HAL
open science

# Rhéologie des suspensions de bulles dans un fluide à seuil

Thuy Linh Nguyen Thi, Lucie Ducloué, Guillaume Ovarlez, Xavier Chateau

## To cite this version:

Thuy Linh Nguyen Thi, Lucie Ducloué, Guillaume Ovarlez, Xavier Chateau. Rhéologie des suspensions de bulles dans un fluide à seuil. 21 ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. 6 p. - CD-ROM. hal-00911497

**HAL Id: hal-00911497**

**https://hal.science/hal-00911497**

Submitted on 29 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Rhéologie des suspensions de bulles dans un fluide à seuil

**N. T. Thùy Linh, L. Ducloué, G. Ovarlez, X. Chateau[a]**

a. *Université Paris-Est, Laboratoire Navier (UMR 8205) CNRS, ENPC, IFSTTAR, F-77420 Marne-la-Vallée, France.*

## Résumé :

*Le comportement d'une suspension monodisperse de bulles dispersées dans un fluide à seuil est étudié dans le régime des faibles vitesses de déformation. Dans le régime élastique le module élastique global de la suspension dépend de la déformabilité des bulles quantifiée par un nombre capillaire défini comme le rapport du module élastique du fluide sur la pression capillaire des bulles. A fraction volumique en bulles donnée, le module élastique de la suspension est d'autant plus grand que les bulles sont peu déformables. Dans le régime plastique, la contrainte d'écoulement de la suspension est égale à la contrainte d'écoulement du fluide porteur quelque soit la taille des bulles. Un modèle de changement d'échelle permet d'une part d'expliquer ce résultat et d'autre part d'estimer les caractéristiques linéaires la suspension.*

## Abstract :

*The behavior of a monodisperse suspension of bubble dispersed in a yield stress fluid is studied in the low strain rates regime. In the elastic regime the overall elastic modulus of the suspension depends upon the bubble deformability quantified by a capillary number defined as the ratio of the elastic modulus of the fluid to the bubble capillary pressure. For a given value of the bubble volume fraction the elastic modulus of the suspension is a decreasing function of the bubble size. In the plastic regime, the suspension yield stress is equal to that of the suspending fluid whatever the bubble size. These results are explained in the framework of an upscaling approach. Estimates for the suspension linear properties are given.*

**Mots clefs : Rhéologie, Suspension de bulles, Homogénisation**

## 1 Introduction

On s'intéresse au comportement d'une suspension monodisperse de bulles sphériques dans un fluide à seuil. Dans ce travail, le comportement visqueux du matériau suspendant n'est pas pris en compte : les résultats obtenus ne sont donc valables que pour des faibles vitesses de déformation du système étudié. Tant que la contrainte déviatorique qui lui est appliquée reste inférieure à une contrainte seuil $\tau_c$, le matériau suspendant a un comportement élastique linéaire incompressible caractérisé par le module de cisaillement élastique $G$. Quand la contrainte déviatorique atteint la contrainte seuil, le comportement du matériau suspendant est plastique parfait. On a donc

$$\boldsymbol{\tau} = 2G\boldsymbol{e} \text{ si } \sqrt{(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau})/2} < \tau_c \qquad \boldsymbol{\tau} = 2\tau_c \frac{\boldsymbol{d}}{\sqrt{2\boldsymbol{d}:\boldsymbol{d}}} \text{ si } \sqrt{(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau})/2} = \tau_c \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{\delta}$ désigne la contrainte déviatorique, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, $p$ la pression, $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité du second ordre, $\boldsymbol{e}$ le tenseur des déformations linéarisé et $\boldsymbol{d}$ le tenseur des taux de déformation.

Dans ce travail on ne prend pas en compte une éventuelle élasticité ou viscosité des interface air-matériau suspendant. L'équation d'équilibre de l'interface air-matériau suspendant est donc décrite par la loi de Laplace qui relie le saut de pression à la traversée de l'interface à la valeur de la tension de surface $\gamma$ et à la courbure moyenne de l'interface. Dans la suite, on suppose que la taille des bulles

est suffisament petite par rapport à la taille caractéristique du volume de suspension étudié pour que l'on puisse considérer la suspension comme un milieu homogène.

