HAL
open science

Diviseurs sur les courbes réelles

Alexandre Bardet

To cite this version:

Alexandre Bardet. Diviseurs sur les courbes réelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2013. Français. NNT : . tel-00879645

HAL Id: tel-00879645

https://theses.hal.science/tel-00879645

Submitted on 4 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Alexandre BARDET

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

Discipline : Mathématiques
Laboratoire : Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques (LAREMA)

Soutenue le 5 Juin 2013

École doctorale : 503 (STIM)
Thèse n°: 1317

Diviseurs sur les courbes réelles

JURY

Rapporteurs :	**M. Marc COPPENS**, Professeur des universités, Catholic School of Kempen
	M. Ilia ITENBERG, Professeur des universités, Institut de mathématique de Jussieu
Examinateurs :	**M. Goulwen FICHOU**, Maître de conférences, Université de Rennes 1
	M. Frédéric MANGOLTE, Professeur des universités, Université d'Angers
	M. Adam PARUSINSKI, Professeur des universités, Université de Nice Sophia Antipolis
Directeur de thèse :	**M. Jean-Philippe MONNIER**, Maître de conférences, Université d'Angers

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement d'un parcours universitaire et de quatre années de travail. À ce titre elle n'est nullement un fruit individuel. Pendant ces années, j'ai pu compter sur le soutien et les encouragements de beaucoup que je tenais à remercier ici. Peut-être la pudeur m'empêchera-t-elle de faire passer toute ma gratitude dans ces quelques lignes.

En premier lieu, je remercie bien évidemment Jean-Philippe MONNIER qui a, presqu'au pied levé, accepté d'encadrer cette thèse. Sa patience, ses conseils, sa confiance et l'autonomie qu'il m'a accordés m'ont été très précieux : j'ai non seulement appris des maths, mais également une façon de les faire à ses cotés. Encore merci ! Pour ce qui est des questions mathématiques, et surtout des réponses qu'ils y ont gentiment apportées, je remercie également Laurent EVAIN, Jean-Michel GRANGER, Frédéric MANGOLTE et Daniel NAIE. Ce dernier m'a aussi prodigué nombre de conseils TEXniques. Je tiens également à remercier Goulwen FICHOU qui avait encadré mon stage de master, introduction à cette thèse, qui m'a par la suite donné l'occasion d'exposer mes travaux et qui a fait partie du « comité de suivi de thèse » au même titre que Frédéric et Johanes HUISMAN. Qu'ils en soient ici remerciés. Enfin et non des moindres, je remercie les deux rapporteurs pour leur travail précieux de relecture et de questionnement, Marc COPPENS et Ilia ITENBERG ainsi que les membres du Jury pour avoir accepté d'en être : Marc COPPENS, Goulwen FICHOU, Frédéric MANGOLTE, Jean-Philippe MONNIER et Adam PARUSINSKI. Merci à vous de cet honneur.

L'atmosphère générale du LAREMA était très conviviale et les collègues avec lesquels j'ai enseigné m'ont toujours accordé beaucoup de confiance : c'est indéniablement une des raisons pour lesquelles j'ai pris le virus de l'enseignement. Donc merci à Luck DARNIÈRE, Abdul DARWICH, François DUCROT, Tan LEI, Luc MENICHI et Daniel SCHAUB. Merci également au personnel non-mathématique pour leurs services indispensables : Caroline CHALUMEAU, Jacquelin CHARBONNEL et Alexandra LEPETITCORPS auxquels j'adjoins Catherine PLARD. Enfin merci aux autres thésards qui partagent au quotidien les repas et les galères ! Ablaye, Anastasia, Ánh, Benjamin, Idrissou, Irfan, Jérôme, Julie, Joseph, Romain, Suzanne, Tomek et Yafei.

Dans le domaine extra-mathématique, je remercie évidemment mes parents, Alain et Christiane, qui m'ont toujours soutenu et encouragé, ma sœur, Delphine, sur qui je peux toujours compter, et plus généralement ma famille dont j'ai pu davantage profiter en étant revenu à Angers. Je ne compte plus les dimanche soirs passés chez Céline,

Clara, Fredo, Max et Jules (et maintenant Basile) ni les outils empruntés chez Annick et Serge... Merci à vous tous ! Ce retour à Angers m'a permis de renouer avec le ping et les pongistes d'Avrillé et aussi avec les amis d'enfance, le foot et les footeux du samedi. Ici je ne peux pas ne pas remercier David. Tous ces moments sportifs et conviviaux étaient un bon défouloir ! Je remercie aussi mes amis de prépa, Grégory, Jean-Charles, Paul, Pierre, Pierre et Tristan que je ne vois que trop peu souvent. Puisqu'on parle de la prepa, période éminemment importante dans ma formation mathématique, je tiens à remercier Denis CHOIMET que j'ai eu en sup' ; et puisqu'on parle des profs, je me permets de citer deux profs marquant au collège, Mme. BEAUJARD et M. BROSSARD. Pendant mes années de fac, j'ai eu le plaisir de faire des maths, et pas que des maths, avec des camarades extrêmement sympathiques. L'amitié liée à cette époque et la « bande de potes » n'ont fait que grandir, aussi vais-je sûrement en oublier : Alice, Anne, Cécile, Clémence, Coko, Fanny, François, Jérèm, Judith, Julien, Laulasse, LLD, Maël, Marie, Nounou, Oli, Pépette, Pipi, Procu, Raton, Simon, Thibault, Tibo, Viko, Xavier... Merci pour tous les bons moments !

Merci à tous, sans oublier le contribuable ordinaire ! Merci.

Table des matières

1 Préliminaires **7**

1.1 Généralités sur les schémas réels 7

1.2 Courbes réelles lisses 8

1.2.1 Topologie 8

1.2.2 Diviseurs et faisceaux inversibles 10

1.2.3 Diviseurs et morphismes projectifs 12

1.2.4 Jacobienne 16

1.2.5 Quelques exemples de courbes réelles lisses 17

1.3 Courbes réelles singulières 19

1.3.1 Topologie 20

1.3.2 Désingularisation et normalisation 20

1.3.3 Groupes de PICARD et diviseurs de WEIL 22

1.3.4 Diviseurs et jacobienne généralisée 25

1.4 Problèmes posés, résultats connus et nouveaux 26

1.4.1 Cas lisse 26

1.4.2 Cas singulier 30

2 Cas des courbes lisses **33**

2.1 Retour sur les résultats de SCHEIDERER 33

2.2 Cas des genres 0 et 1 36

2.3 Courbes de genre 2 37

2.4 N' pour les courbes maximales 47

3 Cas des courbes à singularités **53**

3.1 Singularisation 53

3.2 M pour une courbe singularisée en respectant les lacets 58

3.3 M pour des courbes singularisées suivant des diviseurs non-totalement réels 61
3.4 N pour les courbes à singularités ordinaires réelles et cusps réels . . . 62
3.5 $2P + 2Q$ dans un cas particulier 65

1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les schémas réels

Si X est un schéma, on notera toujours $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. Un point de X désignera toujours un point fermé de X. Si P est un point d'un schéma X défini sur $\mathbb{R}$, alors son corps résiduel $\mathbb{R}(P) := \mathcal{O}_P/m_P$ est une extension algébrique de $\mathbb{R}$ par le Nullstellensatz. De deux choses l'une :

- ou bien $\mathbb{R}(P) = \mathbb{R}$, auquel cas on dit que le point est réel,
- ou bien $\mathbb{R}(P) = \mathbb{C}$, auquel cas on dit que le point est non-réel.

Pour un tel schéma X défini sur $\mathbb{R}$, on notera $X(\mathbb{R})$ l'ensemble des points réels. Quand on parlera de l'espace topologique $X(\mathbb{R})$, il s'agira toujours de la topologie euclidienne : localement, il s'agit de zéros réels de polynômes à coefficients réels. $X_{\mathbb{C}}$ désignera le schéma complexe obtenu par extension des scalaires : $X_{\mathbb{C}} := X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{R}} \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ et $X(\mathbb{C})$ l'ensemble des points de ce-dernier. La conjugaison complexe s'étend alors à $\mathrm{X}_{\mathbb{C}}$, ce que l'on notera par une barre. Au-dessus d'un point P de $X(\mathbb{R})$ se trouve alors :

- ou bien un seul point, qu'on notera encore P, précisément quand P est réel auquel cas $P = \overline{P}$.
- ou bien deux points distincts conjugués, dans le cas contraire.

Ceci expliquera la notation abusive $P + \overline{P}$, que l'on pourra utiliser pour un point non-réel de X ; le symbole de sommation sera justifié dans la partie sur les diviseurs. Un point P d'un schéma réel X sera dit régulier lorsque son anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$ le sera ce qui dans le cas unidimensionnel équivaut à ce qu'il soit normal ou encore de valuation discrète, plus précisément ([2] proposition 9.2) :

Proposition 1.1.1 (normal $\Leftrightarrow$ régulier en dimension 1)
Soit $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien de dimension 1. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *A est un anneau de valuation discrète,*
- *A est intégralement clos,*
- *$\mathfrak{m}$ est principal,*
- *$\dim_k \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = 1$, c'est-à-dire A régulier,*
- *tout idéal non-nul de A est une puissance de $\mathfrak{m}$,*
- *il existe $x \in A$ tel que tout idéal non-nul soit de la forme $x^n A$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Le schéma X sera dit lisse lorsque tous ses points, réels ou non, le seront ; de façon équivalente lorsque $X_{\mathbb{C}}$ est lisse.

1.2 Courbes réelles lisses

Dans cette section X est un schéma projectif défini sur $\mathbb{R}$ géométriquement intègre. Il est donc réduit et irréductible. On le suppose de dimension 1 et lisse. Dans un tel cas, on dira plutôt que X est une courbe réelle lisse. Nous relâcherons la lissité dans la section suivante.

1.2.1 Topologie

Dans le cas où X est lisse, $X(\mathbb{C})$ est naturellement une surface de RIEMANN. En temps qu'espace topologique elles sont classifiées par leur genre qui s'interprète comme le nombre de « trous ». La topologie de la partie réelle est un peu plus subtile. Dans le cas lisse et projectif, $X(\mathbb{R})$ est une variété compacte de dimension 1 qui ne peut être qu'une réunion d'un nombre fini s de composantes connexes homéomorphes à des cercles. On dispose alors de l'inégalité classique de HARNACK $s \leqslant g + 1$ suggérée par le dessin suivant (où l'on voit la partie réelle comme l'ensemble des points fixes de la conjugaison) :

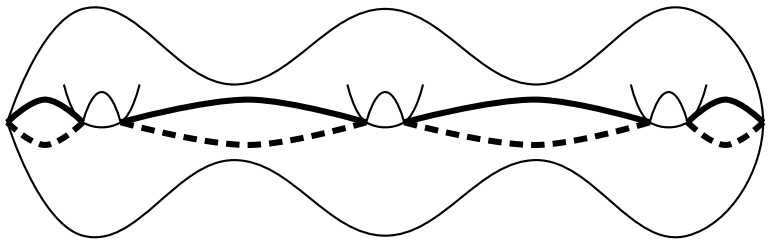


FIG. 1.1 – L'inégalité de HARNACK

Dans le cas du dessin, l'égalité est atteinte et on parle de courbes maximales, mais s peut prendre toutes les valeurs possibles entre 0 et $g+1$ et on distingue alors les courbes réelles selon que $X(\mathbb{R})$ disconnecte ou non la surface de RIEMANN $X(\mathbb{C})$. Notant $a(X)=0$ (resp : $a(X)=1$) dans le premier cas (resp : second cas) on obtient alors la classification suivante (proposition 3.13 de [7] par exemple) :

Proposition 1.2.1 (topologie d'une courbe réelle lisse)
Soit X une courbe réelle lisse de genre g à s composantes connexes. Alors $0 \leqslant s \leqslant g+1$ et dans les cas où $s=0$ et $s=g+1$ on a $a(X)=1$ et $a(X)=0$ respectivement. De plus si $a(X)=0$ alors s et $g+1$ ont même parité. Enfin toutes ces valeurs possibles de (g,s,a) sont réalisées.

Un morphisme fini défini sur $\mathbb{R}$, $\varphi : X \to Y$ entre deux courbes réelles projectives lisses induit une application continue pour les topologies euclidiennes entre $X(\mathbb{R})$ et $Y(\mathbb{R})$ qu'on note encore φ. L'image d'une composante connexe C est alors un sous-ensemble connexe compact de $Y(\mathbb{R})$ et est donc contenu dans une de ses composantes, disons D, et induit un revêtement $C \to \varphi(C)$ éventuellement ramifié. En un point $P \in C$, φ peut s'écrire $x^n, n \in \mathbb{N}$ et φ est localement injective si et seulement si n est impair, sinon l'image d'un petit voisinage connexe de P est un intervalle fermé en $\varphi(P)$ dont tous les points ont localement deux antécédents, $\varphi(P)$ ayant P compté deux fois. Par suite, la parité du nombre d'antécédents dans C compté avec multiplicité d'un point de D ne dépend pas de ce point. Cette parité est appelée le degré modulo 2 de φ sur C. Cette notion permet entre autre de démontrer le lemme suivant qu'on utilisera souvent :

Proposition 1.2.2
Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme fini entre deux courbes réelles projectives lisses et C une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_{|C}$ soit de degré impair, alors $\varphi(C)$ est une composante connexe de $Y(\mathbb{R})$.

Preuve :
En effet si $\varphi(C)$ est strictement inclus dans une composante connexe D de $Y(\mathbb{R})$, alors φ est de degré pair sur C comme on le constate au-dessus des points de $D \setminus \varphi(C)$. La contraposée est le résultat désiré.■

1.2.2 Diviseurs et faisceaux inversibles

Puisque X est supposée irréductible, son corps des fractions rationnelles, noté $\mathbb{R}(X)$, est le corps des fractions de n'importe lequel des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,P}$. La valuation discrète ν_P de $\mathcal{O}_{X,P}$ s'étend alors et on peut définir $\nu_P(f)$ pour tout $f \in \mathbb{R}(X)^*$, strictement négatif en les pôles de f et strictement positif en ses zéros. Par ailleurs $\nu_P(f)$ est nul, sauf pour un nombre fini de points P ce qui montre que $\mathrm{div}(f) := \sum_{P\in X} \nu_P(f)P$ est un élément du groupe abélien libre engendré par les points de X, qu'on appelle le groupe des diviseurs de X, noté $\mathrm{Div}(X)$. Les éléments de la forme $\mathrm{div}(f)$ sont appelés diviseurs principaux, ils forment un sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ dont le quotient est appelé le groupe des classes de diviseurs, noté $\mathrm{Cl}(X)$. Si $D - D' = \mathrm{div}(f)$, les diviseurs D et D' seront dits linéairement équivalents ce qu'on notera $D \sim D'$ ou $D \sim_f D'$ si on veut préciser via quelle fonction rationnelle. Enfin, puisque les seules fonctions rationnelles de diviseur nul sont les constantes non-nulles, on a la suite exacte de groupes abéliens suivante :

$$1 \to \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*(X) \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Cl}(X) \to 0.$$

On appelle degré d'un diviseur $D = \sum_i n_i P_i$ l'entier $\sum_i n_i[\mathbb{R}(P_i) : \mathbb{R}]$; ainsi un point complexe compte double ce que ne trahit pas la notation $P + \overline{P}$. Il est bien connu [8] que $\mathrm{degdiv}(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{R}(X)^*$ ce qui permet de parler du degré d'une classe de diviseurs. Par ailleurs, f induit un morphisme $X \to \mathbb{P}^1$ et sur une composante connexe C de $X(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{div}(f)_{|C} = \left(f_{|C}\right)^{-1}(0) - \left(f_{|C}\right)^{-1}(\infty)$ qui est pair comme différence de deux nombres de même parité. On peut ainsi parler du degré d'une classe de diviseurs, et de son degré modulo 2 lorsqu'on le restreint à une composante.

Étant donné un diviseur $D = \sum_P n_P P$ sur une courbe X on notera $\mathcal{O}(D)$ le faisceau défini pour tout ouvert U de ZARISKI comme l'ensemble des $f \in \mathbb{R}(X)^*$ telles que $\nu_P(f) + n_P \geqslant 0$ pour tout $P \in U$, auquel on adjoint la fonction nulle : c'est un sous-faisceau du faisceau constant $\mathbb{R}(X)$. Vues les propriétés des valuations on a

également $\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{O}(D') \sim \mathcal{O}(D+D')$. Comme en particulier $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_X$ est neutre pour le produit tensoriel on voit que ces éléments forment un sous-groupe du groupe des faisceaux inversibles, à isomorphisme près, de X, appelé groupe de PICARD de X et noté $\mathrm{Pic}(X)$. Dans le cas lisse $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ induit en fait [8] un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{Cl}(X)$ et $\mathrm{Pic}(X)$.

Mentionnons également un troisième point de vue qu'on peut avoir sur le groupe de PICARD. Un diviseur de CARTIER est un élément de $H^0(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$[1], donc représenté par un système $\{(U_i, f_i)\}$ où les U_i sont des ouverts recouvrant X et les f_i des fonctions rationnelles sur U_i telles que $\frac{f_i}{f_j}$ soit inversible dans $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$. Toujours dans le cas lisse, on a [8] la suite exacte :

$$0 \to H^0(X, \mathcal{K}^*) \to H^0(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \to \mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X) \to 0.$$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des sections globales de $\mathcal{O}(D)$ est noté $H^0(X, D)$ ou parfois $\mathcal{L}(D)$. Il est de dimension finie notée $h^0(D)$ ou $l(D)$. Ainsi $h^0(0) = 1$. S'il existe une fonction $f \in \mathbb{R}(X)^*$ vérifiant $\mathrm{div}(f) + D \geqslant 0$ alors en passant au degré on obtient $\deg D \geqslant 0$. Ainsi $h^0(D) = 0$ dès que $\deg D < 0$. Par ailleurs, on dit d'un diviseur $D = \sum_P n_P$ qu'il est effectif si et seulement si pour tout $P \in X$, $n_P \geqslant 0$. Cela induit l'ordre partiel suivant sur $\mathrm{Div}(X)$: $D \leqslant D' \Leftrightarrow D' - D \geqslant 0$. Ayant fixé un diviseur D, l'ensemble des diviseurs effectifs qui lui sont équivalents, noté $|D|$, est naturellement en bijection avec l'espace projectif $\mathbb{P}H^0(X, D)$ par l'application induite par $H^0(X, D) \ni f \mapsto \mathrm{div}(f) + D$. C'est toujours de cette structure projective dont on parle sur $|D|$, qui s'appelle un système linéaire complet, et tout sous-espace projectif d'un tel espace s'appelle un système linéaire sur X. La dimension du sous-espace projectif s'appelle la dimension du système linéaire, notée r, tandis que le degré de D — et donc de n'importe quel diviseur équivalent — est appelé son degré, noté d. On dit alors d'un tel système linéaire que c'est un g^r_d. Ainsi $\dim |D| = \dim H^0(X, D) - 1$ dès que $h^0(D) > 0$. Notons également que

$$D \leqslant D' \Rightarrow \mathcal{O}(D) \subset \mathcal{O}(D') \Rightarrow h^0(D) \leqslant h^0(D').$$

Comme X est de dimension 1, les groupes de cohomologie $H^n(X, D)$ sont nuls pour $n \geqslant 2$ et les dimensions h^0 et h^1 sont liées par le théorème de RIEMANN-ROCH. Celui-ci est bien connu dans le cas du corps $\mathbb{C}$ et plus généralement d'un corps

[1] Dans le cas général $\mathcal{K}^*$ désigne le faisceau associé à la donnée de l'anneau total $S^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ où S est la partie multiplicative des éléments non-diviseurs de zéro de $\mathcal{O}_X(U)$.

algébriquement clos, [8], mais il est également vrai sur $\mathbb{R}$. On peut par exemple se convaincre que $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X_{\mathbb{C}}, D) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(X, D)$ en remarquant que l'application $\mathbb{R}$-linéaire $f \mapsto \frac{f+\overline{f}}{2}$ donne la suite exacte :

$$0 \to \{f + \overline{f} = 0\} \to H^0(X_{\mathbb{C}}, D) \to H^0(X, D) \to 0$$

Et comme $\{f + \overline{f} = 0\}$ est échangé avec $\{f - \overline{f} = 0\}$ par la multiplication par i et que ces sous-espaces sont les deux sous-espaces propres de la conjugaison, ils sont bien de dimension réelle moitié moindre que celle de $H^0(X_{\mathbb{C}}, D)$. Bref, $h^0(X, D) = h^0(X_{\mathbb{C}}, D)$. On montre aussi $h^1(X, D) = h^1(X_{\mathbb{C}}, D)$ et on dispose donc de :

Proposition 1.2.3 (théorème de RIEMANN-ROCH)
Pour tout diviseur D sur X, on a $h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g$ où g est le genre de X.

Le terme $h^1(D)$ s'appelle l'indice de spécialité, et le diviseur est dit spécial lorsque $h^1(D) > 0$. La dualité de SERRE montre que $h^1(D) = h^0(K - D)$ où K désigne la classe canonique, à savoir celle du diviseur de n'importe quelle forme différentielle ω — celui-ci étant donné localement par et indépendamment d'une fonction rationnelle f telle que $\omega = f dx$ où x est un paramètre local, on voit que deux tels diviseurs sont équivalents. En prenant $D = 0$ dans RIEMANN-ROCH on trouve $g = h^1(0) = h^0(K)$ puis en prenant $D = K$, $\deg K = 2g - 2$. On en déduit alors que pour tout diviseur D de degré $> 2g - 2$, on a $h^1(D) = h^0(K - D) = 0$ en considérant les degrés, et donc que D ne peut être spécial. L'étude des diviseurs spéciaux occupe une grande partie du livre [1].

