorant possible de μ

$$\mu(\delta) \leq \mu_2 = \sum_{\mathbf{c}_i \in \xi^{M_i}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{Q}{2}}} \tag{2.53}$$

On en déduit une deuxième majoration de la vraisemblance :

$$\Lambda(\delta) \leq \frac{\mu_2}{N_e^{M_i}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|^2}{2\sigma^2}} \tag{2.54}$$

Au final, on a un encadrement de la vraisemblance.
Par conséquent en cherchant le paramètre δ qui maximise la fonction $e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|^2}{2\sigma^2}}$, nous allons pour majorer la vraisemblance ce qui nous donnera une estimée du paramètre Doppler d.

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} \left[e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|^2}{2\sigma^2}} \right] \tag{2.55}$$

Soit :

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} \left[\langle \mathbf{y}; \mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p \rangle - \frac{\|\mathbf{F}_\delta \mathbf{c}_p\|}{2} \right] \tag{2.56}$$

L'expression de cet estimateur rejoint celle du maximum de vraisemblance quand l'ensemble du signal est connu, c'est à dire quand le nombre de porteuses pilotes est égal au nombre de porteuses. Cet estimateur revient à assimiler les composantes information du signal reçu à du bruit indépendant du paramètre Doppler d.

2.3.3 Estimation par porteuses nulles

Dans la partie précédente, nous avons présenté un estimateur qui utilise l'information placée sur des porteuses pilotes. Cependant, l'énergie utilisée pour émettre sur ces porteuses pilotes est perdue pour la communication, il faut donc la limiter. Nous développons ici un estimateur basé sur des porteuses nulles, ce qui limite l'énergie perdue en émission pour l'estimation

du paramètre Doppler.

On considère le signal reçu en monotrajet, comme dans l'équation (2.34) : On rappelle l'expression de la matrice $\mathbf{F}_\delta$:

$$\mathbf{F}_\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi n F_0 q T_r \delta} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) \right)_{0 \leq q \leq Q-1 \;\; ; \;\; 0 \leq n \leq M-1} \tag{2.57}$$

En projetant le signal reçu sur cette famille de vecteurs, on obtient le vecteur $\mathbf{y}_f(\delta)$:

$$\mathbf{y}_f(\delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{y} \tag{2.58}$$

$$\mathbf{y}_f(\delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{F}_d \mathbf{c} + \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{b} \tag{2.59}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{y}_f(\delta) = \frac{1}{M} \left(\sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{2j\pi F_0 q T_r (dm - \delta n)} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) + b_f(\delta)[n] \right)_{0 \leq n \leq M-1} \tag{2.60}$$

et

$$\mathbf{b}_f(\delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{q=0}^{Q-1} b[q] e^{-2j\pi F_0 q T_r \delta n} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) \right)_{0 \leq n \leq M-1} \tag{2.61}$$

Chaque élément du vecteur $\mathbf{y}_f(\delta)$ correspond au produit scalaire du signal reçu sur la composante fréquentielle $n\delta F_0$.
On définit la matrice $\mathbf{G}(d, \delta)$ de taille $M \times M$ telle que :

$$\mathbf{G}(d, \delta) = \left(\frac{1}{M} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{2j\pi F_0 q T_r (dm - \delta n)} \right)_{0 \leq n, m \leq M-1} \tag{2.62}$$

$$\mathbf{G}(d, \delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{f}_d \tag{2.63}$$

L'expression (2.59) devient :

$$\mathbf{y}_f(\delta) = \mathbf{G}(d, \delta)\mathbf{c} + \mathbf{b}_f(\delta) \tag{2.64}$$

On peut remarquer que dans le cas particulier où $d = \delta$ et $F_0 T_r d Q \in \mathbf{Z}$, on a :

$$e^{2j\pi F_0 T_r \delta (m-n) Q} = 1 \tag{2.65}$$

Soit :

$$\mathbf{G}(\delta,\delta) = \frac{Q}{M}\mathbf{I}_M \tag{2.66}$$

avec $\mathbf{I}_M$ la matrice identité de taille $M \times M$.

Pour $\delta = d$, l'équation (2.63) montre que la matrice $\mathbf{G}(\delta,\delta)$ est définie positive si les colonnes de $\mathbf{F}_\delta$ forment une famille libre. Cette matrice est alors inversible. De par sa construction, la matrice $\mathbf{G}(\delta,\delta)$ est une matrice de Gram. L'équation (2.64) permet d'obtenir un estimateur du paramètre Doppler d tel que :

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{m \in V_p} \left| \left[\mathbf{G}^{-1}(\delta,\delta)\mathbf{y}_f(\delta) \right][m] \right|^2 \right) \tag{2.67}$$

En effet, en absence de bruit, on peut remarquer que :

$$\text{Si} \quad \delta = d, \text{alors} \quad \sum_{m \in V_p} \left| [\mathbf{G}^{-1}(\delta,\delta)\mathbf{y}_f(\delta)][m] \right|^2 = \sum_{m \in V_p} |c[m]|^2 = 0 \tag{2.68}$$

Cet estimateur consiste à projeter le signal reçu sur les fréquences supposées nulles. En cherchant quel facteur de dilatation/compression permet de retrouver les fréquences nulles, on obtient une estimée du paramètre Doppler.

Notons que les colonnes de $\mathbf{F}_\delta$ forment nécessairement une famille libre lorsque :

$$\delta(M-1)F_0 < \frac{1}{T_r} \tag{2.69}$$

Les colonnes de la matrice $\mathbf{F}_\delta$ sont composées des M différentes fréquences discrètes considérées. La matrice est libre si chaque fréquence n'apparait qu'une seule fois, ce que garantit la condition (2.69).

On peut alors remarquer que cette condition est la même que celle visant à éviter un repliement de spectre. Ce n'est pas une surprise. En fonction de la valeur de δ, la fonction $e^{2j\pi F_0 t\delta n}\Pi_{T_0}(\delta t)$ échantillonnée à la cadence T_r pourra soit se compresser, soit se dilater temporellement. Comme on l'a vu, une compression temporelle provoquera une dilatation fréquentielle et il est alors tout à fait possible d'avoir du repliement de spectre sur le signal discret. À cause du repliement, certaines fréquences de la famille $\left(e^{2j\pi F_0 qT_r\delta n}\right)_{0\leq q\leq Q-1}$ peuvent apparaître plusieurs fois. Il faut donc éviter le repliement sur les fréquences considérées. Comme évoqué précédemment, un suréchantillonnage d'un facteur 2 suffit à éviter tout repliement. En posant $F_0T_r = 1/2M$, la condition (2.69) devient :

$$\delta < \frac{2M}{M-1} \tag{2.70}$$

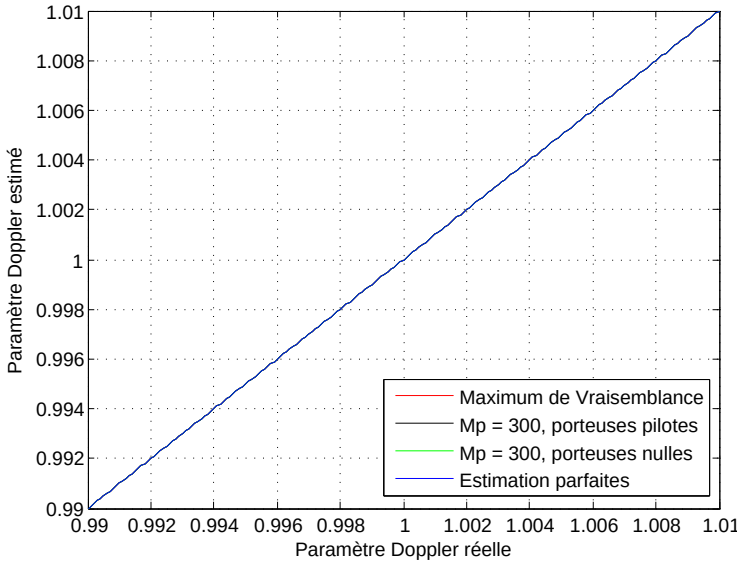


FIGURE 2.8 – Doppler estimé pour les différents estimateurs développés.

Compte tenu des valeurs pouvant être prises par le paramètre Doppler d, cette condition sur δ sera toujours remplie. On peut préciser qu'en pratique, dans l'équation (2.67), nous n'effectuons pas l'inversion de la matrice $\mathbf{G}(\delta, \delta)$ mais nous résolvons cette équation au sens des moindres carrés (méthode développée en parallèle par Legendre et Gauss au début du XIXème siècle).

2.3.4 Comparaison de performances

On désire comparer les performances des estimateurs basés sur des porteuses pilotes avec l'estimateur du maximum de vraisemblance développé précédemment. Les simulations portent sur un canal monotrajet traversé par un signal DMT doté de 2048 porteuses. La durée utile du symbole est choisie à $T_0 = 200$ ms comme précisé dans le chapitre 1. On cherche tout d'abord à s'assurer que les estimateurs développés fonctionnent bien pour toutes les valeurs du paramètre Doppler que l'on pourrait rencontrer. Ce sont les résultats présentés sur la figure 2.8 dans le cas d'un canal monotrajet sans bruit.

On cherche à mesurer la variance des estimateurs. Le paramètre Doppler est fixé pour ces simulations à $d = 1.0027$. On fait varier le nombre de porteuses pilotes de $M_p = 100$ à $M_p = 300$ et on compare à chaque fois le résultat à l'estimateur du maximum de vraisemblance qui correspond au cas où toutes les porteuses sont connues du récepteur pour l'estimateur par porteuses pilotes. Les porteuses sont réparties régulièrement dans le spectre

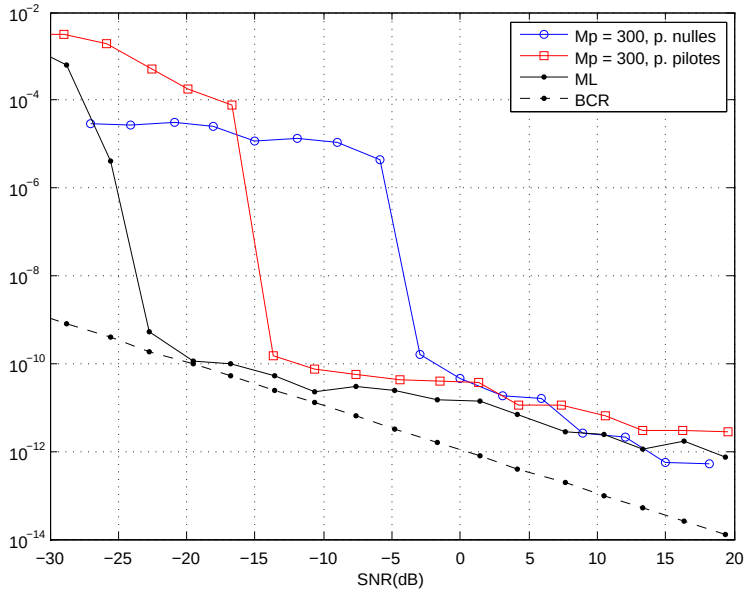


FIGURE 2.9 – Variance des estimateurs par porteuses pilotes et porteuses nulles avec $M_p = 300$ porteuses connues.

du signal émis. Les recherches du maximum ou du minimum des fonctions de coût (2.67) sont réalisées par la méthode du simplex de Nelder Mead. Les résultats sont présentés sur les figures 2.9 et 2.10. Sans surprise, la perte d'un nombre important de porteuses pilotes affecte les performances. On constate que l'estimateur par porteuses pilotes du signal DMT est plus efficace dans le cas d'un rapport signal sur bruit défavorable. Par contre, l'estimation par porteuses nulles devient plus efficace si le rapport signal sur bruit est favorable.

Les méthodes d'estimation du paramètre Doppler présentées dans ce chapitre se révèlent efficaces sur des signaux multi-porteuses. D'autres méthodes existent dans la littérature. Dans [Kibangou 2010a], la méthode présentée est limitée à des effets Doppler faibles qui provoquent des décalages fréquentiels inférieurs à l'intervalle interporteuse, ce qui n'est pas le cas de notre estimateur.
Dans [Li 2006], un autre estimateur s'appuyant sur des porteuses pilotes est utilisé. Cependant, le décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler (Doppler shift) est considéré constant sur toutes les fréquences. Cette approximation provoque des erreurs dans l'estimation du paramètre Doppler.
On peut remarquer qu'il est possible d'étendre la méthode d'estimation présentée ici à des modulations de type OFDM, ce qui a été fait dans l'article [Lyonnet 2011a].

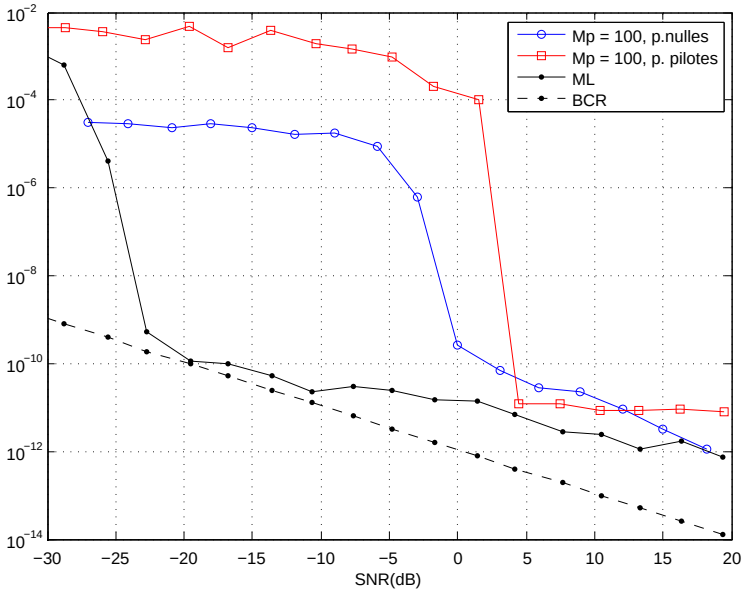


FIGURE 2.10 – Variance des estimateurs par porteuses pilotes et porteuses nulles avec $M_p = 100$ porteuses connues.

2.4 Conclusion sur l'estimation du paramètre Doppler

Comme vu dans le chapitre 1, l'efficacité de l'estimation du paramètre Doppler est fondamentale si l'on désire obtenir un débit correct en communication acoustique sous-marine avec des signaux de type DMT. Nous avons développé dans ce chapitre trois estimateurs basés sur une connaissance totale ou partielle du signal émis. L'estimateur du maximum de vraisemblance est celui qui offre de meilleurs résultats mais il est alors nécessaire de connaître l'intégralité du signal émis ce qui limite le débit utilisé.

Deux estimateurs utilisant seulement une partie du signal émis sont développés. On considère que le signal DMT transmis comporte des porteuses pilotes. Dans le premier estimateur, les porteuses pilotes portent des éléments d'information. La fonction de coût pour l'estimation est alors un minorant de la vraisemblance. Un second estimateur utilisant des porteuses nulles a été développé. Il se base sur une minimisation de l'ensemble de l'énergie sur les porteuses nulles en réception. Ce second estimateur présente l'avantage de consommer moins d'énergie pour l'estimation puisqu'aucun signal supplémentaire au signal d'information n'est émis.

Les performances des trois estimateurs développés se révèlent suffisantes.

En effet, avec plus de 300 porteuses pilotes parmi les 2048 du signal émis, il est possible avec tous les estimateurs d'obtenir une variance inférieure à 10^{-10} pour un rapport signal sur bruit supérieur à 0 dB. On peut donc garantir que l'on aura un écart-type de l'estimation Doppler inférieur à 10^{-4}, ce qui nous permet d'assurer une communication avec $T_0 = 200$ms comme précisé dans le chapitre 1.

Chapitre 3

Compensation de l'effet Doppler, cas monotrajet

« Vous pouvez tromper quelques personnes tout le temps. Vous pouvez tromper tout le monde un certain temps. Mais vous ne pouvez tromper tout le monde tout le temps. »
Abraham Lincoln

Sommaire

3.1 Changement d'échelle temporelle par rééchantillonnage 72
3.1.1 Shannon et son application . . . 72
3.1.2 Extension à l'interpolation . . . 73
3.1.3 Erreur d'approximation . . . 76
3.2 Filtre de mise en forme . . . 87
3.2.1 Filtrage idéal . . . 87
3.2.2 Base duale . . . 87
3.2.3 Réalisation sur signal discret . . . 89
3.3 Compensation par construction d'une matrice d'exponentielles complexes . . . 90
3.4 Comparaison des méthodes de compensation . . . 92
3.4.1 Méthode par interpolation . . . 92
3.4.2 Méthode par matrice d'exponentielles . . . 94
3.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal monotrajet . . . 96

3.1 Changement d'échelle temporelle par ré-échantillonnage

Comme précisé dans le chapitre 1, l'effet Doppler agit sur le signal transmis en provoquant un changement d'échelle qui, bien que léger, suffit à détruire l'orthogonalité entre les porteuses. Cette section se concentre sur la compensation Doppler par rééchantillonnage. On cherche à compenser l'effet de dilatation/compression du Doppler par un effet inverse. Cela revient à effectuer une interpolation. On rappelle tout d'abord ici les bases de l'interpolation.

3.1.1 Shannon et son application

En 1949, Shannon décrit comment reconstruire un signal à partir de ses échantillons et à quelle fréquence l'échantillonner. Ces travaux ont été repris par le monde du traitement du signal et de « l'Electrical Engineering ». Selon [Shannon 1949], un signal $f(t)$ de fréquence maximale $\nu_{\max}$, est complètement déterminé par une série d'échantillons régulièrement espacés de $T < 1/(2\nu_{\max})$. La formule de reconstruction est alors la suivante :

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\,\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{t-kT}{T}\right) \tag{3.1}$$

Avec $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$.
La reconstruction de $f(t)$ se réalise en sommant les coefficients $f(kT)$ multipliés par la fonction de base sinc décalée et remise à l'échelle de façon adéquate. Les fonctions $\{\mathrm{sinc}(\pi(t-kT)/T)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ reconstituent parfaitement le signal si ce dernier est à bande limitée.
En effet, si on considère une version échantillonnée à une cadence T du signal f, notée f_e :

$$f_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\delta(t-kT) \tag{3.2}$$

$$= f(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT) \tag{3.3}$$

Dans le domaine de Fourier, on aura :

$$\hat{f}_e(\nu) = \frac{1}{T}\hat{f}(\nu) \otimes \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - m/T) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu - m/T) \tag{3.4}$$

On retrouve bien ici le fait que l'échantillonnage provoque une périodisation de la transformée de Fourier de f. On cherche à reconstruire le signal $f(t)$ en convoluant le signal échantillonné $f_e(t)$ par un filtre $\phi_T T(t)$:

$$f_{\text{reconst}}(t) = (f_e \otimes \phi_T)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT)\phi_T(t-kT) \tag{3.5}$$

$$\hat{f}_{\text{reconst}}(\nu) = \frac{1}{T}\hat{\phi}_T(\nu)\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu - m/T) \tag{3.6}$$

Comme stipulé par le théorème de Shannon, si le signal est à bande limitée, une reconstruction parfaite est alors possible si $\hat{\phi}_T$ est absolument plat sur la bande du signal et nulle pour toutes ses répliques, soit :

$$\hat{\phi}_T(\nu) = \begin{cases} T & \text{si } |\nu| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Une façon de réaliser cela est d'utiliser un filtre passe-bas idéal, c'est-à-dire $\phi_T(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$.

3.1.2 Extension à l'interpolation

En pratique cependant, les signaux étudiés ne sont jamais exactement à bande limitée. La périodisation de la transformée de Fourier provoque alors un chevauchement (overlap) fréquentiel qui restera après avoir filtré le signal par ϕ_T. On appelle ce phénomène le repliement (aliasing). De plus, il n'est pas possible de réaliser un filtre passe-bas idéal comme nécessaire dans la théorie de Shannon. On utilise alors des fonctions sinc tronquées, ce qui augmente l'erreur d'approximation car il s'agit de fonctions à décroissance lente [Beutler 1976]. En pratique, pour éviter le repliement sur les signaux à bande non limitée, on applique un filtre avant échantillonnage (filtre anti-repliement). Ainsi, nous ne récupérons pas les échantillons $f(kT)$ mais les échantillons à la sortie du filtre. Le signal reconstitué n'est donc pas exactement f. Dans tous les cas, on aura une erreur d'approximation. L'objectif est de pouvoir maitriser cette erreur. C'est pourquoi on va envisager une autre approche plus large qui ne s'applique pas qu'aux signaux à bande limitée. La littérature est dense sur le sujet [Blu 1999], [Thevenaz 2000], [Unser 2000], [Unser 1991], [Unser 1993], [Hsiao 1987].

3.1.2.1 Contexte, notations et bases

On se place dans le cas plus général de l'espace de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ des signaux f d'énergie finie :

$$f \in L_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|f\|^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \right) < +\infty \tag{3.8}$$

Sur cet espace on définit le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) g(t) dt \tag{3.9}$$

Pour $T > 0$ et $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, on note :

- $\phi_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \phi(t/T) \in L_2(\mathbb{R})$, de transformée de Fourier $\hat{\phi}_T(\nu) = \sqrt{T} \hat{\phi}(\nu T)$
- $\phi_T^{(k)} = \phi_T(t - kT) = \frac{1}{\sqrt{T}} \phi((t - kT)/T)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, de transformée de Fourier $\hat{\phi}_T^{(k)}(\nu) = e^{-j2\pi\nu kT} \hat{\phi}_T(\nu) = \sqrt{T} e^{-j2\pi\nu kT} \hat{\phi}(\nu T)$;
- V_T l'espace des signaux f à bande limitée tels que $\hat{f}(\nu) = 0$ pour $|\nu| > 1/(2T)$.
- $V_T(\phi_T)$ l'espace généré par les signaux $\phi_T^{(k)}(t)$:

$$V_T(\phi_T) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_T(k) \phi_T(t - kT), c_T \in l_2(\mathbb{Z}) \right\} \tag{3.10}$$

avec $l_2(\mathbb{Z})$ l'espace des séries de carré sommable.

De plus, les signaux $\phi_T^{(k)}$ doivent être choisis de façon à former une base de Riesz de l'espace $V_T(\phi_T)$ pour assurer l'existence des éléments de $V_T(\phi_T)$. Rappelons qu'une base de Riesz est une famille libre pour laquelle il existe deux réels $0 < A < B < +\infty$ tels que :

$$\forall c_T \in l_2(\mathbb{Z}), A \|c_T\|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_T(k) \phi_T^{(k)} \right\|^2 \leq B \|c_T\|^2 \tag{3.11}$$

avec $\|c_T\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_T(k)|^2$. La base est orthonormale si et seulement si $A = B = 1$. On note de plus l'expression équivalente dans le domaine de Fourier [Unser 1993] :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, A \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}_T(\nu - m/T) \right|^2 \leq B \tag{3.12}$$

soit, de manière équivalente :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{A}{T} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi - m) \right|^2 \leq \frac{B}{T} \tag{3.13}$$

On peut remarquer que $V_T \subset L_2(\mathbb{R})$, $V_T(\phi_T) \subset L_2(\mathbb{R})$ et $V_T = V_T(\phi_T)$ pour $\phi(x) = \text{sinc}(\pi x)$ et $\phi_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(\pi t/T)$.

On va réaliser ici une approximation d'un signal f de $L_2(\mathbb{R})$ par un signal $Q_T f \in V_T(\phi_T)$ de façon à ce qu'il soit le plus proche possible de f. Les fonctions de base $\phi_T^{(k)}(t)$ sont linéairement indépendantes et chaque signal $Q_T f \in V_T(\phi_T)$ est défini de façon unique par ses coefficients $c_T(k)$. Ces derniers sont une représentation discrète du signal qui est utilisée pour reconstruire le signal original (mais il ne s'agit pas nécessairement des échantillons $f(kT)$).

3.1.2.2 L'échantillonnage vu comme un problème d'optimisation

Au final, on se retrouve donc avec un problème d'optimisation. On recherche les coefficients qui dans l'espace $V_T(\phi_T)$ donneront la fonction qui se rapprochera le plus de la fonction f initiale.

$$Q_T f = \underset{g \in V_T(\phi_T)}{\text{argmin}} \|f - g\| \tag{3.14}$$

On montre que la fonction reconstruite dans l'espace $V_T(\phi_T)$ peut s'écrire sous la forme :

$$Q_T f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \tilde{\phi}_T^{(k)}, f \right\rangle \phi_T^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_T(k) \phi_T^{(k)} \tag{3.15}$$

avec $\tilde{\phi}_T^{(k)}(t) = \tilde{\phi}_T(t - kT)$ la base de Riesz duale de $\phi_T^{(k)}$. On notera que $\langle \tilde{\phi}_T^{(k)}, \phi_T^{(l)} \rangle = \delta_{k-l}$. Ainsi, $\{\phi_T^{(k)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\phi_T^{(k)}}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une paire de bases biorthogonales.

Le problème d'approximation est ramené à un problème de recherche des composantes $c_T(k)$. Ces dernières sont générées à partir d'un filtre d'analyse $\tilde{\phi}_T$ qui peut être différent du filtre de synthèse (reconstruction) ϕ_T.

On peut par ailleurs remarquer la propriété d'invariance par translation d'un élément de $V_T(\phi_T)$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall f \in V_T(\phi_T), f^{(k)} \in V_T(\phi_T)$$

avec $f^{(k)}(t) = f(t - kT)$.

Dans le cas particulier des signaux à bande limitée, on peut choisir par exemple $\phi_T^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)$ et alors $c_T(k) = \sqrt{T} f(kT)$. Dans ce cas précis, on a affaire à une base de Hilbert (donc orthonormale) :

$$\langle \phi_T^{(k)}, \phi_T^{(k')} \rangle = \delta_{k-k'} \tag{3.16}$$

avec $\phi_T^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)$.

3.1.3 Erreur d'approximation

Dans ce contexte d'interpolation, on désire que l'erreur d'approximation tende vers 0 si le pas d'échantillonnage tend lui aussi vers 0. On désire également que pour n'importe quelle erreur d'approximation donnée, on puisse obtenir un pas d'échantillonnage qui nous assure une erreur plus faible. L'erreur d'approximation pour une fonction f considérant une période d'échantillonnage T est :

$$\epsilon(f, \phi_T, T) = \|f - Q_T f\| \tag{3.17}$$

En particulier, on cherche à avoir $\lim_{T \to 0} \epsilon(f, \phi_T, T) = 0$.
Pour simplifier les calculs à venir, on supposera également que les fonctions ϕ_T et $\tilde{\phi}_T$ sont réelles et symétriques. Ainsi, on a :

$$\left\langle \phi_T^{(k)}, \tilde{\phi}_T^{(q)} \right\rangle = \left(\phi_T \otimes \tilde{\phi}_T\right)((q-k)T) \tag{3.18}$$

3.1.3.1 Calcul de l'erreur

Le système présenté jusqu'à présent a le gros avantage de ne pas nécessiter que le signal soit à bande limitée et est applicable pour n'importe quel signal $f(t)$. Bien entendu, une parfaite reconstruction est impossible pour les signaux qui n'appartiennent pas à $V_T(\phi_T)$.
Il est crucial d'avoir une bonne idée de l'erreur d'approximation. Si, dans le cas idéal où l'on dispose de filtres passe-bas idéaux, l'erreur est constituée de la part du signal hors de la bande considérée, le calcul de l'erreur devient plus complexe dans le cas d'une approximation par des fonctions ϕ_T quelconques. Dans [Blu 1999] et [Unser 2000], une méthode fréquentielle est développée pour calculer cette erreur d'approximation. Le paramètre clef est la période d'échantillonnage T.

L'erreur s'exprime ainsi :

$$\epsilon(f, \phi_T, T) = \|f - Q_T f\| \tag{3.19}$$

$$\epsilon(f, \phi_T, T)^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, Q_T f\rangle + \|Q_T f\|^2 \tag{3.20}$$

Pour obtenir un résultat exploitable, nous allons maintenant considérer non pas l'erreur commise lors de l'échantillonnage du signal f, mais l'erreur moyenne pour toutes les versions de f retardées d'une durée plus petite que T :

$$\bar{\epsilon}(f, \phi_T, T)^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \epsilon(f_\tau, \phi, T)^2 d\tau \tag{3.21}$$

avec $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. On montre alors (cf. [Blu 1999] et annexe C) que :

$$\bar{\epsilon}(f, \phi_T, T)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 E_{\phi_T}(\nu) d\nu \tag{3.22}$$

avec

$$E_{\phi_T}(\nu) = \left(1 - \frac{1}{T}\hat{\bar{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)\right)^2 + \frac{1}{T^2}\hat{\bar{\phi}}_T(\nu)^2 \sum_{m\neq 0} \hat{\phi}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^2 \tag{3.23}$$

$$= E_\phi(\nu T) \tag{3.24}$$

avec

$$E_\phi(\xi) = \left(1 - \hat{\bar{\phi}}(\xi)\hat{\phi}(\xi)\right)^2 + \hat{\bar{\phi}}(\xi)^2 \sum_{m\neq 0} \hat{\phi}(\xi - m)^2 \tag{3.25}$$

3.1.3.2 Condition de partition de l'unité

Considérant l'expression de l'erreur calculée dans la partie précédente, on doit avoir :

$$\lim_{T\to 0} \bar{\epsilon}(f, \phi_T, T)^2 = \lim_{T\to 0} \int \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 E_\phi(\nu T) d\nu = 0 \tag{3.26}$$

$$= \int \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 \lim_{T\to 0} E_\phi(\nu T) d\nu \tag{3.27}$$

$$= \|f\|^2 E_\phi(0) \tag{3.28}$$

si $E_\phi(\xi)$ continue en $\xi = 0$. L'hypothèse (3.27) est ainsi équivalente à la condition $E_\phi(0) = 0$, pour $E_\phi(\xi)$ continue en 0. Calculons maintenant ce terme :

$$E_\phi(0) = \left(1 - \hat{\tilde{\phi}}(0)\hat{\phi}(0)\right)^2 + \sum_{m\neq 0}\left(\hat{\tilde{\phi}}(0)\hat{\phi}(m)\right)^2 = 0 \tag{3.29}$$

Comme il s'agit de termes positifs, cette égalité est vérifiée si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. Si on choisit ϕ telle que $\hat{\phi}(0) = 1$, cette condition est équivalente à :

$$\hat{\tilde{\phi}}(0) = 1 \text{ et } \hat{\phi}(m) = \delta_m$$

En utilisant la formule de Poisson, on obtient finalement :

$$\hat{\tilde{\phi}}(0) = 1 \text{ et} \tag{3.30}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x-k) = 1 \tag{3.31}$$

Cette dernière condition est appelée la condition de partition de l'unité. Elle est vérifiée notamment par les fonctions sinc.

3.1.3.3 Fonctions de base classiques

Fonctions B-splines Si la fonction sinc est bien localisée dans le domaine des fréquences, ce n'est pas le cas dans le domaine temporel. Partant de ce constat, les fonctions B-splines ont été mises au point. La fonction la plus simple qui satisfait la condition (3.31) est la fonction porte centrée en 0, qui est aussi la fonction B-spline d'ordre 0.

$$\phi(x) = \beta^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.32}$$

Les fonctions de la base β_k^0 sont obtenues après remise à l'échelle et en décalant cette fonction d'une durée multiple de T. Les fonctions de base $\beta_k^0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\beta^0((t-kT)/T)$ sont orthogonales. Ce ne sera pas le cas pour les fonctions splines d'ordre supérieur.
En convoluant cette fonction par elle-même, on obtient la fonction B-spline d'ordre 1 et ainsi de suite pour les ordres suivants.

$$\forall n \geq 1, \beta^n(x) = \left(\beta^0 \otimes \beta^{n-1}\right)(x) \tag{3.33}$$

On en déduit par ailleurs que

$$\forall n \geq 0, \hat{\beta}^n(\xi) = \left(\hat{\beta}^0(\xi)\right)^{n+1} \tag{3.34}$$

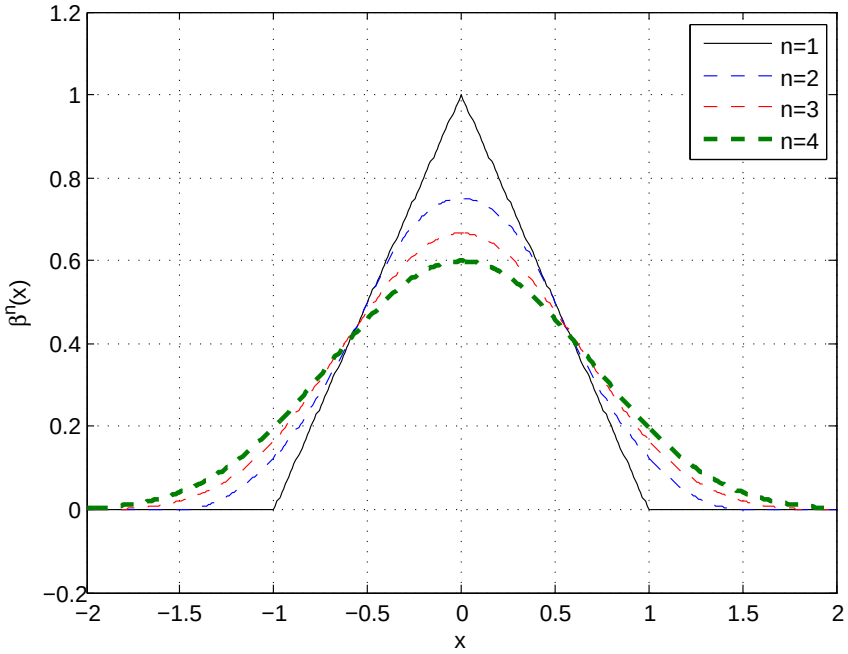


FIGURE 3.1 – Fonctions B-splines centrées d'ordre n.

Il s'agit de fonctions polynomiales de degré n dont les expressions sont données dans [Schoenberg 1946], [Thevenaz 2000].

$$\beta^n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)}{(n+1-k)!k!} \left(\frac{n+1}{2} + x - k \right)_+^n \tag{3.35}$$

avec $(x)_+ = x$ quand $x \geq 0$ et $(x)_+ = 0$ sinon.

Ces fonctions sont dérivables jusqu'à l'ordre $n-1$. Elles sont symétriques et bien localisées mais, mis à part pour $n = 0$, elles ne sont pas orthogonales. Cependant, elles forment une base de Riesz et vérifient la condition de partition de l'unité. On peut vérifier cette propriété dans le domaine de Fourier, en utilisant la formule de Poisson donnée en annexe C.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta^n(x-k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}^n(m) e^{2\pi j m x} \tag{3.36}$$

Or

$$\hat{\beta}^n(m) = \left(\hat{\beta}^0(m) \right)^n = \delta_m \tag{3.37}$$

d'où

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta^n(x-k) = 1 \tag{3.38}$$

Leur support temporel plus court que celui des fonctions sinc permet des temps de calcul plus courts, [Thevenaz 2000]. On peut également noter que la fonction β^1 correspond à l'approximation linéaire, très utilisée en pratique en traitement d'image. Les fonctions B-splines pour les ordres 1 à 4 sont représentées sur la figure 3.1

Fonctions en cosinus surélevé Une autre alternative aux fonctions sinc est la fonction cosinus surélevé notée cs_α. α est le coefficient de retombée (ou « roll-off factor » en anglais). Son expression temporelle est donnée par :

$$\phi(x) = \mathrm{cs}_\alpha(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{\cos(\pi x)}{1-4\alpha^2x^2} = \mathrm{sinc}(\pi x)\frac{\cos(\pi x)}{1-4\alpha^2x^2} \tag{3.39}$$

et l'expression fréquentielle correspondante vaut alors :

$$\mathrm{CS}_\alpha(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{1}{2}\left[1+\sin(\frac{\pi}{\alpha}(\frac{1}{2}-|\xi|))\right] & \text{si} \quad \frac{1-\alpha}{2} \leq |\xi| \leq \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.40}$$

Les cosinus surélevés sont représentés en temps et en fréquence sur les figures 3.2 et 3.3.

Le support fréquentiel de $\mathrm{cs}_\alpha(t/T)$ est ainsi $[-(1+\alpha)/(2T), (1+\alpha)/(2T)]$. On peut remarquer que dans le cas particulier où $\alpha = 0$, on a $\mathrm{cs}_\alpha(x) = \mathrm{sinc}(\pi x)$. Les filtres en cosinus surélevé présentent les mêmes avantages que les filtres sinus cardinal en assurant une valeur constante dans la bande du signal. Il s'agit, comme pour sinc d'un signal à support fréquentiel fini mais dont les transitions sont moins brutales ce qui favorise une décroissance temporelle plus rapide en fonction de la valeur du coefficient de retombée. De plus, l'expression (3.42) vérifie clairement (3.13) et les fonctions en cosinus surélevé $\mathrm{cs}_\alpha((t-kT)/T)$ forment donc une base de Riesz de l'espace qu'elles génèrent. En revanche, elles ne forment pas un système orthonormal contrairement aux fonctions en racine de cosinus surélévé, dont la transformée de Fourier est égale à la racine carrée de celle des cosinus surélevés.

Fonctions en racine de cosinus surélevé Pour obtenir des bases hilbertiennes, on utilise donc une fonction racine de cosinus surélevé notée rcs_α. α

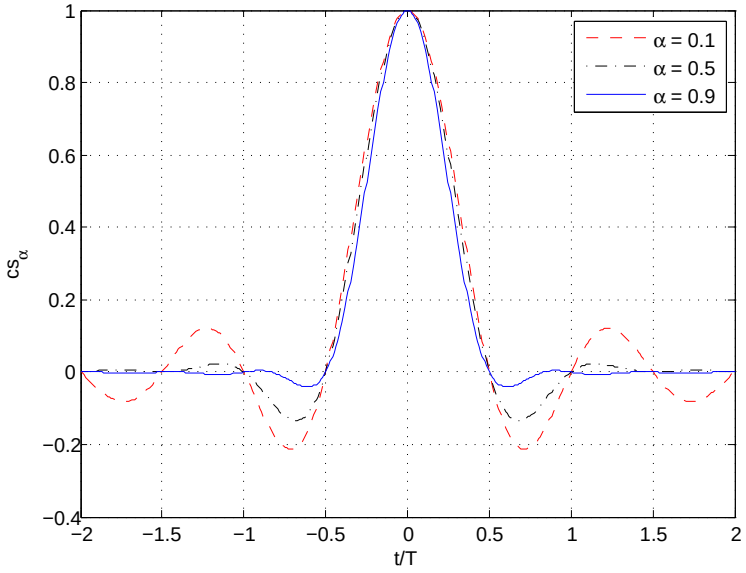


FIGURE 3.2 – Réponses temporelles de filtres en cosinus surélevé pour différents facteurs de retombée.

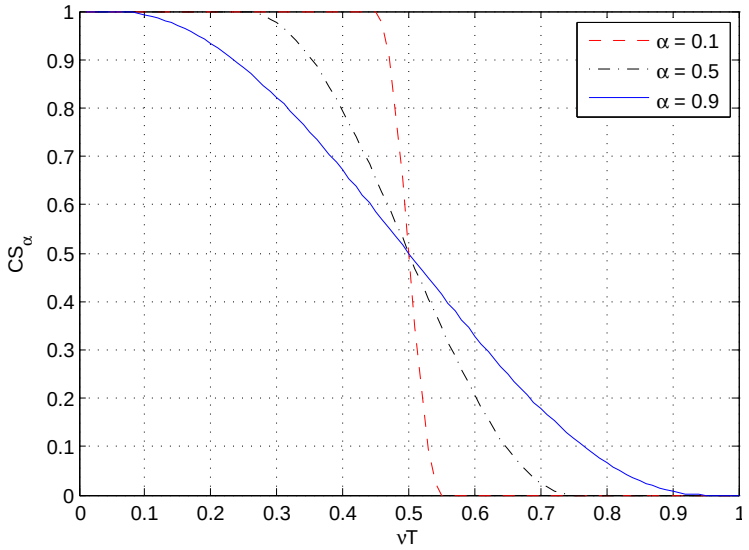


FIGURE 3.3 – Réponses fréquentielles de filtres en cosinus surélevé pour différents facteurs de retombée.

est le coefficient de retombée (ou « roll-off factor » en anglais). Son expression temporelle est donnée par :

$$\phi(x) = \mathrm{rcs}_\alpha(x) = \frac{\frac{4\alpha}{\pi}\cos\left(\pi(1+\alpha)x\right) + (1-\alpha)\mathrm{sinc}((1-\alpha)x)}{1-(4\alpha x)^2} \tag{3.41}$$

et l'expression fréquentielle correspondante vaut alors :

$$\mathrm{RCS}_\alpha(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{1-\alpha}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\sin(\frac{\pi}{\alpha}(\frac{1}{2}-|\xi|))\right]} & \text{si} \quad \frac{1-\alpha}{2} \leq |\xi| \leq \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.42}$$

Les racines de cosinus surélevé sont représentés en temps et en fréquence sur les figures 3.4 et 3.5.

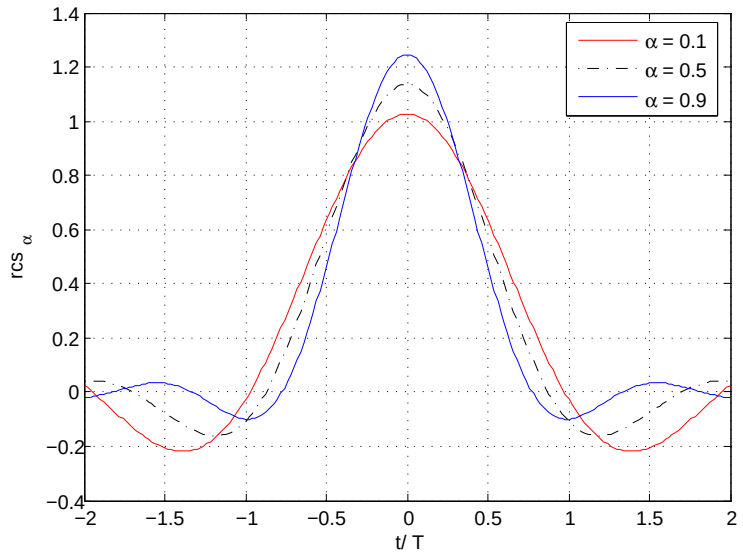


FIGURE 3.4 – Réponses temporelles de filtres en racine de cosinus surélevé pour différents facteurs de retombée.

Le support fréquentiel de $\mathrm{rcs}_\alpha(t/T)$ est ainsi $[-(1+\alpha)/(2T), (1+\alpha)/(2T)]$.

Ces fonctions sont très utilisées en pratique comme filtres de mise en forme en communication numérique du fait de leur décroissance plus rapide en temps qui les rend plus aisées à réaliser que les filtres sinc.

3.1.3.4 Noyaux d'erreur

On reprend l'équation de l'erreur moyenne exprimée précédemment.

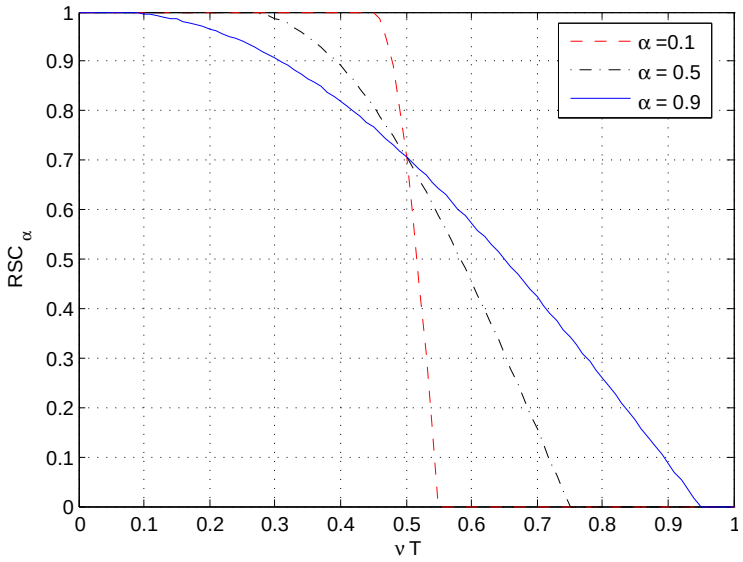


FIGURE 3.5 – Réponses fréquentielles de filtres en racine de cosinus surélevé pour différents facteurs de retombée.

$$\bar{\epsilon}(f,\phi_T,T)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 E_\phi(\nu T)d\nu \tag{3.43}$$

On peut déduire de cette expression qu'il suffit d'étudier le comportement du noyau d'erreur E_ϕ pour un couple de fonctions d'interpolation donné (ϕ_T et $\tilde{\phi}_T$) pour en déduire l'erreur. On choisit ici de spécifier $\left\{\tilde{\phi}_T^{(k)}\right\}$ comme étant la base duale de la base formée par les $\left\{\phi_T^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\phi_T\left(\frac{t-kT}{T}\right)\right\}$. La base duale est déterminée de façon unique par les équations :

$$\left\langle \tilde{\phi}_T^{(k)}, \phi_T^{(l)} \right\rangle = \delta_{k-l} \tag{3.44}$$

Il s'agit de l'hypothèse de biorthogonalité. Après quelques calculs développés en annexe D et en posant :

$$a_\phi(k) = \langle \phi(n-k), \phi(n) \rangle = \left\langle \phi_T^{(k)}, \phi_T \right\rangle \tag{3.45}$$

et

$$A_\phi(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_\phi(k) e^{-j2\pi\xi k} \tag{3.46}$$

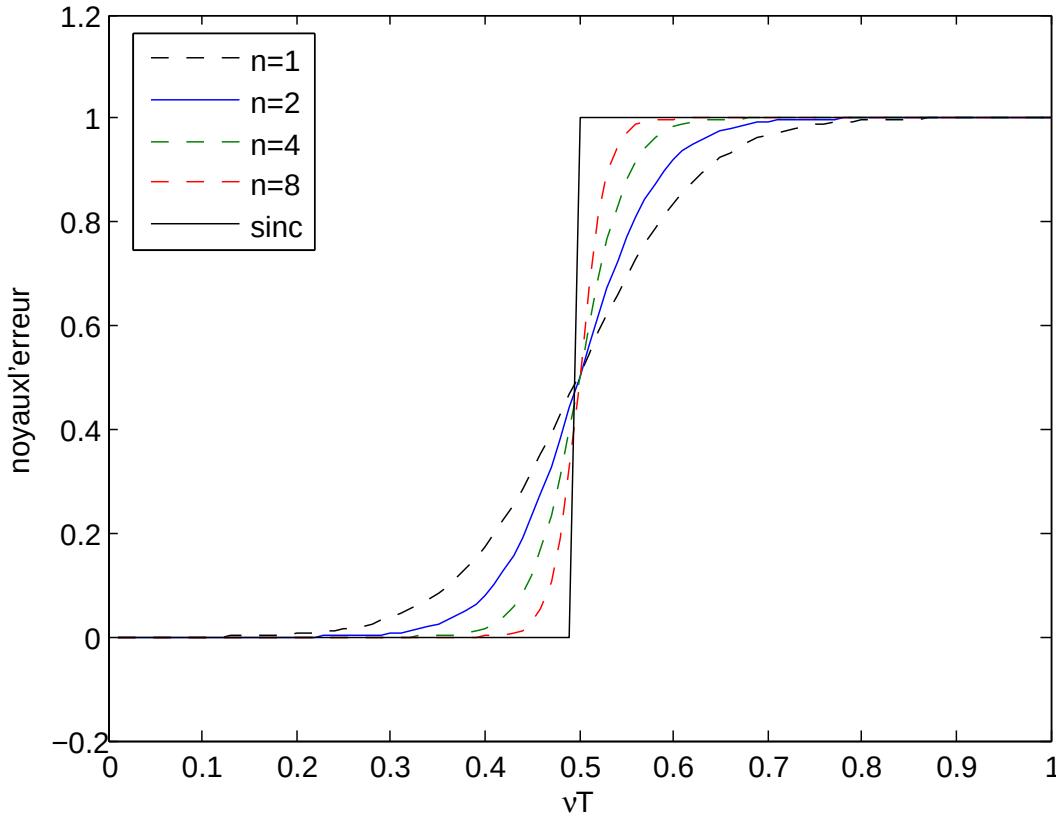


FIGURE 3.6 – Noyau de l'erreur avec condition de biorthogonalité pour les fonctions B-splines de degré n=1, 2, 4, 8. Cas parfait avec les conditions de Shannon dans le cas d'un filtre passe-bas idéal.

on obtient finalement

$$E_\phi(\xi) = 1 - \frac{\hat{\phi}(\xi)^2}{A_\phi(\xi)} \tag{3.47}$$

Il est dès lors possible de calculer le noyau de l'erreur pour les fonctions B-splines à différents ordres ainsi que pour les filtres en cosinus surélevés et racines de cosinus surélevés. C'est ce qui est fait pour les figures 3.6, 3.7 et 3.8. Par exemple, dans le cas particulier de Shannon pour un filtre passe-bas idéal, $\phi(x) = \mathrm{sinc}(\pi x)$, nous avons comme noyau $E_{\mathrm{sinc}}(\xi) = 1 - \Pi(\xi)$.

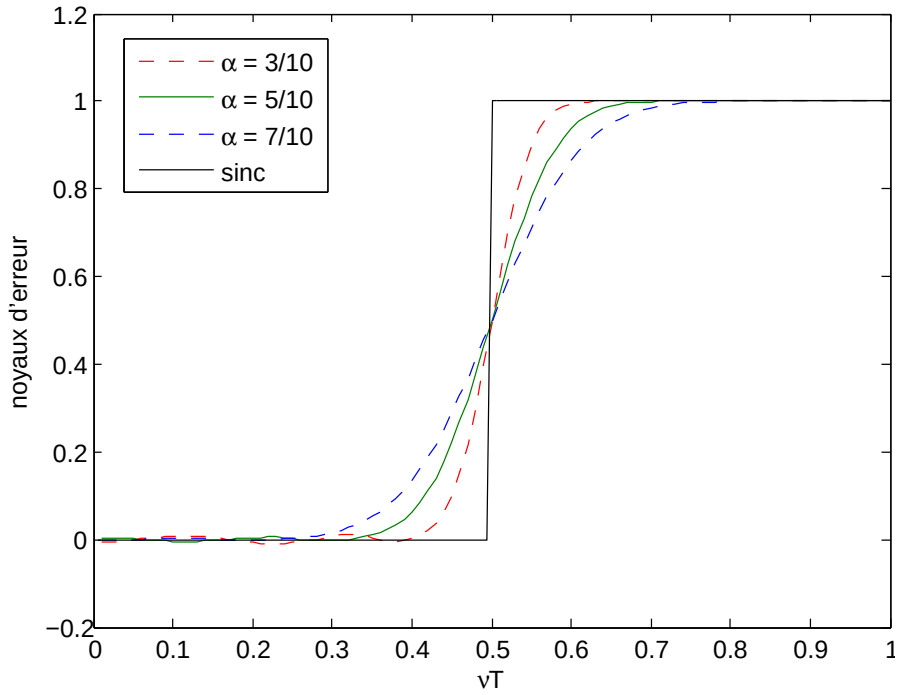


FIGURE 3.7 – Noyau de l'erreur pour les fonctions cs_α. Cas parfait avec les conditions de Shannon dans le cas d'un filtre passe-bas idéal.

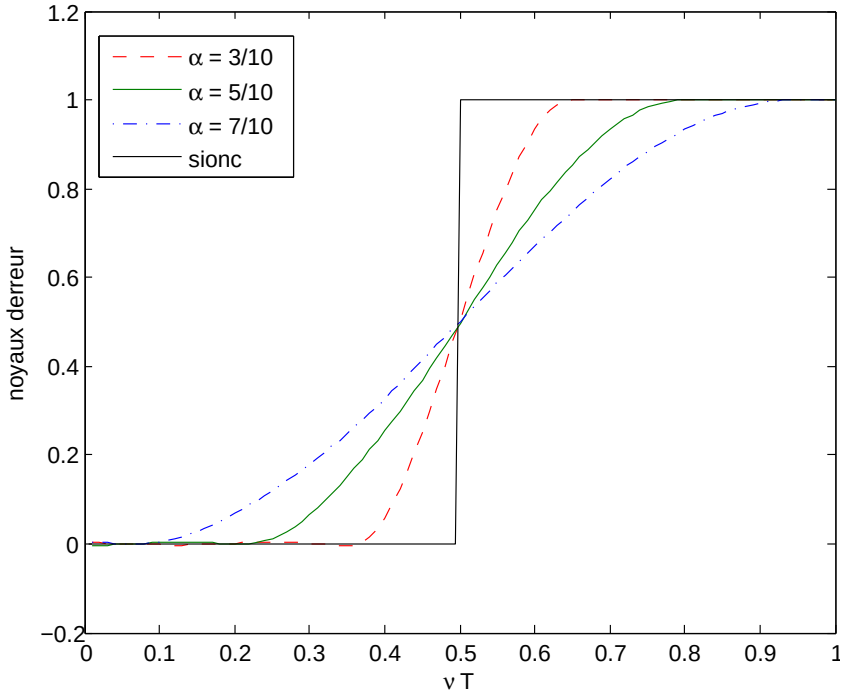


FIGURE 3.8 – Noyau de l'erreur pour les fonctions rcs_α. Cas parfait avec les conditions de Shannon dans le cas d'un filtre passe-bas idéal.

3.2 Filtre de mise en forme

Nous allons maintenant faire le lien entre ce qui a été développé jusqu'à présent dans ce chapitre sur l'interpolation et notre problématique de la compensation de l'effet Doppler en milieu sous-marin.

3.2.1 Filtrage idéal

On considère l'équation (1.61), développée dans le chapitre 1, donnant l'expression du signal reçu dans le cas d'un canal monotrajet sans bruit ($I = 1$). Le signal est supposé synchronisé temporellement sur l'arrivée du trajet ($\tau_1 = 0$ et $a_1 = 1$) et sans bruit :

$$r(t) = \left(s_e^d \otimes g_e^d\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] g_e^d(t - kT_d) \tag{3.48}$$

avec $s_e^d(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]\delta(t - kT_d)$ et $T_d = \frac{T_e}{d}$. Ainsi, $r \in V_{T_d}(g_e^d)$.

En réception, on applique un filtre g_r suivi d'un échantillonnage à la période T_r pour retrouver les échantillons $s[k]$ (cf. équation (1.66)) :

$$y[q] = (r \otimes g_r)(kT_r) = \langle r, g_r^{(k)} \rangle \tag{3.49}$$

avec $g_r^{(k)}(t) = g_r(t - kT_r)$. On en déduit que $y[q] = s[q]$, si $T_r = T_d = \frac{T_e}{d}$ et si $g_r = \tilde{g}_e^d$. On compense alors le Doppler en adaptant le filtre de réception et la cadence d'acquisition à l'échelle du signal reçu. Cette compensation apparait comme idéale, mais elle est irréalisable en réalité. En effet, cela reviendrait à devoir adapter en temps réel la cadence d'échantillonnage en réception ainsi que le filtre de mise en forme. Nous devons donc envisager une autre méthode.

3.2.2 Base duale

Nous envisageons un rééchantillonnage du signal reçu par la base duale aux filtres émetteur/récepteur. Notre méthode repose sur une connaissance parfaite du paramètre Doppler d ainsi que des filtres d'émission et de réception, g_e^d et g_r, supposés réels, symétriques, et de supports fréquentiels inclus dans $[-1/(2T_r), 1/(2T_r)]$. Remarquons tout d'abord que dans ces conditions, les filtres duaux $\tilde{g}_e^d$ et $\tilde{g}_r$ sont aussi réels, symétriques et de même support fréquentiel (cf. annexe D). Soulignons enfin que $\tilde{g}_e^d$ est dual à g_e^d dans $V_{T_d}(g_e^d)$ alors que $\tilde{g}_r$ est dual à g_r dans $V_{T_r}(g_r)$: les périodes d'échantillonnages associées, $T_d = T_e/d$ en émission et T_r en réception sont ainsi différentes pour

ces deux filtres. Ainsi les bases formées $\{g_e^{d(k)}\}$, $\{\tilde{g}_e^{d(k)}\}$, $\{g_r^{(k)}\}$, $\{\tilde{g}_r^{(k)}\}$, sont définies par :

$$g_e^{d(k)} = g_e^d(t - kT_d) \qquad \tilde{g}_e^{d(k)} = \tilde{g}_e^d(t - kT_d) \tag{3.50}$$

$$g_r^{(k)} = g_r(t - kT_r) \qquad \tilde{g}_r^{(k)} = \tilde{g}_r(t - kT_r) \tag{3.51}$$

et elles vérifient :

$$\langle g_e^{d(k)}, \tilde{g}_e^{d(k')} \rangle = (g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d((k-k')T_d) = \delta_{k-k'} \tag{3.52}$$

$$\langle g_r^{(k)}, \tilde{g}_r^{(k')} \rangle = (g_r \otimes \tilde{g}_r((k-k')T_r) = \delta_{k-k'} \tag{3.53}$$

D'après (1.63), après filtrage par le filtre de réception g_r, le signal reçu s'écrit :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^d \otimes g_r)(t - kT_d) \tag{3.54}$$

Posons alors $\phi_{T_d} = g_e^d \otimes g_r$. Ainsi, ϕ_{T_d} est réel et symétrique et de support fréquentiel inclus dans les supports de g_e^d et et de g_r (donc inclus dans le plus étroit des deux) car $\hat{\phi}_{T_d}(\nu) = \hat{g}_e^d(\nu)\hat{g}_r(\nu)$, et il en est de même de son dual $\tilde{\phi}_{T_d}$.

On obtient alors que $y \in V_{T_d}(\phi_{T_d})$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]\phi_{T_d}(t - kT_d) \tag{3.55}$$

Pour déterminer les valeurs de $s[k]$ nous sommes donc amenés à trouver $\{\tilde{\phi}_{T_d}^{(k)}\}$ la base duale à la base $\{\phi_{T_d}^{(k)}\}$, telle que :

$$\left\langle \phi_{T_d}^{(k)}, \tilde{\phi}_{T_d}^{(k')} \right\rangle = (\phi_{T_d} \otimes \tilde{\phi}_{T_d})((k-k')T_d) = \delta_{k-k'} \tag{3.56}$$

et

$$s[k] = \left\langle \tilde{\phi}_{T_d}^{(k)}, y \right\rangle = (y \otimes \tilde{\phi}_{T_d})(kT_d) \tag{3.57}$$

Nous allons maintenant démontrer que la base duale $\tilde{\phi}_{T_d}$ est proportionnelle au produit de convolution $\check{\phi}_{T_d} = \tilde{g}_r \otimes \tilde{g}_e^d$. Pour ce faire, calculons $\langle \phi_{T_d}^{(k)}, \check{\phi}_{T_d}^{(k')} \rangle$:

$$\langle \phi_{T_d}^{(k)}, \check{\phi}_{T_d}^{(k')} \rangle = (\phi_{T_d} \otimes \check{\phi}_{T_d})((k-k')T_d) \tag{3.58}$$

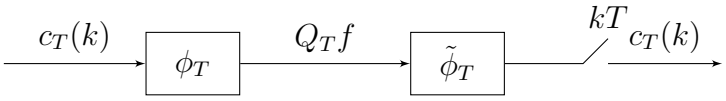
$$= \left(g_e^d \otimes g_r \otimes \tilde{g}_r \otimes \tilde{g}_e^d\right)((k-k')T_d) \tag{3.59}$$

$$= \left((g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d) \otimes (g_r \otimes \tilde{g}_r)\right)((k-k')T_d) \tag{3.60}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d)((k-k')T_d - t)(g_r \otimes \tilde{g}_r)(t)dt \tag{3.61}$$

$$= T_r \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d)((k-k')T_d - qT_r)(g_r \otimes \tilde{g}_r)(qT_r) \tag{3.62}$$

Rééchantillonnage théorique



Filtrage idéal

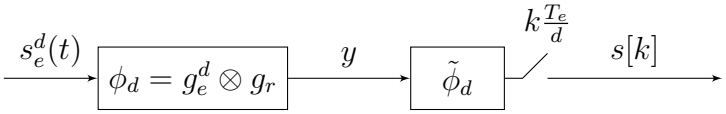


FIGURE 3.9 – Interpolation par base duale.

d'après (E.4) car les supports fréquentiels de $g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d$ et $g_r \otimes \tilde{g}_r$ sont inclus dans $[-1/(2T_r), 1/(2T_r)]$. On en déduit alors que

$$\langle \phi_{T_d}^{(k)}, \check{\phi}_{T_d}^{(k')} \rangle = T_r \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d)((k-k')T_d - qT_r)\delta_q \tag{3.63}$$

$$= T_r (g_e^d \otimes \tilde{g}_e^d)((k-k')T_d) \tag{3.64}$$

$$= T_r \delta_{k-k'} \tag{3.65}$$

Et finalement, on en déduit donc par unicité du dual que $\tilde{\phi}_{T_d} = \frac{1}{T_r}\check{\phi}_{T_d}$, soit :

$$\tilde{\phi}_{T_d} = \frac{1}{T_r}\tilde{g}_r \otimes \tilde{g}_e^d \tag{3.66}$$

Le schéma de réalisation théorique du rééchantillonnage est illustré par la figure 3.9.