1.2.3 Diviseurs et morphismes projectifs

C'est un fait général — cf [8], proposition II.7.1 — qu'il revient au même de se donner un morphisme d'un schéma vers un espace projectif ou des sections globales engendrant un faisceau inversible. Si l'on dispose d'un tel morphisme $\varphi : X \to \mathbb{P}^r$, alors $\mathcal{L} := \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ est un faisceau inversible engendré par les $s_i := \varphi^*(x_i)$, tirés en arrière des sections de coordonnées de $\mathbb{P}^r$. Et réciproquement si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible engendré par des sections globales $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$, on considère alors le morphisme φ obtenu par recollement de ceux induits sur $X_i := \{P \in X \text{ tq } s_i \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$ par

$$\varphi_i : k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i}\right] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X),\ \frac{x_j}{x_i} \mapsto a_{ij}$$

où a_{ij} désigne l'unique élément de $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ tel que $a_{ij}s_i = s_j$ bien défini du fait que $\mathcal{L}(X_i)$ est engendré par s_i. En outre, si X_i est affine et qu'un point P correspond à un certain idéal premier $\mathfrak{p}$, alors son image $\varphi(P)$ dans $\mathbb{P}^r$ correspond elle à l'idéal premier $\varphi_i^{-1}(\mathfrak{p})$ dans la carte $\mathbb{A}_i$. Or pour tout $A \in k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i}\right]$,

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i}\right) \in \varphi_i^{-1}(\mathfrak{p}) &\Leftrightarrow \varphi_i A\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i}\right) \in \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow A\left(a_{i0}, \ldots, a_{ir}\right)(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow A\left(\frac{s_0(P)}{s_i(P)}, \ldots, \frac{s_r(P)}{s_i(P)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(P)$ n'est autre que le point de « coordonnées »[2] $(s_0(P) : \ldots : s_r(P))$ de $\mathbb{P}^r$.

Pour un diviseur D et un système linéaire correspondant à un sous-espace V de $H^0(X, D)$ ramené à une base $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$, l'application naturelle $X \to \mathbb{P}^r,\ P \mapsto (f_i(P))$ est un morphisme si et seulement si les f_i engendrent le faisceau $\mathcal{O}(D)$. Dans le cas contraire, un point P où $\varphi_{|D|}$ n'est pas défini est dit point-base du système linéaire ; de façon équivalente les f_i s'y annulent, ou tous les $f \in V$ s'y annulent — et effectivement $(f_0(P) : \ldots : f_r(P))$ n'a alors aucun sens dans $\mathbb{P}^r$. S'agissant d'un système linéaire complet $|D|$, on rappelle les caractérisations suivantes :

Proposition 1.2.4 ([8], Proposition IV 3.1)
$|D|$ est sans point-base ssi pour tout $P \in X$, $\dim|D - P| = \dim|D| - 1$.
$|D|$ est très ample ssi pour tout $P, Q \in X$, $\dim|D - P - Q| = \dim|D| - 2$.
Par RIEMANN-ROCH, *la première condition est remplie dès que $\deg D > 2g - 1$ et la seconde dès que $\deg D > 2g$.*

Supposant $|D|$ sans point-base, on dispose du morphisme $\varphi_{|D|}$ induit par D. On dit que D est simple si et seulement si $\varphi_{|D|}$ est birationnel.

Lemme 1.2.1 : *Soit $|D|$ un système linéaire complet sur une courbe X de dimension $r \geqslant 3$, sans point-base et simple. Alors $|D - P|$ est encore simple et sans point-base sauf pour un nombre fini de points $P \in X$.*

Preuve :
Soit donc $|D|$ un système linéaire de dimension $r \geqslant 3$ sans point-base et simple. Un point P tel que $|D - P|$ ait un point-base est un point au-dessus d'une singularité de $\varphi_{|D|}(X)$: comme celles-ci sont en nombre fini et qu'elles n'ont qu'un nombre fini

[2] $s_i(P)$ signifiant ici l'image de s_i dans le corps résiduel de P.

d'antécédents, de tels points P sont en nombre fini. Voyons maintenant ce qui se passe quand $|D-P|$ est sans point-base mais non-simple. On dispose alors du diagramme commutatif suivant où par définition ψ n'est pas birationnel :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"] & \varphi_{|D|}(X) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_Q"] & \mathbb{P}^r \arrow[d, "p_Q"] \\
& \varphi_{|D-P|}(X) \arrow[r, hook, "i"'] & \mathbb{P}^{r-1}
\end{tikzcd}$$

où p_Q désigne la projection depuis $Q = \varphi_{|D|}(P)$ dont la restriction à $\varphi_{|D|}(X)$ est par conséquent non birationnelle. Or il est connu — [1], page 109, lemma (i) — que pour une courbe non-dégénérée de $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant 3$, la projection depuis un point de la courbe est en général birationnelle sur son image. Ainsi les points Q comme ci-avant sont en nombre fini et par conséquent il en est de même des points P tels que $|D-P|$ soit non-simple.■

Pour éviter d'avoir à citer [1], page 109, lemma (i), on peut procéder comme suit :

Lemme 1.2.2 : *Soit X une courbe de $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant 3$ non-dégénérée de degré d. Alors il existe un hyperplan transverse H tel que qu'aucun triplet de points de $H \cap X$ ne soit aligné. En outre l'ensemble U de tels hyperplans est un ouvert de $(\mathbb{P}^r)^*$.*

Preuve :
Montrons d'abord que U est ouvert. Soit V l'ouvert des hyperplans transverses fourni par BERTINI. Pour tester si trois points de $H \cap X$ sont alignés, où $H \in V$, il suffit de voir que tout les mineurs d'ordre 3 extraits des coordonnées des trois points sont nuls. Plus formellement $U = \varphi^{-1}(W)$ où

$$\varphi : V \to S^{\binom{d}{3}}Y,\ H \mapsto \left(\binom{r+1}{3}\text{-uplet des mineurs d'ordre trois de } P, Q, R\right)_{P,Q,R \in H \cap X}$$

où $Y := \left(\frac{\mathbb{C}}{\pm 1}\right)^{\binom{r+1}{3}}$ et W est le complémentaire du fermé formé des $\binom{d}{3}$-uplets symétriques dont l'une des composantes a ses $\binom{r+1}{3}$ coordonnées nulles.
Montrons maintenant que $U \neq \emptyset$.■

Lemme 1.2.3 : *Soit X une courbe non-dégénérée de $\mathbb{P}^r$, $r \geqslant 3$. la projection depuis un point général de X induit un morphisme birationnel de la courbe sur son image.*

Preuve :
Soit U l'ouvert de l'espace des hyperplans du lemme précédent. Alors la projection depuis un point P de X appartenant à un hyperplan H de U induit un morphisme birationnel, car les $d-1$ autres points de $H \cap X$ sont seuls dans leur fibre. Il suffit donc de montrer que $\pi_1(I_U)$ est un ouvert de X où

$$I_U := \{(P, H) \in X \times (\mathbb{P}^r)^* \text{ tq } P \in H \in U\} = \pi_2^{-1}(U)$$

est un ouvert de la variété d'incidence et est donc localement fermé dans $X \times (\mathbb{P}^r)^*$. Son image par la première projection est donc constructible par le théorème de CHEVALLEY. Or X étant une courbe $\pi_1(I_U)$ est une réunion finie d'ouverts et de points. Il suffit alors de montrer qu'il est ouvert pour la topologie euclidienne : si un point P de X est dans un certain $H \in U$ comme U est également ouvert pour la topologie euclidienne on dispose d'hyperplans voisins de H dont les intersections avec X vont contenir un voisinage de P.■

On aura souvent intérêt à considérer les morphismes induits par des diviseurs sans point-base et si possible abaisser le degré d'un tel diviseur en en retirant un point : pour espérer que ce dernier soit encore sans point-base, il faut donc au moins que celui de départ soit simple, et la proposition suivante, issue de [5], vise à pouvoir itérer ce procédé :

Proposition 1.2.5
Soit $|D|$ un système linéaire de dimension $r \geqslant 3$ sans point-base et simple. Alors $D - \sum_{i=1}^{k} P_i$ est génériquement simple tant que $k < r-1$ et génériquement sans point-base tant que $k \leqslant r-1$.

Preuve :
D'après le lemme précédent, $|D - P_1|$ est génériquement simple et de dimension $r-1$, et on peut lui ré-appliquer le lemme si $r-1 \geqslant 3$ pour obtenir la simplicité de $|D - P_1 - P_2|$ pour presque tout P_2. En itérant on obtient la simplicité générique de $|D - \sum_{i=1}^{k} P_i|$ jusqu'à $k = r-2$; arrivé là on peut enlever un point générique pour que le résultat soit sans point-base.■

1.2.4 Jacobienne

Les éléments de $\mathrm{Pic}(X)$ correspondent aux classes de diviseurs sur $X_{\mathbb{C}}$ invariantes sous l'action de la conjugaison complexe, c'est-à-dire que pour un représentant D d'une de ces classes, on a $D \sim \overline{D}$. Parmi elles, on trouve celles représentées par un diviseur invariant $D = \overline{D}$: ils forment un sous-groupe noté $\mathrm{Pic}(X)^+$. Dans le cas où la courbe a vraiment des points réels, et c'est toujours ce que nous supposerons dorénavant, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X)^+$ (proposition 2.2 de [7]). Pour $d \in \mathbb{Z}$, on notera Pic^d la composante représentant les diviseurs de degré d. En particulier $J(\mathbb{R}) := \mathrm{Pic}^0(\mathbb{R})$ a une structure de variété abélienne sur $\mathbb{R}$ de dimension g, c'est la jacobienne de X. Cela en fait un groupe de LIE de dimension g. L'application exponentielle définie sur l'espace tangent au neutre est continue et induit un difféomorphisme local sur un voisinage ouvert U de $0 \in J(\mathbb{R})_0$ la composante connexe du neutre dans $J(\mathbb{R})$. Par commutativité de $J(\mathbb{R})$, on montre que l'exponentielle est surjective et induit donc un isomorphisme $\mathbb{R}^g / \ker \exp \simeq J(\mathbb{R})_0$. Par compacité de $J(\mathbb{R})_0$, on voit qu'il s'agit en fait d'un tore de dimension g.

En fixant un point $D_0 \in J(\mathbb{R})$, l'automorphisme de $J(\mathbb{R})$, $D \mapsto D + D_0$ induit un homéomorphisme entre $J(\mathbb{R})_0$ et la composante connexe de D_0. On peut calculer le nombre de ces composantes :

Proposition 1.2.6 (proposition 3.2 (2) [7])
Si $\mathrm{X}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ *alors* $J(\mathbb{R})$ *comporte* 2^{s-1} *composantes connexes.*

La preuve de ce dénombrement repose sur l'étude des applications $\varphi_d : S^d X \to \mathrm{Pic}^d, \langle P_1, \ldots, P_d \rangle \mapsto \sum_i P_i$ qui envoient $(S^d X)(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Pic}^d(\mathbb{R})^+$ et le dénombrement des composantes de $(S^d X)(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des points réels du produit X^d quotienté par l'action de permutation ; mais on peut se souvenir que deux classes de diviseurs de degré 0 sont dans la même composante si et seulement si elles ont même degré modulo 2 sur chacun des s ovales. Comme la somme de ces degrés doit au total être nulle, on retrouve bien le 2^{s-1}.

Fixant $P_0 \in X(\mathbb{R})$ on peut composer les applications précédentes $\varphi_d : S^d X \to \mathrm{Pic}^d$ par $\mathrm{Pic}^d \to J,\ D \mapsto D - dP_0$ et on obtient ainsi $\varphi_{d,P_0} : S^d X \to J,\ \langle P_1, \ldots, P_d \rangle \mapsto \sum_i (P_i - P_0)$. Étant donné un diviseur D de degré 0 on peut essayer de calculer la fibre de sa classe, or $\sum_i (P_i - P_0) \sim D \Leftrightarrow \sum_i P_i \sim D + dP_0$ et on cherche donc les diviseurs effectifs équivalents à $D + dP_0$, on a vu qu'ils formaient un espace projectif de dimension $h^0(X, D + dP_0) - 1$ qu'on peut calculer grâce au théorème de

RIEMANN-ROCH :

$$h^0(X, D+dP_0)-1 = \deg(D+dP_0)+1-1-g+h^1(D+dP_0) = d-g+h^1(D+dP_0).$$

Ainsi pour $d > g$, $h^0(X, D + dP_0) - 1 \geqslant d - g > 0$ et φ_{d,P_0} est surjectif et toutes les fibres « ont de la dimension ». Pour $d = g$ on a alors $h^0(X, D + dP_0) - 1 = h^1(D + dP_0) \geqslant 0$; ainsi φ_{g,P_0} est encore surjectif et les diviseurs non-spéciaux n'ont qu'un seul antécédent, les autres ont une fibre de dimension donnée par leur indice de spécialité.

1.2.5 Quelques exemples de courbes réelles lisses

Pour une courbe « abstraite », le premier invariant à considérer est son genre. Dans le cas complexe, on sait que toute courbe de genre nulle est isomorphe à la droite projective complexe ; dans le cas réel il en existe deux, suivant qu'elles ont ou non un point réel :

- Si X est une courbe réelle de genre 0 avec un point réel P, alors comme $h^0(P) = 2$ cela fournit un morphisme $X \to \mathbb{P}^1$ qui s'avère être un isomorphisme, comme dans le cas complexe ;
- Supposant que X n'ait pas de point réel, on se contente d'une base $1, x, y$ de $H^0(P+\overline{P})$, car $h^0(P+\overline{P}) = 3$. On constate alors que $1, x, y, x^2, y^2, xy$ sont liés dans $H^0(2(P+\overline{P}))$ de dimension 5 et ainsi le plongement $X \to \mathbb{P}H^0(P+\overline{P}) = \mathbb{P}^2$ donne une courbe contenue dans $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. On a $ab \neq 0$ car sinon x et y seraient liées et on peut supposer $a = 1$. Quitte à remplacer x par $x + \frac{cy}{2}$ on peut supposer $c = 0$. Comme la courbe est sans point réel on a également $b > 1$ et quitte à remplacer y par $\sqrt{b}y$ on peut supposer $b = 1$. A nouveau en complétant les carrés on peut supposer $d = e = 0$. Finalement comme la courbe est sans point réel $f > 0$ et quitte à dilater on peut supposer $f = 1$ pour obtenir $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Réciproquement l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ définit bien une courbe plane lisse sans point réel de genre $\frac{(2-1)(2-2)}{2} = 0$.

Ces deux courbes ne sauraient être isomorphes sur $\mathbb{R}$ car l'une a des points réels et l'autre non. Ceci traite le cas des courbes réelles lisses rationnelles.

Pour le genre 1 on retrouve la même discussion suivant que X a ou non des points réels :

- Si X a un point réel P alors les arguments classiques – [8], IV.4 par exemple —

sur les courbes elliptiques, n'utilisant que $h^0(nP) = n$ pour $n \geqslant 2$, permettent de réaliser X comme une cubique plane qu'on met sous forme de WEIERSTRASS car $\mathbb{R}$ est de caractéristique $0 \notin \{2,3\}$: X $\simeq \{y^2 = x^3 + ax + b\} \subset \mathbb{P}H^0(3P)$.

– Si on suppose un instant que X n'a pas de point réel alors on ne dispose plus que des $h^0(n((P+\overline{P})) = 2n$ pour $P+\overline{P}$ un point non-réel et $n \geqslant 1$. Soit alors $1, x$ une base de $H^0(P+\overline{P})$. Comme $x^2 \in H^0(2(P+\overline{P})) \setminus H^0(P+\overline{P})$ on obtient une base $1, x, x^2, y$ de $H^0(2(P+\overline{P}))$. On constate alors que $1, x, x^2, y, x^3, xy$ est une base de $H^0(3(P+\overline{P}))$ tandis que $1, x, x^2, y, x^3, xy, x^4, x^2y, y^2$ sont liés dans $H^0(4(P+\overline{P}))$. Cela fournit une équation polynomiale à coefficients réels :

$$\alpha y^2 + \beta x^2 y + \gamma xy + \delta y = \varepsilon x^4 + \zeta x^3 + \eta x^2 + \theta x + \iota$$

et quitte à remplacer y par $y + \frac{\beta x^2 + \gamma x + \delta}{2}$ on peut supposer que le membre de gauche se réduit à y^2 pour obtenir

$$E : y^2 = f(x) = -x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

où $f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$ puisque X est supposée sans point réel. On dispose donc d'un morphisme $X \to \mathbb{P}H^0(2(P+\overline{P}))$, $q \mapsto (x(q) : y(q) : x^2(q) : 1)$ à valeur dans $\mathcal{Z}\left(tz^2 - x,\ y^2 - f_t(x)\right)$. En projetant depuis le point $(0:0:1:0)$ sur le plan $z = 0$ on obtient une courbe plane d'équation $y^2 = f(x)$. Réciproquement une telle courbe irréductible présente un point singulier réel isolé à l'infini et sa normalisée[3] fournit une courbe de genre 1 sans point réel.

Sur ces exemples on a donc réalisé des courbes de genre 1 ayant ou non des points réels. On peux même illustrer les possibilités d'avoir une ou deux composantes réelles. On vient de voir que dans ces cas la courbe se réalise dans $\mathbb{P}^2$ par une équation $y^2 = x^3 + ax + b =: f(x)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Si f a trois racines réelles (resp : une seule racine réelle) alors la courbe a deux composantes (resp : une seule) :
Pour de telles courbes elliptiques, la surfaces de RIEMANN est un tore et on comprend qu'une partie réelle avec deux composantes le découpe en deux.

Un autre exemple classique de courbes est celui des courbes dites hyperelliptiques. Il s'agit de courbes de genre supérieur à deux admettant un morphisme $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2 ou de façon équivalente, admettant un g^1_2. Un tel morphisme induit un re-

[3] On verra les notions « singulières » dans la prochaine section.

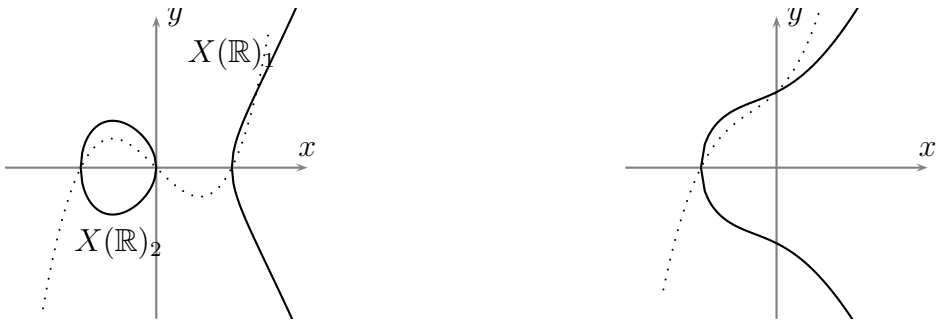


FIG. 1.2 – Courbes de genre 1 avec une ou deux composantes réelles

vêtement entre surfaces de RIEMANN $X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, point de vu plus familier. La formule de RIEMANN-HURWITZ montre que ce revêtement est ramifié en $2(g+1)$ points. Comme φ était ici défini sur $\mathbb{R}$, ces points de ramification sont réels ou viennent par paires de points complexes conjugués. En pratiquant quelques découpages et recollements, on retrouve la nature topologique de la surface $X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.

En genre 2, le système linéaire canonique $|K|$ est un g^1_2 et toutes ces courbes sont donc hyperelliptiques. On peut construire des courbes hyperelliptiques de genre g en désingularisant la courbe plane $y^2 = f(x)$ où f est de degré $2g+1$ ou $2g+2$, singulière à l'infini. Dans le cas réel, notons que celles de degré $2g+1$ ont toujours des points réels. Notons également que dans une telle carte affine le morphisme de degré 2 est donné par la projection $(x, y) \mapsto x$ tandis que la réflexion $(x, y) \mapsto (x, -y)$ échange les deux antécédents d'une même fibre. Plus généralement on appelle involution hyperelliptique l'unique automorphisme de X différent de l'identité faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\text{involution}", "\text{hyperelliptique}"'] \arrow[dr, "2"'] & & X \arrow[dl, "2"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

En genre supérieur à 3 il existe toujours des courbes non-hyperelliptiques et ce sont précisément celles dont le système $|K|$ est très ample — [8], IV.5.2. Leur image par $\varphi_{|K|}$ dans $\mathbb{P}^{g-1}$ est par définition une courbe canonique.

1.3 Courbes réelles singulières

On relâche dans cette section l'hypothèse de lissité. X est donc un schéma projectif défini sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 géométriquement intègre. On dira que X est une courbe

réelle.

1.3.1 Topologie

Sans l'hypothèse de régularité, $X(\mathbb{R})$ n'est plus nécessairement une variété différentiable, ni même topologique comme le montre l'exemple du « nœud » suivant, d'équation $x^2(x-z) = y^2 z$ vu dans la carte affine $z = 1$. Certaines composantes connexes peuvent même se réduire à des points, on parlera de singularités isolées comme dans l'exemple du nœud $zy^2 = (x+z)^2 x$.