3.2.3 Réalisation sur signal discret

En pratique l'opération présentée dans l'équation (3.57) va devoir être réalisée à partir d'échantillons $y[q] = y(qT_r)$ obtenus après échantillonnage à la période de réception T_r :

$$y[q] = y(qT_r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^d \otimes g_r)(qT_r - kT_d)$$

D'après l'équation (3.57), on a $s[k] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\tilde{\phi}_{T_d}(kT_d - t)dt$, avec $\tilde{\phi}_{T_d} = \frac{1}{T_r}\tilde{g}_r \otimes \tilde{g}_e^d$ et $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]\phi_{T_d}(t - kT_d)$ à supports fréquentiels inclus dans $[-1/(2T_r), 1/(2T_r)$. On en déduit donc que :

$$s[k] = T_r \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y(qT_r)\tilde{\phi}_{T_d}(kT_d - qT_r) \tag{3.67}$$

$$= T_r \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y[q]\tilde{\phi}_{T_d}(kT_d - qT_r) \tag{3.68}$$

Il est ainsi possible par ce biais de calculer les échantillons $s[k]$ à partir des échantillons $y[q]$ du signal reçu échantillonné à la période $T_r < T_d = T_e/d$. Cette méthode de compensation suppose néanmoins que l'on peut construire les filtres $\tilde{g}_e^d$ et $\tilde{g}_r$ et ce pour toutes les valeurs du paramètre Doppler d possibles.

L'idée d'utiliser le rééchantillonnage pour compenser l'effet Doppler a été développée par Shariff dans [Sharif 2000a]. Mais l'influence des filtres d'émission et de réception a été ignorée. L'erreur de reconstruction en utilisant l'interpolation dépend de cette base d'interpolation comme précisé précédemment et dans les publications suivantes : [Unser 2000], [Unser 1993], [Blu 1999].

3.3 Compensation par construction d'une matrice d'exponentielles complexes

Toujours dans l'optique d'un canal monotrajet avec effet Doppler, on développe une autre méthode de compensation de Doppler large bande. On s'appuie directement sur la construction du signal DMT avec plusieurs porteuses.

Tout d'abord, on rappelle l'expression du signal reçu pour un canal monotrajet avec bruit additif gaussien dans la bande du signal après filtrage en réception par g_r et après échantillonnage, (3.69).

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_d\mathbf{c} + \mathbf{b} \tag{3.69}$$

On rappelle l'expression de la matrice $\mathbf{F}_\delta$ pour δ réel.

$$\mathbf{F}_\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi m F_0 q T_r \delta} \Pi_{T_0}(\delta q T_r)\right)_{0 \le q \le Q-1 \;;\; 0 \le m \le M-1} \tag{3.70}$$

Le nombre de colonnes de la matrice $\mathbf{F}_\delta$ est égal au nombre de porteuses du signal DMT. Comme montré pour l'estimation par des porteuses pilotes dans le chapitre 2, on retrouve l'équation (2.64) :

$$\mathbf{y}_f(\delta) = \mathbf{G}(d,\delta)\mathbf{c} + \mathbf{b}_f(\delta) \tag{3.71}$$

avec, comme précédemment, la matrice $\mathbf{G}(d,\delta)$ de taille $M \times M$ telle que :

$$\mathbf{G}(d,\delta) = \left(\frac{1}{M} \sum_{q=0}^{Q-1} e^{2j\pi F_0 q T_r (dm - \delta n)} \right)_{0 \leq m,n \leq M-1} \tag{3.72}$$

$$\mathbf{G}(d,\delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{F}_\delta \tag{3.73}$$

et $\mathbf{b}_f(\delta) = \mathbf{F}_\delta^H \mathbf{b}$.
On rappelle que pour peu que les M colonnes des matrices $\mathbf{F}_\delta$ et $\mathbf{y}_f(d)$ forment une famille libre, la matrice $\mathbf{G}(d,\delta)$ est une matrice de Gram définie positive, donc inversible.

Le formalisme présenté ici est strictement le même que dans la section 2.3.3. La différence majeure est que nous développons cette méthode dans le but d'estimer les éléments d'information $\mathbf{c}$ et non plus le paramètre Doppler dont on suppose avoir une estimation $\hat{d}$.

$$\mathbf{c} \approx \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{G}(\hat{d},\hat{d})^{-1} \mathbf{F}_{\hat{d}}^H \mathbf{y} \tag{3.74}$$

L'estimation de $\mathbf{c}_h$ par l'équation (3.74) correspond à la méthode d'estimation des moindres carrés classique de sorte que la variable estimée $\hat{\mathbf{c}}$ suit une loi normale de moyenne $\mathbf{c}$ et de matrice d'autocorrélation $\mathbf{F}_{\hat{d}}^H \mathbf{f}_{\hat{d}} \sigma^2$:

$$\hat{\mathbf{c}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{c}, \mathbf{F}_{\hat{d}}^H \mathbf{F}_{\hat{d}} \sigma^2) \tag{3.75}$$

avec σ^2 la variance du bruit échantillonné à la période T_r, avec (1.84).

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{b}\mathbf{b}^H\right] = \sigma^2 \mathbf{I}_Q \tag{3.76}$$

Comparée à la méthode précédente basée sur l'interpolation, la méthode de compensation par inversion de la matrice d'exponentielles a un coût de calcul élevé. Mais elle ne nécessite pas la connaissance parfaite du filtre de réception ainsi que du filtre d'émission tout en assurant une compensation de l'effet Doppler quelle que soit la valeur du paramètre Doppler d. Pour un canal sans bruit, la compensation est parfaite.

3.4 Comparaison des méthodes de compensation

3.4.1 Méthode par interpolation

Après le filtre de réception g_r, nous avons un signal à bande limitée. Une méthode classique pour rééchantillonner un signal à bande limitée est d'utiliser la formule de Shannon, (3.1). L'interpolation de Shannon est basée sur des fonctions sinc. Or, il est en pratique très difficile de réaliser ces fonctions qui sont à support temporel non borné et à décroissance lente ce qui provoque des erreurs de troncature, [Beutler 1976]. C'est pour cela qu'en pratique on considère un filtre en racine de cosinus surélevé rcs_α pour les filtres d'émission et de réception g_e et g_r. Nous allons tout d'abord comparer l'interpolation de Shannon avec l'interpolation à base de filtre dual.

Dans la suite, on considère un coefficient de retombée $\alpha = 0.5$. Le support fréquentiel de g_e est $[-(1+\alpha)/2T_e, (1+\alpha)/2T_e]$. Le filtre en réception g_r est aussi un filtre en cosinus surélevé mais à la période $T_r = T_e/2$. La largeur de bande de g_r est donc deux fois plus grande que celle de g_e afin d'éviter tout repliement éventuellement provoqué par l'effet Doppler.

On considère une connaissance parfaite des filtres d'émission et de réception. On utilise cette connaissance et celle du paramètre Doppler pour construire la base d'interpolation duale. Les simulations concernent un signal DMT de durée utile $T_0 = 0.2$ s. On se place dans un cas monotrajet avec bruit additif gaussien blanc dans la bande du signal. Comme précisé précédemment dans le tableau 1.4, on émet dans la bande [5 kHz, 15 kHz]. Le signal est suréchantillonné d'un facteur 2, comporte 2048 porteuses utiles portant des éléments QPSK.

On veut comparer ici l'efficacité de l'interpolation comme méthode de compensation Doppler. Pour cela, on mesure le taux d'erreur binaire en réception après compensation Doppler suivant différentes méthodes. Notamment, on compare la compensation par la base duale et par la base de sinus cardinaux. On compare les résultats au cas sans effet Doppler dans le canal.

L'interpolation sur un signal suréchantillonné en réception offre de bons résultats que ce soit avec une base de sinus cardinaux ou la base duale. Cependant, la base duale présente un léger avantage et permet de s'approcher encore plus du cas idéal où le Doppler serait totalement compensé. La robustesse de

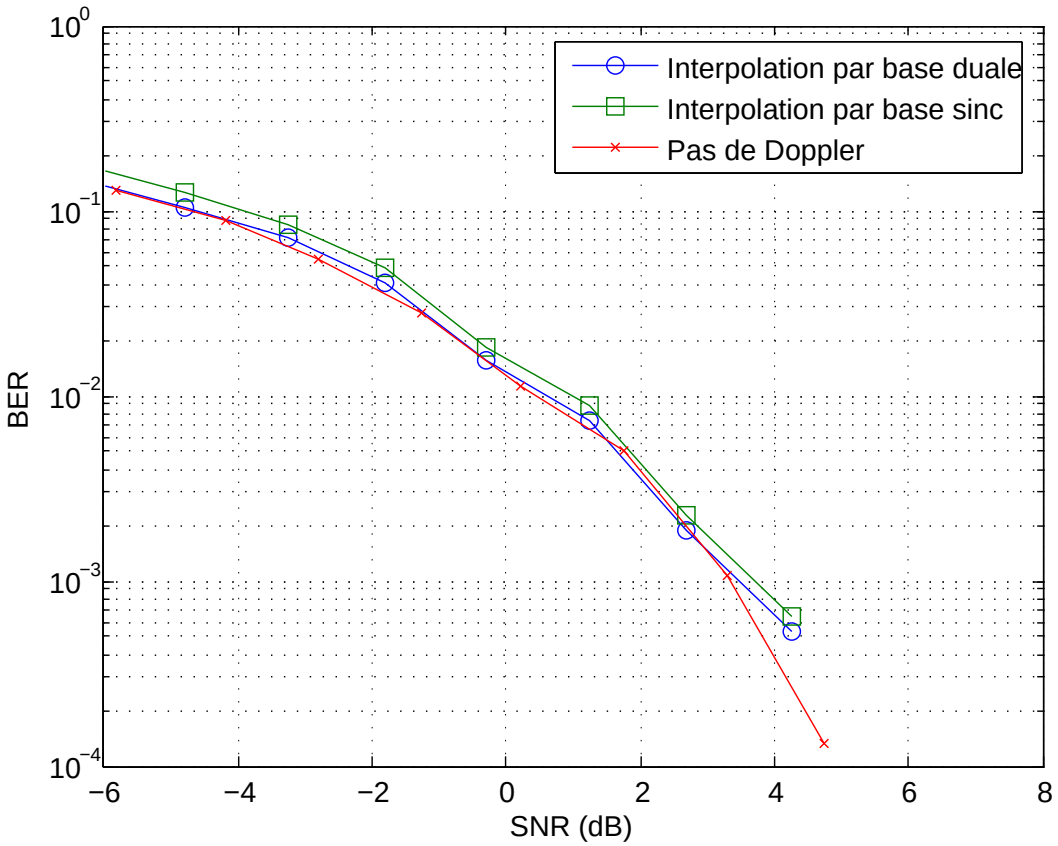


FIGURE 3.10 – Taux d'erreur binaire pour un canal monotrajet avec effet Doppler, $d = 1.0027$. Comparaison des compensations par base duale et par base de sinus cardinaux.

la compensation par base duale peut s'expliquer par le filtrage fréquentiel qui s'opère sur le signal reçu lors du rééchantillonnage.

Le bruit gaussien $b(t)$ après le filtre de réception a pour support fréquentiel $[-1/(2T_r), 1/(2T_r)]$. La largeur de cette bande est plus grande que celle du signal de communication affecté par l'effet Doppler.
Comme le signal, le bruit va passer par un filtre $\tilde{\phi}_d$ dans le but d'effectuer le rééchantillonnage. Le filtrage va affecter la largeur de bande du bruit. Ce filtre n'est pas forcément le filtre dual aux filtres d'émission/réception. En effet, comme le signal en réception est à bande limitée, on peut très bien effectuer l'interpolation avec une base de sinus cardinaux.

Soit $b_{\tilde{\phi}_T}$ le bruit après filtrage. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du bruit après rééchantillonnage s'écrit :

$$\gamma_{b_{\tilde{\phi}_d}}(\nu) = \gamma_b(\nu) \left| \hat{\tilde{\phi}}_d(\nu) \right|^2 \tag{3.77}$$

Si on choisit $\hat{\tilde{\phi}}_d = \Pi_{T_r}$, alors :

$$\gamma_{b_{\tilde{\phi}_d}}(\nu) = \gamma_b(\nu) \tag{3.78}$$

La fonction d'autocorrélation du bruit reste inchangée. Mais si le filtre $\tilde{\phi}_d$ est choisi comme étant le dual au filtre d'émission et de réception, dans ce cas, sa largeur de bande sera $[-d/(2T_e), d/(2T_e)]$. Le filtre est adapté au support fréquentiel du signal qu'il conserve totalement alors qu'il restreint le support fréquentiel du bruit.

L'interpolation avec la base duale permet d'écarter une part de l'énergie du bruit tout en conservant complètement le signal émis.

3.4.2 Méthode par matrice d'exponentielles

On compare les performances de la compensation Doppler par une matrice d'exponentielles et une compensation par interpolation. Le signal émis est le même que précédemment. Les résultats sont présentés sur la figure 3.11.

Les résultats présentés sont satisfaisants, bien qu'inférieurs en performance à ceux de la compensation par rééchantillonnage. Cette méthode présente toutefois un coût de calcul élevé du fait de l'inversion de la matrice $\mathbf{G}(d, d)$. Il est néanmoins possible de le diminuer en considérant en réception la réalisation d'une bibliothèque de matrices $\mathbf{G}(d, d)$ pour différentes valeurs de d. L'écart entre deux valeurs de d doit alors être inférieur à la variation Doppler minimum tolérable compte tenu des paramètres $f_{\max}$ et T_0 comme précisé dans le

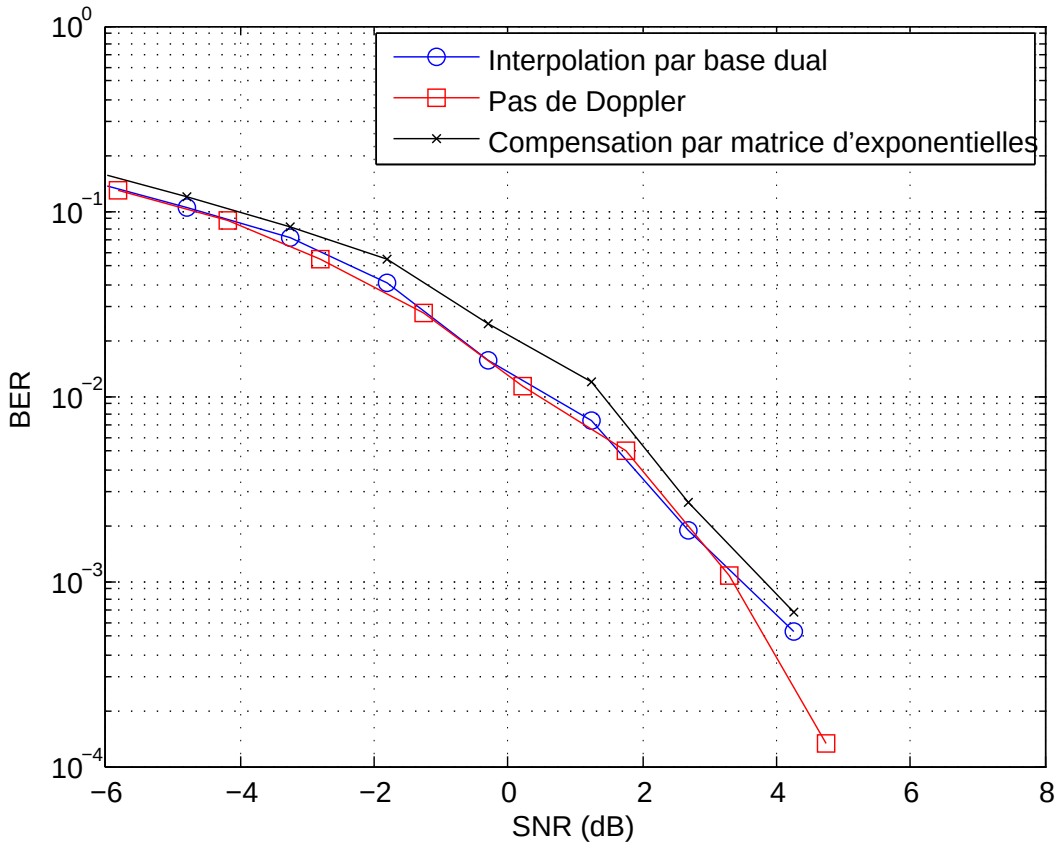


FIGURE 3.11 – Taux d'erreur binaire pour un canal monotrajet avec effet Doppler, $d = 1.0027$. Comparaison des compensations par base d'interpolation et par matrice d'exponentielles.

chapitre 1, équation (1.73). Avec $T_0 = 0.2$s et $f_{\max} = 15$ kHz, la précision de la bibliothèque de matrices $\mathbf{G}(d, d)$ doit être inférieure à $\frac{1}{2T_0 f_{\max}}$, soit inférieure à $1.66\ 10^{-4}$.

3.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal monotrajet

Dans ce chapitre, deux méthodes de compensation de l'effet Doppler large bande sont présentées et testées par des simulations. Les méthodes de compensation classiques qui sont utilisées en communication hertzienne, comme une compensation par décalage fréquentiel uniforme de toutes les fréquences du signal reçu, sont inadaptées dans ce contexte. Les méthodes développées ici assurent une compensation parfaite sur un canal sans bruit pour toutes les valeurs du paramètre possible, que le signal soit émis d'un sous-marin automatisé autonome (AUV), ou par une sonde tirée par un hors-bord.

La première méthode de compensation utilise un rééchantillonnage du signal reçu, ce qui a déjà été évoqué dans la littérature depuis le début des années 2000, [Sharif 2000a]. Cependant, l'influence des filtres d'émission et de réception n'avait jamais été prise en compte. On peut ainsi améliorer les performances de compensation et sa robustesse vis-à-vis du bruit. La seconde méthode utilise la formation des signaux DMT, réalisant la compensation par la résolution d'un système d'équations au sens des moindres carrés (**??**). Cette deuxième méthode est moins robuste que la précédente mais présente l'avantage d'être réalisable même si on ne connaît pas la forme exacte des filtres d'émission et de réception.

Chapitre 4

Compensation de l'effet Doppler, cas multitrajet

« La multitude qui ne se réduit pas à l'unité est confusion ; l'unité qui ne dépend pas de la multitude est tyrannie. »
Blaise Pascal

Sommaire

4.1 De la nécessité de considérer un paramètre Doppler différent sur chaque trajet 98
4.1.1 Du point de vue de la littérature 98
4.1.2 Point de vue adopté dans la thèse 98
4.2 Contexte de l'étude 103
4.3 Formation de voies classique 103
4.3.1 Résolution angulaire 105
4.3.2 Gain de Rapport signal sur bruit 112
4.3.3 Mise en place par simulation 113
4.4 Inversion matricielle pour la formation de voies . . . 124
4.4.1 Concept de l'inversion matricielle 124
4.4.2 Inversion matricielle sur un signal DMT 126
4.4.3 Extension à la formation de voies 133
4.4.4 Compromis séparation des trajets/ SNR 134
4.4.5 Simulation de l'inversion matricielle 135
4.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal multitrajet 141

Dans ce chapitre, le modèle multitrajet est étudié. On suppose connaître parfaitement les paramètres du canal, paramètre Doppler, retard et atténuation pour chaque trajet au niveau de chaque capteur. L'estimation dans le cas d'un canal à trajets multiples peut être réalisée selon la méthode développée dans [Josso 2010], [Josso 2009b].

4.1 De la nécessité de considérer un paramètre Doppler différent sur chaque trajet

4.1.1 Du point de vue de la littérature

Le modèle géométrique développé dans le chapitre 1, nous donne :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) s(d_i t - \tau_i) + b_r(t) \tag{4.1}$$

Dans la littérature, il est courant de considérer que le paramètre Doppler est le même pour tous les trajets arrivant sur le capteur en réception, [Kibangou 2010a], [Kibangou 2010c], [Li 2006], [Li 2007a], [Li 2007b], [Stojanovic 2006] ; [Lyonnet 2011b]. L'argument utilisé est que compte tenu des distances qui séparent les sources virtuelles du récepteur, les variations angulaires d'un trajet à l'autre sont minimes. Cela revient à considérer $\forall i \in \mathbf{Z} \quad 1 \leq i \leq I \quad d_i = d_1 = d$. Le modèle du signal reçu devient alors :

$$r(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i(t) s(dt - \tau_i) + b_r(t) \tag{4.2}$$

L'effet Doppler étant le même sur tous les trajets, s'il est parfaitement compensé par un traitement en réception, il est alors possible de se ramener au cas classique d'un signal multitrajet sans Doppler.

Or, il existe de nombreux outils avec un signal DMT pour compenser ces trajets multiples. Grâce à un préfixe cyclique ou à un intervalle de garde de type zero padding, on peut corriger l'influence des trajets multiples avec une égalisation comportant un seul coefficient par sous porteuse, [Lyonnet 2011b].

4.1.2 Point de vue adopté dans la thèse

Cette hypothèse maintes fois utilisée dans la littérature ne sera pas reprise ici. En effet, si on considère le modèle géométrique développé dans le chapitre

1, avec une distance émetteur/récepteur d'un kilomètre, une profondeur de 100 mètres, un émetteur placé à 50 mètres de profondeur et un récepteur à 30 mètres, avec une vitesse de l'émetteur de 4.2m/s en direction du récepteur, on aura les coefficients Doppler suivants pour chaque trajet : $d_1 = 1.00203$, $d_2 = 1.00215$, $d_3 = 1.00175$. Les retards considérés pour chaque trajet sont donnés par le modèle géométrique, (1.20) : $\tau_1 = 0$ ms, $\tau_2 = 19$ ms, $\tau_3 = 47$ ms.

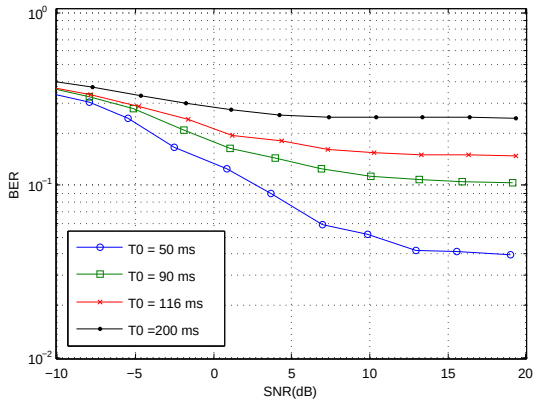
On remarque que l'écart de coefficient Doppler entre le premier et le troisième trajet est de l'ordre de 2.87 10^{-4}. Or, pour que le décalage Doppler ne dépasse pas l'écart interporteuse (1.77), il faut que :

$$M_{max} F_0 \left| \hat{d} - d \right| < \frac{F_0}{2} \tag{4.3}$$

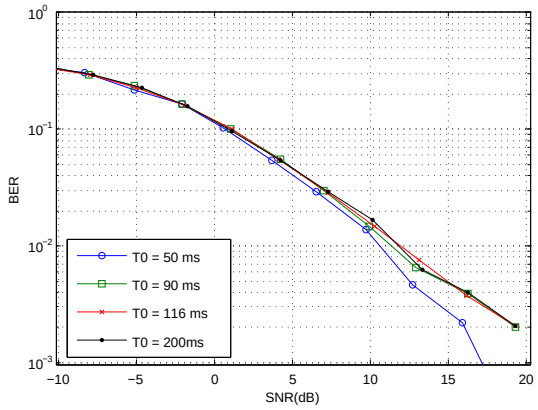
Si le paramètre Doppler estimé correspond à celui du trajet direct, $\hat{d} = d_1$, alors le Doppler résiduel lié au troisième trajet provoquera un décalage de plus d'un écart interporteuse si $M_{\max}$ est supérieur à 1742. Ceci impliquerait, à bande occupée équivalente, un signal DMT de durée approximative 116ms, soit l'écart inter-porteuse $F_0 = 8.6$ Hz. Le débit s'en trouverait fortement réduit. Et même si l'écart Doppler n'est pas suffisant pour créer un décalage d'une porteuse, il contribuera fortement à détruire l'orthogonalité entre les porteuses.
De plus, si les paramètres du canal changent, si l'émetteur se rapproche ou si le fond est plus éloigné, les écarts de paramètres Doppler entre les différents trajets vont se creuser. Le système ne serait pas robuste.

Cette approche est confirmée dans les articles de Josso, [Josso 2010], [Josso 2009a] dans lesquels l'acquisition de signaux OFDM en mer et l'estimation de l'effet Doppler sur chaque trajet est réalisé. Les conditions expérimentales sont proches de celles évoquées précédemment. Il y est mesuré des variations de paramètres Doppler entre le trajet direct et les trajets à une réflexion de l'ordre de 4.10^{-4}.

Simulations Pour illustrer nos propos, quelques simulations ont été réalisées. On considère le canal décrit précédemment avec un signal DMT pourvu d'un intervalle de garde de type zero padding. Le modèle géométrique nous donne les retards et les paramètres Doppler pour chaque trajet. On



(a) Avec Effet Doppler

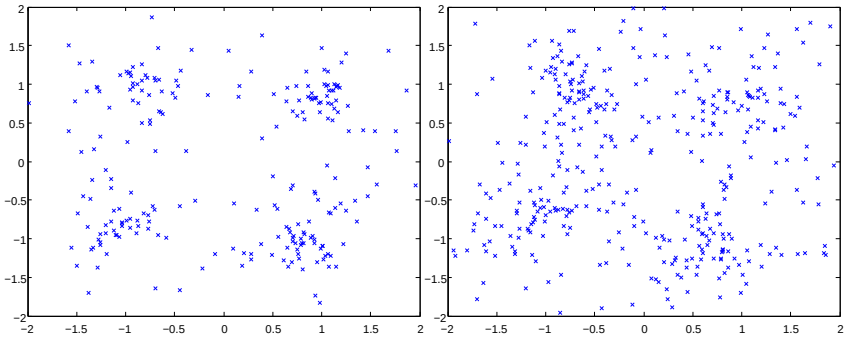


(b) Sans Effet Doppler

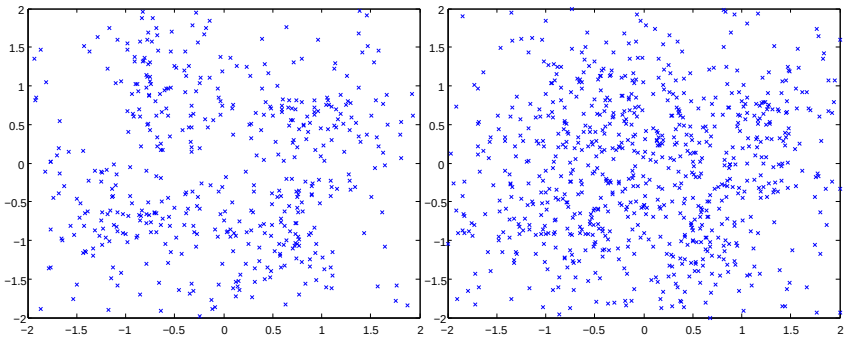
FIGURE 4.1 – Taux d'erreur binaire dans un canal multitrajet avec et sans effet Doppler pour différentes durées du symbole DMT. Nombre de trajets = 3. Eléments QPSK.

simule le trajet direct et les trajets à une réflexion. On compense en réception le Doppler par interpolation en prenant comme paramètre Doppler celui du trajet direct. Nous n'avons donc pas le même paramètre Doppler sur tous les trajets mais on fait comme si c'était le cas et on utilise le modèle de l'équation (4.2). On réalise ensuite une égalisation à un coefficient par sous-porteuse comme présenté dans le chapitre 1.

Les résultats sont présentés sur la figure 4.1 avec la simulation d'un signal DMT de largeur de bande utile fixée comme partout ailleurs dans cette thèse, entre 5 et 15 kHz.



(a) $T_0 = 50$ms (b) $T_0 = 90$ms



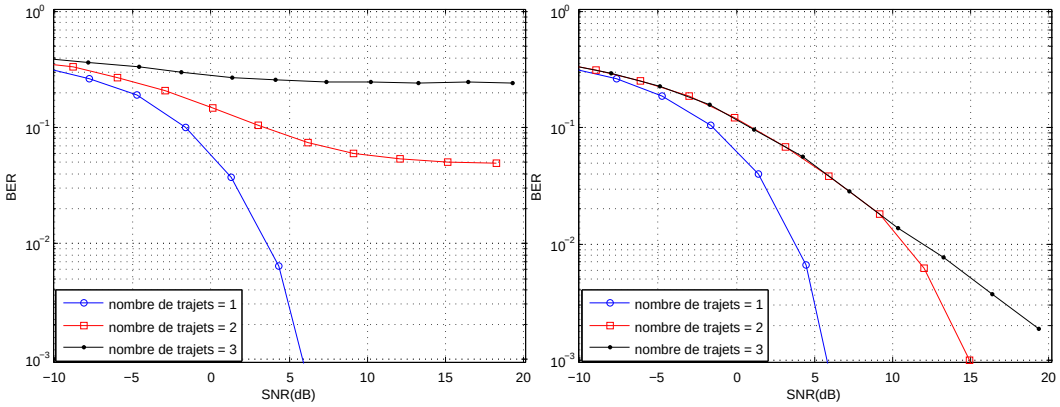
(c) $T_0 = 116$ms (d) $T_0 = 200$ms

FIGURE 4.2 – Constellations QPSK après compensation Doppler avec hypothèse de Doppler identique sur chaque trajet, $SNR = +\infty$, nombre de trajets $= 3$.

1. (a) le scénario avec effet Doppler différent sur chaque trajet mais supposé similaire. L'émetteur se déplace à une vitesse de 4.2m/s. Ce qui correspond aux paramètres Doppler évoqués dans le paragraphe précédent.
2. (b) le même processus mais sans effet Doppler

On voit que même lorsque l'écart interporteuse est grand ($T_0 = 50$ms), si le canal induit un effet Doppler, on a apparition d'un palier sur la courbe de taux d'erreur binaire. L'écart Doppler n'est pas assez important pour provoquer un décalage de plus d'une porteuse mais l'orthogonalité entre porteuses est détruite ce qui provoque des erreurs. L'écart Doppler est trop important et provoque des erreurs que l'égalisation ne peut pas corriger, contrairement au cas sans Doppler où l'influence des trajets multiples est complètement

supprimée.
Sur la figure 4.2 sont présentées les constellations dans le scénario multitrajet avec effet Doppler mais après compensation, avec hypothèse d'effet Doppler identique sur tous les trajets. Là encore, même quand l'écart interporteuse est grand, on réalise que l'influence du Doppler résiduel est trop importante et occasionne des erreurs.