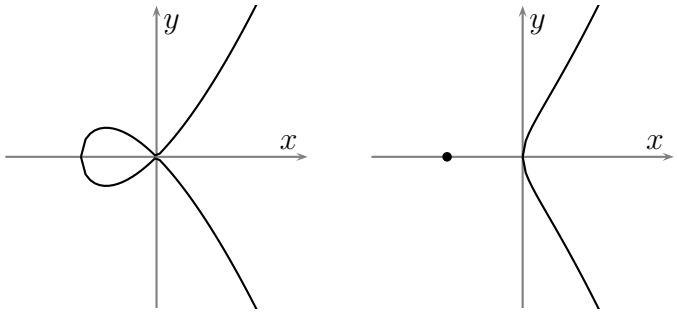


FIG. 1.3 – Courbes singulières : nœud isolé ou non

Néanmoins, les singularités réelles sont isolées, pour la topologie euclidienne, dans $X(\mathbb{R})$ et leur voisinage épointé comporte un nombre pair de composantes connexes qui doivent donc se rejoindre : topologiquement, une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ est ou bien un point, ou bien un bouquet d'un certain nombre de cercles, qu'on appellera « lacets ». Le nombre l de ces lacets vérifie l'analogue de l'inégalité d'HARNACK, [12], à savoir $l \leqslant p_a + 1$ où p_a désigne le genre arithmétique de X.

1.3.2 Désingularisation et normalisation

Pour désingulariser une courbe, il suffit de considérer sa normalisée puisqu'en dimension 1 on a l'équivalence « régulier $\Leftrightarrow$ normal ». On rappelle qu'un schéma X est dit normal en un point P si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$ est normal — on dit aussi intégralement clos — ie ssi il est intègre et égal à sa clôture intégrale dans son corps des fractions. X est dit normal lorsqu'il l'est en tout point.

Définition : Soit X un schéma intègre. On appelle normalisation de X tout couple $(\widetilde{X}, \pi)$ où $\widetilde{X}$ est un schéma normal et $\pi : \widetilde{X} \to X$ un morphisme dominant tel que pour tout morphisme dominant $f : Y \to X$ avec Y normal, il existe un unique morphisme $g : Y \to \widetilde{X}$ tel que $f = \pi \circ g$.

Bien sûr, en cas d'existence, la propriété universelle garantit l'unicité d'une normalisation à unique isomorphisme près. Pour son existence on procède en deux étapes :

- Pour un schéma affine intègre $X = \mathrm{Spec}A$, il suffit de considérer $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}\widetilde{A}$ où $\widetilde{A}$ est la clôture intégrale de A dans $\mathrm{Frac}A$. Celui-ci est en effet normal et se donner un morphisme dominant $f : Y \to X$ revient à se donner une injection $A \to \mathcal{O}_Y(Y)$ intégralement clos qui se factorise donc à travers $\widetilde{A}$.
- Pour un schéma intègre X, on le recouvre par des ouverts affines, intègres par définition, $X = \cup_i \mathrm{Spec}A_i$ et les normalisations $\mathrm{Spec}\widetilde{A_i} \to \mathrm{Spec}A_i$ se recollent par unicité des normalisations des $\mathrm{Spec}A_i \cap \mathrm{Spec}A_j$. La propriété universelle s'obtient aussi par recollement des cas affines.

Si $\pi : \widetilde{X} \to X$ est une normalisation, le morphisme d'espaces localement annelés sur X, est donné par les injections $\pi(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\pi^{-1}(U)) = \widetilde{\mathcal{O}_X(U)}$. Par définition, on a donc $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \widetilde{\mathcal{O}}_X$. En particulier X et $\widetilde{X}$ ont même corps de fonctions rationnelles. En outre, suivant [10], si Q est un point de X alors on a

$$\widetilde{\mathcal{O}_{X,Q}} = \varinjlim_{U \ni Q} \widetilde{\mathcal{O}_X}(U) = \varinjlim_{U \ni Q} \widetilde{\mathcal{O}_X(U)} = \varinjlim_{U \ni Q} \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\pi^{-1}(U)) = \cap_{P \mapsto Q} \mathcal{O}_{\widetilde{X},P}$$

où la dernière intersection se fait sur les points P dont l'image par π est Q. Ainsi, notant S le lieu non-normal de X, π induit un isomorphisme birégulier $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(S) \dashrightarrow X \setminus S$. En outre $\widetilde{\mathcal{O}_{X,Q}}$ est un anneau semi-local dont le radical $\mathfrak{r}_Q$ est formé des fonctions rationnelles $f \in k(X) = k(\widetilde{X})$ s'annulant en tout point $P \in \widetilde{X}$ au-dessus de Q. L'annulateur $\mathfrak{c}$ de $\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}$ est un faisceau cohérent sur X vérifiant en tout point $Q \in X$ les inclusions

$$k + \mathfrak{c}_Q \subset \mathcal{O}_{X,Q} \subset k + \mathfrak{r}_Q \subset \widetilde{\mathcal{O}_{X,Q}}.$$

Dans le cas où X est une courbe le faisceau $\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}$ est donc porté par le lieu singulier $S \subset X$ de dimension 0. Par suite $H^1\left(X, \frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}\right) = 0$ et les k-algèbres $\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{X,Q}}}{\mathcal{O}_{X,Q}}$ sont donc de dimension finie sur k, qu'on note δ_Q. On peut énoncer la proposition suivante — cf [10], IV.1.2.2 et IV.2.5.12 :

Proposition 1.3.1 (genre arithmétique d'une courbe singulière)
Soit X une courbe de lieu singulier S, alors $Q \in S \Leftrightarrow \delta_Q > 0$. Si $\pi : \widetilde{X} \to X$ est une normalisation de X projective, alors $p_a(X) = p_a(\widetilde{X}) + \sum_{Q \in S} \delta_Q$.

Preuve :
L'équivalence $Q \in S \Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,Q}$ non-normal $\Leftrightarrow \delta_Q > 0$ est claire. Considérons la suite

exacte de faisceaux sur X

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to \frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X} \to 0$$

et prenons en la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X) \to H^0\left(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right) \to H^0\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}\right) \to H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1\left(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right) \to H^1\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}\right)$$

avec comme déjà vu précédemment $H^1\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}\right) = 0$ et $H^0\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}{\mathcal{O}_X}\right) = \oplus_{Q\in S}\widetilde{\frac{\mathcal{O}_{X,Q}}{\mathcal{O}_{X,Q}}}$. En outre $H^0(\mathcal{O}_X) = k = H^0\left(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right)$. Enfin $H^1(X, \pi_*\mathcal{O}_X) = H^1\left(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right)$ car on peut calculer ceux-ci avec un recouvrement affine $X = \cup_i U_i$ tel que $\widetilde{X} = \cup_i \pi^{-1}(U_i)$ où $\pi_*\mathcal{O}_X(U_i) = \widetilde{\mathcal{O}_X(U_i)} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\pi^{-1}U_i)$ et les conditions de recollement des f_i sur ces ouverts sont bien les mêmes. En prenant les dimensions sur k, on obtient finalement

$$0 = 1 - 1 + \sum_{Q\in S}\delta_Q - p_a(X) + p_a(\widetilde{X})$$

par définition-même de $p_a = h^1$.■

1.3.3 Groupes de PICARD et diviseurs de WEIL

Venons-en maintenant aux liens entre les groupes de PICARD de X et $\widetilde{X}$. Comme ce sont deux schémas intègres, ces groupes sont ceux des classes de diviseurs de CARTIER — cf. [8] proposition 6.15 — et également les H^1 du faisceau des fonctions régulières inversibles. Par ailleurs la suite exacte courte de faisceaux sur X de groupes abéliens

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^* \to \frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*} \to 0$$

donne la suite exacte longue de cohomologie sur X,

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X^*) \to H^0\left(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*\right) \to H^0\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right) \to H^1(\mathcal{O}_X^*) \to H^1\left(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*\right) \to H^1\left(\frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right)$$

avec comme précédemment $H^0\left(X, \frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right) = \oplus_{P\in S}\widetilde{\frac{\mathcal{O}_P}{\mathcal{O}_P^*}}^*$ et $H^1\left(X, \frac{\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right) = 0$. Par ailleurs on retrouve $\mathrm{Pic}X = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ et $\mathrm{Pic}\widetilde{X} = H^1(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*) = H^1(X, \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*)$.

Enfin pour des courbes projectives on obtient

$$H^0\left(X, \mathcal{O}_X^*\right) = k^* = H^0\left(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*\right) \simeq H^0\left(X, \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*\right).$$

Par suite $H^0\left(\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*\right) \to H^0\left(\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right)$ est le morphisme nul et son image étant le noyau de la suivante on obtient bien l'injection $H^0\left(\frac{\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*}{\mathcal{O}_X^*}\right) \to H^1\left(\mathcal{O}_X^*\right)$. Tout ceci fournit finalement la proposition suivante — [8], exercice 6.9 :

Proposition 1.3.2 (lien entre $\mathrm{Pic}X$ et $\mathrm{Pic}(\widetilde{X})$)
Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une normalisation d'une courbe, alors on a la suite exacte courte

$$0 \to \oplus_{P \in S} \frac{\widetilde{\mathcal{O}_P}^*}{\mathcal{O}_P^*} \to \mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \to 0$$

où la surjection est donnée par π^*.

Sur une courbe même singulière, le groupe des classes de faisceaux inversibles s'identifie encore avec les classes de diviseurs de CARTIER — remarque 6.14.1 ou proposition 6.15 de [8] pour les courbes irréductibles. On voudrait maintenant retrouver un point de vue « à la WEIL » sur X. On veut calquer la définition du cas lisse et pour cela on a besoin de parler de l'ordre d'une fonction rationnelle en un point, ordre qui n'existe qu'en les points lisses. On s'intéresse donc uniquement aux diviseurs de « WEIL » à support dans la partie lisse X_{reg} de X. On associe alors à un tel diviseur $D = \sum_i n_i P_i$ le faisceau $\mathcal{O}(D)$ défini sur tout ouvert U comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}(X)$ telles que pour tout $P_i \in U$, $v_{P_i}(f) + n_i \geqslant 0$ et telles que pour tout point singulier $Q \in U$, $f \in \mathcal{O}_{X,Q}$. Ceci ne coïncide pas en général avec le faisceau poussé $i_* \mathcal{O}_{X_{reg}}(D)$ par l'immersion ouverte $i : X_{reg} \to X$. A toute fonction rationnelle $f \in \mathbb{R}(X)$ on associe encore un diviseur noté $\mathrm{div}(f)$ défini par $\sum_{P \in X_{reg}} v_P(f) P$. Notons qu'on ne prend pas en compte le comportement de f aux points singuliers $Q \in X_{sing}$ et qu'en particulier on peut avoir $f \notin \mathcal{O}_{X,Q}$ et $f^{-1} \notin \mathcal{O}_{X,Q}$ car $\mathcal{O}_{X,Q}$ n'est pas un anneau de valuation. A l'inverse on dira que $f \in \mathbb{R}(X)$ est inversible aux points singuliers de X quand $f \in \cap_{Q \in X_{sing}} \mathcal{O}_{X,Q}^*$. Avec ces définitions on a les résultats suivants :

Proposition 1.3.3 (diviseurs de WEIL et groupe de PICARD sur une courbe singulière)
Pour tout $D \in \mathrm{Div}(X_{reg})$ le faisceau $\mathcal{O}(D)$ est bien inversible. L'application $\mathrm{Div}(X_{reg}) \to$

$\mathrm{Pic}(X)$ *déduite de* $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ *est surjective et son noyau est formé des diviseurs associés à une fonction rationnelle inversible aux anneaux locaux des points singuliers.*

Remarquons tout de suite que si $f \in \mathbb{R}(X)$ vérifie $f \notin \mathcal{O}_{X,Q}$ et $f^{-1} \notin \mathcal{O}_{X,Q}$ pour un point singulier Q alors $\mathcal{O}(\mathrm{div}(f))$ n'est pas neutre dans $\mathrm{Pic}(X)$ tandis que le diviseur de CARTIER $\{(X, f)\}$ est trivialement principal : les deux faisceaux inversibles canoniquement associés ne sont pas isomorphes !

Preuve de la proposition :
Montrons maintenant que $\mathrm{Div}(X_{reg}) \to \mathrm{Pic}(X),\ D \mapsto \mathcal{O}(D)$ est surjective — exercice IV 1.9 (b) et (c) de [8] — et pour cela commençons par prouver que si $\mathcal{L}$ est très ample et $\mathcal{M}$ inversible engendré par un nombre fini de ses sections globales, alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ est également très ample — exercice II 7.5 (d) de [8] : on dispose d'une immersion fermée $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ telle que $\varphi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$ et d'un morphisme $\psi : X \to \mathbb{P}^m$ tel que $\psi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{M}$. En observant le diagramme suivant où S est le plongement de SEGRE :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^n & \\
X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi\times\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "S"] & \mathbb{P}^{mn+m+n} \\
 & \mathbb{P}^m &
\end{tikzcd}$$

on constate que $(S \circ \varphi \times \psi)^*\mathcal{O}(1) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ et il suffit donc de justifier que $S \circ \varphi \times \psi$ est une immersion fermée : or le plongement de SEGRE en est une ainsi que le produit d'une immersion fermée par un autre morphisme (en se ramenant au cas affine on doit montrer que $A \otimes B \to C$ induit par $A \to C$ et $B \to C$ est surjectif dès que $A \to C$ l'est, ce qui est évident.).
Ceci fait on fixe un faisceau très ample $\mathcal{L}$ sur X projectif et on constate que pour tout faisceau inversible $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n$ est engendré par un nombre fini de ses sections globales pour n assez grand car en particulier $\mathcal{M}$ est cohérent et $\mathcal{L}$ ample. Mais alors $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{n+1}$ est très ample d'après ce qui précède. Comme $\mathcal{L}^{n+1}$ est lui aussi très ample on dispose de deux diviseurs effectifs les représentant, disons D' et D'' respectivement et alors $\mathcal{M} = \mathcal{O}(D') \otimes \mathcal{O}(D'')^{-1}$. BERTINI — remarque 8.18.1 de [8] — permettait de choisir D' et D'' à support dans X_{reg} de sorte que $\mathcal{O}(D) = \mathcal{M}$ pour $D = D' - D''$.
Étudions maintenant le noyau de cette dernière surjection $\mathrm{Div}(X_{reg}) \to \mathrm{Pic}(X)$. Tout d'abord si $f \in \mathbb{R}(X)$ est inversible aux anneaux locaux des points singuliers alors $\mathcal{O}(\mathrm{div}(f)) \simeq \mathcal{O}_X$ les isomorphismes au niveau des germes étant donnés :

– comme d'habitude par $\mathcal{O}_{X,P} \to \mathcal{O}(\mathrm{div}(f))_P$, $g \mapsto g\pi_P^{-v_P(f)}$ où π_P est une uniformisante en un point P lisse,
– par la définition même de $\mathcal{O}(\mathrm{div}(f))$ en un point Q singulier où $\mathcal{O}_{X,Q} \to \mathcal{O}(\mathrm{div}(f))_Q$.

Réciproquement montrons que si $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}_X$ alors $D = \mathrm{div}(f)$ pour une fonction rationnelle $f \in \mathbb{R}(X)$ inversible aux anneaux locaux des points singuliers. En effet, comme diviseur de CARTIER, $\mathcal{O}(D)$ est alors donné par une seule fonction rationnelle $f \in \mathbb{R}(X)^* = H^0(X, \mathbb{R}(X)^*)$ et en notant $D = \sum_{P \in X_{reg}} n_P P$, on a alors :

– pour tout point lisse P, $\mathcal{O}(D)_P = \{(X, f)\}_P = f_P^{-1}\mathcal{O}_{X,P}$ et donc $n_P = v_P(f)$,
– pour tout point lisse Q, $\{(X, f)\}_Q = f_Q^{-1}\mathcal{O}_{X,Q} = \mathcal{O}(D)_Q = \mathcal{O}_{X,Q}$ et donc $f \in \mathcal{O}^*_{X,Q}$.

Ainsi $D = \mathrm{div}(f)$ où f est inversible aux anneaux locaux des points singuliers.■

Enfin remarquons que pour un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X_{reg})$ on a encore une formule de RIEMANN-ROCH, $\chi(\mathcal{O}(D)) = \mathrm{deg}D + 1 - p_a(X)$, qu'on obtient de manière classique en la constatant pour $D = 0$, où il ne s'agit que de la définition de p_a, puis en montrant qu'elle est vraie pour $D \in \mathrm{Div}(X_{reg})$ si et seulement si elle l'est également pour $D+P$ avec P lisse. Pour obtenir un théorème de RIEMANN-ROCH analogue au cas lisse, il faudrait disposer d'un faisceau inversible dualisant. Son existence n'est en général pas garantie, mais on signale quand même le résultat suivant (fin de l'exercice IV 1.9 de [8]) :

Proposition 1.3.4 (RIEMANN-ROCH pour une intersection complète)
Soit X une courbe localement intersection complète dans un espace projectif. Alors il existe un faisceau inversible, donc représenté par un diviseur $K \in \mathrm{Div}(X_{reg})$ tel que pour tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(X_{reg})$ on ait

$$h^0(D) - h^0(K - D) = \mathrm{deg}D + 1 - p_a(X).$$

1.3.4 Diviseurs et jacobienne généralisée

A une courbe singulière X on peut encore associer une jacobienne J, dite jacobienne généralisée. Celle-ci est une extension de la jacobienne usuelle $\tilde{J}$ de la normalisée $\tilde{X}$. Le groupe intervenant H dans cette extension

$$0 \to H \to J \to \tilde{J} \to 0$$

dépend de la nature des singularités. Remarquons comme dans [10] que dans le cas particulier où X est déduite de $\tilde{X}$ par un diviseur effectif M [4], une classe d'un diviseur $D \in J$ est nulle dans $\tilde{J}$ si et seulement s'il est le diviseur d'une fonction rationnelle f inversible dans les anneaux locaux des points du support de M ce qui permet d'interpréter le groupe H. Sur $\mathbb{C}$, on sait que c'est un produit des groupes multiplicatif ou additif $H_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}^a_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}^b_{a,\mathbb{C}}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. En passant à $\mathbb{R}$, on montre [12] que $J(\mathbb{R})$ est compact si et seulement si $H(\mathbb{R})$ l'est, or ses facteurs sont parmi les groupes suivants :

- $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ qui provient typiquement d'un nœud usuel obtenu à partir d'une courbe rationnelle : notant P et Q les deux points réels au-dessus de ce nœud, on a dit qu'un diviseur de degré 0 était nul dans J s'il provenait d'un fonction rationnelle f inversible en P et Q et par rationalité de X, ce diviseur est nul ssi $\frac{f(P)}{f(Q)} = 1$. C'est donc ce quotient qui détermine ici H : dans ce cas il est bien paramétré par $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$;
- $R^1_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ qui provient typiquement d'un nœud isolé : notant P et $\overline{P}$ les deux points complexes conjugués au-dessus du-dit nœud, le rapport $\frac{f(P)}{f(\overline{P})}$ — qui vaut $\frac{f(P)}{\overline{f(P)}}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$ — est bien paramétré par un complexe de module 1 ;
- $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ qui provient typiquement d'un nœud non-réel car notant $P, Q, \overline{P}, \overline{Q}$ les points complexes au-dessus des deux nœuds complexes conjugués, l'obstruction se mesure par les rapports $\frac{f(P)}{f(Q)}$ et $\frac{f(\overline{P})}{f(\overline{Q})}$, conjugués l'un de l'autre car f est définie sur $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{G}_{a,\mathbb{R}}$ qui provient de la multiplicité d'un point au-dessus d'un point singulier.

1.4 Problèmes posés, résultats connus et nouveaux

1.4.1 Cas lisse

Dans [14], SCHEIDERER montre que pour toute courbe réelle lisse, projective, ayant des points réels il existe un entier n à partir duquel tout diviseur de degré plus grand que n est linéairement équivalent à un diviseur effectif dont tous les points du support sont réels. En d'autres termes l'application composée

$$S^d(\mathrm{X}(\mathbb{R})) \to (S^d X)(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pic}^d(\mathbb{R})$$

[4] Nous reviendrons en détails sur cette construction.

reste surjective pour $d \geqslant n$.

Notation : Pour une courbe réelle X, $N(X)$ désignera le minimum dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des entiers n tels que tout diviseur de degré plus grand que n soit linéairement équivalent à un diviseur dont le support est totalement réel.

Ainsi le théorème de SCHEIDERER revient à :

Théorème (SCHEIDERER)
Si X est une courbe réelle lisse et projective telle que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, alors $N(X) < \infty$.

A partir de là, on se pose les questions suivantes :
- Peut-on donner une borne sur $N(X)$ en fonction d'autres invariants de X ?
- Si oui, s'agit-il de la meilleure borne ?
- Si la courbe est singulière, peut-on obtenir un analogue de $N(X)$?
- Si oui, peut-on à nouveau l'optimiser ?
- Peut-on rendre tout diviseur de degré suffisamment grand linéairement équivalent à un diviseur de support totalement non-réel ? si oui, peut-on optimiser les degrés pour lesquels celà est vrai et peut-on également l'adapter au cas singulier ?