(a) Avec Effet Doppler (b) Sans Effet Doppler

FIGURE 4.3 – Taux d'erreur binaire après compensation Doppler sur le trajet principal avec hypothèse de Doppler similaire sur tous les trajets, $T_0 = 200$ ms. Eléments QPSK.

Enfin, une dernière simulation a été réalisée. On fixe $T_0 = 200$ms, comme précédemment. On considère un canal multitrajet avec effet Doppler différent sur chaque trajet. Comme précédemment, on considère l'hypothèse de Doppler identique valide et on compense le même paramètre Doppler sur tout le signal. On retient le paramètre Doppler du trajet direct. Après démodulation du signal DMT remis à l'échelle, on pratique une égalisation à un coefficient par sous porteuse. Sur la figure 4.3 sont montrés les résultats de ces simulations quand on simule 1, 2 ou 3 trajets, avec et sans mouvement de la source. On voit que dans le cas où un seul trajet est simulé, le Doppler est parfaitement compensé. Par contre, dès que le canal devient multitrajet, les paramètres Doppler n'étant pas les mêmes sur tous les trajets, l'erreur devient importante.

C'est pour toutes ces raisons que nous avons décidé dans notre étude de

prendre en compte le fait que l'effet Doppler est différent sur chaque trajet. Le problème devient dès lors bien plus ardu. En effet, nous n'avons pas d'outil pour compenser l'effet Doppler en réception. Pour gérer ce problème, nous décidons de développer une méthode de séparation des trajets, dans l'objectif de se ramener à un cas montrajet à un seul effet Doppler par trajet. C'est dans cette optique que nous nous sommes intéressés à des traitements multicapteurs en réception.

4.2 Contexte de l'étude

Nous fixons le contexte de l'étude pour la suite du chapitre.
Le signal transmis est toujours un signal DMT avec zero-padding de durée suffisante pour pouvoir considérer une indépendance entre symboles. La distance horizontale entre émetteur et récepteur est de 1 km au début de la transmission. Nous disposons d'un unique émetteur mais de plusieurs capteurs en réception, formant une antenne verticale uniforme. On dispose de N capteurs (N compris entre 4 et 8 dans cette étude), chacun enregistrant un signal $y^n(t)$, $n = 1...N$.
Par convention, on pose $y^1(t) = y(t)$. D'après l'équation (1.88), on a :

$$n = 1...N, \qquad y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i t - \tau_i^n) + b^n(t) \tag{4.4}$$

a_i est le coefficient d'atténuation du trajet numéro i arrivant sur l'antenne. Les capteurs sont supposés suffisamment proches pour que l'atténuation soit supposée identique sur tous les capteurs pour un trajet donné. Sur la durée d'un symbole DMT, l'atténuation est supposée constante pour un trajet donné, de même que les coefficients Doppler et les retards. Tous ces paramètres sont supposés parfaitement connus.
Le bruit est considéré comme additif et spatialement blanc. Il est différent sur chaque capteur et décorrélé d'un capteur à l'autre.

4.3 Formation de voies classique

La formation de voies, a été introduite en acoustique sous-marine dans les années 50 [Pritchard 1953], [Davids 1952]. Cette méthode a surtout été utilisée pour la tomographie et l'estimation des temps d'arrivée des différents trajets ou pour la localisation de sources, [Munk 2006], [Nicolas 2007],

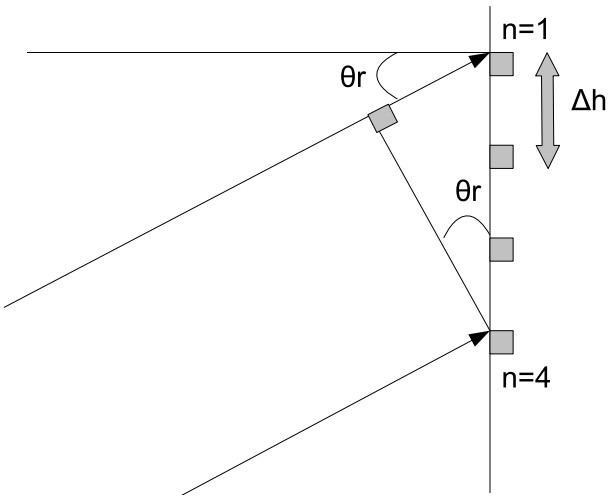


FIGURE 4.4 – Approche angulaire.

[Iturbe 2009], [Iturbe 2008], [Lee 1994]. Des essais concernant les communications sous-marines ont déjà été réalisés, sur des émetteurs et des récepteurs immobiles, afin de limiter l'influence des trajets multiples [Howe 1994], [Tarbit 1994], [Henderson 1994]. Ils considèrent que si certains trajets arrivant sur l'antenne sont suffisamment atténués, ils peuvent être alors être assimilés à du bruit. On a alors la possibilité de se ramener à un cas monotrajet. Dans cette section, nous présentons seulement la formation de voies linéaire, c'est-à-dire avec une antenne composée de capteurs espacés régulièrement selon une ligne droite.
On se place dans le cas où l'antenne verticale uniforme enregistre sur chaque capteur le champ acoustique émis par une source éloignée. On suppose également que l'émetteur est suffisamment loin pour que l'onde arrivant sur l'antenne soit considérée comme plane. Dans cette configuration, la formation de voies est un outil de séparation des ondes planes qui arrivent sur l'antenne avec des angles différents [Van Veen 1988], [Robert E. Collin 1969].

D'après l'équation (4.4), sur un canal sans bruit, on a :

$$n = 1...N, \qquad y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i t - \tau_i^n) \tag{4.5}$$

Avec n le numéro du capteur. Comme l'onde est plane et considérant la géo-

métrie du problème, on a :

$$y^n(t) = y(t - (n-1)\Delta h \frac{\sin(\theta_r)}{c}) \tag{4.6}$$

Avec Δh l'écart entre capteurs, supposé fixe ; θ_r, l'angle d'arrivée de l'onde sur l'antenne ; et c la vitesse de l'onde dans le milieu, supposée fixée à 1500 m/s. Tout ceci est illustré sur la figure 4.4.
La formation de voies consiste alors à réaliser sur les données $y^n(t)$ l'opération suivante :

$$\text{beam}(t, \theta_0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} y^n(t + \frac{(n-1)\Delta h \sin(\theta_0)}{c}) \tag{4.7}$$

On obtient alors une fonction $\text{beam}(t, \theta_0)$, avec θ_0 la direction dans laquelle on oriente l'antenne. On voit de manière intuitive que la formation de voies sert à recaler temporellement les signaux des différents récepteurs puis à en faire la somme. Le décalage se fait selon l'angle θ_0, qui peut être considéré comme l'angle selon lequel on oriente la formation de voies. On le nomme l'angle d'observation. Ainsi, si une onde plane arrive sur l'antenne selon un angle θ_r, le décalage mettra toutes ces ondes en phase sur tous les récepteurs avant sommation si on a $\theta_r = \theta_0$. Les ondes reçues sur chaque capteur sont en phase quand la différence $\sin(\theta_r) - \sin(\theta_0) = \Delta\theta_{0r}$ est nulle. Dans la suite, on utilise la quantité $\Delta\theta_{0r}$ pour désigner le décalage angulaire entre l'angle réel et l'angle d'observation.

Au final, les signaux arrivant avec le même angle seront conservés car en phase ; alors que ceux provenant d'angles différents seront atténués. On a donc ici la mise en place d'un filtrage spatial sur des données collectées durant une certaine durée sur tous les capteurs de l'antenne. La formation de voies est limitée quand deux trajets différents ont des angles d'arrivées identiques.
On peut aussi considérer que la formation de voies transforme les données du domaine temps/ récepteurs (t, n) , dans le domaine temps/angle (t, θ_0).

4.3.1 Résolution angulaire

Dans cette partie, nous allons modéliser le diagramme de directivité. On a :

$$y^n(t) = y(t - (n-1)\frac{\Delta h \sin(\theta_r)}{c}) \tag{4.8}$$

On pose :

$$f_b(t, n, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{N} y(t - (n-1)\frac{\Delta h \Delta\theta_{0r}}{c}) \tag{4.9}$$

On appelle z, la variable continue qui représente la profondeur du capteur par rapport au capteur de référence. Ici, le capteur de référence est le premier. On va développer une version spatialement continue de la fonction f_b.

$$\tilde{f}_b(t, z, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{N} y(t - z\frac{\Delta\theta_{0r}}{c}) \sum_{n=1}^{N} \delta(z - (n-1)\Delta h) \tag{4.10}$$

On note $(N-1)\Delta h$ la longueur de l'antenne. L'opération de formation de voies peut donc s'exprimer sous forme intégrale :

$$\text{beam}(t, \Delta\theta_{0r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_b(t, z, \Delta\theta_{0r}) dz \tag{4.11}$$

$$\text{beam}(t, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t - z\frac{\Delta\theta_{0r}}{c}) \sum_{n=1}^{N-1} \delta(z - (n-1)\Delta h) dz$$

On a donc exprimé l'opération de formation de voies sous la forme d'un échantillonnage spatial aux positions des capteurs de l'antenne.

On va maintenant travailler sur une version fréquentielle de la formation de voies. Après échantillonnage à la période T_r, on considère Q éléments de la fonction beam.
Comme dans le chapitre 2, on considère l'expression de la matrice $\mathbf{F}_\delta$ pour δ réel.

$$\mathbf{F}_\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi n F_0 q T_r \delta} \Pi_{T_0}(\delta q T_r) \right)_{0 \leq q \leq Q-1 \;\; ; \;\; 0 \leq n \leq M-1} \tag{4.12}$$

On considère le vecteur $\mathbf{beam}(\Delta\theta_{0r}) = [\text{beam}(0, \Delta\theta_{0r}), \ldots, \text{beam}((Q-1)T_r, \Delta\theta_{0r})]^T$.

L'opération de transformée de Fourier discrète en réception peut se réaliser selon l'opération :

$$\mathbf{Beam}(\Delta\theta_{0r}) = \mathbf{F}_1 \, \mathbf{beam}(\Delta\theta_{0r}) \tag{4.13}$$

Les éléments du vecteur **Beam** sont notés $\mathrm{Beam}(mF_0, \Delta\theta_{0r})$, pour $m = 0...M-1$.

$$\mathrm{Beam}(mF_0, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{q=0}^{Q-1} \mathrm{beam}(qT_r, \Delta\theta_{0r}) e^{-j2\pi qT_r (mF_0) \Pi_{T_0}(qT_r)} \quad (4.14)$$

Soit :

$$\mathrm{Beam}(mF_0, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(mF_0) e^{-2\pi jzmF_0 \frac{\Delta\theta_{0r}}{c}} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \delta(z - (n-1)\Delta h) \right] dz$$

Avec

$$Y(mF_0) e^{-2\pi jzmF_0 \frac{\Delta\theta_{0r}}{c}} = \sum_{q=0}^{Q-1} y(qT_r - z\frac{\Delta\theta_{0r}}{c}) e^{-j2\pi qT_r mF_0} \Pi_{T_0}(qT_r) \quad (4.15)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$\mathrm{Beam}(mF_0, \Delta\theta_{0r}) = Y(mF_0) H_{\mathrm{beam}}(mF_0, \Delta\theta_{0r}) \quad (4.16)$$

Avec :

$$H_{\mathrm{beam}}(mF_0, \Delta\theta_{0r}) = \frac{1}{N\sqrt{M}} e^{-j\pi(N-2)\Delta h \frac{\Delta\theta_{0r}}{c} mF_0} \frac{\sin(\pi mF_0 \frac{\Delta\theta_{0r}}{c}(N-1)\Delta h)}{\sin(\pi mF_0 \frac{\Delta\theta_{0r}}{c}\Delta h)}$$

Ce calcul classique se retrouve dans [Robert E. Collin 1969] mais effectué en continu.
On se focalise dans un premier temps sur le terme de phase de H_{beam}, $\Phi_r = \pi(N-2)\Delta h \frac{\Delta\theta_{0r}}{c} mF_0$. Il s'agit d'un déphasage linéaire en fréquence qui se traduit par un décalage en temps. Ce décalage est introduit par le filtre. Il s'agit d'une source potentielle d'erreurs pour la mesure des temps de propagation. Pour que ce déphasage soit nul, il suffit de ne pas centrer l'antenne sur le premier capteur. Il est préférable de le centrer sur le centre géométrique de l'antenne. Dans ce cas, le terme de phase s'annule. On élimine le biais temporel.

H_{beam} est donc l'expression du filtre spatial dans le milieu fréquentiel. La formation de voies peut être considérée comme une opération linéaire de filtrage spatial.

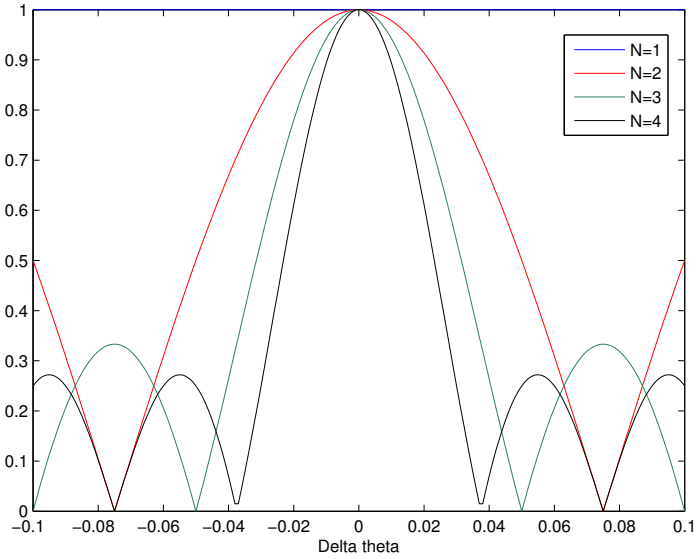


FIGURE 4.5 – Diagramme de directivité pour différents nombres de capteurs en réception : évolution de $|H_{\text{beam}}(mF_0, \Delta\theta_{0r})|$ en fonction de la variation d'angle

L'expression (4.16) est périodique selon les fréquences. Cette périodisation fréquentielle peut être considérée comme la conséquence de la discrétisation spatiale réalisée par les capteurs. La discrétisation spatiale fait apparaître un possible aliasing. D'après l'équation (4.16), on évite l'aliasing si :

$$mF_0 \frac{\Delta\theta_{0r}}{c} < \frac{1}{\Delta h} \tag{4.17}$$

d'où une condition sur la distance maximale entre capteurs.

$$\Delta h < \frac{c}{mF_0 \Delta\theta_{0r}} \tag{4.18}$$

On trace dans la figure 4.5 le diagramme de directivité, c'est-à-dire l'évolution de $|H_{\text{beam}}|$ en fonction du paramètre $\Delta\theta_{0r}$. Pour ce diagramme, il a été choisi une fréquence de 10 kHz, un espacement intercapteur $\Delta h = 1\text{m}$ et une vélocité des ondes $c = 1500\text{m/s}$.

Sur les diagrammes de directivité, le maximum est obtenu pour $\Delta\theta_{0r} = 0$. C'est-à-dire que si on réalise la formation de voies dans la bonne direction, on va récupérer tout le signal arrivant de cette direction, pour toutes les

fréquences. Ce diagramme est utilisé pour déterminer les propriétés de l'antenne que l'on choisit.

La fonction $|H_{\text{beam}}|$ passe par zéro pour toutes les valeurs de $\Delta\theta_{0r}$ telles que :

$$\frac{\pi m F_0 (N-1)\Delta h \Delta\theta_{0r}}{c} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.19}$$

$$\Delta\theta_{0r} = \frac{kc}{mF_0(N-1)\Delta h} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.20}$$

avec k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq N-1$. La largeur du lobe principal est donc égale à $\frac{2c}{mF_0(N-1)\Delta h}$. De façon générale, on en déduit que la résolution angulaire de la formation de voies est donnée par le rapport de la longueur d'onde du signal, c/mF_0, et la longueur de l'antenne, $(N-1)\Delta h$. La résolution angulaire est $\frac{c}{mF_0(N-1)\Delta h}$. Ceci rejoint les observations faites par Collin dans [Robert E. Collin 1969].
On voit que la résolution angulaire dépend de la longueur de l'antenne, il est par conséquent dans notre intérêt de prendre l'antenne la plus grande possible, afin de pouvoir séparer des angles d'arrivée très proches. Un autre élément important est la présence de la fréquence du signal. La résolution angulaire va varier avec la fréquence du signal émis ce qui peut être gênant pour des signaux large bande. La résolution angulaire choisie et la fréquence du signal vont déterminer une longueur minimale de l'antenne.

$$\frac{c}{mF_0\Delta\theta_{0r}} < (N-1)\Delta h \tag{4.21}$$

Dans notre cas, on désire utiliser la formation de voies pour séparer les différents trajets émis par une source. Les trajets multiples vont arriver avec des angles d'approche différents sur l'antenne mais la source est toujours supposée suffisamment loin pour que l'hypothèse d'onde plane soit vérifiée. Seulement en pratique, si $s(t)$ est le signal large bande, le signal reçu sur la capteur n est de la forme :

$$y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^{d_i^n} \otimes g_r)(t - \tau_i - k\frac{T_e}{d_i^n}) \tag{4.22}$$

avec

$$\tau_i^n = \frac{\left\|\vec{l_i}^n(0)\right\|}{c} \tag{4.23}$$

$$d_i^n = 1 + \frac{\vec{l_i}^n(t) \cdot \vec{v}}{c\left\|\vec{l_i}^n(0)\right\|} \tag{4.24}$$

Pour rappel, l_i^n est la distance parcourue par le trajet i entre l'émetteur et le récepteur n. et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'émetteur.

On voit donc que théoriquement, même si on arrive à séparer les trajets selon leurs angles d'arrivée, ces derniers auront des paramètres Doppler différents sur chaque capteur. Pour un trajet donné, on désire limiter cette différence de paramètre Doppler. Pour cela, il faut rapprocher les capteurs et diminuer la taille de l'antenne.

$$\Delta d_i = \left|d_i^N - d_i^1\right| \tag{4.25}$$

$$\Delta d_i = \frac{\langle \vec{l_i}^N(t), \vec{v}\rangle}{c\left\|\vec{l_i}^N(0)\right\|} - \frac{\langle \vec{l_i}^1(t), \vec{v}\rangle}{c\left\|\vec{l_i}^1(0)\right\|} \tag{4.26}$$

On remarque que $\vec{l_i}^N = \vec{l_i}^1 + (N-1)\Delta h\vec{j}$.

$$\Delta d_i = \frac{\langle \vec{l_i^1}(t), \vec{v}\rangle + \langle (N-1)\Delta h\vec{j}, \vec{v}\rangle}{c\left\|\vec{l_i^N}(0)\right\|} - \frac{\langle \vec{l_i}^1(t), \vec{v}\rangle}{c\left\|\vec{l_i^1}(0)\right\|} \tag{4.27}$$

Dès lors on peut donner une majoration grossière en considérant $\left\|\vec{l_i}^N(0)\right\| \approx \left\|\vec{l_i}^1(0)\right\|$. On aura alors comme condition sur la taille de l'antenne :

$$(N-1)\Delta h\langle\vec{j}, \vec{v}\rangle < c\left\|\vec{l_i}^1(0)\right\| \Delta d_{\max} \tag{4.28}$$

$\Delta d_{\max}$ étant la variation Doppler maximale possible entre deux trajets arrivant sur l'antenne.

Il reste une dernière condition nécessaire pour réaliser la formation de voies. En effet, l'hypothèse de départ suppose que pour un même trajet, les ondes arrivent de façon parallèle sur l'antenne. C'est l'hypothèse d'onde plane. On peut traduire cette hypothèse par une condition sur la taille de l'antenne. En

effet, pour qu'il y ait onde plane, il faut que la distance émetteur/récepteur soit très grande devant la taille de l'antenne. Soit :

$$\frac{((N-1)\Delta h)^2}{\left\|\vec{l}_1^1\right\|^2} << 1 \tag{4.29}$$

Mais notre modèle de rayon n'est valable que pour des distances inférieures à 2km. La taille de l'antenne est donc limitée.

Au final, si les conditions (4.18), (4.21), (4.28) et (4.29) sont respectées, on pourra réussir à séparer les trajets principaux émis par la source. L'angle d'observation θ_0 correspond à l'angle d'arrivée d'un trajet θ_i de telle façon que :

$$\Delta\theta_{ii} = 0 \tag{4.30}$$

D'après l'équation (4.16) :

$$H_{\text{beam}}(mF_0, \Delta\theta_{ii}) = 1 \tag{4.31}$$

Pour tous les autres trajets, l'angle d'arrivée est différent de celui d'observation de telle façon qu'ils sont grandement atténués par la formation de voies.

$$H_{\text{beam}}(mF_0, \Delta\theta_{ij}) \approx 0 \tag{4.32}$$

L'écartement des capteurs étant respecté, chaque trajet ainsi isolé sera de la forme :

$$\text{beam}(t,0) = a_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k](g_e^{d_i} \otimes g_r)(t - \tau_i - k\frac{T_e}{d_i}) \tag{4.33}$$

$$\text{beam}(t,0) = a_i s(d_i t - \tau_i) \tag{4.34}$$

On se retrouve donc en sortie de la formation de voies avec un signal composé d'un retard et d'un paramètre Doppler que l'on sait estimer et compenser. La formation de voies peut donc nous permettre de contourner le problème de compensation Doppler en présence de trajets multiples et ce tout simplement en séparant les trajets. Ainsi, si on considère que $c = 1500$m/s, la distance qui sépare émetteur et récepteur au début de la communication est de 1km, la fréquence minimale du signal étant de 5kHz et la maximale de 15kHz, la vitesse

maximale de l'émetteur considéré étant de l'ordre de 5m/s, on aura alors les bornes pour la distance interrécepteur et pour la longueur de l'antenne.

$$\Delta h < 2\text{m}$$

$$3\text{m} < (N-1)\Delta h < 30\text{m}$$

On choisit de prendre $\Delta h = 1\text{m}$ et un nombre de capteurs variant de 4 à 8 pour une longueur de l'antenne de 4 à 8 mètres.

4.3.2 Gain de Rapport signal sur bruit

Le gain en rapport signal sur bruit est un autre avantage de la formation de voies sur une communication point-à-point. On définit ce gain en RSB comme le rapport entre le rapport signal sur bruit en sortie du traitement et le rapport signal sur bruit sans traitement (c'est-à-dire sans décalage des signaux enregistrés sur chaque capteur). Ce bruit est considéré comme additif et spatialement blanc.

$$y^n(t) = y(t - (n-1)\frac{\Delta h \sin(\theta_r)}{c}) + b^n(t)$$

On obtient :

$$\text{RSB}_G = \frac{\text{RSB}_{\text{final}}}{\text{RSB}_{\text{initial}}}$$

$$\text{RSB}_G = \frac{E[\text{beam}(t, \Delta\theta_{0r})\,\text{beam}(t, \Delta\theta_{0r})^*]}{E[\text{beam}(t,0)\,\text{beam}(t,0)^*]}$$

$$\text{RSB}_G = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\frac{1}{N^2}E[y^n(t+\frac{(n-1)\Delta h\sin(\theta_0)}{c})y^{n'}(t+\frac{(n-1)\Delta h\sin(\theta_0)}{c})^*]}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\frac{1}{N^2}E[y^n(t)y^{n'}(t)^*]}$$

Comme expliqué dans les parties précédentes, on a $y^{n'}(t) = y^n(t - \frac{(n'-n)\Delta h}{c}\sin(\theta_0))$. Par conséquent, on aura :

$$E[y^n(t)y^{n'}(t)^*] = \gamma_{n,n}(\frac{(n'-n)\Delta h}{c}\sin(\theta_0))$$

Avec $\gamma_{n,n}$ qui est la fonction d'auto-corrélation de y^n. On suppose que les y^n sont temporellement décorrélés et que par conséquent $\gamma_{n,n}$ est nulle sauf en 0. De plus, si on suppose que l'angle d'observation θ_0 est exactement égal à l'angle d'arrivée de l'onde plane, on aura alors pour tout élément n :

$$y^n(t + \frac{(n-1)\Delta h\sin(\theta_0)}{c}) = y^1(t) = y(t)$$

Par conséquent, on peut réécrire l'expression du gain du Rapport Signal sur Bruit.

$$\mathrm{RSB}_G = \frac{1}{N^2}\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N} E[y^1(t)y^1(t)^*]}{\sum_{n=1}^{N} E[y^1(t)y^1(t)^*]}$$

On obtient un Gain en Rapport Signal sur Bruit égal à N. Ainsi, ce processus permet non seulement de faire un filtrage spatial mais aussi de gagner en rapport signal sur bruit.

4.3.3 Mise en place par simulation

Le canal simulé est le même que précédemment : la distance émetteur-récepteur est de 1 km, la profondeur de l'ordre de 100 mètres. L'émetteur lui même est placé à 50 mètres et le récepteur à 30 mètres de profondeur. La vitesse du mobile est fixée à 5.6 m/s, soit un coefficient Doppler de 1.0027 sur le trajet principal. On ne simule que le trajet direct et les trajets à une réflexion.
L'espace intercapteur est fixé à 1 mètre, compte tenu des fréquences utilisées. On fera varier le nombre de capteurs entre 4 et 8. Les angles d'arrivées des ondes sur l'antenne sont déterminés par les maximums de la fonction $\|\,\mathrm{beam}(t,\theta_0)\|$ selon θ_0. Les angles d'arrivées déterminés, on suppose alors que la séparation des différents trajets est parfaite. On obtient I_d voies en sortie de la formation de voies correspondant à autant de trajets détectés. On suppose que pour chaque voie, on a :

$$yv_i(kT_r) = \mathrm{beam}(kT_r,\theta_i) \approx a_i s(d_i kT_r - \tau_i) + bv_i[k] \tag{4.35}$$

Le signal sur la voie i correspond à un trajet affecté par un seul paramètre Doppler d_i et un retard τ_i. bv_i est le bruit additif sur la voie i après formation de voie pris aux instants kT_r. Dans ce modèle, les restes des autres trajets sont considérés tellement faibles qu'ils sont assimilés à du bruit. Il est alors aisé de réaliser une estimation du paramètre Doppler selon la méthode exposée dans [Lyonnet 2010] et dans le chapitre 2 de cette thèse, puis de le compenser en suivant les méthodes exposées précédemment, voir le chapitre 3. On réalise ici une compensation par inversion de la matrice de Gram.

Après compensation Doppler, les signaux DMT seulement affectés par un retard sont démodulés par une transformée de Fourier discrete comme exposé dans le chapitre 1. L'intervalle de garde étant suffisement long, on aura après démodualtion le signal suivant :

$$\forall m \in [0,M]],\quad \mathrm{TFD}[yv_i][m] = a_i e^{-2\pi j m F_0 \tau_i} c[m] + bf_i[m] \tag{4.36}$$

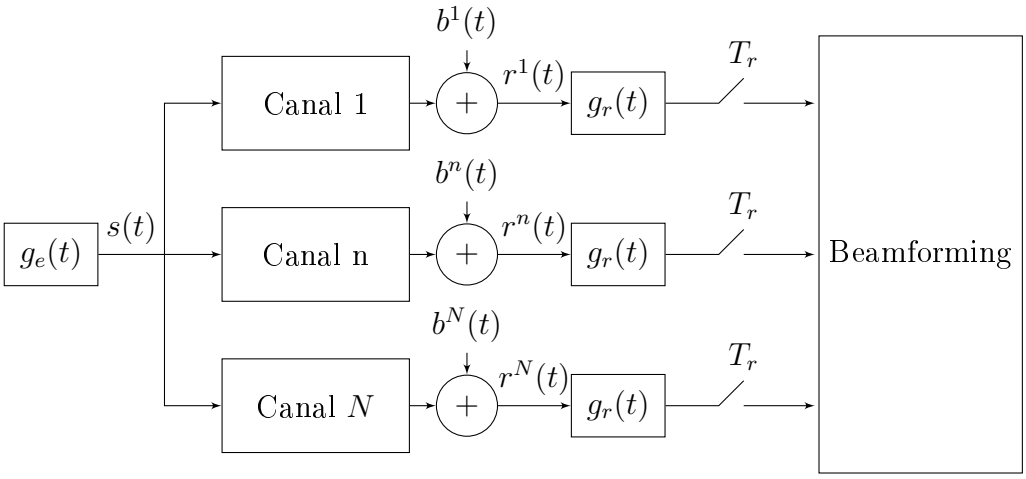


FIGURE 4.6 – Schéma de la chaîne de transmission.

avec bf_i le bruit sur la voie i après transformée de Fourier. En considérant une connaissance parfaite des amplitudes a_i et des retards τ_i, on peut recombiner les signaux des différentes voies par une méthode dite du maximum ratio combining (MRC), [Glavieux A. 1996], [Win 1999].

$$\hat{c}[m] = \sum_{i=0}^{I_d} w_i[m]\mathrm{TFD}[yv_i][m] \tag{4.37}$$

avec, dans le cas du maximum ratio combining, $w_i = a_i e^{2\pi jmF_0\tau_i}$. L'influence des trajets multiples a ainsi été supprimée grâce à l'utilisation de l'intervalle de garde sur un signal DMT comme présenté au chapitre 1. On peut récupérer l'information transmise sur chaque porteuse $\hat{c}[m]$.

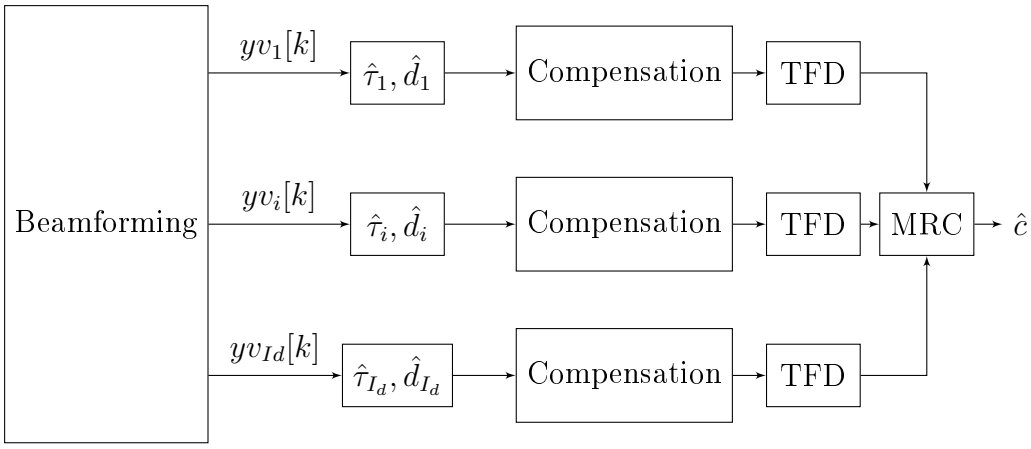


FIGURE 4.7 – Schéma de la chaîne de réception.

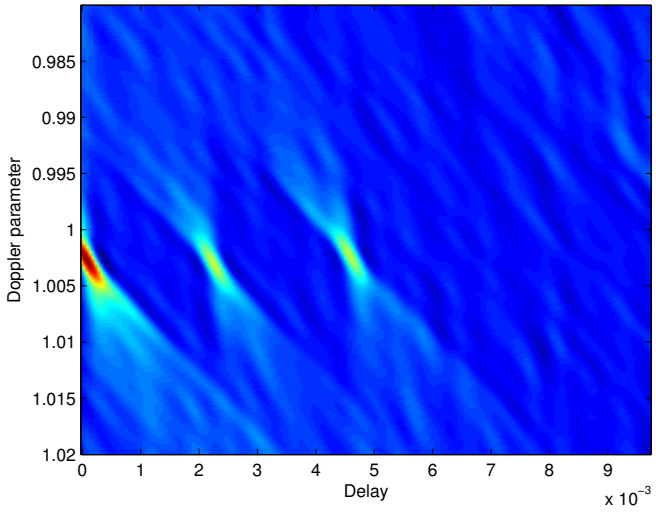


FIGURE 4.8 – Fonction d'ambiguité sur un capteur.

La séparation des trajets par la formation de voies est illustrée sur les figures 4.8,4.11, 4.9, 4.10. La fonction d'ambiguité en compression est calculée sur le signal reçu par le capteur 1 en réalisant une corrélation entre le signal émis et le signal reçu pour chaque instant et pour chaque facteur d'échelle d, [Josso 2009a]. Sur la figure 4.8, correspondant à la fonction d'ambiguité avant formation de voies, on voit très clairement la présence de plusieurs trajets avec des retards et des paramètres Doppler différents. Sur les figures 4.9 et 4.10 sont présentés les plans d'ambiguités sur les voies 1 et 2 après une formation de voies réalisée sur 8 capteurs. La voie 1 est la plus énergétique et correspond au trajet direct entre l'émetteur et l'antenne alors que la voie 2 correspond à un trajet à une réflexion. Sur cette dernière, on voit très clairement des restes des autres trajets. La séparation de voie n'est pas parfaite et ceci peut affecter les performances.

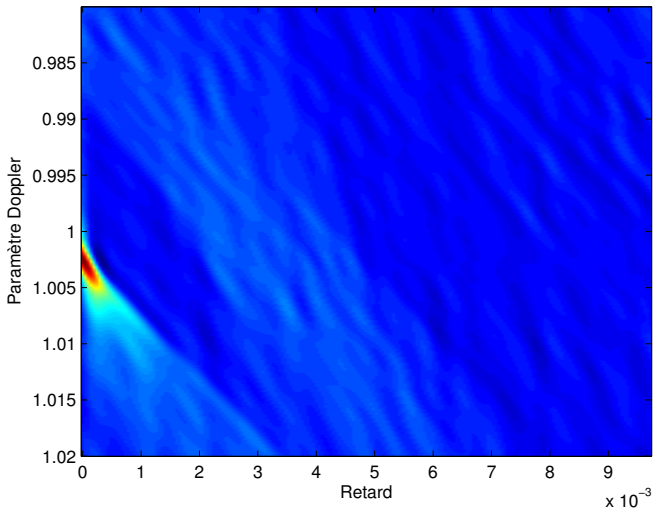


FIGURE 4.9 – Fonction d'ambiguité après formation de voies sur la voie 1.

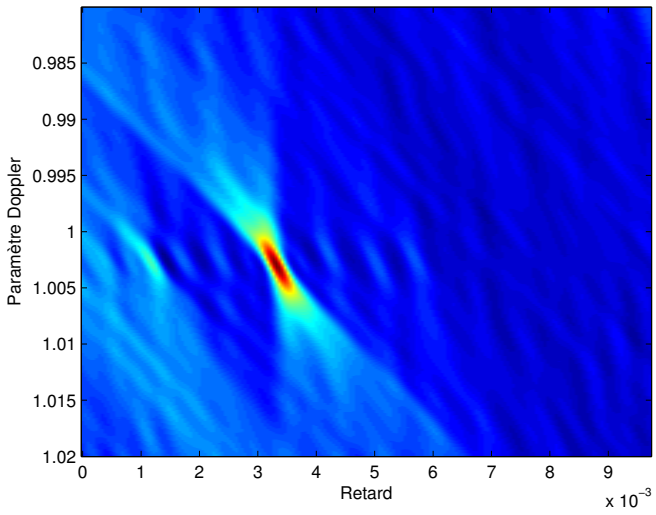


FIGURE 4.10 – Fonction d'ambiguité après formation de voies sur la voie 2.

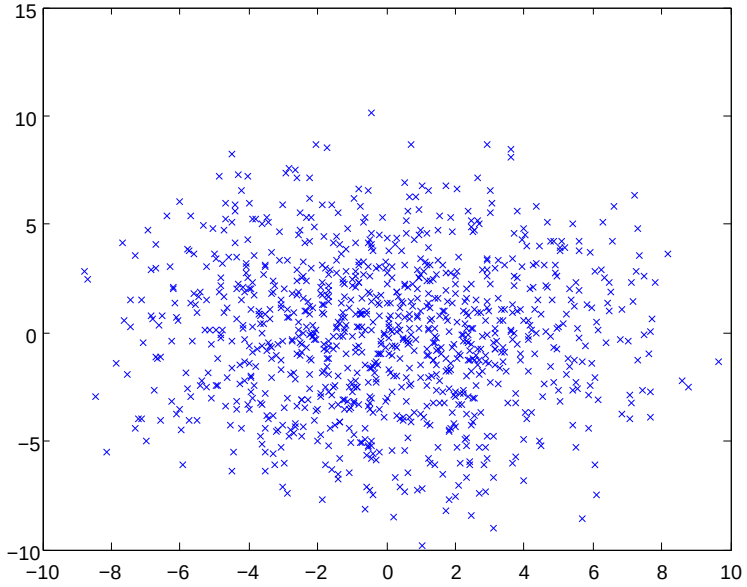
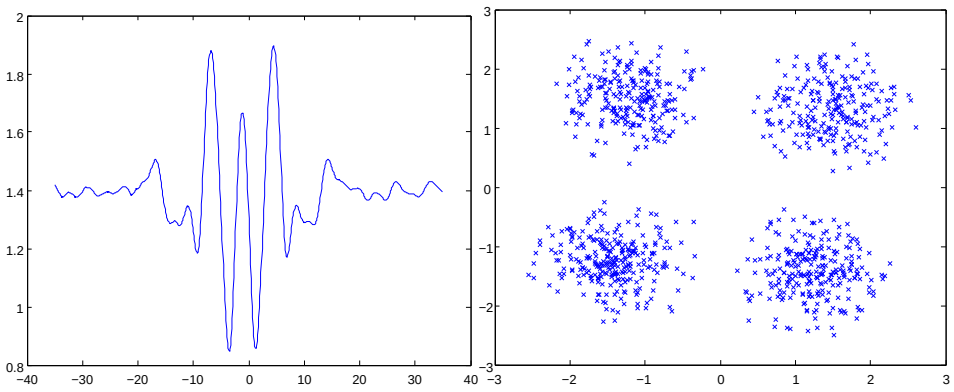


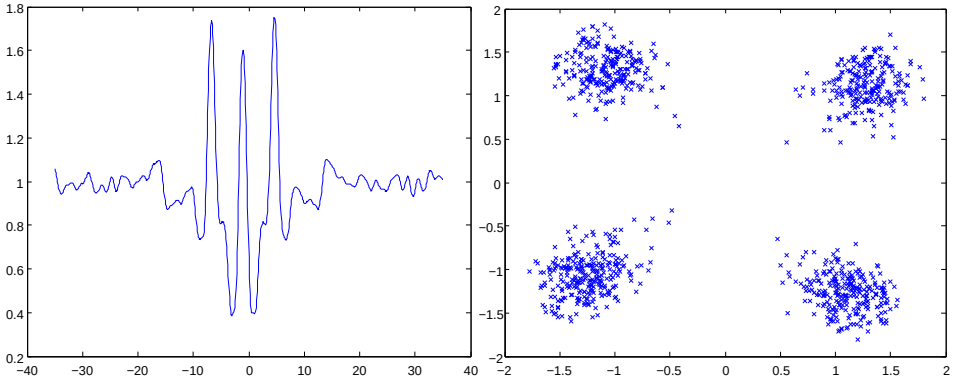
FIGURE 4.11 – Constellation avant formation de voies, SNR = 23 dB.

On se place tout d'abord dans un cas favorable à la formation de voies, illustré sur la figure 4.15. Les conditions (4.18), (4.21), (4.28) et (4.29) sont respectées (écart intercapteur de 1 mètre). La formation de voies permet de bien déterminer les différents angles d'arrivées correspondant à chaque trajet. Ceci est illustré sur les figures 4.12 pour le cas $N = 4$ et 4.13 pour $N = 8$. 3 trajets sont détectés. Lors de ces simulations, le rapport signal sur bruit est calculé sur le signal y après le filtre de réception et avant tout autre traitement. La séparation des trajets apparait comme efficace car il est possible de retrouver les éléments d'information transmis. Toutefois, les résultats sur la figure 4.14 varient grandement en fonction du nombre de capteurs utilisés. Ceci n'est pas surprenant car, comme expliqué précédemment, la séparation des trajets est alors plus efficace, et l'influence du bruit blanc spatialement est diminuée.



(a) $\|\,\mathrm{beam}(t, \theta_0)\|$ selon θ_0. (b) Constellation sur la voie 1.

FIGURE 4.12 – Formation de voies avec 4 capteurs, SNR = 23 dB.



(a) $\|\,\mathrm{beam}(t, \theta_0)\|$ selon θ_0. (b) Constellation sur la voie 1.

FIGURE 4.13 – Formation de voies avec 8 capteurs, SNR = 23 dB.

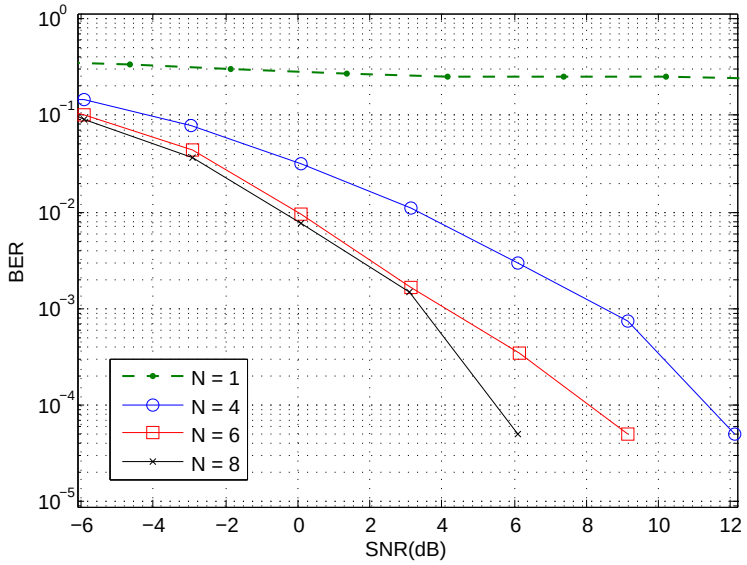


FIGURE 4.14 – Taux d'erreur binaire après formation de voies, après compensation Doppler.

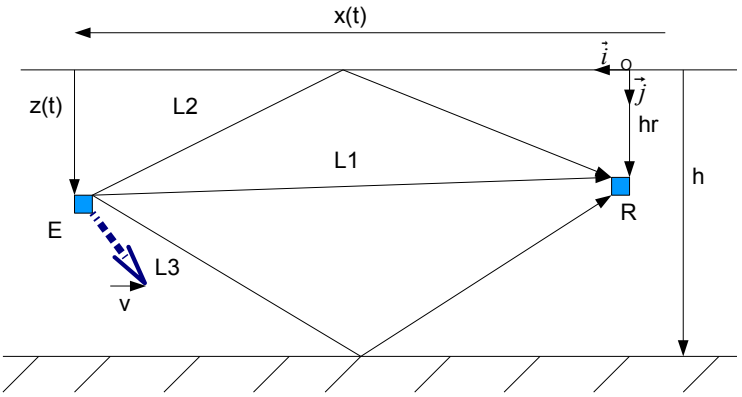


FIGURE 4.15 – Schéma de la propagation, cas favorable à la séparation des trajets.

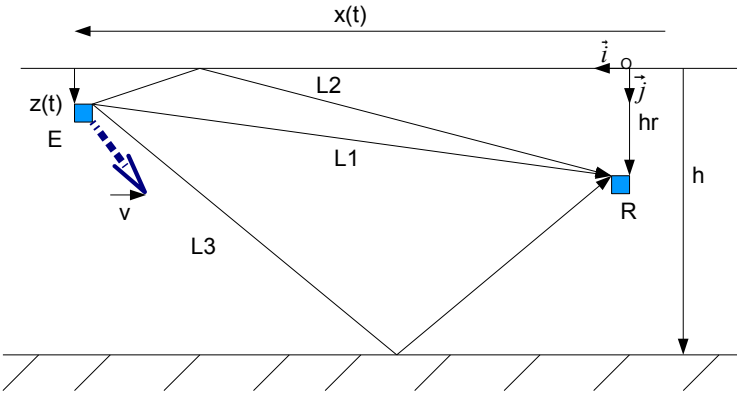
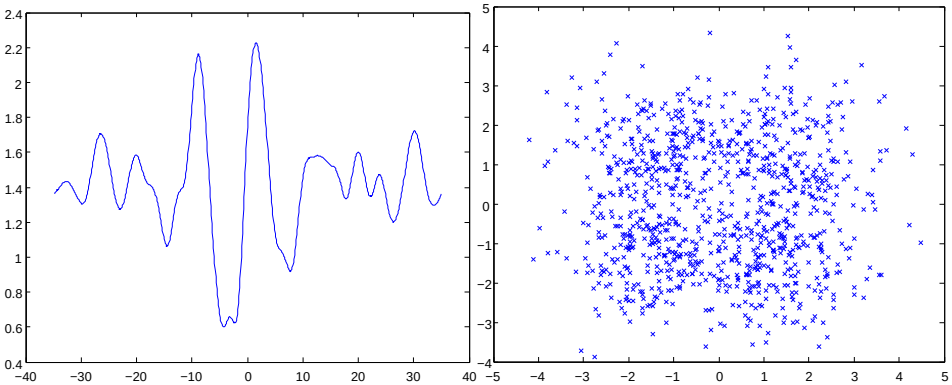


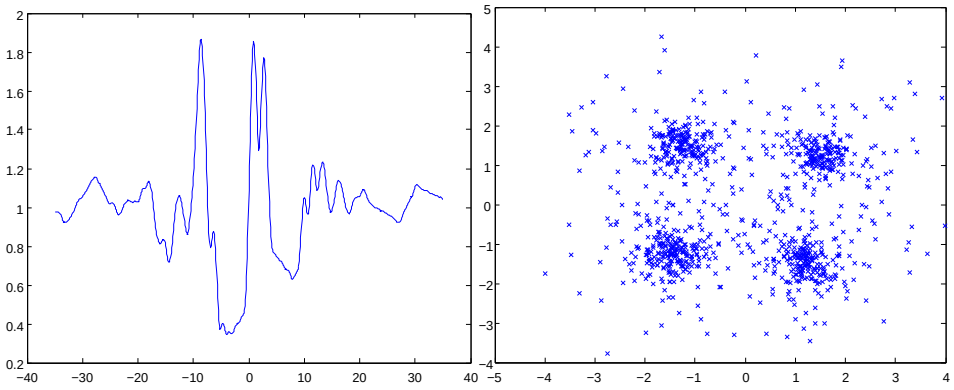
FIGURE 4.16 – Schéma de la propagation, cas non favorable à la séparation des trajets.

Les performances de la formation de voies vont toutefois grandement varier en fonction des angles d'arrivées des trajets sur l'antenne. En effet, si on considère que l'émetteur est à une profondeur de 15 mètres au lieu de 50 mètres, comme illustré sur la figure 4.16, les angles d'arrivées des différents trajets vont changer. Le trajet direct et le trajet à une réflexion sur la surface de l'eau vont avoir des angles d'arrivées beaucoup plus proches que précédemment comme illustré sur les figures 4.17 et 4.18. Nous voyons que deux des trajets sont non résolus. Ces deux trajets auront d'ailleurs des paramètres Doppler très proches du fait de la proximité de leur source virtuelle. Par contre nous ne pouvons toujours pas considérer les paramètres Doppler comme identiques sur tous les trajets car nous avons toujours présence du trajet à une réflexion sur le fond marin qui lui a un paramètre Doppler fortement éloigné de celui du trajet principal. Le modèle géométrique donne comme paramètres Doppler : $d_1 = 1.002617$, $d_2 = 1.002800$, et $d_3 = 1.002245$. On a donc des différences de paramètre Doppler de l'ordre de $2\ 10^{-4}$ ce qui est bien trop important. Avec cette configuration, les deux premiers trajets ayant des angles d'arrivées très proches, il devient difficile de les séparer par la formation de voies et les résultats s'en ressentent, 4.19. Il s'agit d'un cas peu favorable à la formation de voies. Cette méthode atteint ici ses limites. Une solution aisée serait d'agrandir la taille de l'antenne en prenant un écart intercapteur très grand. Dans cette optique, il faudrait des antennes trois à quatre fois plus grandes.



(a) Énergie de $\| \text{beam}(t, \theta_0) \|$ selon θ_0. (b) Constellation sur la voie 1.

FIGURE 4.17 – Formation de voies avec 4 capteurs, cas non favorable à la formation de voies, SNR = 23 dB.



(a) Énergie de $\|\,\mathrm{beam}(t, \theta_0)\|$ selon θ_0. (b) Constellation sur la voie 1.

FIGURE 4.18 – Formation de voies avec 8 capteurs, cas non favorable à la formation de voies, SNR = 23 dB.

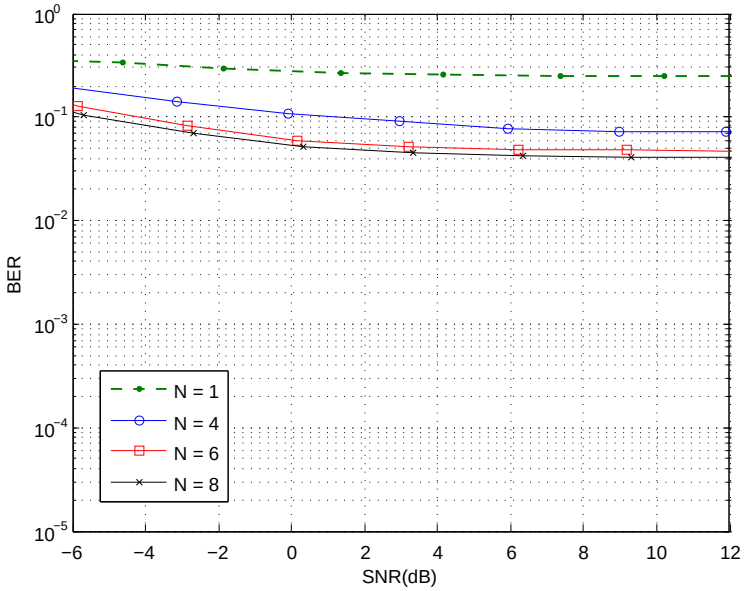


FIGURE 4.19 – Taux d'erreur binaire après formation de voies, après compensation Doppler, cas non favorable.

La formation de voies est une technique interressante qui permet de séparer les différents trajets en réception. Mais la séparation ainsi effectuer n'est jamais parfaite. Nous allons dans la suite de la thèse développer une autre méthode visant à séparer les trajets en profitant de la diversité spatiale.

4.4 Inversion matricielle pour la formation de voies

La formation de voies, bien que très robuste au bruit, ne permet pas une séparation parfaite des signaux arrivant sur l'antenne. Ceci est préjudiciable pour les performances.
Dans cette partie, nous allons développer un autre traitement multicapteur en réception. Notre objectif est d'obtenir une séparation parfaite des différents trajets arrivant sur l'antenne.

4.4.1 Concept de l'inversion matricielle

Présentons tout d'abord la méthode employée dans un cas plus général que celui de cette thèse.
On considère une antenne composée de N capteurs. Cette antenne reçoit les signaux s_i émis par I sources situées à des endroits différents de l'espace. On suppose le nombre de capteurs supérieur au nombre de sources. À ce moment, le signal reçu sur le capteur n est de la forme :

$$y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i s_i(t - \tau_i^n), n = 1...N \tag{4.38}$$

Chaque signal reçoit un mélange des signaux émis chacun affecté d'un retard τ_i^n et d'une amplitude a_i.
Dans cet exemple, nous désirons retrouver pour la source 1 la composante fréquentielle ν_0. Nous considérons connus tous les éléments du canal, à savoir les retards et les amplitudes de chaque trajet.
Nous notons Y^n la transformée de Fourier continue du signal $y(t)$.

$$Y^n(\nu) = \sum_{i=1}^{I} a_i e^{-j2\pi\tau_i^n\nu} S_i(\nu), n = 1...N \tag{4.39}$$

À partir de maintenant, nous nous plaçons sur la fréquence ν_0. L'équation précédente devient :

$$Y^n(\nu_0) = \sum_{i=1}^{I} a_i e^{-j2\pi\tau_i^n\nu_0} S_i(\nu_0), n = 1...N \tag{4.40}$$

Avec S_i la transformée de Fourier de s_i.
Pour la fréquence ν_0 on peut réécrire cet ensemble d'équations sous forme matricielle en posant :

$$\mathbf{Y}(\nu_0) = (Y^n(\nu_0))_{1\leq n\leq N} \tag{4.41}$$

$$\mathbf{A}(\nu_0) = \left(a_i e^{-j2\pi\tau_i^n\nu_0}\right)_{1\leq n\leq N, 1\leq i\leq I} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{S}(\nu_0) = (S_i(\nu_0))_{1\leq i\leq I} \tag{4.43}$$

$$\tag{4.44}$$

L'équation (4.40) devient alors :

$$\mathbf{Y}(\nu_0) = \mathbf{A}(\nu_0)\mathbf{S}(\nu_0) \tag{4.45}$$

Avec $\mathbf{A}(\nu_0)$ une matrice rectangulaire de taille $N \times I$. La transformée de Fourier en continu nous a permis d'exprimer séparément du signal reçu les composantes retards et amplitudes du canal.
La deuxième étape consiste à procéder à l'opération suivante :

$$\mathbf{A}^H(\nu_0)\mathbf{Y}(\nu_0) = \mathbf{A}^H(\nu_0)\mathbf{A}(\nu_0)\mathbf{S}(\nu_0) \tag{4.46}$$

Avec ^{H} l'opération de transposée conjuguée.
On peut alors remarquer que cette dernière opération consiste en l'expression sur la fréquence ν_0 de la transformée de Fourier du signal après formation de voies pour les I directions d'arrivées, à un coefficient près. On peut d'ailleurs obtenir la même expression en procédant tout d'abord à une formation de voies dans toutes les directions d'arrivées des signaux puis à une transformée de Fourier.
On note $\mathbf{H}(\nu_0)$ la matrice $\mathbf{A}^H(\nu_0)\mathbf{A}(\nu_0)$ carré de taille $I \times I$. L'équation (4.46) devient :

$$\mathbf{A}^H(\nu_0)\mathbf{Y}(\nu_0) = \mathbf{H}(\nu_0)\mathbf{S}(\nu_0) \tag{4.47}$$

Ainsi exprimé, nous avons un système de I équations avec I inconnues que sont les $S_i(\nu_0)$, $i = 1...I$. En résolvant ce système d'équations linéaires pour

la fréquence ν_0 on obtient les I composantes du vecteur $\mathbf{S}(\nu_0)$ et notamment $S_1(\nu_0)$.

Ainsi, en recombinant linéairement les signaux en sortie de la formation de voies et après transformée de Fourier, il est possible de séparer complètement les différentes sources pour une fréquence donnée. Ceci est réalisable si la matrice $\mathbf{H}(\nu_0)$ est inversible. Or, cette dernière est une matrice de Gram, composée des produits scalaires entre les vecteurs de la matrice $\mathbf{A}(\nu_0)$. Tant que les vecteurs composant la matrice $\mathbf{A}(\nu_0)$ sont libres, la matrice $\mathbf{H}(\nu_0)$ est définie positive et donc inversible.

4.4.2 Inversion matricielle sur un signal DMT

Si l'inversion matricielle est assez simple à pratiquer en continu, des difficultés de mise en place apparaissent sur des signaux discrets. C'est ce que nous allons voir dans cette section.
Nous allons réaliser une inversion matricielle afin de récupérer les composantes fréquentielles sur le signal s_{i_0}.

On rappelle tout d'abord l'expression du signal reçu sur chaque capteur après le filtre de réception, d'après les équation (1.88) et (4.4).

$$n = 1...N, \qquad y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i t - \tau_i^n) + b^n(t) \tag{4.48}$$

Les paramètres a_i, d_i et τ_i^n sont tous supposés connus parfaitement.
On note $s_i(t) = s(d_i t)$. Après discrétisation à la cadence T_r, on a le signal :

$$y^n(qT_r) = \sum_{i=1}^{I} a_i s_i(qT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i}) + b^n[q] \tag{4.49}$$

avec $b^n[q] = b^n(qT_r)$. Pour faire le lien avec la section précédente, tout se passe comme si chaque signal affecté de son effet Doppler était considéré comme une source différente.

En considérant une indépendance entre symbole DMT, nous allons récupérer un nombre suffisant d'échantillons Q pour décrire tout un symbole. Le nombre d'échantillons considérés est égal à la partie entière de $T_0/(d_{min}T_r)$, d_{min} étant le plus petit des paramètres Doppler. Nous nous assurons ainsi de prendre assez d'échantillons pour décrire tout le signal. Les échantillons restant du symbole DMT sont ceux du zero-padding. Ces échantillons sont

repliés au début du symbole comme expliqué au chapitre 1. On note $\tilde{y}^n$ le signal sur le capteur n après repli du zero-padding.

$$\forall q \in [0, Q-1], \quad \tilde{y}^n(qT_r) = y^n(qT_r) + y^n(qT_r + QT_r)\Pi_{T_g}(qT_r) \tag{4.50}$$

T_g est la durée de l'intervalle de garde, supposée supérieure au retard maximal du canal.

$$\forall q \in [0, Q-1], \quad \tilde{y}^n(qT_r) = \sum_{i=1}^{I} a_i \tilde{s}_i(qT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i}) + \tilde{b}^n[q] \tag{4.51}$$

avec $\tilde{b}^n$, le bruit après repli du zero-padding, et

$$\tilde{s}_i(qT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i}) = s_i(qT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i}) + s_i(qT_r + QT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i})\Pi_{T_g}(qT_r) \tag{4.52}$$

On rappelle alors que le signal s_i est un symbole DMT, tel que :

$$s_i(qT_r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 d_i q T_r} \Pi_{T_0}(d_i q T_r) \tag{4.53}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i(qT_r - \frac{\tau_i^n}{d_i}) = & \quad \tfrac{1}{\sqrt{M}} \textstyle\sum_{m=0}^{M-1} c[m] e^{j2\pi m F_0 d_i q T_r} e^{-j2\pi m F_0 \tau_i^n} \\ & \times \left(\Pi_{T_0}(d_i q T_r - \tau_i^n) + e^{j2\pi m F_0 d_i Q T_r} \Pi_{T_0}(d_i q T_r + d_i Q T_r - \tau_i^n)\Pi_{T_g}(qT_r) \right) \end{aligned} \tag{4.54}$$

Dans la suite, on réalise l'approximation : $d_i Q T_r \approx T_0$. Cette dernière est valable compte tenu des valeurs assez proches des paramètres Doppler. Par exemple, si on reprend le schéma de propagation évoqué dans la section 4.1.2, on aura comme paramètre Doppler $d_1 = 1.00203$, $d_2 = 1.00215$, $d_3 = 1.00175$. Dans ce cas, $|T_0 - d_i Q T_r| / T_0 = 4.52 \times 10^{-4}$.
Ceci nous permet d'écrire :

$$e^{j2\pi m F_0 d_i Q T_r} \approx 1 \tag{4.55}$$

De plus, on peut remarquer :

$$\Pi_{T_0}(t + T_0 - \tau_i^n)\Pi_{T_g}(t) = \Pi_{\tau_i^n}(t) \tag{4.56}$$

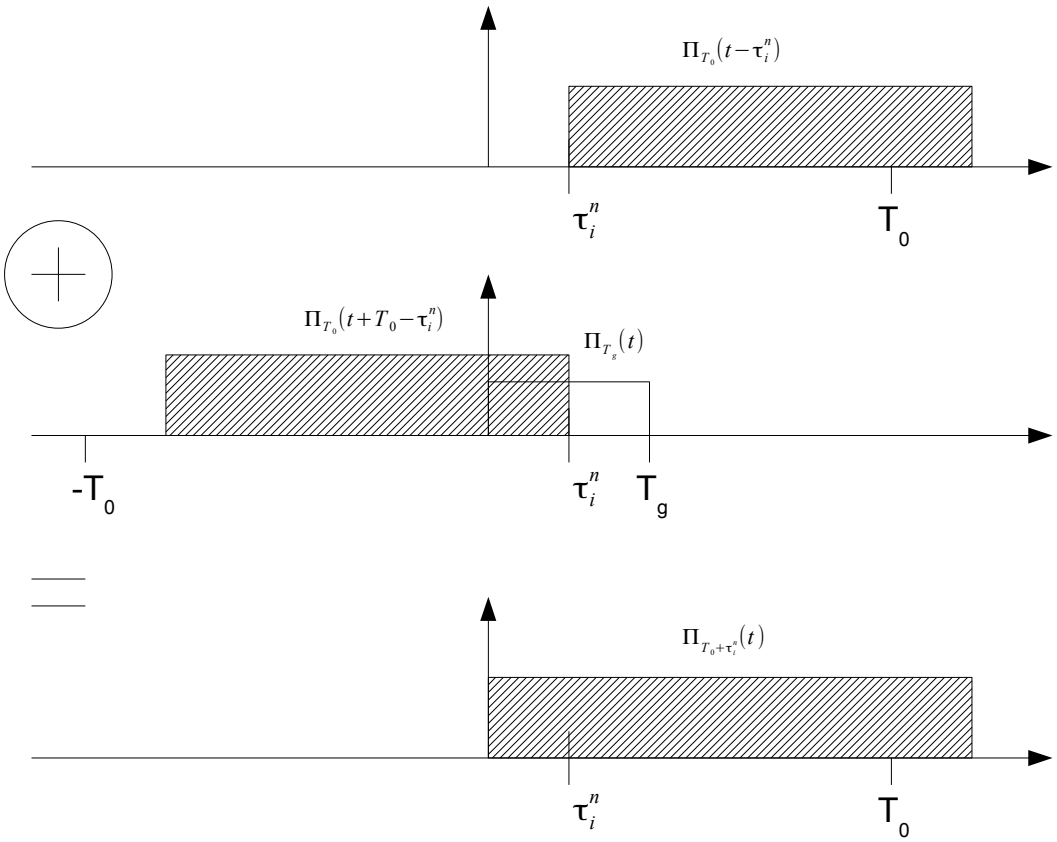


FIGURE 4.20 – Schéma de repli du zero padding.

d'où

$$\Pi_{T_0}(t-\tau_i^n)+\Pi_{T_0}(t+d_iQT_r-\tau_i^n)\Pi_{T_g}(t) \approx \Pi_{\tau_i^n}(t)+\Pi_{T_0}(d_iqT_r-\tau_i^n)\ \Pi_{T_0+\tau_i^n}(t) \quad (4.57)$$

Ceci est illustré sur la figure 4.20.