A propos de ce dernier point, remarquons qu'un diviseur D linéairement équivalent à un diviseur de support totalement non-réel est nécessairement de degré pair sur chaque composante connexe : d'une part car c'est le cas d'un diviseur totalement non-réel, et d'autre part car une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ est de degré pair sur chaque ovale pour des raisons topologiques. On introduit maintenant le pendant de l'entier $N(X)$:

Notation : Pour une courbe réelle X, $M(X)$ désignera le minimum dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des entiers n tels que tout diviseur de degré plus grand que $2n$ et de degré pair sur tout ovale de $X(\mathbb{R})$ soit linéairement équivalent à un diviseur dont le support est totalement non-réel.

A ce sujet MONNIER avait montré dans [11] que pour une courbe lisse X on avait $g \leqslant M(X) \leqslant 2g$. On peut en fait améliorer la borne supérieure :

Proposition 1.4.1 ($M(X) \leqslant g+1$)
Si X est une courbe réelle lisse et projective, alors $M(X) \leqslant g+1$.

Preuve :
Soit D un diviseur de degré pair sur chaque ovale de X et de degré total $2d \geqslant 2g+2$

et P un point réel de X. Alors la classe de $D - 2dP$ est dans $J(\mathbb{R})_0 = 2J(\mathbb{R})$ et s'écrit donc 2α. Comme l'application $\varphi_{P,d} : S^dX \to J(\mathbb{R})$ est surjective, on trouve un diviseur effectif D' tel que $[D' - dP] = \alpha$ et donc $D \sim 2D'$. Le théorème de RIEMANN-ROCH montre que $h^0(D') \geqslant \deg D' + 1 - g \geqslant 2$ et il existe donc $f \in H^0(D')$ non constante et donc $f^2 \in H^0(2D')$. Comme $2D'$ est effectif, $1 \in H^0(2D')$ et donc $Z := 2D' + \mathrm{div}(1+f^2)$ est effectif et représente les zéros de $1+f^2$ qui sont tous non-réels d'après le lemme suivant. Finalement $D \sim 2D' \sim Z$ comme souhaité.■

Lemme 1.4.1 : *Si $f \in \mathbb{R}(X)$ et x est un point réel régulier de X, alors $(1+f^2)(x) \neq 0$.*

Preuve :
Soit ν_x la valuation associé à x étendue à $\mathbb{R}(X)$. On a $\nu_x(1+f^2) = \min\{\nu_x(1), 2\nu_x(f)\} \leqslant 0 < 1$ et donc $(1+f^2)(x) \neq 0$.■

Pour obtenir $D \sim 2D'$, il suffit que $d \geqslant g$. En regardant le système linéaire associé à un double effectif, COPPENS a prouvé de façon très géométrique le résultat suivant (cf [4]) :

Théorème ($M(X) = g$)
Soit X une courbe réelle de genre g avec des points réels. Alors $M(X) = g$.

Concernant l'invariant N, HUISMAN donne le résultat suivant dans [9] :

Théorème ($N(X) \leqslant 2g - 1$ pour les courbes maximales)
Soit X une courbe réelle maximale de genre $g > 0$. Alors $N(X) \leqslant 2g - 1$.

MONNIER l'obtient également pour les $(M-1)$-courbes dans [11], Theorem 3.6 :

Théorème ($N(X) \leqslant 2g - 1$ pour les $(M-1)$-courbes)
Soit X une courbe réelle de genre $g > 0$ avec s composantes connexes. Si $s \geqslant g$, alors $N(X) \leqslant 2g - 1$.

Il est également prouvé dans [11], Corollary 6.4, que cette borne est optimale : il existe des courbes — les courbes hyperelliptiques réelles — dont l'invariant N est $\geqslant 2g - 1$. Les preuves de HUISMAN et MONNIER sont bien différentes de celle de SCHEIDERER, qui est très théorique et ne permet pas a priori d'optimiser l'entier n en question. En revenant sur cette preuve au début de la section suivante, on a même l'impression que l'entier n obtenu est un très gros multiple du genre. Dans ce même

article — [14], Remark 2.14 — SCHEIDERER laissait entendre qu'on peut également imposer au diviseur réel de n'avoir aucune multiplicité, et c'est une notion qui nous servira pour aborder le cas singulier, on la formalise donc :

Notation : Pour une courbe réelle X, $N'(X)$ désignera le plus petit des entiers n tels que tout diviseur de degré $\geqslant n$ soit linéairement équivalent à un diviseur effectif à support réel et sans multiplicité.

Remarquons tout de suite que $N(X) \leqslant N'(X)$. Dans le cas général on a 2.1.2

Théorème ($N'(X) \leqslant 2N(X)$)
Soit X une courbe réelle telle que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Alors $N'(X) \leqslant 2N(X)$.

Dans la suite on étendra les résultats connus sur N à N'. Le théorème 2.4.0.1 l'énonce clairement :

Théorème ($N' \leqslant 2g-1$ pour les courbes ayant beaucoup de composantes)
Soit X une courbe réelle de genre $g > 0$ ayant g ou $g+1$ composantes. Alors $N'(X) \leqslant 2g-1$.

Pour ces invariants, le « plus petit cas » où l'on ne savait donc rien dire aux vues des résultats précédents est celui des courbes de genre 2 avec une seule composante connexe. Elles feront l'objet d'une bonne partie du premier chapitre et on y prouvera l'existence de telles courbes avec un invariant N plus grand que 5 pourtant strictement plus grand que $3 = 2 \times 2 - 1$ borne obtenue jusqu'à présent. On verra même — 2.3.4 — qu'il en existe des deux types topologiques possibles : séparante ou non. On verra également que cette valeur est optimale en prouvant que $N'(X) \leqslant 5$ pour ces courbes — 2.3.5. On peut ainsi résumer la situation des courbes de genre 2 :

Théorème (courbe de genre 2 avec une seule composante)
Si X est une courbe de genre 2 avec une seule composante alors $N(X) \leqslant N'(X) \leqslant 5$. De plus il existe des courbes, certaines séparantes d'autres non, pour lesquelles cette inégalité est une égalité.

On peut alors se poser des questions sur l'ensemble des courbes vérifiant $N' = 5$ dans l'espace des courbes $(g, s) = (2, 1)$. La première serait de savoir s'il s'agit de toutes ces courbes.

1.4.2 Cas singulier

Le cas singulier avait été abordé par MONNIER dans [12] où il montrait que $N(X)$ pouvait être fini ou non suivant la nature des singularités de X. Plus précisément il montrait :

Théorème ([12] partie 3)
Si X a une singularité non-réelle ou si X n'a que des singularités isolées dans $X(\mathbb{R})$ dont l'une n'est pas un nœud, alors $N(X) = +\infty$

Sans trop rentrer dans les détails, ce que nous ferons de toute façon plus tard, mentionnons seulement que l'argument de compacité au coeur de la preuve de SCHEIDERER n'est plus directement valable ici : comme on l'a vue la jacobienne généralisée n'est plus nécessairement compacte, en particulier quand X a une singularité non-réelle ou une singularité isolée non-nodale tandis que la partie lisse $U(\mathbb{R})$ resterait compacte, ce qui prouve qu'on ne peut surjecter $U(\mathbb{R})^N$ sur $J(\mathbb{R})$. MONNIER montrait aussi la finitude de N dans certains cas accompagnés de quelques majorations — dans ces cas on suppose toujours implicitement que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$:

Théorème ([12] 4.15)
Si X n'a que des nœuds réels et au plus un cusp réel, alors $N(X)$ est fini. De plus si la normalisée de X a beaucoup de composantes alors $N(X) \leqslant 2p_a$.

Dans la seconde partie de cette thèse on essaiera également d'étendre ces résultats. En itérant les arguments de MONNIER à l'aide d'une construction essentiellement fournie dans [10] on prouvera que N' reste fini sans aucune restriction sur le nombre de cusps — 3.4.1 :

Théorème (N et N' pour les courbes à singularités ordinaires réelles et cusps réels)
Si X a pour seules singularités des singularités ordinaires réelles et des cusps réels, alors $N(X) \leqslant N'(X) < +\infty$.

En le couplant aux résultats de la première partie, on pourra être plus explicite sur les bornes, 3.4.2 :

Théorème (bornes explicites pour N et N' dans quelques cas)
Si X est une courbe singulière obtenue à partir d'une courbe lisse, sa normalisée, qui a beaucoup de composantes (resp de genre 2) à l'aide de n diviseurs effectifs sans

multiplicité ou éventuellement un coefficient 2 *par étape, disons les* D_k *de degré* d_k*, alors*

$$N(X) \leqslant N'(X) \leqslant 2g(\tilde{X}) - 1 + \sum_{k=1}^{n} d_k \qquad (\textit{resp } N'(X) \leqslant 5 + \sum_{k=1}^{n} d_k).$$

Le premier cas qui ne relève pas directement d'un élargissement des résultats de MONNIER est le suivant, dont l'énoncé ici est peut-être abscons, mais où ressurgit une condition de nature topologique, 3.5.1 :

Théorème ($2P + 2Q$ **dans un cas particulier)**
Soit X *une courbe réelle lisse et* $Q_1, \ldots, Q_n$ *des points d'une même composante connexe de* $X(\mathbb{R})$*. Alors* $N(X_{2Q_1+\cdots+2Q_n}) < +\infty$*.*

Concernant l'invariant M, on devra parfois faire des restrictions de nature topologiques, comme par exemple en 3.2.1.1 et 3.2.1.2. Ici ce sont les singularités ordinaires qui semblent faire augmenter la borne M, tandis que les singularités non-réelles ne posent pas de problème particulier **??**. Voici ces trois énoncés :

Théorème (M **pour une courbe singularisée en respectant les lacets à singularités ordinaires)**
Soit X *une courbe lisse qu'on singularise à* n *reprises avec des diviseurs effectifs sans multiplicité — les* n *singularités résultantes sont ordinaires — à support dans la partie lisse d'un même lacet à chaque étape. Alors la courbe finale,* Y*, vérifie* $M(Y) \leqslant p_a(Y) + n$*.*

Théorème (M **pour une courbe singularisée en respectant les lacets sans singularité ordinaire)**
Soit X *une courbe lisse qu'on singularise à plusieurs reprises à l'aide de diviseurs effectifs dont les supports sont à chaque fois dans un même lacet et avec un point multiple au moins pour obtenir une courbe* Y*. Alors* $M(Y) \leqslant p_a(Y)$*.*

Théorème (M **pour des courbes singularisées suivant des diviseurs non-totalement réels)**
Si X *n'a que des singularités non-réelles, ou réelles isolées ou des cusps réels, alors* $M(X) \leqslant p_a(X)$*.*

2

Cas des courbes lisses

2.1 Retour sur les résultats de SCHEIDERER

Pour commencer, on rappelle la preuve du résultat d'existence de SCHEIDERER. Ensuite on explicite une de ses remarques qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 2.1.1 (un résultat concernant les groupes topologiques)
Soit G un groupe topologique compact dans lequel les éléments d'ordre fini sont denses dans la composante connexe du neutre G_0 et U un ouvert non vide de G. Alors il existe un entier N tel que tout élément de G_0 soit le produit d'au plus N éléments de U.

Preuve :
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} := \{g \in G \text{ tq } \exists (u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in U^n \text{ tq } g = u_1 \dots u_n\}$. Comme $U^{(n)} = \cup_{u \in U} \mu_u(U^{(n-1)})$, où μ_u est l'automorphisme de multiplication par u, et comme $U^{(1)} = U$ est ouvert on voit par récurrence que tous les $U^{(n)}$ sont ouverts. Comme μ_u est en particulier un homéomorphisme, elle permute les composantes connexes (qui sont ici en nombre fini, car ouvertes et recouvrant G compact). Cette permutation envoie G_0 sur la composante connexe contenant $u = \mu_u(e)$, qui elle-même finit par retourner sur G_0 (décomposition en produit de cycles de la permutation). Notant $k \in \mathbb{N}$ la longueur de ce cycle on obtient $u^k \in G_0$. Par suite $U^{(k)} \cap G_0 \neq \emptyset$

et contient donc, par densité, un élément d'ordre fini : disons $a^l = e$ et donc $e \in U^{(kl)}$. On fixe alors un ouvert V, qu'on peut supposer symétrique quitte à prendre $V \cap V^{-1}$, tel que $e \in V \subset U^{(kl)} \cap G_0$. On note aussi $V^{(n)} := \{g \in G \text{ tq } \exists (v_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in V^n \text{ tq } g = v_1 \dots v_n\}$. Par symétrie de V, l'ouvert non-vide $H := \cup_{n \geqslant 1} V^{(n)}$ est un sous-groupe de G_0. Son complémentaire dans G_0 s'écrit donc $\cup_{h \in G_0 \setminus H} \mu_h(H)$ lui aussi ouvert. Bref H est ouvert et fermé dans G_0 connexe, donc égal à G_0. Par compacité de $G_0 = \cup_{n \geqslant 1} V^{(n)}$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $G_0 = \cup_{1 \leqslant n \leqslant m} V^{(n)}$: c'est bien dire que tout élément de G_0 est produit d'au plus m éléments de V eux-mêmes produits d'au plus kl éléments de U. Bref les éléments de G_0 sont produits d'au plus $N := klm$ éléments de U.■

On va appliquer ce lemme à $J(\mathbb{R})_0$ qui est isomorphe à un tore $\mathbb{T}^g$ connexe, compact et dans lequel les éléments d'ordre fini sont bien denses : si $U \subset \mathbb{T}^g$ est ouvert alors par définition $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^g$ est ouvert et rencontre donc $\mathbb{Q}^g$ disons en $P := (\frac{p_i}{q_i}) = (\frac{p'i}{q})$. Mais alors $\pi(P) \in U$ est d'ordre q.

Lemme 2.1.1 : *Soit X une courbe réelle, $U \subset X(\mathbb{R})$ un ouvert euclidien non-vide et P_0 un point réel. Alors il existe un entier N tel que tout élément de $J(\mathbb{R})_0$ puisse s'écrire $\sum_{i=1}^K P_i - P_0$ où les $P_i \in U$, $K \leqslant N$.*

Preuve :
Notons $V := \{(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant g} \in X^{(g)} \text{ tq } P_i \in U\}$. Alors V est un ouvert de $X(\mathbb{R})^{(g)}$ et son image par $\varphi : X(\mathbb{R})^{(g)} \to J(\mathbb{R}), (P_i)_{1 \leqslant 1 \leqslant g} \mapsto \sum_{i=1}^g (P_i - P_0)$ contient un ouvert W. D'après le lemme précédent, et les remarques sur $J(\mathbb{R})_0$, on sait qu'il existe un entier n tel que tout élément de $J(\mathbb{R})_0$ soit la somme de $k \leqslant n$ éléments de W, c'est-à-dire sous la forme $D_1 + D_2 + \cdots + D_k - gkP_0$ avec les D_i effectifs de degré g à support dans U. $N := gn$ convient.■

Théorème 2.1.1.1 (SCHEIDERER)
Soit X une courbe réelle telle que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Alors il existe un entier N tel que tout diviseur de degré $\geqslant N$ soit linéairement équivalent à un diviseur effectif dont le support est totalement réel. En bref, $N(X)$ est fini.

Preuve :
Avec les notations de la preuve précédente et en notant $C_0, C_1, \dots, C_{s-1}$ les composantes connexes de $X(\mathbb{R})$, on choisit alors $s-1$ autres points $P_i \in C_i$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$ de sorte qu'en translatant $J(\mathbb{R})_0$ par des combinaisons appropriées de $(P_i - P_0)$ on

obtienne les 2^{s-1} composantes de $J(\mathbb{R})$ (justement en changeant la parité des degrés modulo 2 dans chaque composante). Bref, tout diviseur de degré 0 est linéairement équivalent à un diviseur s'écrivant $D_1 + D_2 + \cdots + D_n - gnP_0 + \sum(P_i - P_0)$, la dernière somme contenant $d' \leqslant s-1$ termes. Mais alors si D est un diviseur de degré $d \geqslant N := gn + s$, $D - dP_0$ est de degré 0 est linéairement équivalent à un diviseur de la forme précédente. Finalement

$$D \sim D_1 + D_2 + \cdots + D_n + \sum P_i + (d - gn - d')P_0. \blacksquare$$

Certes l'entier $N = gn+s$ n'est pas optimal. Par contre, le diviseur obtenu au final $D_1+D_2+\cdots+D_n+\sum P_i+(d-gn-d')P_0$ a une forme particulière : on connait les P_i et les D_i sont à support dans un ouvert que l'on peut fixer à l'avance (mais qui a une influence sur l'entier N via n). On utilisera ce fait pour prouver la proposition 3.5.1. D'ailleurs, pour passer au cas singulier on aura le plus souvent besoin de la variante suivante de N :

Notation : Pour une courbe réelle X et tout ouvert euclidien U de $X(\mathrm{X})$, $N'(U)$ désignera le minimum dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des entiers n tels que tout diviseur de degré plus grand que n soit linéairement équivalent à un diviseur effectif dont le support est totalement contenu dans U et sans multiplicité, c'est-à-dire de la forme $P_1 + \cdots + P_n$, où les P_i sont dans U et deux-à-deux distincts. Par abus de notation on notera $N'(X)$ à la place de $N'(X(\mathbb{R}))$.

Une remarque de SCHEIDERER — [14], Remark 2.14 — laissait entendre qu'on a toujours $N'(X) < \infty$ dans le cas lisse ce que l'on prouve maintenant :

Proposition 2.1.2 ($N'(X) \leqslant 2N(X)$)
Soit X une courbe réelle telle que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Alors $N'(X) \leqslant 2N(X)$.

Preuve :
Tout d'abord remarquons que si $\alpha \in J(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \geqslant N(X)$, fixant A un représentant de α on peut trouver un diviseur effectif totalement réel linéairement équivalent à $A+NP_0$ où P_0 est un point réel arbitrairement fixé. Par suite l'application $\varphi_{P_0,N} : X(\mathbb{R})^N \to J(\mathbb{R})$, $(P_i) \mapsto \sum_i (P_i - P_0)$ est surjective quelque soit $N \geqslant N(X)$ et quelque soit P_0. Montrons maintenant que $N'(X) \leqslant 2N(X)$ et fixons donc D un diviseur de degré $\geqslant 2N(X)$ qu'on écrit $2N + \sigma$ où $\sigma \in \{0,1\}$ et donc $N \geqslant N(X)$. Notons U l'ensemble des N-uplets $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ de points de $X(\mathbb{R})$ tels que $i \neq j \Rightarrow P_i \neq P_j$ et tel que le système linéaire $|\sum_i P_i|$ soit sans point-base : U est

un ouvert dense de $X(\mathbb{R})$ et son image sous $\varphi_{P_0,N}$ contient un ouvert dense. Par suite $\varphi_{P_0,N}(U) \cap (\alpha - \varphi_{P_0,N}(U)) \neq \emptyset$ et donc α s'écrit sous la forme $\varphi_{N,P_0}(S_1) + \varphi_{N,P_0}(S_2)$ où S_1 et S_2 sont sans multiplicité et réguliers pour φ_{N,P_0}. Quitte à bouger dans leur fibre respective on peut supposer que $S_1 + S_2$ est sans multiplicité et ne contient pas P_0. Par suite $D \sim S_1 + S_2 + \sigma P_0$ qui est un diviseur totalement réel et sans multiplicité comme désiré. On a bien montré que $N'(X) \leqslant 2N(X)$.■

On aura également besoin de la finitude de $N'(U)$.

Proposition 2.1.3 ($N'(U)$ est fini)
Soient X une courbe réelle telle que $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $U \subset X(\mathbb{R})$ un ouvert euclidien rencontrant toutes les composantes connexes de $X(\mathbb{R})$. Alors $N'(U)$ est fini.

Preuve :
Soit P_0 un point de U et s autres points $P_i \in C_i$, la i-ème composante de $X(\mathbb{R})$. On va montrer comme précédemment qu'il existe un entier N tel que pour tout $K \geqslant N$ l'application

$$\varphi_{P_0,K,U} : U^K \to J(\mathbb{R}),\ (Q_i) \mapsto \sum_i (Q_i - P_0)$$

soit surjective. Il s'en suivra de la même façon que $N'(U) \leqslant 2N$. Pour ce faire on réutilise le lemme de cette section : il existe $N(U)$ tel que tout élément de $J(\mathbb{R})_0$ puisse s'écrire comme la classe de $\sum_{j=1}^{K} Q_j - P_0$ avec les $Q_j \in U$ et $K \leqslant N(U)$. Soit maintenant $\alpha \in J(\mathbb{R})$, alors il existe $\alpha + \sum_i [P_i - P_0] \in J(\mathbb{R})_0$ en choisissant les indices i suivant la parité de α dans la i-ème composante. Ce dernier peut s'écrire $\sum_{j=1}^{K} Q_j - P_0$ avec $Q_j \in U$ et $K \geqslant N$ quelconque quitte à rajouter artificiellement des $P_0 - P_0$. Ainsi pour tout $K \geqslant N(U) + s$ l'application $\varphi_{P_0,K,U}$ est surjective. Finalement $N'(U) \leqslant 2(N(U) + s)$ est fini.■

2.2 Cas des genres 0 et 1

On va traiter ici les cas des courbes rationnelles et elliptiques ce qui fait que dans les sections suivantes on supposera toujours les courbes de genre $\geqslant 2$. Pour les courbes rationnelles, on sait que les classes de diviseurs sont exactement données par le degré et considérant que le diviseur nul n'est pas effectif on obtient $N'(\mathbb{P}^1) = 1$ et même $N'(U) = 1$ pour tout ouvert non-vide de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Passons aux courbes elliptiques :

Proposition 2.2.1 ($N'(X) = 1$ pour les courbes elliptiques)
Si X est une courbe elliptique, alors $N'(X) = 1$.

Preuve :
Remarquons que tout diviseur D de degré $d \geqslant 1$ est non-spécial et par RIEMANN-ROCH on a $h^0(D) = d$ et donc on peut supposer D effectif. Par suite si $d = 1$, D est nécessairement réduit à un point réel. Supposons maintenant $d \geqslant 2$, alors en lui retirant $d-1$ points réels deux-a-deux distincts, notés $(P_i)_{1\leqslant 1\leqslant d-1}$ on obtient $D - \sum_i P_i \sim P$ pour un certain $P \in X(\mathbb{R})$ d'après la partie précédente. Ainsi $D \sim P + \sum_{i=1}^{d-1} P_i$ mais il se pourrait que P soit l'un des P_i, disons P_1, dans ce cas notons $D + \mathrm{div}(f) = 2P + \sum_{i=2}^{d-1} P_i$ avec $f \in \mathbb{R}(X)$. Comme D est effectif il s'agit du diviseur des pôles de f tandis que celui de ces zéros est donné par $2P + \sum_i P_i$ où l'on voit que f s'annule à l'ordre 2 en P et au premier ordre en les P_i, $i \geqslant 2$. Quitte à choisir un signe, on peut prendre $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit pour que $D + \mathrm{div}(f + \varepsilon) = P' + Q' + \sum_i P'_i$ avec les P', Q', P'_i deux-à-deux distincts.■

Remarquons que dans cette dernière preuve on peut très bien imposer aux P_i d'être dans un certain ouvert U, mais on ne contrôle pas le point P ce qui empêche a priori d'avoir un résultat pour $N'(U)$. A partir de maintenant on supposera toutes les courbes de genre $\geqslant 2$.

2.3 Courbes de genre 2

Vus les résultats déjà connus, le cas de plus petit genre où l'on ne connait ni N ni N' est celui d'une courbe X de genre 2 ayant une seule composante connexe. On sait qu'il en existe, en désingularisant par exemple la courbe plane $y^2 = f(x)$ où f est de degré 5 avec une seule racine réelle. Dans le cas $s > 1$, la borne obtenue jusqu'alors est $2g - 1$ qui vaut ici 3 et on va donc chercher à savoir si un diviseur de degré 3 sur une telle courbe X est toujours linéairement équivalent à un diviseur effectif totalement réel. Un tel diviseur satisfait $h^0 = 2$ et on peut donc le supposer effectif. Comme on le prend non totalement réel, on le suppose même de la forme $P + Q + \overline{Q}$. Si son système linéaire admet un point-base, ce point ne peut être que P car si c'était $Q + \overline{Q}$ alors $h^0(P) = 2$ et X serait rationnelle ; ainsi, $h^0(Q + \overline{Q}) = 2$ et donc $Q + \overline{Q}$ est dans l'unique g^1_2 et donc linéairement équivalent à un certain $R + h(R)$ où h désigne l'involution hyperelliptique et R un point réel. Finalement $D \sim P + R + h(R)$ qui est totalement réel et sans multiplicité en choisissant R convenablement.

Il suffit donc de s'intéresser à un système linéaire $|P+Q+\overline{Q}|$ sans point-base. De façon équivalente, on peut poser la question en terme de morphisme de degré 3 sur $\mathbb{P}^1$ dont une fibre ne contient qu'un point réel : toutes les autres fibres n'en contiennent-elles qu'un seul ? (resp : existe-t-il toujours une fibre avec trois points réels ?) Cela équivaut encore à ce que ce morphisme de degré 3 n'ait pas de ramification réelle (resp : en ait). Ces deux cas sont-ils possibles quand on ne fixe que $(g,s)=(2,1)$?

Si $P+Q+\overline{Q}$ était linéairement équivalent à un diviseur totalement réel, il en serait de même de $P+h(P)+Q+\overline{Q}$. Ce diviseur étant encore sans point-base et simple, on obtient une image quartique plane de la courbe X avec un nœud réel isolé et il suffit de voir si l'unique composante lisse peut-être coupée quatre fois par une droite de $\mathbb{P}^2$. On peut espérer un contre exemple avec une quartique ayant une composante convexe et un nœud isolé. Si C_1 et C_2 sont deux coniques centrées en zéro, l'équation $C_1C_2 = C_1C_2(0,0)$ semble être un candidat naturel. Ceci motive l'exemple suivant :

Proposition 2.3.1 (« contre-exemple » en genre 2)
Il existe une courbe réelle lisse de genre 2 ayant une composante et telle que $N(X) \geqslant 5$.

Preuve :
Soit Y' la quartique donnée par $(x^2+y^2-1)(ax^2+by^2-1)=1$ avec $a \neq b$ strictement plus grands que 1. Ainsi l'ellipse d'équation $E(x,y) := ax^2+by^2-1 = 0$ est à l'intérieur du cercle d'équation $C(x,y) := x^2+y^2-1=0$ et 1 est un maximum local, à l'intérieur de l'ellipse de la fonction $E(x,y)\times C(x,y)$. Celle-ci est positive à l'extérieur de C et tend vers $+\infty$ à l'infini. La courbe $E(x,y)\times C(x,y)=1$ présente exactement un ovale à l'extérieur du cercle et $N := (0,0)$ est son unique point singulier, isolé : en effet les dérivées partielles suivant x et y valent respectivement :

$$(x^2+y^2-1)2ax+2x(ax^2+by^2-1) = 2x\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\neq 0}\underbrace{\left(a+\frac{1}{(x^2+y^2-1)^2}\right)}_{>0} \text{ et}$$

$$(x^2+y^2-1)2by+2y(ax^2+by^2-1) = 2y\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\neq 0}\underbrace{\left(b+\frac{1}{(x^2+y^2-1)^2}\right)}_{>0}$$

qui ne peuvent s'annuler simultanément que si $(x,y)=(0,0)$.

On veut montrer qu'il existe $(a,b)\in]1,+\infty[^2$, $a\neq b$ tel qu'aucune droite ne coupe

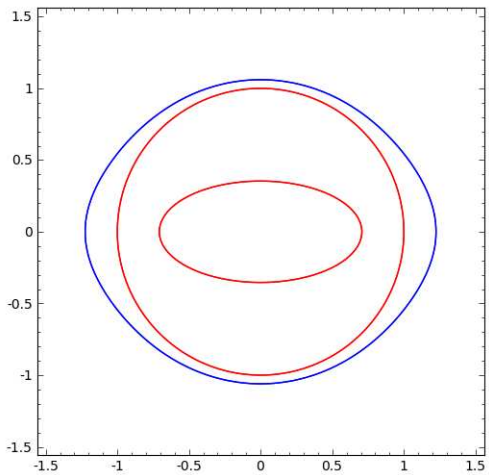


FIG. 2.1 – Cercle, ellipse et ovale dans le cas $(a, b) = (2, 8)$

l'ovale plus de trois fois : dans le cas dégénéré où $a = b$ l'équation se factorise en

$$(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 + by^2 - 1) - 1 = (x^2 + y^2)(a(x^2 + y^2) - 1 - a)$$

et l'ovale est un cercle ne présentant aucune inflexion. Comme une inflexion est donnée par l'annulation simultanée de l'équation $(x^2+y^2-1)(ax^2+by^2-1)-1$ et de sa hessienne, on en déduit que pour $b \neq a$ mais proche de a, l'ovale ne présente aucune inflexion. Comme il est lisse, il est convexe et aucune droite ne saurait le couper plus de trois fois comme voulu.

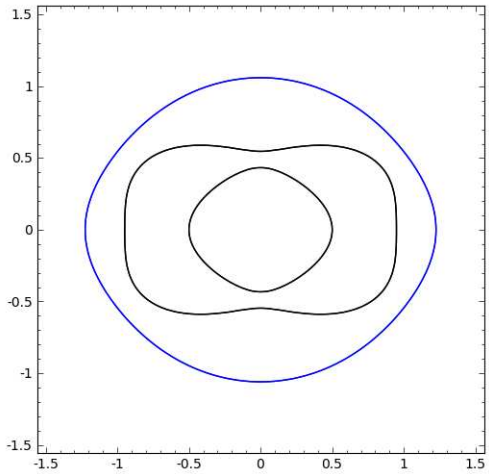


FIG. 2.2 – L'ovale et la hessienne de la courbe dans le cas $(a, b) = (2, 8)$

La courbe projective Y d'équation $(x^2+y^2-z^2)(ax^2+by^2-z^2)=z^4$ possède « en plus » quatre points complexes à l'infini — ou deux points non réels : $(1:\pm i:0),(\sqrt{b}:\pm i\sqrt{a}:0)$; ils sont donc lisses. Soit maintenant $\varphi : X \to Y$ une normalisation de Y et $Q+\overline{Q}$ le point au-dessus du nœud N. Alors

- X est de même genre géométrique que Y qui vaut $\frac{1}{2}(4-1)(4-2)-(2-1)=2$ — quartique nodale ;
- X n'a qu'un seul ovale car $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $Y(\mathbb{R})\setminus\{N\}$.

Reste à voir que φ est en fait donnée par le système linéaire $|Q+\overline{Q}+g^1_2|$. Considérons alors le projection P_N de Y depuis le point N, on obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & \mathrm{Bl}_N(\mathbb{P}^2) \arrow[d] \\
\mathbb{P}^1 & Y \arrow[l, "p_N"'] \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

On va voir que ψ est en fait le morphisme hyperelliptique. A priori ψ n'est pas défini en $Q+\overline{Q}$ car p_N ne l'est pas en N, mais puisque X et $\mathbb{P}^1$ sont lisses, cette application rationnelle se prolonge bien en un morphisme $X \to \mathbb{P}^1$. En tirant en arrière le système des points $|P|$ de $\mathbb{P}^1$ on obtient le système $|P'+P''|$ où P' et P'' vus dans Y sont les antécédents par la projection p_N de P ; ce dernier est de dimension 1 et de degré 2. Par unicité du g^1_2, ψ est bien le morphisme hyperelliptique. Par suite, notant $|D|$ le système des droites passant par N restreint à Y, on a $\varphi^*(|D|)=g^1_2+Q+\overline{Q}$. En relâchant la condition « passant par N », on obtient $(i\circ\varphi)^*(H)=|g^1_2+Q+\overline{Q}|$ car ce dernier est déjà de dimension 2 et que tout autre point ferait augmenter sa dimension car la courbe est de genre 2. Par suite les diviseurs linéairement équivalents à $P'+P''+Q+\overline{Q}$, avec $\psi(P')=\psi(P'')$, s'obtenant comme section de Y avec des droites de $\mathbb{P}^2$, ils ne sont jamais totalement réels car celles-ci coupent Y en quatre points réels uniquement en passant par N qui correspond au point non-réel $Q+\overline{Q}$ dans X. Par suite $N(X)\geqslant 5$.■

Dans le cours de la dernière preuve on a présenté les graphiques obtenus pour le paramètre $(a,b)=(2,8)$, donc « 8 semble assez proche de 2 pour notre problème », mais on donne à la figure 2.3, le cas $(a,b)=(2,27)$ et également une famille d'ovales, à la figure 2.4, pour $(a,b)=(2,n^3)$, $n=2,4,6,8$, pour voir qu'il n'en est rien « en général ».

Reprenant la normalisation $\varphi_{|Q+\overline{Q}+g^1_2|} : X \to Y$ de la preuve précédente on peut lire l'involution hyperelliptique h dans Y comme étant l'application faisant correspondre à un point $P\neq Q+\overline{Q}$ l'autre point d'intersection de la droite NP avec la

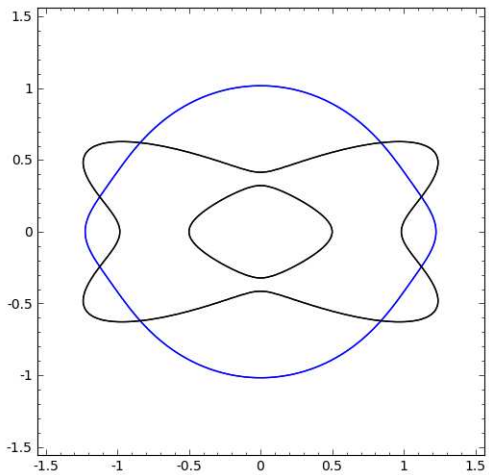


FIG. 2.3 – L'ovale et la hessienne de la courbe dans le cas $(a, b) = (2, 27)$

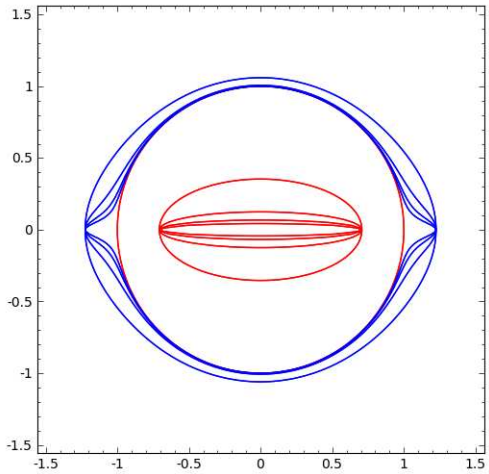


FIG. 2.4 – Une famille d'ovales pour $(a, b) = (2, n^3),\ n = 2, 4, 6, 8$

courbe. Le morphisme $\psi : X \to \frac{X}{h} = \mathbb{P}^1$ est alors ramifié en les six points fixes de h, qui sont les quatre points vus sur Y, $(1 : i : 0), (1 : -i : 0), (\sqrt{b} : i\sqrt{a} : 0), (\sqrt{b} : -i\sqrt{a} : 0)$ et Q et $\overline{Q}$ puisqu'ils sont sur des branches de $X_{\mathbb{C}}$ qui se coupent sur $Y_{\mathbb{C}}$ précisément en N. Notons qu'ils sont tous complexes ce qui implique que X est séparante d'après le lemme suivant.

Lemme 2.3.1 : *Pour une courbe X réelle de genre 2 ayant une seule composante, on a les équivalences suivantes :*

- *son morphisme hyperelliptique ψ est ramifié en un point réel,*
- $\psi(X(\mathbb{R})) \subsetneq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,

– *X n'est pas séparante.*

Preuve :
Supposons dans un premier temps que ψ soit sans ramification réelle. Alors $\psi(X(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et comme ψ est de degré 2, au-dessus de tout point réel se trouvent exactement deux points réels. Ainsi $\psi(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \setminus X_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})) = \psi(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \setminus \psi(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ qui a deux composantes connexes et donc $X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \setminus X_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ en a au moins deux aussi et X est séparante. Supposons maintenant que ψ soit ramifié sur $\mathrm{X}(\mathbb{R})$. Alors nécessairement ψ est ramifié en deux points réels P et Q et $\psi(\mathrm{X}(\mathbb{R}))$ est un segment d'extrémités $\psi(P)$ et $\psi(Q)$. Par suite il existe $S \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ayant deux antécédents non-réels et donc nécessairement complexes conjugués R et $\overline{R}$. Si X était en outre séparante, l'involution hyperelliptique h échangerait alors les deux composantes connexes de $X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \setminus X_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ par continuité. Mais $\psi_{\mathbb{C}}$ est également ramifié en un point non-réel dont l'antécédent, également non-réel, est fixe par h ce qui est la contradiction cherchée.■

Ainsi on a fourni un exemple de courbe X de type $(2,1,0)$ tel que $N(X) \geqslant 5$. On se demande naturellement :
– existe-t-il des courbes X de type $(2,1,1)$ tel que $N(X) \geqslant 5$?
– toutes les courbes d'un de ces types ont-elle un invariant $N \geqslant 5$?
– existe-t-il des courbes X de genre 2 avec $N(X) > 5$?

Proposition 2.3.2 (exemple non-séparant)
Il existe des courbes de type $(2,1,0)$ et $(2,1,1)$ dont l'invariant N est $\geqslant 5$.

Preuve :
On a déjà traité le cas $(2,1,0)$ et on cherche donc un exemple non-séparant. L'idée est encore d'avoir une quartique plane nodale dont le nœud soit, cette fois-ci, à l'extérieur d'un unique ovale convexe. Considérons les deux équations $C_1(x,y) := x^2+y^2-1 = 0$ et $C_2(x,y) := ((x-1-r)^2+y^2)-r^2 = 0$ qui représentent deux cercles tangents en $(1,0)$. Tant que $r < 1$ la valeur minimale de C_1C_2 est atteinte à l'intérieur du cercle $C_1 = 0$ et la fonction C_1C_2 présente un minimum local à l'intérieur de $C_2 = 0$, atteint en $N := (x_{min}, 0)$ valant $m < 0$. Par suite la courbe Y' d'équation $C_1C_2 = m$ est formée d'un nœud à l'intérieur de $C_2 = 0$ et d'un ovale à l'intérieur de $C_1 = 0$.

A nouveau, pour r proche de 1 cet ovale est convexe et les mêmes arguments que précédemment montrent que la normalisée X de la courbe projective $(x^2+y^2-z^2)((x-1-r)^2+y^2-r^2z^2) = mz^4$ est encore de genre 2 avec une seule composante

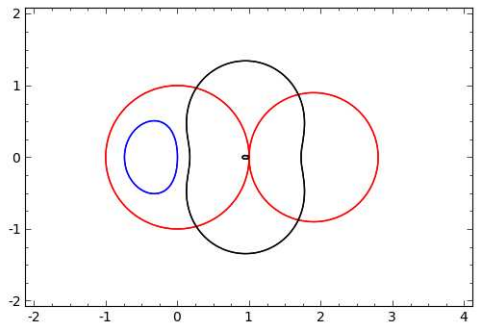


FIG. 2.5 – La courbe $C_1C_2 = m$ avec $r = 0,9$

et vérifie $N(X) \geqslant 5$. A la différence de ce qui précède, le nœuds N est maintenant à l'extérieur de l'ovale et les deux droites tangentes à l'ovale passant par N fournissent deux points fixes réels de l'involution hyperelliptique et le lemme permet de conclure que X n'est pas séparante.■

Pour la seconde question, à défaut d'une réponse positive, on va chercher une éventuelle courbe X dont les invariants (g, s, N) serait $(2, 1, \leqslant 4)$. Soit D un diviseur de degré 4 et K un diviseur canonique, alors $D - K$, est dans l'alternative suivante :

- il est spécial, auquel cas $D \sim 2K$ qu'on peut rendre totalement réel et sans multiplicité — $P + h(P) + Q + h(Q)$ avec $P \neq Q$ réels,
- il est non-spécial et alors $h^0(D - K) = 1$ et $D - K$ est linéairement équivalent à un diviseur effectif E de degré 2 et à nouveau le seul cas non-trivial est celui d'un diviseur $K + Q + \overline{Q}$.

Ainsi les courbes de la figure 2.4 semblent être des candidats naturels pour avoir $N \leqslant 4$ car même un diviseur *a priori* récalcitrant est linéairement équivalent à un diviseur totalement réel. Ceci dit, il faudrait contrôler ce fait pour tous les diviseurs...

Pour la troisième question on montre qu'en fait, en genre 2, N est toujours plus petit que 5.

Proposition 2.3.3 ($N \leqslant 5$ en genre 2)
Soit X une courbe de genre 2 avec une seule composante. Alors $N(X) \leqslant 5$.

Preuve :
Il suffit de montrer que tout diviseur de degré 5 est linéairement équivalent à un diviseur effectif totalement réel : en effet, si c'est vrai, alors si D est de degré $d \geqslant 5$ il suffit de lui retirer $d - 5$ points réels, les P_i, et d'appliquer le résultat à $D - \sum_i P_i$ de

degré 5. Supposons donc D de degré 5. Alors en complexe, pour tous points P et Q on a $h^1(D-P-Q) = h^0(K+P+Q-D) = 0$ car de degré -1. Ainsi D induit un plongement $X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3$ de degré 5. On projette alors la courbe obtenue depuis un point réel, qu'on note P, de celle-ci de sorte à obtenir une courbe plane, qu'on notera Y, de degré 4 et toujours de genre géométrique 2. L'invariant $\delta(Y)$ est alors la différence des genres arithmétique et géométrique et vaut donc $\frac{(4-1)(4-2)}{2} - 2 = 1$ et Y est une courbe de type PLUCKER. Si jamais l'image de la composante connexe était lisse, le nombre de points d'inflexion sur cette image serait le double de celui des bitangentes réelles, qu'on va noter τ — [7] page 174 preuve de la proposition 7.3. Dans ce cas une formule de WALL, [15], à savoir :

$$n + 2\tau' + i' = m + 2\delta' + \kappa'$$

où n désigne le degré, τ' le nombre de bitangentes en des points non-réels conjugués, i' le nombre d'inflexions réelles, m le degré de la courbe duale qui vaut également $n(n-1) - \delta$, δ' le nombre de nœuds réels isolés et κ' le nombre de cusps réels ; nous donne

$$\underbrace{4 + 2\tau' + 2\tau}_{\text{pair}} = \underbrace{11 + 2\delta'}_{\text{impair}} + \kappa'$$

dont on conclut que $\kappa' \geqslant 1$ car impair. Mais comme $X(\mathbb{R})$ n'avait qu'une seule composante connexe on aboutit à la contradiction selon laquelle l'ovale lisse contient un cusp. Finalement l'image de cette unique composante connexe contient une singularité, qui d'ailleurs ne peut être qu'un nœud ou un cusp ordinaire car $\delta = 1$. Par suite la droite de $\mathbb{P}^3$ au-dessus de cette singularité coupe la courbe en trois points réels : deux au-dessus de la singularité en plus de P. En choisissant un plan contenant ces trois points alignés et un quatrième point réel sur la courbe, on exhibe une section hyperplane coupant la courbe en quatre points réels, et donc cinq, ce qui fournit un diviseur linéairement équivalent à D.■

Pour mettre en avant l'optimalité du résultat précédent, rappelons qu'on a exhibé des courbes permettant d'affirmer la proposition suivante :

Proposition 2.3.4 (courbe avec $N = 5$)
Il existe des courbes X de genre 2 avec une seule composante telles que $N(X) \geqslant 5$. De plus, parmi ces courbes, il en existe des séparantes et des non-séparantes.