Ceci nous permet de simplifier l'expression (4.55). On obtient finalement, $\forall q \in [0,...,Q-1]$:

$$\tilde{s}_i(qT_r-\frac{\tau_i^n}{d_i}) = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{m=0}^{M-1} c[m]e^{j2\pi mF_0 d_i qT_r}e^{-j2\pi mF_0\tau_i^n} \quad (4.58)$$

On retrouve une expression utilisée couramment dans le cas de l'utilisation d'un préfixe cyclique ou du zero padding pour un signal OFDM ou DMT, ce qui a été abordé dans le chapitre 1. Elle est cependant développée ici pour des signaux avec effet Doppler.

En reprenant l'équation (4.51), on aura, $\forall q \in [0, Q-1]$:

$$\tilde{y}^n(qT_r) = \sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{\sqrt{M}}\sum_{m=0}^{M-1} c[m]e^{j2\pi mF_0 d_i qT_r}e^{-j2\pi mF_0\tau_i^n} + \tilde{b}^n[q] \quad (4.59)$$

Nous devons maintenant effectuer une transformée de Fourier discrète des signaux en sortie des capteurs dans le but d'obtenir une séparation des composantes du canal et des signaux.

On considère le vecteur $\mathbf{y}^n = [\tilde{y}^n(0),\ldots,\tilde{y}^n((Q-1)T_r)]^T$. La projection des signaux $\tilde{y}^n$ sur la famille de vecteurs fréquentiels $\left[e^{-j2\pi mF_0qT_r\delta}\Pi_{T_0}(\delta qT_r)\right]_{0\le q\le Q-1}$ est réalisée, comme au chapitre 3, avec δ compris entre d_{min} et d_{max}. Dans le cas où on désire retrouver le signal i_0, il faut choisir $\delta = d_{i_0}$ afin de se placer tout de suite sur la bonne grille fréquentielle correspondant au signal i_0.

Ceci revient à considérer la multiplication du vecteur $\mathbf{y}^n$ par la matrice suivante :

$$\mathbf{F}_\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{M}}e^{j2\pi mF_0qT_r\delta}\Pi_{T_0}(\delta qT_r)\right)_{0\le q\le Q-1\ ;\ 0\le m\le M-1} \quad (4.60)$$

Soit :

$$\mathbf{F}_{d_{i_0}}^{H}\mathbf{y}^n = \left(y_f^n(d_{i_0}mF_0)\right)_{0\leq m\leq M-1} \tag{4.61}$$

avec

$$y_f^n(d_{i_0}mF_0) = \sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{M}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{m'=0}^{M-1} c[m']e^{j2\pi qT_rF_0(d_im'-d_{i_0}m)}e^{-j2\pi m'F_0\tau_i^n} + B^n(mF_0d_{i_0}) \tag{4.62}$$

$$y_f^n(d_{i_0}mF_0) = \sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{M}\sum_{m'=0}^{M-1} c[m']e^{-j2\pi m'F_0\tau_i^n}\sum_{q=0}^{Q-1} e^{j2\pi qT_rF_0(d_im'-d_{i_0}m)} + B^n(mF_0d_{i_0}) \tag{4.63}$$

avec :

$$B^n(mF_0d_{i_0}) = \sum_{q=0}^{Q-1}\tilde{b}^n[q]e^{-j2\pi mF_0d_{i_0}qT_r} \tag{4.64}$$

Nous considérons maintenant la réalisation d'une formation de voies en fréquence pour la voie numéro j. L'opération suivante est effectuée :

$$y_s(mF_0d_{i_0},j) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_f^n(d_{i_0}mF_0)e^{j2\pi mF_0d_{i_0}\zeta_j^n} \tag{4.65}$$

Le signal ainsi construit y_s peut se ramener à celui de la formation de voies sur la voie j si on pose : $\zeta_j^n = \frac{\tau_j^n}{d_{i_0}}$; avec en particulier dans le cas d'une onde plane $\tau_j^n = \frac{(n-1)\Delta h\sin(\theta_0)}{c}$, on rejoint l'expression (4.7).

Nous avons dans un premier temps réalisé une formation de voies pour chaque direction d'arrivée d'un trajet. On forme ainsi I signaux correspondant à autant de trajets. Comme on a pu le voir dans la section précédente, la formation de voies sur chaque trajet ne permet pas une séparation parfaite. Pour chaque trajet sélectionné, nous avons des résidus des autres trajets présents dans le canal.

Chacun des I signaux constitué en sortie de la formation de voies est composé de $I+1$ termes. Le premier terme correspond au trajet que l'on souhaite retrouver. Nous avons $I-1$ termes d'interférences dus à la présence

des autres trajets, et enfin un terme de bruit.

En injectant l'équation (4.63) dans (4.65), on obtient :

$$y_s(mF_0d_{i_0},j) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{NM}\sum_{m'=0}^{M-1}c[m']e^{-j2\pi F_0(m'\tau_i^n-m\tau_j^n)}\sum_{q=0}^{Q-1}e^{j2\pi qT_rF_0(d_im'-d_{i_0}m)}+B_s(mF_0d_{i_0}) \tag{4.66}$$

Cette dernière expression peut être simplifiée en posant $g(i,d_{i_0},m,m')$ et $\mu(i,j,m,m')$ tels que :

$$g(i,d_{i_0},m,m') = \frac{1}{M}\sum_{q=0}^{Q-1}e^{j2\pi qT_rF_0(d_im'-d_{i_0}m)} \tag{4.67}$$

$$\mu(i,j,m,m') = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{-j2\pi F_0(m'\tau_i^n-m\tau_j^n)} \tag{4.68}$$

L'équation (4.66) devient :

$$y_s(mF_0d_{i_0},j) = \sum_{m'=0}^{M-1}c[m']\sum_{i=1}^{I}a_i\mu(i,j,m,m')g(i,d_{i_0},m,m') + B_s(mF_0d_{i_0}) \tag{4.69}$$

Dans cette expression, le terme $g(i,d_{i_0},m,m')$ regroupe les termes d'interférences entre porteuses dus à l'effet Doppler différent sur chaque trajet. Alors que les termes $\mu(i,j,m,m')$ regroupent les termes d'interférences entre porteuses dus aux différents retards des trajets arrivant sur l'antenne.
Dans la suite, on considère l'hypothèse suivante :

$$\forall m' \neq m \in [0,M-1]\ ,\quad \mu(i,j,m,m')g(i,d_{i_0},m,m') << \mu(i,j,m,m)g(i,d_{i_0},m,m) \tag{4.70}$$

Ceci revient à considérer que la différence entre paramètres Doppler est tellement faible que l'interférence entre porteuses due à l'effet Doppler est quasi nulle. Ainsi, dans l'équation (4.69), les fréquences différentes de m sont tellement attenuées qu'on les assimile à du bruit. On considère alors une indépendance entre porteuses. On a :

$$y_s(mF_0 d_{i_0}, j) = \sum_{i=1}^{I} a_i c[m] \mu(i, j, m, m) g(i, d_{i_0}, m, m) + B_a(mF_0 d_{i_0}) \quad (4.71)$$

avec $B_a(mF_0 d_{i_0})$, la composante de bruit sur la fréquence m contenant les termes négligés dans l'hypohèse (4.70). À ce moment, on peut retrouver une expression similaire à celle obtenue en continu, (4.46), en posant :

$$\mathbf{y}_s(mF_0 d_{i_0}) = (y_s(mF_0 d_{i_0}, j))_{1 \leq j \leq I} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{H}(m) = (\mu(i, j, m, m))_{1 \leq j \leq I, 1 \leq i \leq I} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{c}_g(mF_0 d_{i_0}) = (a_i g(i, d_{i_0}, m, m) c[m])_{1 \leq i \leq I} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{b}_a(mF_0 d_{i_0}) = (B_a(mF_0 d_{i_0}))_{1 \leq j \leq I} \quad (4.75)$$

Soit le système :

$$\mathbf{y}_s(mF_0 d_{i_0}) = \mathbf{H}(m)\mathbf{c}_g(mF_0 d_{i_0}) + \mathbf{b}_a(mF_0 d_{i_0}) \quad (4.76)$$

En résolvant ce système pour chaque fréquence discrète m, nous pouvons retrouver les éléments $c[m]$ transmis.

Exemple : cas deux trajets. On considère l'exemple suivant : on désire retrouver le signal numéro 1 ; on choisit donc $\delta = d_1$. On considère un canal à 2 trajets dont on connaît tous les paramètres. L'équation (4.76) devient :

$$\mathbf{y}_s(mF_0 d_1) = \mathbf{H}(m)\mathbf{c}_g(mF_0 d_1) + \mathbf{b}_a(mF_0 d_1) \quad (4.77)$$

Soit, pour chaque fréquence discrète m, le système suivant :

$$\begin{aligned} y_s(mF_0 d_1, 1) =& \mu(1,1,m,m) a_1 c[m] g(1, d_1, m, m) \\ &+ \mu(2,1,m,m) a_2 c[m] g(2, d_1, m, m) + B_a(mF_0 d_1) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} y_s(mF_0 d_1, 2) =& \mu(1,2,m,m) a_1 c[m] g(1, d_1, m, m) \\ &+ \mu(2,2,m,m) a_2 c[m] g(2, d_1, m, m) + B_a(mF_0 d_1) \end{aligned} \quad (4.79)$$

L'intérêt de cette formulation est double.

1. Tout d'abord, on a un système à I équations avec I inconnues qui sont $a_1 c[m] g(1, d_1, m, m)$ et $a_2 c[m] g(2, d_1, m, m)$. Or, il est aisé d'extraire de $a_1 c[m] g(1, d_1, m, m)$ la composante $c[m]$, puisqu'on connait tous les paramètres de $g(1, d_1, m, m)$. En pratique, afin de limiter les manipulations,

nous ne récupérons que la solution correspondant au trajet choisi, soit $j = 1$. Ces systèmes $I \times I$ sont à résoudre autant de fois qu'on a de fréquences discrètes, à savoir M. Pour un signal DMT, on peut même se contenter de le résoudre seulement pour $M/2$ fréquences discrètes.

2. Dans tous les cas, il s'agit de systèmes simples de taille raisonnable, puisqu'ils ont la taille du nombre de trajets considérés (dans notre cas, le nombre de trajets simulés varie entre 3 et 5, soit des systèmes 3×3 ou 5×5). Ils se résolvent rapidement.

Par cette formulation, nous avons utilisé l'information récupérée sur les différents capteurs couplés à une représentation fréquentielle discrète. C'est cette dernière qui est l'élément central de cette méthode par inversion matricielle. En effet, la projection sur la famille de fréquences $\mathbf{f}_\delta$ nous permet, par un bon choix de δ, de considérer chaque fréquence séparément selon l'hypothèse (4.70).

Il est important de s'interroger sur l'inversibilité de la matrice $\mathbf{H}(m)$. On peut remarquer que si on choisit les ζ_j^n tel que $\forall n \in [1, N]; \forall j \in [1...I]; \zeta_j^n = \frac{\tau_j^n}{d_{i_0}}$ alors la matrice $\mathbf{H}(m)$ est inversible pour toute valeur de m telle que $mF_0 > 0$ ou $d_{i_0} > 0$. En effet, les éléments de $\mathbf{H}(m)$ sont les produits scalaires sur N points entre les vecteurs $\left(e^{j2\pi mF_0\tau_j^n}\right)_{1\leq n\leq N}$. Ainsi, la matrice $\mathbf{H}_{d_{i_0}}[m]$ est une matrice de Gram, elle est définie positive pour $m \neq 0$ et par conséquent inversible. La seule exception est pour le cas $m = 0$, la matrice est alors liée et non inversible.
C'est pourquoi, tant que l'on détecte le bon nombre de trajets et que l'on estime correctement les différents paramètres du canal, ce système peut toujours être résolu. Cette méthode permet au final de retrouver le signal émis pour toutes les fréquences considérées.

4.4.3 Extension à la formation de voies

Il est aisé d'adapter le modèle précédent à la formation de voies afin de supprimer l'influence des trajets multiples. Si on considère que l'onde arrivant sur l'antenne est une onde plane, on aura :

$$y^n(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i s(d_i t - \tau_i^n) + b^n(t) \tag{4.80}$$

Avec

$$\tau_i^n = \tau_i^0 + (n-1)\frac{\Delta h}{c} sin(\theta_i)$$

À ce moment-là, les coefficients de la matrice $\mathbf{H}(m)$ deviennent :

$$\mu(i,j,m,m') = \frac{1}{N} e^{-j2\pi F_0 m(\tau_i^0 - \tau_j^0)} \sum_{n=1}^{N} e^{-j2\pi F_0 m \frac{\Delta h}{c}(sin(\theta_i) - sin(\theta_j))} \tag{4.81}$$

On peut faire le parallèle entre cette expression et celle de (4.17), la transformée de Fourier en continu de la matrice de formation de voies. La méthode de l'inversion matricielle peut alors être considérée comme une amélioration de la formation de voies.
Il est ainsi possible d'améliorer les résultats obtenus par formation de voies si les angles d'arrivées des différents trajets sur l'antenne ont été parfaitement estimés. Au lieu d'estimer les retards sur chaque capteur, il n'y a que les angles d'arrivées à connaître dans le cas d'une onde plane. On peut remarquer sous ce formalisme que la matrice $\mathbf{H}(m)$ n'est pas inversible s'il existe deux angles d'arrivées égaux arrivant sur l'antenne. $\exists i, j, 1 \leq i, j \leq I \quad \theta_j = \theta_i$. Ceci rejoint les observations faites sur la section formation de voies. De plus, quand les angles des ondes planes arrivant sur l'antenne sont proches mais différents, la matrice $\mathbf{H}(m)$ peut être mal conditionnée ce qui peut occasionner des erreurs lors de la mise en pratique.

4.4.4 Compromis séparation des trajets/ SNR

La méthode MIB (Matricial Inversion of Beamforming) suppose une estimation parfaite du nombre de trajets et des angles d'arrivées de ces derniers sur l'antenne. L'estimation des angles d'arrivées se fait en utilisant les résultats de la formation de voies. Pour arriver à un tel résultat, il est nécessaire que la séparation des trajets se soit effectuée correctement. Mais dès lors que la formation de voies a permis de bien isoler les trajets, on peut s'interroger sur l'utilité de l'inversion matricielle. En effet, cette dernière, si elle annule complètement l'influence des autres trajets, peut augmenter l'influence du bruit. L'inversion matricielle augmentera d'autant plus l'influence du bruit si la matrice $\mathbf{H}(m)$ est mal conditionnée, ce qui arrive quand les angles d'arrivées des différents trajets sont proches. Il est donc tout à fait plausible d'avoir des cas où les résultats de la formation de voies classique sont diminués par l'interférence entre voies mais restent préférables à ceux obtenus par une méthode MIB qui augmenterait le bruit. On est devant un compromis.

4.4.5 Simulation de l'inversion matricielle

Comme dans la section précédente sur la formation de voies, 4.3, nous allons considérer deux scénarios. La distance émetteur/récepteur est toujours d'un kilomètre. Le récepteur est une antenne de plusieurs capteurs dont le premier est à une profondeur de 30 mètres. L'espace entre capteurs est de 1 mètre comme précédemment. Dans le premier scénario, l'émetteur est à une profondeur de 50 mètres, dans le deuxième la profondeur est de 15 mètres. Dans les deux cas, l'émetteur est en mouvement avec une vitesse de 5.6 m/s. Le deuxième scénario est considéré comme un cas non favorable car la séparation des trajets est moins marquée. Le signal transmis est toujours un signal DMT de durée utile $T_0 = 0.2$s, comportant $M = 4096$ porteuses dont 2048 utiles étalées entre 5000 Hz et 15000 Hz.

Avant de pouvoir effectuer l'inversion matricielle, il nous faut vérifier que l'hypothèse (4.70) est valide. Pour tous les trajets possibles, nous mesurons le rapport suivant :

$$p \in \mathbf{Z} \quad , \frac{\|\mu(i,j,m,m+p)g(i,d_{i_0},m,m+p)\|^2}{\|\mu(i,j,m,m)g(i,d_{i_0},m,m)\|^2} \tag{4.82}$$

Ce rapport a été calculé en simulation pour les différents trajets considérés. Les résultats sont présentés sur les figures 4.21 et 4.22. L'écart Doppler étant suffisamment faible entre les trajet 1 et 2, nous n'avons aucun soucis pour valider l'hypothèse. Par contre, pour le trajet 3, nous voyons que l'hypothèse est fausse pour les hautes fréquences. Nous allons tout de même pratiquer l'inversion matricielle.

Nous effectuons l'inversion matricielle pour le trajet $i_0 = 1$. En sortie de l'inversion matricielle, nous ne considérons donc que ce trajet. Le rapport signal sur bruit est calculé sur un capteur en réception avant tout traitement.

Les constellations avant et après inversion matricielle sont présentées sur la figure 4.23. Quand la puissance du bruit est faible, l'intérêt de l'inversion matricielle est visible car les constellations sont beaucoup plus concentrées.

Les résultats 4.24 et 4.25 montrent les performances dans les deux scénarios. Les figures 4.26 et 4.27 permettent de comparer les résultats avec la formation de voies. Il apparait que si la séparation des trajets est bien effectuée, l'inversion matricielle permet tout de même d'augmenter les performances de

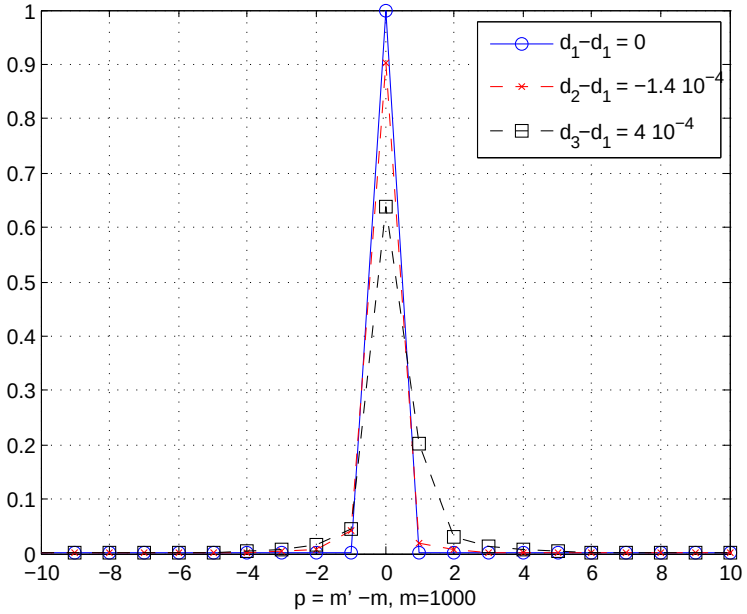


FIGURE 4.21 – Rapport d'énergie pour l'hypothèse de séparabilité des fréquences, fréquence à 5000 Hz.

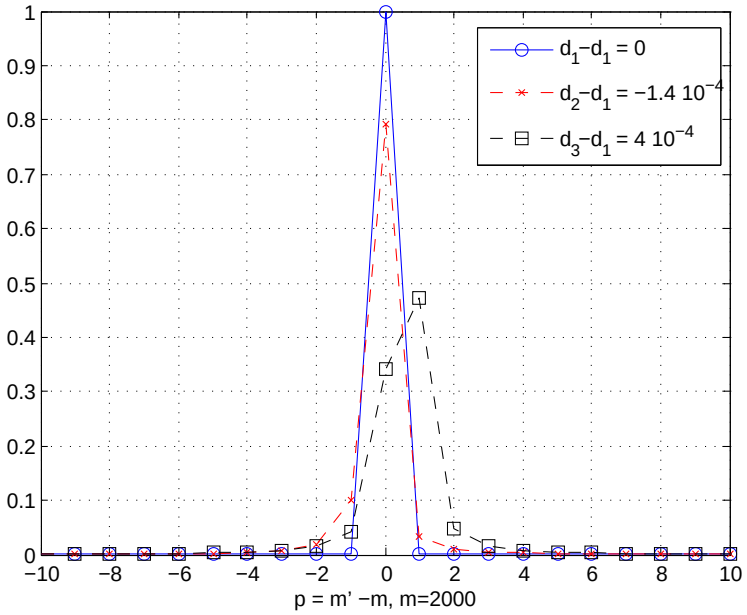
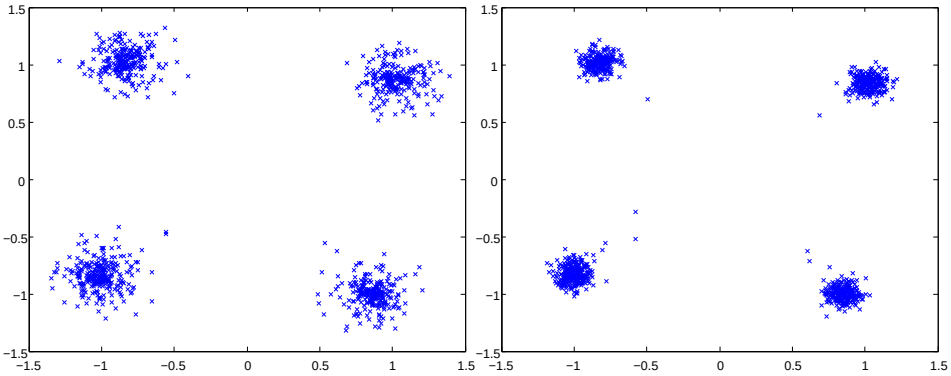


FIGURE 4.22 – Rapport d'énergie pour l'hypothèse de séparabilité des fréquences, fréquence à 10000 Hz.



(a) Constellation après formation de voies.

(b) Constellation après inversion matricielle

FIGURE 4.23 – Comparaison des constellations après formation de voies et après inversion matricielle sur 8 capteurs. SNR = 23 dB.

façon efficace et ce quel que soit le nombre de capteurs en réception. Dans le deuxième scénario, l'inversion matricielle apparait plus efficace que la formation de voies seulement si le rapport signal sur bruit est bon.

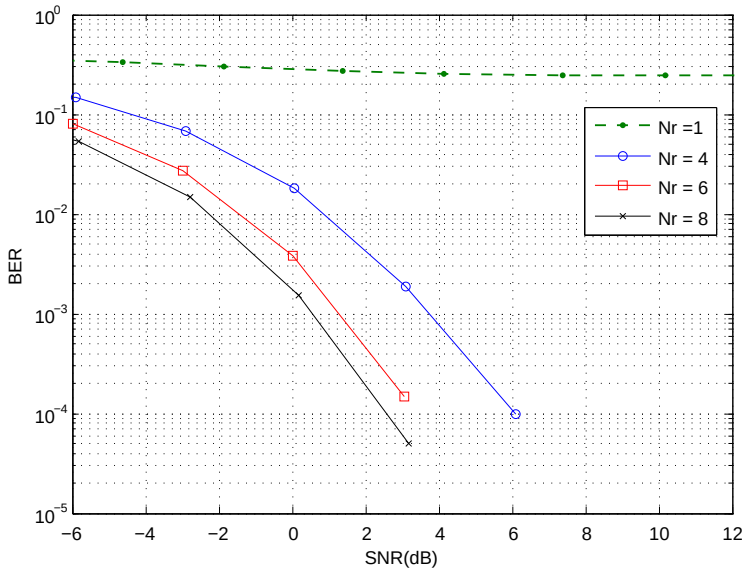


FIGURE 4.24 – Taux d'erreur binaire après inversion matricielle, après compensation Doppler, en fonction du nombre de capteurs N_r.

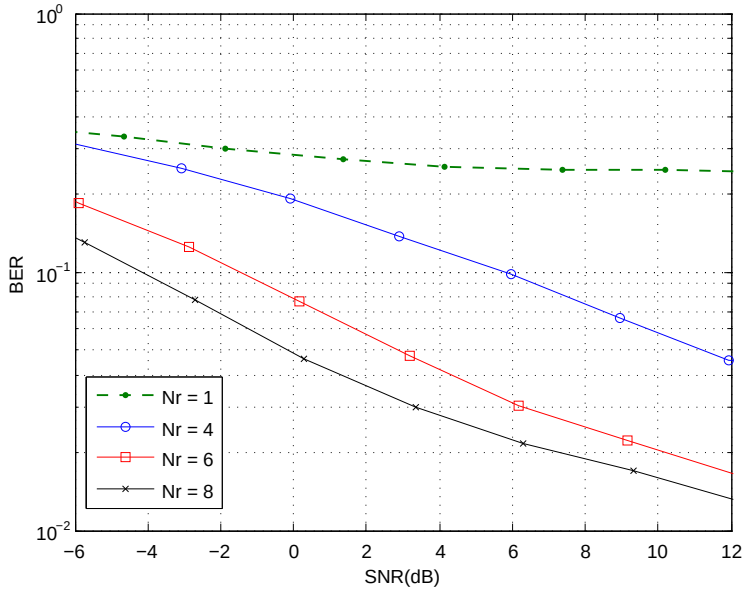


FIGURE 4.25 – Taux d'erreur binaire après inversion matricielle, après compensation Doppler, en fonction du nombre de capteurs N_r, cas non favorable.

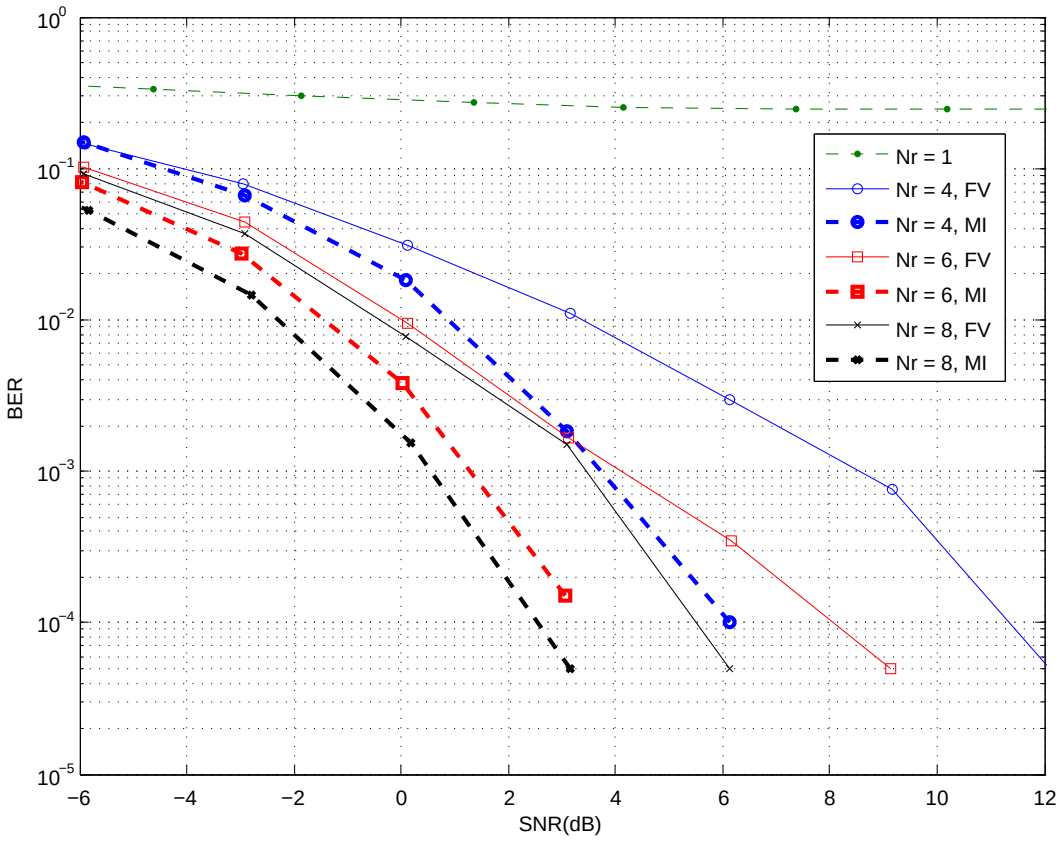


FIGURE 4.26 – Comparaison de performances entre la formation de voies et l'inversion matricielle, en fonction du nombre de capteurs N_r.