Prouvons maintenant le résultat suivant :

Proposition 2.3.5 ($N' \leqslant 5$ en genre 2)
Soit X une courbe de genre 2 avec une seule composante. Alors $N'(X) \leqslant 5$.

Preuve :
Il suffit de montrer que tout diviseur de degré 5 est linéairement équivalent à un diviseur effectif totalement réel sans multiplicité : en effet, si c'est vrai, alors si D est de degré $d \geqslant 5$ il suffit de lui retirer $d-5$ points réels deux-à-deux distincts, les P_i, et d'appliquer le résultat à $D - \sum_i P_i$ de degré 5 où l'on trouve un diviseur E effectif et sans multiplicité qui lui est linéairement équivalent. Comme il est de degré 5 il induit un plongement dans $\mathbb{P}^3$ et quitte à changer légèrement de section hyperplane, on peut supposer qu'aucun des P_i n'est dans le support de E de sorte que $D \sim E + \sum_i P_i$ soit la relation cherchée pour D. Supposons donc D de degré 5. Ainsi D induit un plongement $X \to \mathbb{P}^3$ de degré 5. On projette alors la courbe obtenue depuis un point réel, qu'on note P, de celle-ci de sorte à obtenir une courbe plane, qu'on notera Y, de degré 4 et toujours de genre géométrique 2. L'invariant $\delta(Y)$ est alors la différence des genres arithmétique et géométrique et vaut donc $\frac{(4-1)(4-2)}{2} - 2 = 1$ et Y est une courbe de type PLUCKER. Si jamais l'image de la composante connexe était lisse, le nombre de points d'inflexion sur cette image serait le double de celui des bitangentes réelles, qu'on va noter τ — [7] page 174 preuve de la proposition 7.3. Dans ce cas une formule de WALL, [15], à savoir :

$$n + 2\tau' + i' = m + 2\delta' + \kappa'$$

où n désigne le degré, τ' le nombre de bitangentes en des points non-réels conjugués, i' le nombre d'inflexions réelles, m le degré de la courbe duale qui vaut également $n(n-1) - \delta$, δ' le nombre de nœuds réels isolés et κ' le nombre de cusps réels ; nous donne

$$\underbrace{4 + 2\tau' + 2\tau}_{\text{pair}} = \underbrace{11 + 2\delta'}_{\text{impair}} + \kappa'$$

dont on conclut que $\kappa' \geqslant 1$ car impair. Mais comme $X(\mathbb{R})$ n'avait qu'une seule composante connexe on aboutit à la contradiction selon laquelle l'ovale lisse contient un cusp. Finalement l'image de cette unique composante connexe contient une singularité, qui d'ailleurs ne peut être qu'un nœud ou un cusp ordinaire car $\delta = 1$. Parmi les droites réelles passant par cette singularité, il en existe qui recoupent la courbe en deux points distincts et distincts de l'image de P. Par suite, au-dessus d'une telle droite se trouve un plan réel de $\mathbb{P}^3$ qui coupe la courbe selon un diviseur de la forme

$P+Q+R+S+T$ — ou éventuellement $P+Q+R+2S$ s'il s'agissait d'un cusp, que l'on peut changer en $P'+Q'+R'+S_1+S_2$ en changeant légèrement de plan — qui fournit l'équivalence linéaire cherchée.■

Pour les courbes de genre 2 avec deux ou trois composantes on savait déjà que $N=3$. On en profite pour montrer que dans ces cas, $N'=3$ aussi.

Proposition 2.3.6
Si X est une courbe de genre 2 avec plus de 2 composantes connexes, alors $N'(X)=3$.

Preuve :
Soit en effet un diviseur D de degré $d \geqslant 3$. On lui retire $d-3$ points réels deux-à-deux distincts pour obtenir un diviseur de degré 3, $D' := D - \sum_{i=1}^{d-3} P_i$ qui est donc non-spécial — $h^1(D') = h^0(K-D') = 0$ car $K-D'$ est de degré -1. Alors de deux choses l'une :

- ou bien D' est sans point-base, auquel cas il induit un morphisme $\varphi_{|D'|} : X \to \mathbb{P}^1$ qui est de degré impair sur 1 ou 3 composantes de $X(\mathbb{R})$. Si c'est 3 alors $\varphi_{|D'|}$ induit un homéomorphisme entre chacune des composantes et $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et parmi toutes les fibres au-dessus d'un point réel, certaines évitent les P_i. Sinon, on a $\varphi_{|D'|}(C) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ où C est la composante où $|D'|$ est de degré impair. Pour une autre composante C' de $X(\mathbb{R})$ on sait que $\varphi_{|D'|}(C')$ est un intervalle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ — éventuellement $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tout entier. Alors n'importe quelle fibre au-dessus de l'intérieur de cet intervalle fournit un diviseur de degré 3 totalement réel et sans multiplicité linéairement équivalent à D ; parmi ces-dernières certaines évitent les P_i.
- ou bien D' a un point-base qui ne peut être non-réel car sinon $D' - (Q+\overline{Q})$ serait de degré 1 et de dimension dimension 1 or X n'est pas rationnelle. Soit donc P un point-base réel, alors $D'-P$ est spécial et de degré 2 et est donc canonique et par suite $D' \sim P+Q+h(Q)$. On peut choisir Q de sorte que $Q \neq h(Q)$ et qu'ils soient différents des P_i et de P. Par suite si D était de degré 3 alors c'est fini, et sinon, « au pire des cas » on a $D \sim 2P+S$ où S est effectif totalement réel sans multiplicité et ne contient pas P dans son support. Comme D est dans ce cas de degré $d \geqslant 4$, il induit un morphisme $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^{d-g}$ dont on sait qu'il existe un hyperplan H tel que $\varphi_{|D|}^* H = 2P+S$ et en choisissant un hyperplan H' voisin, on a $\varphi_{|D|}^* H' = P_1+P_2+S'$ effectif totalement réel et sans multiplicité comme désiré.

Tout ceci prouve donc $N'(X) \leqslant 3$ et comme $Q + \overline{Q}$ est génériquement de dimension nulle, on voit que $N'(X) > 2$ ce qui achève la preuve.■

Dans la suite on supposera implicitement les courbes de genre $\geqslant 3$.

2.4 N' pour les courbes maximales

MONNIER et HUISMAN avaient assez vite contrôlé $N(X)$ dans le cas des courbes réelles avec « beaucoup de composantes », c'est-à-dire avec g ou $g+1$ composantes où g est le genre — qu'on appelle respectivement $M-1$-courbes et M-courbes. On avait alors $N(X) \leqslant 2g-1$, borne optimale dans le cas où X était hyperelliptique. C'est à ces cas qu'on s'attèle d'abord pour N' et on fixe dans cette partie une courbe réelle lisse X de genre $g \geqslant 3$ avec g ou $g+1$ composantes.

Lemme 2.4.1 : *Soit D un diviseur de degré $2g-1$ sur une courbe non-rationnelle. Alors $|D|$ n'a pas de point-base non-réel.*

preuve :
Supposons au contraire que $Q + \overline{Q}$ soit point-base de $|D|$. Alors $D - (Q + \overline{Q})$ est de degré $2g-3$ et de dimension $\dim |D| = g-1$ par RIEMANN-ROCH et donc, notant K un diviseur canonique, on a encore par RIEMANN-ROCH

$$h^0(K + Q + \overline{Q} - D)) = h^1(D - (Q + \overline{Q})) = g + g - 1 - (2g-3) = 2$$

et $\deg(K + Q + \overline{Q} - D) = 1$ ce qui signifie qu'il existe un point P tel que $h^0(P) = 2$ et donc une fonction rationnelle non constante n'ayant qu'un seul pôle d'ordre 1 ce qui est absurde puisque la courbe est supposée non-rationnelle.■

Lemme 2.4.2 : *Si tout diviseur de degré $2g-1$ est linéairement équivalent à un diviseur effectif totalement réel et sans multiplicité, alors $N'(X) \leqslant 2g-1$.*

Preuve :
Soit donc D un diviseur de degré $d \geqslant 2g$. On lui retire $d-(2g-1)$ points réels deux-à-deux distincts pour obtenir $D' := D - \sum_i P_i$ de degré $2g-1$ qu'on sait, par hypothèse, linéairement équivalent à un diviseur effectif non-spécial totalement réel et sans multiplicité. De deux choses l'une :

– ou bien $|D'|$ est sans point-base, auquel cas il induit un morphisme $\varphi_{|D'|} : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ dont un hyperplan H coupe $\varphi_{|D'|}(X)$ en $2g-1$ points réels deux-à-deux distincts : quitte à changer légèrement d'hyperplan on peut supposer que ces points sont également distincts des images des P_i de sorte que $D \sim \varphi^*_{|D'|}H + \sum_i P_i$ convient.
– ou bien $|D'|$ a un point-base nécessairement réel d'après le lemme 2.4.1 qu'on note P. Ainsi $D' - P$, qui est linéairement équivalent à un diviseur K effectif totalement réel et sans multiplicité, est aussi spécial et de degré $2g-2$ et est donc canonique. Ici on a une nouvelle alternative : si X n'est pas hyperelliptique, alors $|K|$ est très ample – cf prop IV.5.2 de [8] – et puisqu'il est totalement réel et sans multiplicité on peut choisir un hyperplan H coupant $\varphi_{|K|}(X)$ en $2g-2$ points deux-à-deux distincts et distincts des images des P_i de sorte que $D \sim \varphi^*_{|K|}H + \sum_i P_i$ convienne ; si X est hyperelliptique, $K \sim \sum_{i=1}^{g-1} Q_i + h(Q_i)$ qu'on peut choisir de sorte à ce que

$$D \sim P + \sum_i P_i + \sum_{i=1}^{g-1} Q_i + h(Q_i) = P + \underbrace{\sum_i R_i}_{i \neq j \Rightarrow R_i \neq R_j}$$

et au pire des cas l'un des R_i est P ce qu'on évite en choisissant une autre section hyperplane de $\varphi_{|D|}(X) \subset \mathbb{P}^{d-g}$.■

A propos de la classe canonique d'une telle courbe avec beaucoup de composantes, on peut démontrer le lemme suivant, un peu plus général que ce qu'on vient de voir, et qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.4.3 : *Soit F un ensemble fini de points de X et $P \in X(\mathbb{R}) \setminus F$. Alors la classe canonique de X contient des diviseurs effectifs totalement réels sans multiplicité. De plus on peut en choisir dont le support ne rencontre pas F. Parmi ceux-ci on peut en outre imposer qu'il contienne P, quitte à leur autoriser une multiplicité double en ce point.*

Preuve :
Si X est hyperelliptique tous les diviseurs de la forme $\sum_{i=1}^{g-1} P_i + h(P_i)$ où h désigne l'involution hyperelliptique sont canoniques, et on voit que les deux affirmations de l'énoncé sont vraies dans ce cas — la relaxe sur la multiplicité double provenant de l'éventuel cas où le point imposé est stable par l'involution hyperelliptique. Si X n'est

pas hyperelliptique alors tout diviseur canonique K est très ample. On choisit alors $g-2$ points, les P_i dans $g-2$ composantes deux-à-deux distinctes et en position générale de sorte que $|K - \sum_{i=1}^{g-2} P_i|$ induise un morphisme $X \to \mathbb{P}^1$ car $g-1-(g-2)=1$ et de degré $2g-2-(g-2)=g$. Par ailleurs ce morphisme φ est de degré impair précisément sur les $g-2$ composantes où l'on a fixé les P_i et celles-ci se surjectent donc sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Mais puisque $X(\mathbb{R})$ a encore au moins deux composantes connexes on a au choix :

- l'existence d'une composante C sur laquelle φ est de degré pair, auquel cas en choisissant un point Q dans l'intérieur de $\varphi(C)$ on obtient $\varphi^{-1}(Q) = \sum_{i=1}^{g} Q_i$ deux-à-deux distincts ;
- l'existence de deux composantes sur lesquelles φ est de degré impair et donc à nouveau qui revêtent tout $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: ici il suffit de prendre un point réel de $\mathbb{P}^1$ dont la fibre n'a pas de multiplicité, disons là encore $\sum_{i=1}^{g} Q_i$.

Dans ces deux cas on a $K \sim \sum_{i=1}^{g} Q_i + \sum_{i=1}^{g-2} P_i$ qui est donc effectif totalement réel et qu'on peut choisir sans multiplicité. On peut évidemment choisir les P_i et les Q_i de sorte à ce qu'ils évitent n'importe quel ensemble fini ; on peut également choisir l'un des P_i égal à un point imposé.■

On veux bien sûr prouver que tout diviseur de degré $2g-1$ est linéairement équivalent à un diviseur totalement réel et sans multiplicité.

Théorème 2.4.0.1 ($N' \leqslant 2g-1$ pour les courbes ayant beaucoup de composantes) *Soit X une courbe réelle de genre g ayant g ou $g+1$ composantes. Alors $N'(X) \leqslant 2g-1$.*

Preuve :
Grâce au lemme 2.4.2 du début de section, il suffit de traiter le cas d'un diviseur de degré $2g-1$ exactement. Soit donc D un tel diviseur. On va distinguer trois cas suivant que :

D **a un point-base** : dans ce cas D admet un point-base réel. Notant P un tel point-base réel, $D-P$ est spécial de degré $2g-2$ et donc canonique. D'après le lemme 2.4.3, $D-P$ est linéairement équivalent a un diviseur effectif totalement réel sans multiplicité ne contenant pas P, ce qui permet de conclure dans ce cas.

D **est sans point-base et non-simple** : alors par définition-même le morphisme $\varphi_{|D|}$: $X \to \mathbb{P}^N$ n'est pas birationnel. On dispose de la factorisation suivante, où Y est

une normalisation de $\varphi_{|D|}(X)$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_{|D|}"] \arrow[dr, "\psi"'] & \varphi_{|D|}(X) \arrow[r] & \mathbb{P}^r \\ & Y \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

dont on déduit que ψ est un morphisme de degré $d > 1$. Alors la partie fixe de $|D - P|$ est $\psi^{-1}\varphi_{|D|}(P) - P$. Si cette dernière est entièrement non-réelle alors les autres antécédents de $\varphi_{|D|}(P)$ sont tous non-réels dont on déduit d'une part que ψ est de degré impair $d \geqslant 3$, et d'autre part que ψ est de degré impair sur la composante C contenant P qui se surjecte donc sur une composante de $Y(\mathbb{R})$ par 1.2.2. Comme ceci est valable pour tout point P, ce qui précède est valable pour chaque composante de $X(\mathbb{R})$ et deux différentes ne sauraient avoir même image. Ainsi $s(X) \leqslant s(Y)$ et vues les hypothèses et l'inégalité de HARNACK on obtient :

$$g(X) \leqslant s(X) \leqslant s(Y) \leqslant g(Y) + 1.$$

Par ailleurs, RIEMANN-HURWITZ donne également

$$2g(X) - 2 = d(2g(Y) - 2) + \text{degré de ramification} \Rightarrow g(Y) \leqslant \frac{g(X) - 1}{d} + 1$$

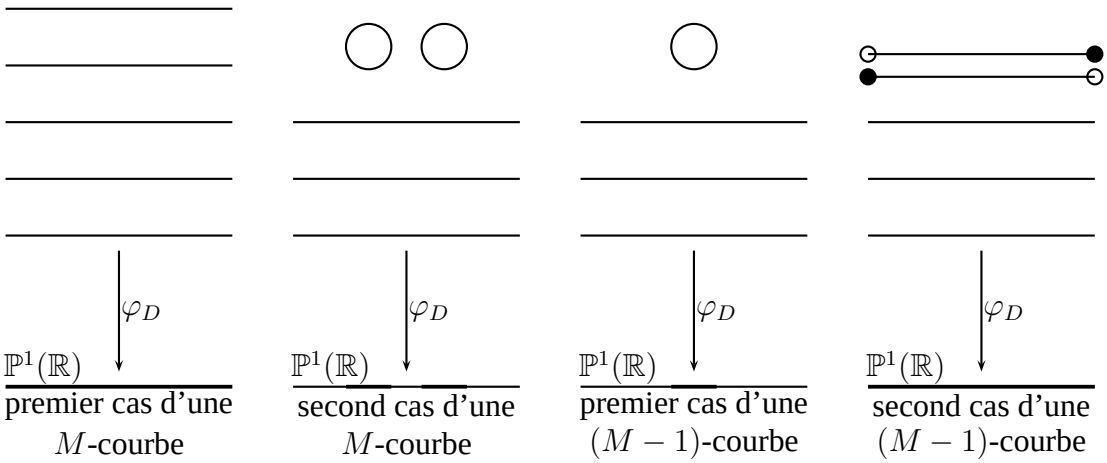
ce qui livre finalement $g(X) \leqslant \frac{2d-1}{d-1} \leqslant \frac{5}{2}$ car $d \geqslant 3$ ce qui contredit l'hypothèse tacite $g \geqslant 3$. Ainsi il existe un point réel P tel que $|D - P|$ admette un autre point réel P' dans sa partie fixe. Par suite $D - P - P'$ est spécial et de degré $2g - 3$. On peut alors le compléter par un diviseur effectif P'', nécessairement réduit à un point réel car de degré 1, tel que $D - P - P' + P''$ soit canonique. Là encore le lemme 2.4.3 permet de choisir un diviseur E canonique effectif totalement réel évitant P et P' et contenant P'' — si $P'' = P$ ou P' c'est encore plus simple — et sans multiplicité, sauf éventuellement double en P''. Dans ce cas $D \sim E + P + P' - P''$ permet de conclure.

D **est sans point-base et simple** : alors on peut lui retirer $g - 2$ points réels deux-à-deux distincts de sorte que $D' := D - \sum_{i=1}^{g-2} P_i$ de degré $g + 1$ satisfasse :

- $\delta(D') \geqslant g - 1$ car en effet $\delta(D) \geqslant 1$ car impair et il suffit de choisir les P_i dans des composantes où D est pair, puis de compléter par un nombre pair de points dans une même composante,
- D' soit sans point-base et non-special : ici on utilise la proposition 1.2.5 sur

les diviseurs simples.

Par suite on dispose de $\varphi_{|D'|} : X \to \mathbb{P}^1$ de degré impair sur au moins $g-1$ composantes. Celles-ci se surjectent donc sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et il reste ou bien une composante de degré impair si X est une $M-1$ courbe ou bien deux composantes de même parité si X est une courbe maximale, ce qu'on représente par les dessins suivants, dans le cas $g = 4$:



On dispose alors de diviseurs totalement réels et sans multiplicité au-dessus de chaque point des intervalles ouverts marqués en gras sur les figures précédentes, parmi lesquels une infinité évite également les P_i.■

Suivant encore MONNIER, et à défaut de traiter $N'(X)$ pour une courbe ayant moins de $g-1$ composantes, on peut tenter de rendre un diviseur aussi réel que possible et lisse. On se contentera du résultat suivant :

Proposition 2.4.1 (un résultat faible pour les courbes avec peu de composantes) *Soit X une courbe réelle de genre $g \geqslant 1$ ayant $s \geqslant 1$ composantes connexes réelles, alors tout diviseur de degré $\geqslant 2g+1$ est linéairement équivalent à un diviseur effectif sans multiplicité dont la partie non-réelle est de degré plus petite que $g+1-s$ (resp : $g-s$) si $g \equiv s[2]$ (resp : $g \not\equiv s[2]$).*

Preuve :

Soit D un diviseur de degré $d \geqslant 2g+1$. A nouveau, on va montrer que si $d = 2g+1$, alors D est linéairement équivalent à un diviseur effectif sans multiplicité dont la partie non-réelle est de degré plus petite que $g+1-s$ et évite un ensemble fini F fixé. On appliquera alors ce résultat à $D - \sum_{i=1}^{d-(2g+1)} P_i$ et à $F := \{P_i, i = 1 \dots d-(2g+1)\}$

pour conclure. Soit donc F un ensemble fini et supposons $d = 2g+1$. Comme $\delta(D) \geqslant 1$ on peut trouver $P_i,\ i = 1 \dots g$, g points deux-à-deux distincts et n'appartenant pas à F tels que pour $E := D - \sum_{i=1}^{g} P_i$ on ait :

- $h^0(E) = h^0(E) - g = 2$ et on suppose donc E effectif — les P_i font chuter la dimension de 1 à chaque étape ;
- $\delta(E) \in \{s, s-1\}$ suivant que $g + 1 \equiv s$ modulo 2 ;
- E soit sans point-base — ici, on utilise la proposition 1.2.5 car D était simple vu son degré $> 2g$.

On considère alors le morphisme $\varphi_E : X \to \mathbb{P}^1$ induit par E qui induit une surjection de s ou $s-1$ composantes de $X(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ suivant que $g + 1 \equiv s$ modulo 2 :

- si $g+1 \equiv s$, alors on trouve facilement une fibre sans multiplicité L dont la partie non-réelle est au plus de degré $g + 1 - s$ et qui évite F et les $P_i,\ i = 1 \dots g$,
- si $g \equiv s$, alors on trouve facilement une fibre sans multiplicité L dont la partie non-réelle est au plus de degré $g - s$ et qui évite F et les $P_i,\ i = 1 \dots g$.

Finalement $D \sim L + \sum_{i=1}^{g} P_i$ fournit l'équivalence linéaire cherchée.■

3

Cas des courbes à singularités

3.1 Singularisation

On va ici introduire un outil nous permettant d'itérer les arguments que MONNIER donnait dans [12] pour montrer la proposition 1.4.2. Il s'agit d'une légère variation de ce qui est proposé au paragraphe IV.2 de [10] au cas où la courbe de départ n'est pas nécessairement lisse.

Soit donc X une courbe d"finie sur $\mathbb{C}$ irréductible qu'on ne suppose pas nécessairement lisse et $D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$, un diviseur effectif — $n_i > 0$ — à support dans le lieu lisse de X — il tiendra le rôle de « module » de [10]. On considère alors l'espace topologique Y quotient de celui de X par la relation qui identifie uniquement les P_i. En notant S cette classe d'équivalence on peut écrire ensemblistement $Y \simeq \{S\} \sqcup X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ et identifier les points $Q \in Y \setminus \{S\}$ avec leur unique antécédent dans X. Ceci montre également que S est fermé car $X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ est ouvert. La projection naturelle $\pi : X \to Y$, qui est continue par définition de la topologie quotient, permet aussi de munir Y du faisceau $\pi_* \mathcal{O}_X$. Comme les P_i sont fermés, pour tout $Q \in Y \setminus \{S\}$ et tout ouvert $U \subset X$ contenant Q — avec identification — l'ouvert $U' := U \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ est plus petit que U et de la forme $\pi^{-1}(V)$ pour V

ouvert de Y — en fait pour $V = \pi(U')$ — et donc

$$(\pi_*\mathcal{O}_X)_Q = \varinjlim_{V \ni Q} \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V)) = \mathcal{O}_{X,Q}$$

par contre pour le points S, on a — l'intersection ayant lieu dans $k(X)$:

$$(\pi_*\mathcal{O}_X)_S = \varinjlim_{V \ni S} \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V)) \subset \cap_{i=1}^n \mathcal{O}_{X,P_i}$$

Pour prendre en compte les multiplicités n_i, on note $\mathfrak{c}_S$ l'idéal de $\cap_{i=1}^n \mathcal{O}_{X,P_i}$ formé des fonctions f telles que pour tout $i = 1 \dots n$, $\nu_{P_i}(f) \geqslant n_i$. Il s'agit bien d'un idéal d'après les propriétés des valuations qui existent bien car les points P_i sont lisses.

Proposition 3.1.1
Avec les notations précédentes, si l'on pose $\mathcal{O}_{Y,Q} := \mathcal{O}_{X,Q}$ pour tout $Q \in Y \setminus \{S\}$ et $\mathcal{O}_{Y,S} := \mathbb{C} + \mathfrak{c}_S$ alors on définit via ces germes, un faisceau sur Y qui en fait une courbe irréductible qu'on note X_D. On dispose en outre d'un morphisme birationnel naturel $f : X \to X_D$.

Preuve :
Gardons toutes les notations précédentes. L'espace topologique Y est irréductible : si F et G sont deux fermés le recouvrant alors $\pi^{-1}(F)$ et $\pi^{-1}(G)$ recouvrent l'espace X irréductible et donc l'un des deux suffit, disons F ; par surjectivité de π on a aussi $Y = F$. Tous les $\mathcal{O}_{Y,Q}$ étant des sous-anneaux de $\mathbb{C}(X)$, ils définissent bien un faisceau sur Y dont les germes sont les $\mathcal{O}_{Y,Q}$. Etant ou bien les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,Q}$ ou bien l'anneau local $\mathbb{C} + \mathfrak{c}_S$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un espace localement annelé. Pour définir $f : X \to Y$ on prend bien sûr l'application continue π et au niveau des faisceaux $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_X$ est défini en chaque point $Q \in X$ par :

- l'identité dans le cas où $Q \neq P_i$ car alors $\mathcal{O}_{Y,Q} = \mathcal{O}_{X,Q}$,
- l'inclusion $\mathbb{C} + \mathfrak{c}_S \to \mathcal{O}_{X,P_i}$ si $P = P_i$.

L'identité est évidemment un morphisme local entre anneaux locaux et l'inclusion également car les fonctions non-inversibles de $\mathbb{C} + \mathfrak{c}_S$ restent non-inversibles dans $\mathcal{O}_{X,P_i}$. Clairement f réalise un isomorphisme entre les ouverts $X \setminus \{P_i\}$ et $Y \setminus \{S\}$. Pour montrer que Y est une courbe il ne reste donc plus qu'à exhiber un voisinage de S isomorphe à une courbe affine. Quitte à prendre un voisinage V de S tel que $\pi^{-1}(V)$ ne contienne aucun point singulier on est ramené au cas où X est lisse qui fait l'objet de la proposition 2 page 69 de [10] — et même plus précisément de « On constate

immédiatement que toutes les conditions du numéro 3 sont satisfaites » au numéro 4 à la page suivante.■

Faisons quelques remarques sur cette construction. La courbe X_D continent une singularité supplémentaire par rapport à X — sauf dans le cas où $D = P$ est réduit à un point — à savoir S. Comme indiqué dans [10], en singularisant avec $D = 2P$, on ne garde à une constante près, que les fonctions de valuation $\geqslant 2$ et S est un cusp, tandis qu'en singularisant suivant $D = \sum_{i=1}^{n} P_i$ on ne garde que celles ayant même valeur en les P_i, on obtient une singularité ordinaire à n branches. Remarquons également que si D et D' sont deux diviseurs effectifs à supports lisses et disjoints, on peut voir D' comme diviseur de X_D et définir $(X_D)_{D'}$. Cette dernière n'est pas isomorphe à $X_{D+D'}$. Par contre $(X_D)_{D'}$ et $(X_{D'})_D$ ayant exactement les mêmes espaces topologiques et les mêmes anneaux de germes, elles sont bien égales.

Pour singulariser une courbe réelle X suivant un diviseur D à support dans le lieu lisse, on identifie D au diviseur de $X_{\mathbb{C}}$ invariant par la conjugaison complexe. La courbe singulière obtenue $(X_{\mathbb{C}})_D$ est alors a nouveau munie d'une conjugaison qui permet de la munir d'une structure réelle. On la notera parfois abusivement X_D. Ainsi $(X_{\mathbb{C}})_{P+\overline{P}}$ est une courbe réelle présentant un nœud réel isolé. La construction initiale a toujours du sens si D est a support réel sur X auquel cas on a :

Proposition 3.1.2
Soit D un diviseur d'une courbe réelle à support réel dans le lieu lisse, alors $(X_D)_{\mathbb{C}} = (X_{\mathbb{C}})_D$.

Preuve :
En effet, dans les deux cas il s'agit de l'espace topologique $X_{\mathbb{C}}$ dans lequel on a identifié les points P_i du support de D. Quand aux anneaux de germes de fonctions régulières, ils coïncident clairement en les points $Q \neq P_i$ tandis qu'en $Q = S$ il s'agit de

$$\mathcal{O}_{X,S} \otimes \mathbb{C} = (\mathbb{R} + \mathfrak{c}_{X,S}) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} + \mathfrak{c}_{X,S} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} + \mathfrak{c}_{X_{\mathbb{C}},S} = \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}},S}.\blacksquare$$

Par contre, partant d'une courbe réelle X et se donnant deux points non-réels $P+\overline{P}$ et $Q + \overline{Q}$, $P + Q$ est un diviseur de $X_{\mathbb{C}}$ et la courbe complexe $(X_{\mathbb{C}})_{P+Q}$ a un sens — elle n'est par contre pas définie sur $\mathbb{R}$. Cette courbe contient les deux points lisses

$\overline{P}$ et $\overline{Q}$ et on peut la singulariser en $((X_{\mathbb{C}})_{P+Q})_{\overline{P}+\overline{Q}}$. Cette courbe complexe présente deux nouvelles singularités, qui sont deux nœuds conjugués, et admet également une structure réelle.

Rappelons que le but de cette « singularisation » est de construire successivement plusieurs courbes singulières $X \to X_{D_1} \to (X_{D_1})_{D_2} \to \cdots \to ((X_{D_1})_{D_2})\ldots_{D_n}$ de plus en plus singulières tout en préservant le caractère fini de leurs invariants N et M. Remarquons que cette dernière courbe $Y = ((X_{D_1})_{D_2})\ldots_{D_n}$ peut être obtenue directement à partir de X par l'opération décrite dans [10], IV.1.3 p. 69. Comme un des buts est de majorer les invariants N et M par d'autres invariants classiques, les genres géométrique, g, et arithmétique, p_a par exemple, on utilisera fréquemment la relation

$$p_a(X_D) = p_a(X) + \deg D - 1$$

qu'on déduit par différence de la proposition 3 page 73 de [10], IV.2.7 où on a, avec nos notations

$$g(Y) + \sum_i (\deg D_i - 1) = p_a(Y).$$

On sera ainsi en mesure de quantifier les invariants N et M de certaines courbes obtenues par singularisation. Par contre, se donnant une courbe singulière, peut-on la récupérer en singularisant sa normalisée ? On va voir que même si ce n'est pas toujours le cas, le modèle singulier qu'on construit pourrait quand même donner des informations sur la courbe singulière initiale.

Donnons-nous donc une courbe singulière Y de normalisée $\pi : X \to Y$. Notant $S_1, \ldots, S_n$ les points singuliers de Y, on dispose dans X de points deux-à-deux distincts $(P_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n; 1\leqslant j\leqslant k_i}$ tel que $\pi(P_{i,j}) = S_i$. Pour chacun d'eux, notons $n_{i,j}$ des entiers tels que

$$\cap_j \mathfrak{m}_{P_{i,j}}^{n_{i,j}} \subset \mathfrak{m}_{S_i}.$$

De tels entiers existent car il existe $\left(\cap_j \mathfrak{m}_{P_{i,j}}\right)^n \subset \mathfrak{m}_{S_i}$ — [10], IV.1.2. On note alors $D_i = \sum_{j=1}^{k_i} n_{i,j} P_{i,j}$ pour tout $i = 1 \ldots n$. On on dira que la courbe $((X_{D_1})_{D_2})\ldots_{D_n}$ est un modèle singulier de Y.

Proposition 3.1.3 (lien courbe singulière/modèle singulier)
Soit Y une courbe singulière et Y' un modèle singulier de Y. Alors $I(Y) \leqslant I(Y')$ pour $I = N, N', M$.

Preuve :
Le calcul de ces invariants se fait en montrant qu'un diviseur de WEIL D à support

dans le lieu lisse de la courbe est linéairement équivalent à un diviseur T d'un certain type — totalement réel, non-réel, sans multiplicité — l'équivalence étant donnée par une fonction rationnelle inversible aux anneaux locaux des points singuliers f et vérifiant $D - T = \mathrm{div}(f)$. On voit alors toutes ces relations entre diviseurs d'un ouvert de X et entre fonctions rationnelles de $k(Y) = k(X) = k(Y')$. Ainsi, si on dispose de l'invariant pour Y' on a les relations voulues, $D - T = \mathrm{div}(f)$ et il suffit de s'assurer que l'inversibilité de f aux points singuliers de Y' l'implique pour les points singuliers de Y ce qui est garanti par les inclusions $\cap_j \mathfrak{m}_{P_{i,j}}^{n_{i,j}} \subset \mathfrak{m}_{S_i}$.■

On peut déjà annoncer que le comportement des différents invariants singuliers sera lié aux degrés des diviseurs servant à singulariser. Par suite, pour traiter une courbe singulière donnée, il serait bon de contrôler les entiers $n_{i,j}$. Par définition-même une singularité S est dite ordinaire à n branches si son $\delta_S = \dim \frac{\overline{\mathcal{O}_{Y,S}}}{\mathcal{O}_{Y,S}}$ où $\overline{\mathcal{O}_{Y,S}}$ désigne la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{Y,S}$, vaut n. On dit que c'est un cusp quand S n'a qu'un seul antécédent par la normalisation et que son δ vaut 2. Dans ces deux cas on a :

Proposition 3.1.4
Si S est une singularité ordinaire à n branches alors il existe n points dans la normalisée, les P_j, tel que $\cap_j \mathfrak{m}_{P_j} \subset \mathfrak{m}_S$. Si C est un cusp alors son unique antécédent P dans la normalisée satisfait $\mathfrak{m}_P^2 \subset \mathfrak{m}_C$.

Une courbe singulière et ses modèles singuliers peuvent partager beaucoup de points communs : des parties lisses isomorphes et des points singuliers en couple pouvant partager même δ. Il n'est cependant pas vrai que deux courbes singulières dont les lieux lisses sont isomorphes et dont on peut faire correspondre les points singuliers deux-à-deux de sorte à les mettre par couples analytiquement isomorphes sont isomorphes. Voici un exemple[1] : soient $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_1', Q_1', P_2', Q_2'$ huit points de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Alors les deux courbes

$$Y = (((((X_{P_1+Q_1})_{P_2+Q_2})_{2P_1'})_{2Q_1'})_{2P_2'})_{2Q_2'} \text{ et } Y' = (((((X_{P_1'+Q_1'})_{P_2'+Q_2'})_{2P_1})_{2Q_1})_{2P_2})_{2Q_2}$$

ont des lieux lisses isomorphes, car isomorphes à $\mathbb{P}^1 \setminus \{P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_1', Q_1', P_2', Q_2'\}$ et toutes les deux deux nœuds et quatre cusps. Par contre si elles étaient isomorphes, cet isomorphisme échangerait les nœuds d'une part et les cusps d'autre part et se relèverait en un automorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ échangeant $\{P_1, Q_1, P_2, Q_2\}$ et $\{P_1', Q_1', P_2', Q_2'\}$.

[1] Cet exemple m'a été soufflé par Michel GRANGER.

Pour obtenir une contradiction, il suffit de choisir ces deux quadruplets avec des birapports différents.

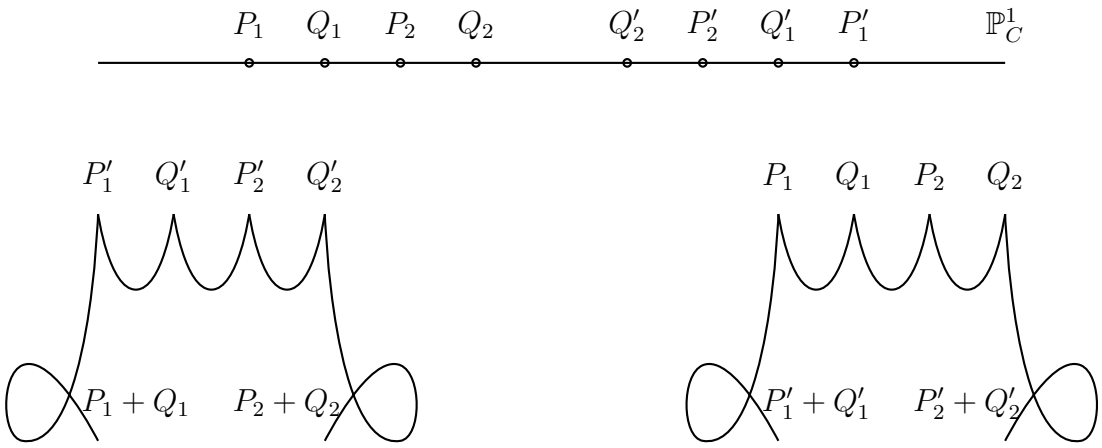


FIG. 3.1 – Deux courbes non-isomorphes qui se « ressemblent »

3.2 M pour une courbe singularisée en respectant les lacets

Pour rappel, MONNIER a montré que $p_a(X) \leqslant M(X) \leqslant 2p_a(X)$ où $p_a(X)$ désigne le genre arithmétique de la courbe X. On y utilisait le résultat suivant qui sera à nouveau utile :

Lemme 3.2.1 : *Soit X une courbe de genre arithmétique p_a et U son lieu lisse, alors pout tout $P \in U$ et tout $n \geqslant p_a$, l'application $\varphi_{P,2n} : U^{(2n)} \to J$, $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant 2n} \mapsto \sum_{i=1}^{2n} P_i - P$ est surjective.*

Ce lemme permet essentiellement de se ramener au cas effectif :

Lemme 3.2.2 : *Sur une courbe de genre arithmétique p_a, tout diviseur de degré pair sur chaque lacet et de degré total $2d \geqslant 2p_a$ est linéairement équivalent à un diviseur effectif.*

Preuve :
Soit D un diviseur de degré pair sur chaque lacet et de degré total $2d \geqslant 2p_a$ et P

un point quelconque de U. Alors la classe de $D - 2dP$ est dans l'image de $\varphi_{P,2d}$ car $2d \geqslant 2p_a$: il existe donc $\sum_{i=1}^{2d} P_i - P$ linéairement équivalent à $D - 2dP$ et en ajoutant $2dP$ on trouve bien $D \sim \sum_{i=1}^{2d} P_i$.■

On va maintenant mettre en œuvre ce qui était annoncé : trouver une condition pour que la finitude de $M(X)$ implique celle de $M(X_D)$ — c'est l'objet du lemme qui suit. Ensuite on l'itérera pour obtenir quelques propositions plus explicites. Si $D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$ est diviseur effectif à support dans le lieu lisse d'une courbe X, on note ici $D' = \sum_{i=1}^{n} n'_i P_i$ où n'_i est le plus petit entier pair plus grand que n_i.

Lemme 3.2.3 : *Soit X une courbe et $D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$ un diviseur effectif à support dans le lieu lisse de X et dans un même lacet et de degré $\geqslant 2$. Alors*

$$M(X_D) \leqslant \max\left(M(X) + \frac{\deg D'}{2}, p_a(X_D)\right).$$

Preuve :
Notons $n = \max(M(X) + \frac{\deg D'}{2}, p_a(X_D))$. Soit donc E un diviseur de X_D de degré pair sur chaque lacet et de degré total $2d \geqslant 2n$. Comme d'une part $2d \geqslant 2p_a(X_D)$ d'après le lemme précédent on peut supposer E effectif. D'autre part $E - D'$ est de degré $\geqslant 2M(X)$ et donc il existe une fonction rationnelle f inversible aux anneaux locaux des points singuliers de X telle que $C := E - D' + \mathrm{div}(f)$ soit totalement non-réel ce qu'on réécrit :

$$E + \mathrm{div}(f) = C + D'.$$

Les seuls zéros réels de f sont donc les P_i et sont d'ordre pair — c'est le but des n'_i. Localement en P_i, f est de signe constant qui est le même car d'une part les P_i sont sur un même lacet et d'autre part le nombre de pôles réels, compté avec multiplicité, entre deux de ces P_i est pair, car E est pair sur chaque lacet de X_D[2]. Quitte à prendre $-f$ on peut supposer qu'elle est positive sur ce lacet de X. Pour tout $\varepsilon \neq 0$, $f + \varepsilon$ a les même pôles que f, par contre ses zéros changent : mais quitte à prendre ε petit, ceux qui étaient non-réels le restent et forment le diviseur C' et quitte à prendre $\varepsilon < 0$ ce qui étaient réels pairs, les P_i, deviennent non-réels, disons $Q_i + \overline{Q_i}$. Ainsi

$$E + \mathrm{div}(f + \varepsilon) = C' + \sum_i \frac{n'_i}{2}(Q_i + \overline{Q_i}).$$

[2]la singularisation suivant ces P_i a transformé chacun des intervalles $[P_i, P_{i+1}]$ en un nouveau lacet se refermant en S image commune des P_i.

Comme $f + \varepsilon$ induit une fonction rationnelle inversible en les anneaux locaux des points singuliers de X_D — pour les anciennes singularités, il suffit qu'ε évite un nombre fini de valeurs, pour la nouvelle f y vaut ε — il s'agit bien d'une relation d'équivalence linéaire sur X_D entre E et $C' + \sum_i \frac{n'_i}{2}(Q_i + \overline{Q_i})$ totalement non-réel. Par suite$M(X_D) \leqslant n$. ■

Proposition 3.2.1 (M pour une courbe singularisée en respectant les lacets)
Soit X une courbe lisse qu'on singularise à plusieurs reprises à l'aide de diviseurs effectifs dont les supports sont à chaque fois dans un même lacet pour obtenir une courbe Y. Alors $M(Y) \leqslant p_a(Y) + n$ où n est le nombre de singularités ordinaires de Y.