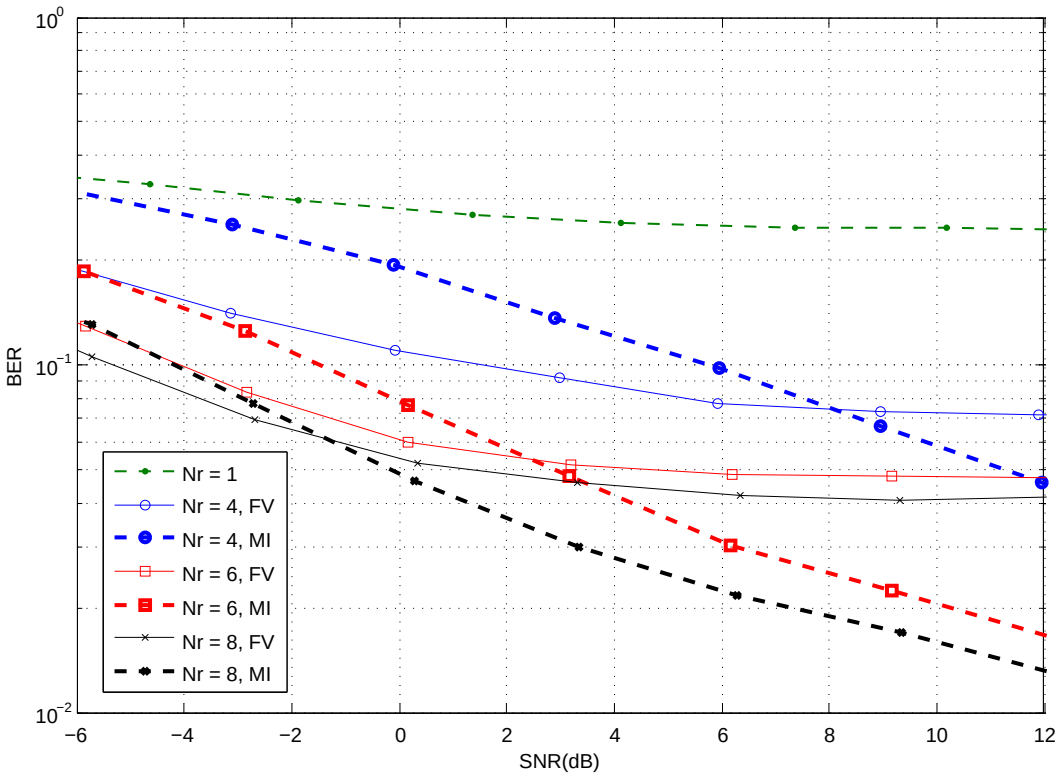


FIGURE 4.27 – Comparaison de performances entre la formation de voies et l'inversion matricielle, en fonction du nombre de capteurs N_r. Cas non favorable.

4.5 Conclusion sur la compensation de l'effet Doppler sur un canal multitrajet

Ce chapitre présente un problème rarement évoqué dans la littérature. En effet, compte tenu de la géométrie du problème et des vitesses possibles de l'émetteur dans le milieu sous-marin, il est tout à fait réaliste de considérer que chaque trajet a un paramètre Doppler différent. Ceci complique considérablement la compensation de l'effet Doppler en réception, les méthodes développées en mono-trajet étant alors inutilisables.

La solution préconisée dans cette thèse repose sur l'utilisation de la diversité spatiale. Dans la littérature, la diversité spatiale a été exploitée récemment pour améliorer les performances de système de communication OFDM. Il s'agit de MIMO-OFDM, [Ormondroyd 2007], [Li 2007a]. Mais jamais la diversité spatiale n'est utilisée pour résoudre des problèmes liés à l'effet Doppler ce qui a été fait ici.

En considérant que pour un trajet donné, le paramètre Doppler reste le même sur tous les capteurs mais que les retards de propagation sont eux différents entre deux capteurs, on peut pratiquer une séparation des trajets. La formation de voies est une méthode classique en milieu sous-marin, notamment pour les sonars et pour la télémétrie. Elle est ici aussi utilisée pour séparer les trajets arrivant sur l'antenne. Chaque voie ainsi séparée étant affectée par un facteur d'échelle unique, il est aisé de compenser l'effet Doppler en utilisant les méthodes développées dans le chapitre 3.

Cependant, la formation de voies n'est pas parfaite. Les différents trajets ne sont jamais séparés totalement. Nous développons dans cette thèse une nouvelle méthode inspirée de la formation de voies mais qui assure en absence de bruit une séparation totale des trajets arrivant sur l'antenne, si le nombre de capteurs est supérieur au nombre de voies. Cette méthode, nommée inversion matricielle pour la formation de voie, utilise la propriété de la transformée de Fourier de permettre une séparation des termes de retard temporel et de signal. Ainsi exprimé pour des fréquences discrètes, il est alors possible de retrouver l'information sur une fréquence donnée en résolvant un système d'équations simples faisant intervenir les paramètres du canal et les signaux récupérés sur chaque capteur. En réalisant ce processus sur toutes les fréquences porteuses d'information, on retrouve les éléments émis.

Finalement, cette méthode, testée en simulation, assure une meilleure séparation des trajets mais se révèle plus sensible au bruit du canal.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons considéré la propagation d'un signal multiporteuse large bande entre deux objets communicants en mouvement. La propagation des ondes acoustiques est considérée selon un modèle en rayons, correct pour les signaux hautes fréquences utilisés.

Les signaux de communication choisis sont des signaux de type DMT, une variante de l'OFDM en bande de base. Ce choix s'est fait dans l'optique de pouvoir compenser efficacement en réception les trajets multiples dus aux réflexions de l'onde acoustique sur la surface et le fond marin.

Cependant, les signaux multiporteuses sont très sensibles à l'effet Doppler. Ce dernier est très important en milieu sous-marin du fait de la faible vitesse des ondes acoustiques comparée à la vitesse relative entre émetteur et récepteur. Nous avons montré que compte tenu des valeurs possibles du paramètre Doppler, agrandir l'intervalle interporteuse en diminuant la durée utile du signal OFDM ne ferait que limiter drastiquement le débit du fait de la présence d'un intervalle de garde de durée incompressible. De plus ceci ne nous garantirait en rien la conservation de l'information en réception. L'orthogonalité interporteuse pourrait être tout de même perdue. Finalement, nous avons choisi les paramètres du signal DMT émis en fonction de la précision de l'estimation du paramètre Doppler et des paramètres du canal, notamment le retard maximal possible. Ceci nous donne une limite sur le débit maximum envisagé.

Pour assurer un débit élevé, il est donc indispensable d'avoir un estimateur du paramètre Doppler précis et robuste. Nous développons trois estimateurs basés sur une connaissance partielle ou totale du signal émis.
Testé en simulation, l'estimateur du maximum de vraisemblance est celui qui offre de meilleurs résultats. Mais il se base sur une connaissance totale du signal émis ce qui signifie qu'il est nécessaire de réémettre régulièrement un signal test pour actualiser la valeur du paramètre Doppler estimé.
Cet estimateur se révèle plus efficace sur des signaux variant fortement selon le paramètre Doppler ce qui est le cas pour les signaux DMT. Ces derniers sont plus intéressants pour l'estimation que des modulations linéaires de fréquence habituellement utilisées pour la synchronisation en milieu sous-marin.

Nous avons également développé deux estimateurs basés sur des porteuses pilotes. Ceci nous permet d'actualiser la valeur estimée du paramètre Doppler sur chaque symbole DMT, tout en communiquant en même temps. Le canal sous-marin étant dynamique c'est une solution intéressante bien que nous perdions en robustesse vis-à-vis du bruit, comparé à l'estimateur du maximum de vraisemblance.
La première méthode d'estimation par porteuses pilotes s'appuie sur des sous-porteuses portant des symboles QPSK répartis régulièrement dans le spectre du signal. Cette méthode se révèle très sensible au nombre de porteuses utilisées pour l'estimation. Mais elle apporte cependant la robustesse et l'efficacité nécessaires pour permettre une estimation assez précise du paramètre Doppler pour assurer le débit que nous nous sommes imposés.
La deuxième méthode s'appuie sur la présence de porteuses nulles réparties dans le spectre du signal DMT. En simulation, cette méthode se révèle moins sensible au nombre de porteuses pilotes du signal que la précédente. Elle offre cependant de bonnes performances, notamment quand le rapport signal sur bruit est favorable. Ce second estimateur présente le grand avantage de consommer bien moins d'énergie à l'émission ce qui peut se montrer intéressant pour des véhicules sous-marins devant assurer une grande autonomie.

Après avoir estimé le paramètre Doppler, il est maintenant nécessaire de le compenser. Nous nous sommes tout d'abord concentrés sur les techniques d'estimation sur des canaux monotrajets. L'effet Doppler considéré dans ces travaux est un effet Doppler large bande, les techniques de compensation classiques utilisées en communication hertzienne ne sont pas adaptées. Sur les simulations, elles se révèlent inadaptées.

Deux méthodes de compensation de l'effet Doppler large bande ont été exposées.

La première méthode est utilisée en milieu sous-marin depuis le début des années 2000. Elle consiste à un rééchantillonnage du signal reçu pour corriger le changement d'échelle provoqué par le canal. Nous avons montré que la connaissance des filtres d'émission et de réception permet d'obtenir un rééchantillonnage plus robuste vis-à-vis du bruit. L'influence des filtres d'émission et de réception dans ce procédé n'avait encore jamais été prise en compte.

La deuxième méthode de compensation s'appuie sur une recherche de la famille de vecteurs fréquentiels émis affectés par l'effet Doppler induit par

le canal. Cette deuxième méthode ne requiert aucune connaissance sur les filtres utilisés en émission et en réception.

Ces méthodes assurent une complète compensation de l'effet Doppler et ce quelles que soient les vitesses relatives entre l'émetteur et le récepteur.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous abordons un problème rarement évoqué en milieu sous-marin. Compte tenu de la géométrie du problème, nous considérons que l'effet Doppler est suffisamment différent sur chaque trajet pour considérer que le paramètre Doppler associé est différent. Cette considération est renforcée par les derniers travaux d'estimation réalisés dans le domaine [Josso 2010] et par le modèle géométrique utilisé.

En considérant que pour un trajet donné, le paramètre Doppler reste le même sur tous les capteurs mais que les retards de propagation sont eux différents entre deux capteurs, on peut pratiquer une séparation des trajets. Nous proposons deux approches pour résoudre ce problème. En s'appuyant sur la diversité spatiale, il est possible de séparer les divers trajets arrivant sur l'antenne en réception. Les différentes voies ainsi séparées peuvent être traitées pour la compensation Doppler avec les méthodes développées dans cette thèse.

La première méthode exposée est une formation de voies classique. Des simulations sont effectuées sur un nombre variable de capteurs avec des scénarios plus ou moins favorables à la formation de voies afin de tester la robustesse et l'efficacité de cette méthode dans le cas d'un canal avec effet Doppler différent sur chaque trajet.
La formation de voies est utilisée comme un repère de performance pour la méthode suivante. Cette dernière, la méthode d'inversion matricielle pour la formation de voies, est réellement intéressante du fait de sa capacité à séparer totalement les différents trajets arrivant sur l'antenne, contrairement à la formation de voies qui présente toujours des résidus des trajets restants.

L'inversion matricielle s'appuie sur la capacité de la transformée de Fourier à séparer les composantes retard et signal. Ainsi, en ayant plus de capteurs en réception que de trajets considérés, il est possible, par une combinaison linéaire des transformées de Fourier sur tous les capteurs, de retrouver l'élément émis sur une fréquence. En reproduisant ce processus sur toutes les fréquences discrètes du signal, il est alors possible de retrouver tous les éléments émis sur le signal OFDM sans influence des trajets multiples et

sans effet Doppler.

Cette méthode est finalement testée en simulation sur un canal à trajets multiples et comparée à la formation de voies classique pour différents scénarios plus ou moins favorables du fait de la séparabilité des différents trajets arrivant sur l'antenne.
Il ressort que si le rapport signal sur bruit est favorable, l'inversion matricielle offre de meilleurs résultats.

Nos travaux ont aussi ouvert quelques perspectives. Tout d'abord, afin de conforter l'intérêt pratique de ce travail, il conviendrait de tester les différentes méthodes d'estimation et de compensation évoquées sur des données réelles avec en émission des signaux de type DMT à l'émission. Hélas, nous ne disposions pas des données suffisantes pour effectuer les tests adéquats, à part pour l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre Doppler avec en émission des modulations linéaires de fréquences.

Une extension immédiate aux travaux réalisés pourraient être de généraliser les méthodes d'estimation et de compensation pour toute modulation multiporteuse et pas seulement pour les modulations DMT. On pense notamment aux modulations CP-OFDM et ZP-OFDM.

Une autre piste serait la recherche de codage approprié aux éléments transmis sur chaque porteuse afin de mieux résister à l'effet Doppler. En effet, le décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler est plus important sur les hautes fréquences. Il pourrait alors être intéressant de mettre plus d'information sur les basses fréquences (bit loading). On pourrait également penser à une méthode pour étaler l'information transmise sur toutes les porteuses, par une modulation de type MC-CDMA, afin encore une fois de mieux résister à l'effet Doppler sur les hautes fréquences en utilisant les basses fréquences, moins affectées.

L'inversion matricielle pourrait s'étendre aisément à d'autres milieux et à d'autres applications car elle n'est pas liée au problème du Doppler en milieu sous-marin, ni aux signaux OFDM. En effet, cette méthode peut se généraliser pour toutes les applications où il est nécessaire de séparer différents trajets arrivant sur une antenne.

Dans le cas d'un canal multitrajet, l'analyse doit être poussée plus avant. Si tous les trajets ont le même paramètre Doppler, ce qui est envisageable dans un milieu très peu profond, il peut alors être intéressant de ne pas procéder à une séparation des trajets mais à une égalisation classique avec un coefficient par

sous-porteuse, après compensation Doppler. Une étude pourrait être menée pour déterminer à partir de quelle différence entre les paramètres Doppler des différents trajets, il est nécessaire de les séparer pour obtenir de meilleurs résultats.

Annexe A

Développement de l'équation d'onde

Le signal analytique de s, noté $\underline{s}$ est de la forme :

$$\underline{s}(t,\vec{r}) = A(\vec{r})e^{j2\pi\nu_0(t-\tau(\vec{r}))} \tag{A.1}$$

s est une onde plane monochromatique de fréquence ν_0, d'amplitude $A(\vec{r})$, et de phase $\tau(\vec{r})$. $A(\vec{r})$ est l'enveloppe du signal s.

Les fronts d'onde sont définis comme étant les surfaces de phase constante, soit $\tau(\vec{r}) =$ constante pour une onde monochromatique. Les rayons sont orthogonaux aux fronts d'onde. On va maintenant chercher à connaître les trajets des rayons.

L'équation (1.1) permet alors d'écrire que cette onde acoustique suit la loi de propagation suivante :

$$\nabla^2\underline{s}(\vec{r}) = -k^2(\vec{r})\underline{s}(\vec{r}) \tag{A.2}$$

Avec $k(\vec{r}) = \frac{2\pi\nu_0}{c(\vec{r})}$. $c(\vec{r})$ est la vélocité de l'onde acoustique au point de l'espace représenté par le vecteur position $\vec{r}$ de coordonnées (x,z). En séparant partie réelle et imaginaire, l'équation (A.2) devient :

$$\nabla^2 A(\vec{r}) - (2\pi\nu_0)^2 A(\vec{r}) \left\|\overrightarrow{\nabla}\tau\right\|^2 + k^2(\vec{r})A(\vec{r}) = 0 \tag{A.3}$$

$$2\nabla\tau(\vec{r})\nabla A(\vec{r}) + A(\vec{r})\nabla^2\tau(\vec{r}) = 0 \tag{A.4}$$

avec $\overrightarrow{\nabla}\tau = \frac{\partial\tau}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\tau}{\partial z}\vec{j}$. En optique géométrique, on fait l'hypothèse suivante :

$$\frac{\nabla^2 A(\vec{r})}{A(\vec{r})} << k^2(\vec{r}) \tag{A.5}$$

Cette équation est une généralisation de l'approximation B.K.W. [Tolstoy 1987], [Jensen 1994]. Cette approximation reste vraie sur des distances courtes et pour des fréquences élevées ce qui est notre cas. Elle nous

permet ici de trouver des solutions à l'équation différentielle. Des équations (A.5) et (1.1) on déduit l'équation eikonale.

$$\left(\frac{\partial\tau(\vec{r})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau(\vec{r})}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2(\vec{r})} \tag{A.6}$$

$$\left\|\overrightarrow{\nabla}\tau\right\|^2 = \frac{1}{c^2(\vec{r})} \tag{A.7}$$

On note l l'abscisse curviligne qui correspond à la longueur du trajet du rayon depuis son origine. Par définition des fronts d'onde et des rayons, on sait que le vecteur $\overrightarrow{\nabla}\tau$ donne la direction de propagation du rayon. On en déduit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = c(l)\overrightarrow{\nabla}\tau \tag{A.8}$$

De cette dernière équation on déduit :

$$\frac{\partial x}{\partial p} = c(l)\frac{\partial\tau}{\partial x} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = c(l)\frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{A.10}$$

Il est nécessaire de réaliser quelques manipulations d'équations pour connaître le trajet d'un rayon. On considère la dérivée par rapport à p de l'équation (A.8).

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\left(\overrightarrow{\nabla}\tau\right) \tag{A.11}$$

Sur l'axe des x, cette dernière équation nous donne :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{\partial x}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right) \tag{A.12}$$

Par projection de l'abscisse curviligne sur la base $(O,\vec{i},\vec{j})$, on obtient :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{\partial x}{dl}\right) = \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial^2\tau}{\partial y\partial x} \tag{A.13}$$

En utilisant les équations (A.10), on obtient :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{\partial x}{dl}\right) = c(l)\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + c(l)\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{\partial^2\tau}{\partial z\partial x} \tag{A.14}$$

$$= \frac{c(l)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right) \tag{A.15}$$

En utilisant l'équation (A.7), il est possible d'écrire :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{\partial x}{dl}\right) = \frac{c(l)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c^2(l)}\right) \tag{A.16}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{\partial x}{dl}\right) = 0 \tag{A.17}$$

On peut généraliser ces calculs sur les deux directions de la base. Soit :

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{c(l)}\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\left(\overrightarrow{\nabla}\tau\right) = 0 \tag{A.18}$$

Dès lors, on peut en déduire, par intégration sur l'abcisse curviligne, l'expression de τ pour chaque abscisse du rayon.

$$\tau(l) = \tau(0) + \int_0^l \frac{dl'}{c(l')} \tag{A.19}$$

Le terme de l'intégrale correspond au temps du trajet entre l'origine du rayon et le point d'abscisse curviligne l.

Annexe B

Estimation du paramètre Doppler pour un signal réel quelconque

Il est possible de généraliser l'estimateur du maximum de vraisemblance pour un facteur d'échelle d à un signal réel quelconque affecté d'un bruit additif gaussien. On rappelle l'équation (2.4) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}(d) + \mathbf{b} \tag{B.1}$$

Ici, $\mathbf{s}(d)$ est un signal réel quelconque connu du récepteur, affecté par un facteur d'échelle d. On note $s[q](\delta) = s(\delta q T_r)$ les échantillons du signal réel. $\mathbf{b}$ contient les échantillons du bruit additif gaussien dont les éléments sont indépendants les uns des autres. Comme précédemment, nous allons considérer la fonction de vraisemblance :

$$\Lambda(\delta) = p_{\mathbf{s},\delta}(\mathbf{y}) \tag{B.2}$$

On considère qu'il est possible en réception de construire le signal $\mathbf{s}(\delta)$ pour toutes les valeurs de δ.

Par indépendance des composantes du vecteur $\mathbf{y}$, on peut écrire :

$$\Lambda(\delta) = \prod_{q=0}^{Q-1} p_{\mathbf{s},\delta}(y[q]) \tag{B.3}$$

La densité de probabilité pour la variable aléatoire complexe gaussienne centrée est :

$$p(y[q]|s[q](\delta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|y[q]-s[q](\delta)|^2}{2\sigma^2}} \tag{B.4}$$

Après quelques calculs, on va obtenir :

$$\Lambda(\delta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{Q/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{s}(\delta)\|^2}{2\sigma^2}} \tag{B.5}$$

Soit l'estimateur suivant :

$$\hat{d} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} \left(\Re \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}(\delta) \rangle \right) - \frac{\|\mathbf{s}(\delta)\|^2}{2} \right) \tag{B.6}$$

On peut également exprimer la borne de Cramér-Rao suivant (2.14).

$$BCR = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln(\Lambda(d))}{\partial d^2}\right]} \tag{B.7}$$

Si on dispose d'un estimateur non biaisé, alors, on aura :

$$BCR = \frac{\sigma^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} \left| \frac{\partial s[q](d)}{\partial d} \right|^2} = \frac{2\sigma^2}{\left\| \frac{\partial \mathbf{s}(d)}{\partial d} \right\|^2} \tag{B.8}$$

Pour obtenir une bonne estimation, il faut choisir un signal s très sensible à l'effet Doppler pour minimiser la borne de Cramér-Rao.

Annexe C

Calcul du noyau d'erreur d'interpolation

Dans cette annexe, on établit la formule exprimant le noyau d'erreur d'interpolation pour un pas d'échantillonnage $T \in \mathbb{R}+$ et en notant ϕ_T et $\tilde{\phi}_T$ le filtre d'interpolation et son dual, respectivement. On se place par ailleurs dans le cas où ces filtres sont réels et symétriques et on pose enfin

$$\phi_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\phi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \phi_T^{(k)}(t) = \phi_T(t - kT) \tag{C.1}$$

$$\tilde{\phi}_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\tilde{\phi}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \tilde{\phi}_T^{(k)}(t) = \tilde{\phi}_T(t - kT) \tag{C.2}$$

Dans le domaine de Fourier, on a alors

$$\hat{\phi}_T(\nu) = \sqrt{T}\hat{\phi}(\nu T) \quad \phi_T^{(k)}(\nu) = e^{-j2\pi kT}\hat{\phi}_T(\nu) \tag{C.3}$$

$$\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu) = \sqrt{T}\hat{\tilde{\phi}}(\nu T) \quad \hat{\tilde{\phi}}_T^{(k)}(\nu) = e^{-k2\pi kT}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu) \tag{C.4}$$

On rappelle la formule de sommation de Poisson :

$$\frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{m}{T}\right) e^{j2\pi m\frac{t}{T}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t - kT) \tag{C.5}$$

ainsi que la formulation inverse qui s'obtient de façon similaire en utilisant les séries de Fourier :

$$T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(kT)e^{-j2\pi k\nu T} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \tag{C.6}$$

On définit la fonction d'autocorrélation de ϕ_T :

$$a_{\phi_T}(\tau) = \langle \phi_T(t - \tau), \phi_T(t)\rangle = (\phi_T \otimes \phi_T)(\tau) = (\phi \otimes \phi)(\tau/T) = a_\phi(\tau/T) \tag{C.7}$$

puisque ϕ_T est réel et symétrique.

On considère en particulier la version échantillonnée à la période T de cette fonction d'autocorrélation :

$$\tilde{a}_{\phi_T}(\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{\phi_T}(kT)\delta(\tau - kT) = a_{\phi_T}(\tau)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\tau - kT) \tag{C.8}$$

et sa transformée de Fourier $A_{\phi_T}(\nu)$:

$$A_{\phi_T}(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{\phi_T}(kT)e^{-j2\pi\nu kT} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{\phi}(k)e^{-j2\pi\nu kT} = A_{\phi}(\nu T) \tag{C.9}$$

d'où, en utilisant (C.6) :

$$A_{\phi_T}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{a}_{\phi_T}\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \tag{C.10}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^2 \tag{C.11}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(\nu T - m)^2 \tag{C.12}$$

d'après (C.7).

Afin d'exprimer l'erreur d'approximation, on part du cas général et de la formule de reconstruction :

$$Q_T f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right]\phi_T(t - kT) \tag{C.13}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right]\phi_T^{(k)}(t) \tag{C.14}$$

L'erreur s'exprime ainsi :

$$\epsilon(f, \phi_T, T) = \|f - Q_T f\| \tag{C.15}$$

$$\epsilon(f, \phi_T, T)^2 = \|Q_T f\|^2 - 2\langle f, Q_T f\rangle + \|f\|^2 \tag{C.16}$$

On s'intéresse tout d'abord au premier terme de cette équation :

$$\|Q_T f\|^2 = \left\|\widehat{Q_T f}\right\|^2 \tag{C.17}$$

D'où :

$$\|Q_T f\|^2 = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right]\hat{\phi}_T^{(k)}(\nu)\right\|^2$$

$$= \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right]e^{-j2\pi Tk\nu}\hat{\phi}_T(\nu)\right\|^2$$

On en déduit alors que :

$$\|Q_T f\|^2 = \left\| U_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu) \right\|^2 \tag{C.18}$$

avec :

$$U_T(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau \right] e^{-j2\pi Tkv} \tag{C.19}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|Q_T f\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_T(\nu)^2 \left|U_T(\nu)\right|^2 d\nu \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{m}{T}-\frac{1}{2T}}^{\frac{m}{T}+\frac{1}{2T}} \hat{\phi}_T(\nu)^2 \left|U_T(\nu)\right|^2 d\nu \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \hat{\phi}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^2 \left|U_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\right|^2 d\nu
\end{aligned}$$

L'équation (C.19) montre que U_T est une fonction $\frac{1}{T}$-périodique : $U_T(\nu) = U_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)$. On en déduit que :

$$\|Q_T f\|^2 = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^2 \left|U_T(\nu)\right|^2 d\nu \tag{C.20}$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} A_{\phi_T}(\nu) \left|U_T(\nu)\right|^2 d\nu \tag{C.21}$$

d'après (C.12)

Intéressons-nous maintenant au calcul de $U_T(\nu)$. D'après (C.19), on a :

$$U_T(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(f \otimes \tilde{\phi}_T\right)(kT) e^{-j2\pi kTv} \tag{C.22}$$

En utilisant (C.6), on obtient :

$$U_T(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\left(f \otimes \tilde{\phi}_T\right)}\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \tag{C.23}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu - \frac{m}{T})\hat{\tilde{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \tag{C.24}$$

D'où, en utilisant (C.21) :

$$\|Q_T f\|^2 = \frac{1}{T} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} A_{\phi_T}(\nu) \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \hat{\bar{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right) \times \left(\hat{f}\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \hat{\bar{\phi}}_T\left(\nu - \frac{n}{T}\right)\right)^* d\nu \quad \text{(C.25)}$$

En faisant le changement de variable $\nu \leftarrow \nu - \frac{m}{T}$, on obtient alors :

$$\|Q_T f\|^2 = \frac{1}{T} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{m}{T}-\frac{1}{2T}}^{\frac{m}{T}+\frac{1}{2T}} A_{\phi_T}(\nu) \hat{f}(\nu) \hat{\bar{\phi}}_T(\nu) \times \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\nu - \frac{n-m}{T}\right)^* \hat{\bar{\phi}}_T\left(\nu - \frac{n-m}{T}\right) d\nu \quad \text{(C.26)}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\phi_T}(\nu) \hat{f}(\nu) \hat{\bar{\phi}}_T(\nu) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^* \hat{\bar{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right) d\nu \quad \text{(C.27)}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\phi_T}(\nu) |\hat{f}(\nu)|^2 \hat{\bar{\phi}}_T(\nu)^2 d\nu + \quad \text{(C.28)}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\phi_T}(\nu) \hat{f}(\nu) \hat{\bar{\phi}}_T(\nu) \sum_{m\neq 0} \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^* \hat{\bar{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right) d\nu \quad \text{(C.29)}$$

On va maintenant s'intéresser au deuxième terme de l'équation (C.16).

$$\begin{aligned}
\langle f, Q_T f\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right] \phi_T(t-kT)dt \\
&= \left\langle \hat{f}, \widehat{Q_T f}\right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^* \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\tilde{\phi}_T(\tau - kT)d\tau\right] \; e^{-2\pi jTk\nu}\hat{\phi}_T(\nu)d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^* U_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)d\nu \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^* \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\hat{\tilde{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\hat{\phi}_T(\nu)d\nu \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 \hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)d\nu + \\
&\quad \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)^* \sum_{m\neq 0} \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\hat{\tilde{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\hat{\phi}_T(\nu)d\nu
\end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression de l'erreur totale d'approximation :

$$\begin{aligned}
\epsilon(f, \phi_T, T)^2 = &\int \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 \left(1 - \frac{2}{T}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu) + \frac{1}{T}A_{\phi_T}(\nu)\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2\right)d\nu \\
&+\frac{1}{T}\sum_{m\neq 0}\int \hat{f}(\nu)^*\hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\hat{\tilde{\phi}}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)[A_{\phi_T}(\nu)\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^* - 2\hat{\phi}_T(\nu)]d\nu
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Pour obtenir un résultat exploitable, nous allons maintenant considérer non pas l'erreur commise lors de l'échantillonnage du signal f, mais l'erreur moyenne pour toutes les versions de f retardées d'une durée plus petite que T :

$$\bar{\epsilon}(f, \phi_T, T)^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \epsilon(f_\tau, \phi, T)^2 d\tau \tag{C.31}$$

avec $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. On remarque alors que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{f}_\tau(\nu)\right|^2 d\tau = \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 \tag{C.32}$$

et

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{f}_\tau(\nu)^* \hat{f}_\tau\left(\nu - \frac{m}{T}\right) d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi j\nu\tau}\hat{f}(\nu)^* e^{-2\pi j\nu\tau} e^{2\pi j\frac{m}{T}\tau}\hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right) d\tau \tag{C.33}$$

$$= \hat{f}(\nu)^* \hat{f}\left(\nu - \frac{m}{T}\right)\frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi j\frac{m}{T}\tau} d\tau \tag{C.34}$$

$$= 0 \tag{C.35}$$

On en déduit alors que

$$\bar{\epsilon}(f, \phi_T, T)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 E_{\phi_T}(\nu) d\nu \tag{C.36}$$

avec

$$E_{\phi_T}(\nu) = 1 - \frac{2}{T}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu) + \frac{1}{T}A_{\phi_T}(\nu)\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2 \tag{C.37}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{T}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)\right)^2 - \frac{1}{T^2}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2\hat{\phi}_T(\nu)^2 + \frac{1}{T}A_{\phi_T}(\nu)\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2 \tag{C.38}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{T}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)\right)^2 + \frac{1}{T^2}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2(TA_{\phi_T}(\nu) - \hat{\phi}_T(\nu)^2) \tag{C.39}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{T}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)\hat{\phi}_T(\nu)\right)^2 + \frac{1}{T^2}\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu)^2\sum_{m\neq 0}\hat{\phi}_T\left(\nu - \frac{m}{T}\right)^2 \tag{C.40}$$

$$= \left(1 - \hat{\tilde{\phi}}(\nu T)\hat{\phi}(\nu T)\right)^2 + \hat{\tilde{\phi}}(\nu T)^2\sum_{m\neq 0}\hat{\phi}(\nu T - m)^2 \tag{C.41}$$

en utilisant (C.12). Ceci nous amène ainsi à définir un noyau d'erreur faisait apparaitre la période d'échantillonnage de manière explicite à l'aide des filtres générateurs ϕ et $\tilde{\phi}$ plutôt que ϕ_T et $\tilde{\phi}_T$ en posant :

$$E_\phi(\xi) = \left(1 - \hat{\tilde{\phi}}(\xi)\hat{\phi}(\xi)\right)^2 + \hat{\tilde{\phi}}(\xi)^2\sum_{m\neq 0}\hat{\phi}(\xi - m)^2 \tag{C.42}$$

d'où

$$E_{\phi_T}(\nu) = E_\phi(\nu T) \tag{C.43}$$

La conclusion de tout cela est qu'on peut étudier une fonction d'interpolation juste en se concentrant sur ce noyau d'erreur $E_{\phi_T}(\nu) = E_\phi(\nu T)$.