Preuve :
Introduisons quelques notations : on pose $X_1 := X$ et on note D_i, $i = 1 \dots m$ le diviseur effectif à support dans un même lacet qu'on utilise pour singulariser la courbe $X_i := (X_{i-1})_{M_{i-1}}$, $i = 2 \dots m+1$. Le nombre de singularités ordinaires de $Y = X_{m+1}$ n'est autre que le nombre de D_i sans multiplicité. On va prouver le résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.
Si on n'a effectué aucune singularisation alors il s'agit juste du résultat lisse $M(Y) = M(X) = g(X) = p_a(X) = p_a(Y) = p_a(Y) + 0$. Supposons le résultat vrai pour $m - 1 \in \mathbb{N}$ et prouvons-le pour m. D'après le lemme précédent on a

$$M(Y) = M(X_{m+1}) = M((X_m)_{D_m}) \leqslant \max\left\{M(X_m) + \frac{\deg D'_m}{2}, p_a((X_m)_{D_m})\right\}.$$

Or d'une part on sait que $p_a((X_m)_{D_m}) = p_a(X_m) + \deg D_m - 1$ et d'autre part l'hypothèse de récurrence donne $M(X_m) \leqslant p_a(X_m) + n$ où n est le nombre de singularités ordinaires de X_m. Ainsi l'inégalité précédente se réécrit :

$$M(Y) \leqslant \max\left\{p_a(X_m) + n + \frac{\deg D'_m}{2}, p_a(X_m) + \deg D_m - 1\right\}.$$

De deux choses l'une :

- ou bien D_m est sans multiplicité auquel cas $D'_m = 2D_m$ et donc le maximum précédent est $p_a(X_m) + n + \deg D_m = p_a(X_{m+1}) + 1 + n$ et Y comptant bien une singularité ordinaire de plus que X_m – celle due à D_m justement — la formule

$$M(Y) \leqslant p_a(Y) + \text{ nombre de singularités ordinaires de } Y$$

est satisfaite,

– ou bien D_m contient un point multiple c'est-à-dire qu'il existe $n_i > 1$ et donc $\frac{n'_i}{2} < n_i$ et comme pour les autres indices l'inégalité large est remplie on a finalement $\frac{\deg D'_m}{2} < \deg D_m$ ce qui donne

$$M(Y) \leqslant \max\{p_a(X_m) + n + \deg D_m - 1, p_a(X_m) + \deg D_m - 1\} = p_a(Y) + n$$

et Y compte encore le même nombre n de singularités ordinaires.■

Étonnamment, c'est la présence de singularités ordinaires qui fait augmenter la différence $M - p_a$. Dans les deux cas extrême où on ne met que des singularités ordinaires, où aucune, on obtient alors les deux propositions suivantes :

Corollaire 3.2.1.1 (M pour une courbe singularisée en respectant les lacets à singularités ordinaires)
Soit X une courbe lisse qu'on singularise à n reprises avec des diviseurs effectifs sans multiplicité — les n singularités résultantes sont ordinaires — à support dans la partie lisse d'un même lacet à chaque étape. Alors la courbe finale, Y, vérifie $M(Y) \leqslant p_a(Y) + n$.

Corollaire 3.2.1.2 (M pour une courbe singularisée en respectant les lacets sans singularité ordinaire)
Soit X une courbe lisse qu'on singularise à plusieurs reprises à l'aide de diviseurs effectifs dont les supports sont à chaque fois dans un même lacet et avec un point multiple au moins pour obtenir une courbe Y. Alors $M(Y) \leqslant p_a(Y)$.

Par exemple, sur la courbe cuspidale usuelle, tout diviseur de degré positif pair est linéairement équivalent à un diviseur dont le support est totalement non-réel.

3.3 M pour des courbes singularisées suivant des diviseurs non-totalement réels

Lemme 3.3.1 : *Soit X une courbe réelle telle que $M(X) < \infty$ et D un diviseurs effectif de la forme $\sum_i P_i + \overline{P_i}$ ou $2nQ$ ou même $\sum_i P_i + \overline{P_i} + 2nQ$. Alors $M(X_D) \leqslant \max\{M(X) + \frac{\deg(D)}{2}, p_a(X_D)\}$*

Preuve :
Soit donc E un diviseur de degré $\geqslant \max\{2M(X) + \deg(D), 2p_a(X_D)\}$ sur X_D.

Comme précédemment on peut supposer E effectif. Par ailleurs $E - D$ est de degré $\geqslant 2M(X)$ et donc sur X on dispose d'une relation $E - D + \mathrm{div}(f) = E'$ où E' est effectif totalement non-réel et $f \in \mathbb{R}(X)^*$ est inversible aux anneaux locaux des points singuliers de X. On la réecrit

$$E + \mathrm{div}(f) = E' + D$$

où à nouveau on lit les pôles dans E et les zéros dans $E' + D$. Pour $\varepsilon \neq 0$, $f + \varepsilon$ garde des zéros non-réels voisins des P_i et $\overline{P_i}$ et, pour un choix de signe judicieux, admet de nouveaux zéros complexes conjugués à la place du zéro d'ordre pair en Q. Par contre elle devient inversible au points $P_i + \overline{P_i}$ et Q, ce qui fournit l'équivalence souhaitée.■

Partant d'une courbe lisse où $M(X) = g(X) = p_a(X)$, on voit tout de suite que $p_a(X_D) = p_a(X) + \deg D - 1$ croît plus vite que $M(X) + \frac{\deg(D)}{2}$ ce qui donne la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 (M pour des courbes singularisées suivant des diviseurs non-totalement réels)
Si X n'a que des singularités non-réelles, ou réelles isolées ou des cusps réels, alors $M(X) \leqslant p_a(X)$.

Preuve :
Pour les cusps réels et les singularités isolées, cela découle du lemme itéré. Il reste donc à traiter les singularités non-réelles. Celles-ci n'ont que des points non-réels au-dessus d'elles dans la normalisée et il suffit donc de se convaincre que si $D \in \mathrm{Div}(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \setminus X_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}))$ est effectif alors $M(((X_{\mathbb{C}})_D)_{\overline{D}}) \leqslant p_a(((X_{\mathbb{C}})_D)_{\overline{D}})$ auquel cas les arguments sont formellement les mêmes que dans la preuve du lemme.■

3.4 N pour les courbes à singularités ordinaires réelles et cusps réels

Si l'on veut adapter la preuve de [12] à d'autres singularités, on a besoin de disposer d'un degré suffisamment grand pour pouvoir trouver des diviseurs sans multiplicité dans une classe d'équivalence donnée, dans le but de pouvoir « bouger » un peu les hyperplans définissant nos diviseurs tout en restant dans la partie réelle. C'est pour

cette raison que l'on s'est plutôt intéressé à l'invariant $N'(X)$ défini comme le plus petit entier N tel que tout diviseur de degré $\geqslant N$ soit linéairement équivalent à un diviseur $\sum_i P_i$ où $P_i \neq P_j$ dès que $i \neq j$ sont des points réels (on parlera de diviseur totalement réel sans multiplicité). La même définition reste valable pour les courbes singulières à condition de prendre la bonne définition pour l'équivalence linéaire. Clairement $N(X) \leqslant N'(X)$.

Lemme 3.4.1 : *Soient X une courbe et $P, P_1, \ldots, P_n \in X(\mathbb{R})$ des points réguliers distincts, alors si $N'(X)$ est fini il en est de même de $N'(X_{2P})$ et $N'(X_{P_1+\cdots+P_n})$ qui sont respectivement majorés par $\max\{N'(X)+2, p_a(X)+1\}$ et $\max\{N'(X)+n, p_a(X)+n-1\}$.*

Preuve :

On va traiter en parallèle les deux types de singularisation. Soient donc X une courbe telle que $N := N'(X)$ soit fini et D un diviseur de X_{2P} (resp : $X_{P_1+\cdots+P_n}$) dont le support ne contient pas de point singulier de X_{2P} (resp : $X_{P_1+\cdots+P_n}$). Il correspond alors à un diviseur de X ne contenant pas de point singulier de X ni P (resp : ni aucun des P_i). On cherche à montrer que s'il est de degré plus grand qu'un certain $n \in \mathbb{N}$, alors il est équivalent à un diviseur totalement réel sans multiplicité. Quitte à le supposer de degré $\geqslant p_a$, avec ici $p_a(X_{2P}) = p_a(X)+1$ (resp $p_a(X_{P_1+\cdots+P_n}) = p_a(X)+n-1$), il suffit de traiter le cas où D est effectif. Supposons de plus D de degré $\geqslant N+2$ (resp : $\geqslant N+n$). Alors dans X, $\deg(D-2P) \geqslant N$ (resp : $\deg(D-(P_1+\cdots+P_n)) \geqslant N$) et est donc équivalent à un diviseur effectif totalement réel sans multiplicité et sans point singulier E, via une fonction rationnelle f inversible dans les anneaux locaux des points singuliers de X :

$$D + \operatorname{div}(f) = E + 2P \qquad (\text{resp : } D + \operatorname{div}(f) = E + P_1 + \cdots + P_n).$$

Comme D est effectif, $a + f \in H^0(D)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et en le choisissant suffisamment petit (et éventuellement du « bon » signe dans le cas du cusp) on bouge les zéros de f en les conservant distincts, mais sans bouger ses pôles, de sorte que :

$$D + \operatorname{div}(a+f) = E' + P' + P'' \qquad (\text{resp : } D + \operatorname{div}(a+f) = E' + P'_1 + \cdots + P'_n).$$

avec $a+f$ inversible dans les anneaux locaux des points singuliers provenant de X et dans le nouveau. Les relations précédentes fournissent donc les équivalences linéaires voulues dans X_{2P} (resp : $X_{P_1+\cdots+P_n}$) avec un diviseur effectif sans multiplicité.■

Remarquons que la preuve précédente s'adapte également telle quelle au cas d'une singularité donnée par un diviseur effectif de la forme $2P + P_1 + \cdots + P_n$, car en effet la présence d'un 2 impose le choix du signe de ε tandis que les autres points ne forcent qu'à le prendre plus petit éventuellement. On a donc également la proposition suivante :

Lemme 3.4.2 : *Soient X une courbe et $P, P_1, \ldots, P_n \in X(\mathbb{R})$, alors si $N'(X)$ est fini il en est de même de $N'(X_{2P+P_1+\cdots+P_n})$ qui est majoré par $\max\{N'(X) + n + 1, p_a(X) + n\}$.*

Les premiers cas qui nécessitent des techniques différentes sont ceux d'une singularité provenant d'un diviseur du type $3P$ ou $2P + 2Q$; on y reviendra dans la section suivante. Pour le moment, l'idée est bien sûr d'appliquer successivement ces résultats en partant de courbes dont on sait que l'invariant N' est fini, par exemple les courbes lisses. On pourra même en dire un peu plus dans les cas où on en connait davantage, à savoir celui des courbes ayant beaucoup de composantes et celui des courbes de genre 2. Commençons par expliciter le premier point :

Proposition 3.4.1 (N et N' pour les courbes à singularités ordinaires réelles et cusps réels)
Si X a pour seules singularités des singularités ordinaires réelles et des cusps réels, alors $N(X) \leqslant N'(X) < +\infty$.

Voyons maintenant comment être plus précis à l'aide des résultats de la première partie :

Proposition 3.4.2 (bornes explicites pour N et N' dans quelques cas)
Si X est une courbe singulière obtenue à partir d'une courbe lisse, sa normalisée, qui a beaucoup de composantes (resp de genre 2) à l'aide de n diviseurs effectifs sans multiplicité ou éventuellement un coefficient 2 par étape, disons les D_k de degré d_k, alors

$$N(X) \leqslant N'(X) \leqslant 2g(\tilde{X}) - 1 + \sum_{k=1}^{n} d_k \qquad (\textit{resp } N'(X) \leqslant 5 + \sum_{k=1}^{n} d_k).$$

Preuve :
Traitons le cas où $\tilde{X}$ a beaucoup de composantes par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ il s'agit juste de la borne lisse $N'(\tilde{X}) \leqslant 2g - 1$. Supposons maintenant le cas n traité.

Alors quelque soit D_{n+1} comme dans l'énoncé, on a

$$N'(X) = N'((\tilde{X}_{D_1})\dots)_{D_{n+1}}) \leqslant \max\{N'((\tilde{X}_{D_1})\dots)_{D_n})+d_{n+1}, p_a((\tilde{X}_{D_1})\dots)_{D_n})+d_{n+1}-1\}.$$

Or l'hypothèse de récurrence montre que $N'((\tilde{X}_{D_1})\dots)_{D_n}) + d_{n+1} \leqslant 2g(\tilde{X}) - 1 + \sum_{k=1}^{n+1} d_k$ qui est plus grand que l'autre terme valant $g(\tilde{X}) - (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} d_k$ dès que $g \geqslant 1 - n$ ce qui est toujours le cas ! Le cas où $\tilde{X}$ est de genre 2 avec une seule composante connexe fonctionne d'autant plus que la borne $N'(\tilde{X}) \leqslant 5$ est encore plus large que $2g - 1$.■

On peut alors énoncer une variante :

Proposition 3.4.3
Si X est une courbe singulière avec n nœuds réels et c cusps réels dont la normalisée a beaucoup de composantes (resp : est de genre 2), alors $N(X) \leqslant N'(X) \leqslant g + p_a + n + c - 1$ (resp : $g + p_a + n + c + 1$).

Preuve :
Il suffit de comparer au modèle singulier Y formé de diviseurs entrant dans le cadre de la proposition précédente. Alors, disons dans le premier cas :

$$N(X) \leqslant N'(X) \leqslant N(Y) \leqslant 2g(\tilde{X})-1+\sum_{k=1}^{n} d_k = g-1+g+\sum_{k=1}^{n}(d_k-)+n+c = g+p_a+n+c-1.$$

L'autre cas se traite de manière analogue.■

3.5 $2P + 2Q$ dans un cas particulier

Pour adapter cette preuve à une courbe du type X_{2P+2Q}, on a besoin de contrôler le signe d'une fonction rationnelle candidate pour l'équivalence autour de P et Q pour pouvoir conclure de la même façon en « bougeant » d'un certain $\varepsilon \neq 0$. On peut éventuellement le faire avec un argument de type continuité/connexité, et c'est ce qui explique l'énoncé de la proposition suivante :

Proposition 3.5.1 ($2P + 2Q$ dans un cas particulier)
Soit X une courbe réelle lisse et $Q_1, \dots, Q_n$ des points d'une même composante connexe de $X(\mathbb{R})$. Alors $N(X_{2Q_1+\dots+2Q_n}) < +\infty$.

Preuve :
Notons C la composante connexe de $X(\mathbb{R})$ contenant les Q_i et fixons y un intervalle fermé propre les contenant tous. Alors son complémentaire U dans $X(\mathbb{R})$ est un ouvert rencontrant tous les ovales et on dispose donc d'un entier $N'(U)$ tel que tout diviseur de degré $\geqslant N'(U)$ soit linéairement équivalent à un diviseur simple à support dans U. Soit maintenant D un diviseur de $Y := X_{2Q_1+\cdots+2Q_n}$ de degré $d \geqslant \max(l + M, N'(U) + 2n + l)$, où l est le nombre de lacets et $M := M(Y) < +\infty$. Alors en lui retranchant au plus l points réels, on obtient un diviseur D' de degré pair sur chaque lacet et de degré $d' \geqslant M$. On sait alors qu'il est linéairement équivalent dans Y à un diviseur effectif totalement non-réel D''. De plus $D'' - 2\sum_{i=1}^{n} Q_i$ est de degré $\geqslant N'(U)$ et donc on dispose de $f \in \mathbb{R}(X)$ telle que :

$$D'' + \operatorname{div}(f) = S + 2\sum_{i=1}^{n} Q_i$$

où S est simple à support dans U. Ainsi f a des zéros d'ordre pair en les Q_i, et y est donc localement de signe constant ; de plus ce signe est partout le même car f n'admet ni zéro ni pôle entre deux de ces points et est continue. Par suite on peut choisir $\varepsilon \neq 0$ tel que $Z := D'' + \operatorname{div}(f + \varepsilon)$ soit totalement réel. Cela donne à nouveau $D'' \sim Z$ dans Y et donc D est linéairement équivalent à $Z+$ au plus l point réels comme voulu. On a donc $N(X_{2Q_1+\cdots+2Q_n}) \leqslant l + \max(M, N'(U) + 2n) < +\infty$.■

On pourrait traiter de manière analogue une courbe $X_{2Q_1+\cdots+2Q_n+P_1+\cdots+P_m}$ en supposant X lisse et qu'il y ait un nombre pair des P_j entre deux Q_i « consécutifs » de sorte à contrôler le signe de f au voisinage des Q_i. Par contre on ne peut *a priori* pas procéder par singularisations successives et traiter le cas d'une courbe $(X_{2P+2Q})_{2P'+2Q'}$ car on a vraiment besoin du résultat concernant un ouvert arbitraire, valable uniquement sur une courbe lisse.

Bibliographie

[1] Enrico ARBARELLO, Maurizio CORNALBA, Philli A. GRIFFITHS et Joe HARRIS
Geometry of Algebraic Curves, Volume I
Springer-Verlag, 1985 12, 14

[2] Michael Francis ATIYAH et Ian Grant MACDONALD
Introduction to Commutative Algebra
Levant Books, 2007 8

[3] Jasek BOCHNAK, Michel COSTE, Marie-Françoise ROY
Géométrie algébrique réelle
Springer, 1987

[4] Marc COPPENS.
Totally non-real divisors in linear systems of smooth real curves
Advances in Geometry **4** (2008) 551-555 28

[5] Marc COPPENS, Gerriet MARTENS
Linear pencils on real algebraic curves
Journal of Pure and Applied Algerbra, **214** (2010) 841-849 15

[6] Marc COPPENS, Gerriet MARTENS
Very ample linear series on real algebraic curves
Bull. Belg. math. Soc. **18** (2011) 55-61

[7] Benedict H. GROSS, Joe HARRIS
Real algebraic curves
Ann. Sci. de l'É.N.S., 4 Sér. **14** (1981) 157-182. 9, 16, 44, 45

[8] Robin HARTSHORNE
Algebraic Geometry
Springer-Verlag, 1977 10, 11, 12, 13, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 48

[9] Johan HUISMAN.
On the geometry of algebraic curves having many real components
Rev. Math. Comput., **14** (2001) 83-92 28

[10] Jean-Pierre SERRE
Courbes algébriques et corps de classe
Herman, 1959 21, 26, 30, 53, 54, 55, 56

[11] Jean-Philippe MONNIER
Divisors on real curves
Advances in Geometry, **3** (2003) 339-360 27, 28

[12] Jean-Philippe MONNIER
On real generalized jacobian varieties
Journal of pure and applied algebra **203** (2005) 252-274 20, 26, 30, 53, 62

[13] Maxwell ROSENLICHT
Generalized Jacobian Varieties
Ann. Math. Soc **59** (1954) 505-530

[14] Clause SCHEIDERER
Sum of squares of regular functions on real algebraic varieties
Trans. Amer. Math. Soc., **352** (1999) 1039-1069 26, 29, 35

[15] Charles Terence Clegg WALL
Duality of real projective plane curves : KLEIN*'s equation*
Topology **35** (1996) No2 355-362 44, 45

l'université nantes angers le mans
PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

université angers

Thèse de Doctorat

Alexandre BARDET

Diviseurs sur les courbes réelles

Divisors on real curves

Résumé
Dans un article sur les sommes de carrés, SCHEIDERER a prouvé que pour toute courbe algébrique, réelle, projective, irréductible, lisse, ayant des points réels, il existait un entier N tel que tout diviseur de degré plus grand que N soit linéairement équivalent à un diviseur dont le support est totalement réel. Ensuite HUISMAN et MONNIER ont montré que dans le cas des courbes avec beaucoup de composantes connexes, ie. celle en ayant au moins autant que le genre g, ici supposé strictement positif, de la courbe, on pouvait prendre N égal à $2g-1$. MONNIER a également abordé la question pour les cas des courbes singulières : il en a exhibé pour lesquelles un tel entier n'existait pas et d'autres pour lesquelles il existait. Dans cette thèse on étend la classe des courbes singulières pour lesquelles un tel entier existe, essentiellement des courbes avec des nœuds ou des cusps, et on arrive dans certains cas a contrôlé explicitement cet entier en fonction du genre de la courbe et du nombre de ces singularités. Pour y parvenir on utilise d'une part une « singularisation successive » et d'autre part une variante de l'invariant où l'on demande qu'en plus les points du support soient deux-à-deux distincts. Pour ce nouvel invariant, on étend tel quel les résultats sur les courbes ayant beaucoup de composantes et on traite celui des courbes de genre 2 ayant une seule composante, le « premier » cas jusqu'alors inconnu : dans ce cas la borne 3 est impossible en général, mais par contre 5 convient.

Mots clés
courbe, algébrique, réelle, lisse, singulière, singularisation, diviseur, équivalence linéaire, support, genre 2, composante connexe, courbe maximale, nœuds, cusp.

Abstract
In an article about sums of squares, SCHEIDERER proved that for every real, algebraic, projective, irreducible, smooth curve with some real points, their exists an integer N such that every divisor of degre not lower than N is linearly equivalent to a divisor whose support is totally real. Then HUISMAN and MONNIER proved that for real curves with many components, ie. those with at least as many components as the genus g, assumed here to be positive, of the curve, one can choose N equal to $2g-1$. MONNIER also dealed with singular curves: he showed that for some of them such an integer does not exist and gave some others where it does exist. In this thesis we extend the classe of singular curves for wich such an integer exists, essentially those with nodes and cusps, and we sometimes manage to bound such an integer in terms of the genus. To do so, an "iterative singularisation" is used and also a slightly different invariant where we ask the real points of the support to be distinct from each-other. We extend the results about curves with many components to that new invariant and deal with curves of genus 2 having only one component, which is the "very first" unknown case so far: in that case, 3 cannot bound the invariant, but 5 does.

Key Words
curve, algebraic, real, smooth, singular, singularisation, divisor, linear equivalency, support, genus 2, component, maximal curve, node, cusp.

L'UNIVERSITÉ NANTES ANGERS LE MANS