Annexe D

Noyau d'erreur et condition de biorthogonalité

On reprend l'équation de l'erreur moyenne établie dans l'annexe C :

$$\bar{\epsilon}(f,\phi_T,T)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 E_\phi(\nu T)d\nu \tag{D.1}$$

avec

$$E_\phi(\xi) = \left(1-\hat{\tilde{\phi}}(\xi)\hat{\phi}(\xi)\right)^2 + \hat{\tilde{\phi}}(\xi)^2 \sum_{m\neq 0}\hat{\phi}(\xi-m)^2 \tag{D.2}$$

On peut déduire de ces expressions qu'il suffit d'étudier le comportement du noyau d'erreur $E_\phi(\nu T)$ pour un couple de fonctions d'interpolation donné (ϕ et $\tilde{\phi}$) pour en déduire l'erreur. On choisit ici de spécifier $\left\{\tilde{\phi}_T^{(k)}\right\}$ comme étant la base duale de la base formée par les $\left\{\phi_T^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\phi\left(\frac{t-kT}{T}\right)\right\}$. La base duale est déterminée de façon unique par les équations :

$$\left\langle \tilde{\phi}_T^{(k)}, \phi_T^{(l)} \right\rangle = \delta_{k-l} \tag{D.3}$$

Il s'agit de l'hypothèse de biorthogonalité.

Considérant cette nouvelle condition, on cherche maintenant un lien entre $\tilde{\phi}$ et ϕ. Pour cela, on remarque tout d'abord que $\tilde{\phi}_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\phi(t/T)$ est dans l'espace $V_T(\phi_T)$ par conséquent, il existe une suite $p(k)$ telle que :

$$\tilde{\phi}_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\phi_T(t-kT) \tag{D.4}$$

Soit, dans le domaine de Fourier :

$$\hat{\tilde{\phi}}_T(\nu) = \hat{\phi}_T(\nu)P(\nu T) \tag{D.5}$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\xi) = \hat{\phi}(\xi)P(\xi) \tag{D.6}$$

Avec $P(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)e^{-j2\pi k\xi}$.
Dès lors, on peut remarquer que :

$$\left\langle \tilde{\phi}_T, \phi_T^{(l)} \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k) \left\langle \phi_T^{(k)}, \phi_T^{(l)} \right\rangle \tag{D.7}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k) \left\langle \phi_T(t), \phi_T((k-l)T) \right\rangle \tag{D.8}$$

En réutilisant la fonction d'autocorréaltion a_{ϕ_T} et $\tilde{a}_{\phi_T}$ sa version échantillonnée à la période T définies respectivement par les équation (C.7) et (C.8), on obtient alors

$$\left\langle \tilde{\phi}_T, \phi_T^{(l)} \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k) a_{\phi_T}((k-l)T) \tag{D.9}$$

$$= (p_T \otimes a_{\phi_T})(lT) \tag{D.10}$$

$$= (p \otimes \tilde{a}_{\phi})(l) \tag{D.11}$$

avec $p_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\delta(t-kT)$ et où $\otimes$ désigne le produit de convolution discret dans la dernière égalité. Ainsi, les familles $\left\{\phi_T^{(k)}\right\}$ et $\left\{\tilde{\phi}_T^{(k)}\right\}$ sont biorthogonales si et seulement si :

$$P(\xi)A_{\phi}(\xi) = 1 \tag{D.12}$$

On en déduit que l'expression de la transformée de Fourier de $\tilde{\phi}$ est entièrement déterminée par celle de ϕ.

$$\hat{\tilde{\phi}}(\xi) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{A_{\phi}(\xi)} \tag{D.13}$$

Cette solution est bien toujours définie dans le cas d'une base de Riesz. On notera au passage que cette égalité pour laquelle on a supposé que ϕ était réel et symétrique implique que dans ce cas $\tilde{\phi}$ est réel et symétrique aussi. En effet, $A_{\phi}(\xi) = \sum_{m\in Z} \hat{\phi}(\xi-m)^2$ et $\hat{\phi}$ sont alors réels et symétriques, donc $\hat{\tilde{\phi}}$ et $\tilde{\phi}$ aussi. Et, de plus, $\hat{\tilde{\phi}}(\xi)$ et $\hat{\phi}(\xi)$ ont le même support fréquentiel.

Grâce à l'hypothèse de biorthogonalité, (D.3), il est enfin possible de réécrire le noyau d'erreur $E_{\phi}(\xi)$. Pour rappel, on avait :

$$E_{\phi}(\xi) = \left(1 - \hat{\tilde{\phi}}(\xi)\hat{\phi}(\xi)\right)^2 + \hat{\tilde{\phi}}(\xi)^2 \sum_{m\neq 0} \hat{\phi}(\xi-m)^2 \tag{D.14}$$

d'où, en utilisant (D.13), (D.14) et (C.12) :

$$E_\phi(\xi) = \left(1 - \frac{\hat{\phi}(\xi)^2}{A_\phi(\xi)}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\phi}(\xi)}{A_\phi(\xi)}\right)^2 \sum_{m\neq 0} \hat{\phi}(\xi - m)^2 \tag{D.15}$$

En posant :

$$\sum_{m\neq 0} \hat{\phi}(\xi - m)^2 = A_\phi(\xi) - \hat{\phi}(\xi)^2 \tag{D.16}$$

On obtient :

$$E_\phi(\xi) = \frac{1}{A_\phi(\xi)^2}\left(A_\phi(\xi)^2 - 2\hat{\phi}(\xi)^2 A_\phi(\xi) + \hat{\phi}(\xi)^4\right) + \frac{1}{A_\phi(\xi)^2}\left(\hat{\phi}(\xi)^2 A_\phi(\xi) - \hat{\phi}(\xi)^4\right) \tag{D.17}$$

Finalement :

$$E_\phi(\xi) = 1 - \frac{\hat{\phi}(\xi)^2}{A_\phi(\xi)} \tag{D.18}$$

Annexe E

Integrale et somme, passage du continu au discret

Soient f et g deux fonctions de $L_2(\mathbb{R})$ de support fréquentiel $[-1/2T, 1/2T]$. Alors, d'après le théorème de Shannon, on a :

$$f(t)g(t) = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} f(kT)g(k'T)\,\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{t-kT}{T}\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{t-k'T}{T}\right) \tag{E.1}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} f(kT)g(k'T)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{t-kT}{T}\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{t-k'T}{T}\right)dt \tag{E.2}$$

$$= \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} f(kT)g(k'T) \times T\delta_{k-k'} \tag{E.3}$$

On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)g(kT) \tag{E.4}$$

Bibliographie

[Baggeroer 1984] A. Baggeroer. *Acoustic telemetry–An overview.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 9, no. 4, pages 229 – 235, oct 1984. (Cité en page 5.)

[Beutler 1976] F. Beutler. *On the truncation error of the cardinal sampling expansion.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 22, no. 5, pages 568 – 573, Septembre 1976. (Cité en pages 73 et 92.)

[Biglieri 1998] E. Biglieri, J. Proakis et S. Shamai. *Fading channels : information-theoretic and communications aspects.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 44, no. 6, pages 2619 –2692, Octobre 1998. (Cité en page 22.)

[Bjerrum-Niese 1996] C. Bjerrum-Niese, L. Bjorno, M.A. Pinto et B. Quellec. *A simulation tool for high data-rate acoustic communication in a shallow-water, time-varying channel.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 21, no. 2, pages 143 –149, Avril 1996. (Cité en page 21.)

[Bjerrum-Niese 2000] C. Bjerrum-Niese et R. Lutzen. *Stochastic simulation of acoustic communication in turbulent shallow water.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 25, no. 4, pages 523 –532, Octobre 2000. (Cité en page 21.)

[Blu 1999] Thierry Blu et Michael Unser. *Approximation Error for Quasi-Interpolators and (Multi-)Wavelet Expansions.* Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 6, no. 2, pages 219 – 251, 1999. (Cité en pages 73, 76, 77 et 90.)

[Boden 1991] L. Boden, B. Bowlin James et L. Spiesberger John. *Time domain analysis of normal mode, parabolic, and ray solutions of the wave equation.* J. Acoust. Soc. Am., vol. 90, pages 954–958, august 1991. (Cité en page 10.)

[Brossier 1991] G. Brossier J.M. & Jourdain. *Récupération de porteuse et égalisation simultanées en communications acoustiques sous-marines.* GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 1991. (Cité en page 48.)

[Carter 1981] G. Carter. *Time delay estimation for passive sonar signal processing.* Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 29, no. 3, pages 463 – 470, Juin 1981. (Cité en pages 48 et 52.)

[Chang 1966] R. W. Chang. *Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission.* Bell Sys. Tech. J., vol. 45, pages 1775–1796, 1966. (Cité en page 21.)

[Chang 1968] R. Chang et R. Gibby. *A Theoretical Study of Performance of an Orthogonal Multiplexing Data Transmission Scheme.* Communication Technology, IEEE Transactions on, vol. 16, no. 4, pages 529 –540, 1968. (Cité en page 21.)

[Chitre 2007] Mandar Chitre. *A high-frequency warm shallow water acoustic communications channel model and measurements.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 122, no. 5, pages 2580–2586, 2007. (Cité en page 21.)

[Chitre 2008] Mandar Chitre, Shiraz Shahabudeen, Lee Freitag et Milica Stojanovic. *Recent advances in underwater acoustic communications.* In OCEANS 2008, volume 2008-Supplement, pages 1 –10, 2008. (Cité en pages 6 et 33.)

[Cimini 1985] Jr. Cimini L. *Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing.* Communications, IEEE Transactions on, vol. 33, no. 7, pages 665 – 675, Juillet 1985. (Cité en pages 6 et 22.)

[Cioffi 1991] M. Cioffi. *A Multicarrier Primer.* Amati Communciation corporation and Stanford University, 1991. (Cité en page 32.)

[Clark 1976] J. G. Clark, R. P. Flanagan et N. L. Weinberg. *Multipath acoustic propagation with a moving source in a bounded deep ocean channel.* J. Acoust. Soc. Am., vol. 60, pages 1274–1284, 1976. (Cité en pages 10 et 13.)

[Cover 1991] Thomas M. Cover et Joy A. Thomas. Elements of information theory. Wiley-Interscience, 99th édition, August 1991. (Cité en page 22.)

[Davids 1952] N. Davids, E. G. Thurston et R. E. Mueser. *The Design of Optimum Directional Acoustic Arrays.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 24, no. 1, pages 50–56, 1952. (Cité en page 103.)

[Defant 1961] Albert Defant. Physical oceanography. Pergamon, Oxford [etc.], 1961. (Cité en page 13.)

[Eggen 2000] T.H. Eggen, A.B. Baggeroer et J.C. Preisig. *Communication over Doppler spread channels. Part I : Channel and receiver presenta-*

tion. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 25, no. 1, pages 62 –71, jan 2000. (Cité en page 56.)

[Eggen 2001] T.H. Eggen, J.C. Preisig et A.B. Baggeroer. *Communication over Doppler spread channels. II. Receiver characterization and practical results.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 26, no. 4, pages 612 –621, oct 2001. (Cité en page 56.)

[Flanagan 1974] J.L. & Flanagan R.P. & Weinberg et J.G. Clark. *Coherent analysis of ray propagation with moving source and fixed receiver.* J. Acoust. Soc. Am., vol. 56, pages 1673–1680, december 1974. (Cité en page 10.)

[Frassati 2005] F. Frassati, C. Lafon, P.-A. Laurent et J.-M. Passerieux. *Experimental assessment of OFDM and DSSS modulations for use in littoral waters underwater acoustic communications.* In Oceans 2005 - Europe, volume 2, pages 826 – 831 Vol. 2, 2005. (Cité en pages 6 et 33.)

[Giannakis 1997] G.B. Giannakis. *Filterbanks for blind channel identification and equalization.* Signal Processing Letters, IEEE, vol. 4, no. 6, pages 184 –187, Juin 1997. (Cité en page 30.)

[Glavieux A. 1996] Joindot M. Glavieux A. Communication numérique, introduction. Masson, Paris, 1996. (Cité en pages 25, 44 et 114.)

[Gorokhov 2000] A. Gorokhov. *Blind equalization in SIMO OFDM systems with frequency domain spreading.* Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 48, no. 12, pages 3536 – 3549, Décembre 2000. (Cité en page 30.)

[Henderson 1994] G.B. Henderson, A. Tweedy, G.S. Howe, O. Hinton et A.E. Adams. *Investigation of adaptive beamformer performance and experimental verification of applications in high data rate digital underwater communications.* In OCEANS '94. 'Oceans Engineering for Today's Technology and Tomorrow's Preservation.' Proceedings, volume 1, pages I/296 –I/301 vol.1, Septembre 1994. (Cité en page 104.)

[Howe 1994] G.S. Howe, P.S.D. Tarbit, O.R. Hinton, B.S. Sharif et A.E. Adams. *Sub-sea acoustic remote communications utilising an adaptive receiving beamformer for multipath suppression.* In OCEANS '94. 'Oceans Engineering for Today's Technology and Tomorrow's Preservation.' Proceedings, volume 1, pages I/313 –I/316 vol.1, Septembre 1994. (Cité en page 104.)

[Hsiao 1987] Chia-Chuan Hsiao. *Polyphase filter matrix for rational sampling rate conversions.* In Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '87., volume 12, pages 2173 – 2176, Avril 1987. (Cité en page 73.)

[Iturbe 2008] Ion Iturbe, Philippe Roux, Barbara Nicolas et J. Mars. *Ocean acoustic tomography using a double-beamforming algorithm.* In 155th Meeting of Acoustical Society of America, Acoustics 08, Paris France, 06 2008. (Cité en page 104.)

[Iturbe 2009] I. Iturbe, P. Roux, B. Nicolas, J. Virieux et J.I. Mars. *Shallow-Water Acoustic Tomography Performed From a Double-Beamforming Algorithm : Simulation Results.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 34, no. 2, pages 140 –149, 2009. (Cité en page 104.)

[Jarvis 1995] S.M. Jarvis et N.A. Pendergrass. *Implementation of a multi-channel decision feedback equalizer for shallow water acoustic telemetry using a stabilized fast transversal filters algorithm.* In OCEANS '95. MTS/IEEE. Challenges of Our Changing Global Environment. Conference Proceedings., volume 2, pages 787 –796 vol.2, Octobre 1995. (Cité en page 33.)

[Jensen 1994] F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter et Schmidt H. Computational ocean acoustics. AIP, PRESS, 1994. (Cité en pages 12 et 149.)

[Johnson 1997] M. Johnson, L. Freitag et M. Stojanovic. *Improved Doppler tracking and correction for underwater acoustic communications.* In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. ICASSP-97., 1997 IEEE International Conference on, volume 1, pages 575 –578 vol.1, Avril 1997. (Cité en page 56.)

[Josso 2009a] N.F. Josso, C. Ioana, C. Gervaise, Y. Stephan et J.I. Mars. *Motion effect modeling in multipath configuration using warping based lag-Doppler filtering.* In Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on, pages 2301 –2304, 2009. (Cité en pages 21, 99 et 116.)

[Josso 2009b] N.F. Josso, J.J. Zhang, A. Papandreou-Suppappolat, C. Ioana, J.I. Mars, C. Gervaise et Y. Stephan. *On the characterization of time-scale underwater acoustic signals using matching pursuit decomposition.* In OCEANS 2009, MTS/IEEE Biloxi - Marine Technology for Our Future : Global and Local Challenges, pages 1 –6, 2009. (Cité en pages 21 et 98.)

[Josso 2010] N.F. Josso, J.J. Zhang, D. Fertonani, A. Papandreou-Suppappola et T.M. Duman. *Time-varying wideband underwater acoustic channel estimation for OFDM communications*. In Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on, pages 5626 –5629, march 2010. (Cité en pages 98, 99 et 145.)

[Kibangou 2010a] Alain Kibangou, Laurent Ros et Cyrille Siclet. *Doppler Estimation and Data detection for Underwater Acoustic ZF-OFDM Receiver*. In Proceedings of IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems, 2010. (Cité en pages 68 et 98.)

[Kibangou 2010b] A.Y. Kibangou, C. Siclet et L. Ros. *Joint channel and Doppler estimation for multicarrier underwater communications*. In Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on, pages 5630 –5633, 2010. (Cité en page 48.)

[Kibangou 2010c] A.Y. Kibangou, C. Siclet et L. Ros. *ZF OFDM receiver for underwater communications*. In Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP), 2010 4th International Symposium on, pages 1 –4, 2010. (Cité en page 98.)

[Kilfoyle 2000] D.B. Kilfoyle et A.B. Baggeroer. *The state of the art in underwater acoustic telemetry*. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 25, no. 1, pages 4 –27, Janvier 2000. (Cité en pages 6 et 48.)

[Kim 2000] Byung-Chul Kim et I-Tai Lu. *Parameter study of OFDM underwater communications system*. In OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition, volume 2, pages 1251 –1255 vol.2, 2000. (Cité en page 21.)

[Knapp 1976] C. Knapp et G. Carter. *The generalized correlation method for estimation of time delay*. Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 24, no. 4, pages 320 – 327, Août 1976. (Cité en page 52.)

[Knight 1981] W.C. Knight, R.G. Pridham et S.M. Kay. *Digital signal processing for sonar*. Proceedings of the IEEE, vol. 69, no. 11, pages 1451 – 1506, 1981. (Cité en page 48.)

[Lagarias 1996] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright et P.E. Wright. *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Algorithm in Low Dimensions*. SIAM Journal of Optimization, vol. 9, pages 112–147, 1996. (Cité en page 59.)

[Le Floch 1995] B. Le Floch, M. Alard et C. Berrou. *Coded orthogonal frequency division multiplex [TV broadcasting]*. Proceedings of the IEEE, vol. 83, no. 6, pages 982 –996, Juin 1995. (Cité en page 22.)

[Lee 1994] Ta-Sung Lee. *Efficient wideband source localization using beamforming invariance technique*. Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 42, no. 6, pages 1376 –1387, Juin 1994. (Cité en page 104.)

[Li 2006] B. Li, S. Zhou, M. Stojanovic et L. Freitag. *Pilot-tone based ZP-OFDM Demodulation for an Underwater Acoustic Channel*. In OCEANS 2006, pages 1 –5, sept 2006. (Cité en pages 6, 33, 48, 68 et 98.)

[Li 2007a] Baosheng Li, Shengli Zhou, M. Stojanovic, L. Freitag, Jie Huang et P. Willett. *MIMO-OFDM Over An Underwater Acoustic Channel*. In OCEANS 2007, pages 1 –6, 292007-oct.4 2007. (Cité en pages 98 et 141.)

[Li 2007b] Baosheng Li, Shengli Zhou, M. Stojanovic, L. Freitag et P. Willett. *Non-Uniform Doppler Compensation for Zero-Padded OFDM over Fast-Varying Underwater Acoustic Channels*. In OCEANS 2007 - Europe, pages 1 –6, 2007. (Cité en page 98.)

[Li 2007c] Weichang Li et J.C. Preisig. *Estimation of Rapidly Time-Varying Sparse Channels*. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 32, no. 4, pages 927 –939, 2007. (Cité en page 48.)

[Li 2008] Baosheng Li, Shengli Zhou, M. Stojanovic, L. Freitag et P. Willett. *Multicarrier Communication Over Underwater Acoustic Channels With Nonuniform Doppler Shifts*. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 33, no. 2, pages 198 –209, 2008. (Cité en page 21.)

[Lyonnet 2010] B. Lyonnet, C. Siclet et J.-M. Brossier. *Maximum likelihood estimator for Doppler parameter and cramer rao bound in ZP-OFDM UWA channel*. In Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP), 2010 4th International Symposium on, pages 1 –5, 2010. (Cité en pages 48, 51 et 113.)

[Lyonnet 2011a] Bastien Lyonnet, Cyrille Siclet et Jean-Marc Brossier. *Doppler estimators using pilot tones for OFDM communication signal in shallow water environment*. In Proceedings of the 4th UAM Conference, page n.c., Kos, Grèce, 2011. (Cité en page 68.)

[Lyonnet 2011b] Bastien Lyonnet, Cyrille Siclet et Jean-Marc Brossier. *Estimation et compensation du Doppler par porteuses pilotes en communi-*

cation ASM en présence de trajets multiples pour signaux CP-OFDM. In GRETSI 2011, France, Septembre 2011. (Cité en page 98.)

[Middleton 1987] D. Middleton. *Channel Modeling and Threshold Signal Processing in Underwater Acoustics : An Analytical Overview.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 12, no. 1, pages 4 – 28, Janvier 1987. (Cité en page 21.)

[Munk 2006] Walter Munk. *Ocean Acoustic Tomography.* In Markus Jochum et Raghu Murtugudde, editeurs, Physical Oceanography, pages 119–138. Springer New York, 2006. 10.1007/0-387-33152-28. (Cité en pages 10, 14 et 103.)

[Muquet 2000] B. Muquet, M. de Courville, G.B. Giannakis, Z. Wang et P. Duhamel. *Reduced complexity equalizers for zero-padded OFDM transmissions.* In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on, volume 5, pages 2973 –2976 vol.5, 2000. (Cité en page 30.)

[Nicolas 2007] B. Nicolas, P. Roux, I. Iturbe et J.I. Mars. *Double formation de voies pour l'estimation de temps de trajets en contexte fortement bruitée.* 2007. (Cité en page 103.)

[Ormondroyd 2007] R.F. Ormondroyd. *A Robust Underwater Acoustic Communication System using OFDM-MIMO.* In OCEANS 2007 - Europe, pages 1 –6, 2007. (Cité en pages 21 et 141.)

[Peled 1980] A. Peled et A. Ruiz. *Frequency domain data transmission using reduced computational complexity algorithms.* In Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '80., volume 5, pages 964 – 967, Avril 1980. (Cité en pages 6, 22 et 31.)

[Preisig 2007] James Preisig. *Acoustic propagation considerations for underwater acoustic communications network development.* SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev., vol. 11, pages 2–10, October 2007. (Cité en pages 10 et 11.)

[Pritchard 1953] R. L. Pritchard. *Optimum Directivity Patterns for Linear Point Arrays.* The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 25, no. 5, pages 879–891, 1953. (Cité en page 103.)

[Proakis 2008] John G Proakis et Masoud Salehi. Digital communications. McGraw-Hill, New York (N.Y.), 2008. (Cité en pages 6, 22 et 28.)

[Robert E. Collin 1969] Francis J. Zucker Robert E. Collin. Antenna theory, part i. McGraw-hill Book company, 1969. (Cité en pages 104, 107 et 109.)

[Ruiz 1992] A. Ruiz, J.M. Cioffi et S. Kasturia. *Discrete multiple tone modulation with coset coding for the spectrally shaped channel.* Communications, IEEE Transactions on, vol. 40, no. 6, pages 1012 –1029, Juin 1992. (Cité en page 32.)

[Sari 1995] H. Sari, G. Karam et I. Jeanclaude. *Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting.* Communications Magazine, IEEE, vol. 33, no. 2, pages 100 –109, feb 1995. (Cité en page 22.)

[Schoenberg 1946] I. J. Schoenberg. *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.* Quart. Appl. Math, vol. 4, no. 2, page 45 to 99 and 112 to 141, 1946. (Cité en page 79.)

[Shannon 1949] C.E. Shannon. *Communication in the Presence of Noise.* Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pages 10 – 21, 1949. (Cité en pages 37 et 72.)

[Sharif 2000a] B.S. Sharif, J. Neasham, O.R. Hinton et A.E. Adams. *A computationally efficient Doppler compensation system for underwater acoustic communications.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 25, no. 1, pages 52 –61, Janvier 2000. (Cité en pages 48, 90 et 96.)

[Sharif 2000b] B.S. Sharif, J. Neasham, O.R. Hinton, A.E. Adams et J. Davies. *Adaptive Doppler compensation for coherent acoustic communication.* Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -, vol. 147, no. 5, pages 239 –246, Octobre 2000. (Cité en page 56.)

[Siclet 2002] Cyrille Siclet. *Application de la théorie des bancs de filtres à l'analyse et à la conception de modulations multiporteuses orthogonales et biorthogonales.* These, Université Rennes 1, Novembre 2002. (Cité en page 22.)

[Sozer 2000] E.M. Sozer, M. Stojanovic et J.G. Proakis. *Underwater acoustic networks.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 25, no. 1, pages 72 –83, Janvier 2000. (Cité en page 6.)

[Stojanovic 1996] M. Stojanovic. *Recent advances in high-speed underwater acoustic communications.* Oceanic Engineering, IEEE Journal of, vol. 21, no. 2, pages 125 –136, 1996. (Cité en page 6.)

[Stojanovic 2006] M. Stojanovic. *Low Complexity OFDM Detector for Underwater Acoustic Channels.* In OCEANS 2006, pages 1 –6, 2006. (Cité en page 98.)

[Stojanovic 2007] Milica Stojanovic. *On the relationship between capacity and distance in an underwater acoustic communication channel.* SIGMO-

BILE Mob. Comput. Commun. Rev., vol. 11, pages 34–43, October 2007. (Cité en pages 11, 16 et 34.)

[Tarbit 1994] P.S.D. Tarbit, G.S. Howe, O.R. Hinton, A.E. Adams et B.S. Sharif. *Development of a real-time adaptive equalizer for a high-rate underwater acoustic data communications link*. In OCEANS '94. 'Oceans Engineering for Today's Technology and Tomorrow's Preservation.' Proceedings, volume 1, pages I/307 –I/312 vol.1, Septembre 1994. (Cité en pages 6 et 104.)

[Thevenaz 2000] P. Thevenaz, T. Blu et M. Unser. *Interpolation revisited [medical images application]*. Medical Imaging, IEEE Transactions on, vol. 19, no. 7, pages 739 –758, 2000. (Cité en pages 73, 79 et 80.)

[Tolstoy 1987] I. Tolstoy et C. S. Clay. Ocean Acoustics : Theory and Experiment in Underwater Sound. Acoustical Society of America, 1987. (Cité en pages 10, 12, 14 et 149.)

[Unser 1991] M. Unser, A. Aldroubi et M. Eden. *Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 13, no. 3, pages 277 –285, Mars 1991. (Cité en page 73.)

[Unser 1993] M. Unser, A. Aldroubi et M. Eden. *B-spline signal processing. I. Theory*. Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 41, no. 2, pages 821 –833, Février 1993. (Cité en pages 73, 74 et 90.)

[Unser 2000] M. Unser. *Sampling-50 years after Shannon*. Proceedings of the IEEE, vol. 88, no. 4, pages 569 –587, Avril 2000. (Cité en pages 73, 76 et 90.)

[Van Veen 1988] B.D. Van Veen et K.M. Buckley. *Beamforming : a versatile approach to spatial filtering*. ASSP Magazine, IEEE, vol. 5, no. 2, pages 4 –24, 1988. (Cité en page 104.)

[VanTrees 2001] H.L. VanTrees. Detection, estimation, and modulation theory, part i. John Wiley and Sons Inc., 2001. (Cité en page 51.)

[Wang 2000] Zhendao Wang et G.B. Giannakis. *Wireless multicarrier communications*. Signal Processing Magazine, IEEE, vol. 17, no. 3, pages 29 –48, Mai 2000. (Cité en pages 27 et 29.)

[Weinstein 1971] S. Weinstein et P. Ebert. *Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform*. Communication Technology, IEEE Transactions on, vol. 19, no. 5, pages 628 –634, 1971. (Cité en page 22.)

[Win 1999] M.Z. Win et J.H. Winters. *Analysis of hybrid selection/maximal-ratio combining in Rayleigh fading*. In Communications, 1999. ICC '99. 1999 IEEE International Conference on, volume 1, pages 6 –10 vol.1., 1999. (Cité en page 114.)

[Yang 2001] Baoguo Yang, K.B. Letaief, R.S. Cheng et Zhigang Cao. *Channel estimation for OFDM transmission in multipath fading channels based on parametric channel modeling*. Communications, IEEE Transactions on, vol. 49, no. 3, pages 467 –479, Mars 2001. (Cité en page 21.)

Diversité spatiale et compensation Doppler en communication sous-marine sur signaux large bandes

Résumé : Le milieu sous-marin est doublement dispersif, en temps et en fréquence. L'utilisation récente de signaux de communication multi-porteuses offre une solution pour lutter contre la sélectivité fréquentielle. Mais ce type de signaux reste très sensible à la dispersivité fréquentielle.
Cette thèse se concentre sur le problème de la dispersivité fréquentielle qu'est l'effet Doppler. Des méthodes d'estimation du paramètre Doppler sont développées pour des signaux multi-porteuses DMT. Est également abordé le problème de la compensation Doppler dans les cas mono et multitrajets. Une méthode générale et une méthode spécifique au signaux multiporteuses sont présentées et testées sur simulation.
Cette thèse se distingue par son modèle du canal sous-marin qui considère un paramètre Doppler différent sur chaque trajet. Ceci résulte de la géométrie du problème et des vitesses émetteur/récepteur considérées. Nous présentons finalement des méthodes pour séparer les différents trajets arrivant sur une antenne afin de pouvoir considérer un paramètre Doppler unique sur chacun.

Mots clés : DMT, Doppler, Communication sous-marine, formation de voies, interpolation, MIB.

Spatial diversity and Doppler compensation for wide band signals in underwater communication

Abstract : blabla The underwater channel is doubly dispersive, in time and freqeuncy. In the last decade, multicarrier communication signal , like OFDM signal, has offer a solution in order to struggle aginst multipath propagation. Unfortunatly, these kinds of signal is strongly sensitive to Doppler effect.
This thesis focus on frequential dispersivity involved by Doppler effect. Several Doppler estimation methods are developped for multicarrier signals. Doppler compensation for one path and multipath channel is also considered. For this problem, we developped general method but also specific method for DMT signals. Each of them have been tested on simulations.
This thesis uses an underwater channel model presenting different Doppler parameter for each path. This approach is a consequence of the problem geometry, considering emitter/receiver velocity. Finaly, using an antenna, we present several methods in order to separate efficiently each arriving path ; allowing us to consider each separated path with a single Doppler parameter to compensate.

Keywords : DMT, Doppler, underwater communication, beamforming, interpolation, Matricial Inversion for Beamforming.