## 2 Comportement élastique

Dans cette première partie, on ne prend en compte que le comportement élastique de la suspension. On note $\varphi$ la fraction volumique occupée par les bulles. Ce système matériel est soumis à un chargement du type déformation macroscopique imposée à force de volume nulle et on note $\boldsymbol{E}$ la valeur de la déformation macroscopique imposée. Pour simplifier, on ne s'interesse dans la suite qu'à des évolutions isochores du système et on suppose que les bulles sont distribuées de façon aléatoire au sein du ver ; le comportement à l'échelle maroscopique de la suspension est donc isotrope. Supposant que l'on puisse déterminer complètement la solution en contrainte et déformation en fonction de la déformation macroscopique appliquée pour une réalisation du milieu hétérogène, on montre que le comportement homogène équivalent s'obtient en calculant en fonction de $\boldsymbol{E}$ la valeur de la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma} >$ où $< \cdot >$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par le ver. Dans le cas d'un matériau suspendant à comportement élastique linéaire et si l'on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, la linéarité du problème traité permet d'écrire la contrainte macroscopique déviatorique sous la forme

$$\boldsymbol{S} = 2G\boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(< \boldsymbol{\tau} >_i -2G < \boldsymbol{e} >_i\right) \tag{2}$$

avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Sigma} + P\boldsymbol{\delta}$, $P = -1/3\mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}$ la pression à l'échelle macroscopique, $n$ le nombre de bulles appartenant au ver considéré, $< \cdot >_i$ l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par la bulle numéro $i$ et $\varphi_i$ la fraction volumique occupée par la bulle numéro $i$ au sein du ver. Les quantités $< \boldsymbol{\tau} >_i$ et $< \boldsymbol{e} >_i$ dépendant linéairement du chargement $\boldsymbol{E}$, on introduit les deux tenseurs du quatrième ordre $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}_i$ tels que $< \boldsymbol{e} >_i = \mathcal{U}_i : \boldsymbol{E}$ et $< \boldsymbol{\tau} >_i = \mathcal{V}_i : \boldsymbol{E}$. La valeur de ces tenseurs dépend du module d'élasticité $G$ du fluide porteur, de la tension de surface $\gamma$ et de la microstructure du ver étudiée. Le comportement macroscopique de la suspension s'obtient en reportant ces relations tensorielles dans l'équation 2.

En pratique, il n'est bien sur pas possible de calculer exactement les grandeurs $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}_i$ pour chaque réalisation du milieu. On peut construire une première famille d'estimations des caractéristiques macroscopiques du milieu étudié en estimant les quantités $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}_i$ par la solution du même problème mais pour une unique bulle suspendue dans un matériau élastique soumis à une déformation à l'infini [1]. Dans la situation d'une suspension monodisperse isotrope à l'échelle microscopique et macroscopique considérée ici, il est légitime d'utiliser la même estimation des tenseurs $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}_i$ pour toutes les bulles. Dans ce cas, le matériau suspendant du problème auxiliaire est également isotrope et les relations tensorielles sont remplacées par les relations de simple proportionnalité $< \boldsymbol{e} >_i \simeq U(\varphi, \gamma, G, \text{schéma})\boldsymbol{E}$ et $< \boldsymbol{\tau} >_i \simeq V(\varphi, \gamma, G, \text{schéma})\boldsymbol{E}$ dont la valeur dépend du schéma d'homogénéisation particulier utilisé [1]. En reportant ces relations dans l'équation 2, on montre que le module de cisaillement élastique de la suspension s'écrit

$$G^{hom} = G + \frac{1}{2}\varphi\Big(V(\varphi, \gamma, G, \text{schéma}) - 2GU(\varphi, \gamma, G, \text{schéma})\Big) \tag{3}$$

La solution du problème de la bulle suspendue dans un matériau homogène linéaire cisaillée à l'infini a été étudiée par Palierne [4]. Il a montré que dans le cas d'une bulle suspendue dans un matériau de module d'élasticité $G$ sollicitée en cisaillement pur, la solution du problème auxiliaire s'écrit

$$< \boldsymbol{e} >= \frac{3 + 10C_a}{5 + 6C_a}\,\boldsymbol{E} \quad \text{et} \quad < \boldsymbol{\tau} >= \frac{16G}{5 + C_a}\,\boldsymbol{E} \quad \text{avec} \quad C_a = \frac{G}{\gamma/a} \tag{4}$$

Le nombre capillaire $C_a$ quantifie la déformabilité de la bulle par rapport à celle du milieu dans lequel elle est plongée. En reportant directement les relations 4 dans la relation 3 on obtient l'estimation diluée $G^{\mathrm{DIL}} = G \times g^{\mathrm{DIL}}$ du module de cisaillement

$$g^{\mathrm{DIL}} = 1 + 5\varphi\frac{1 - 2C_a}{5 + 6C_a} \tag{5}$$

La relation 5 montre que les bulles ont un effet renforçant si $C_a < 1/2$ (cas des bulles peu déformables) ou au contraire assouplissant si $C_a > 1/2$ (cas des bulles très déformables).

On peut bien sur utiliser les relations 4 pour construire d'autres estimations du module de cisaillement de la suspension comme l'estimation de Mori-Tanaka (dite également estimation de Maxwell), construite en estimant les quantités $< \boldsymbol{e} >_i$ et $< \boldsymbol{\tau} >_i$ par celles qui s'établissent dans une bulle immergée dans une matrice de module élastique $G$ soumise à une déformation égale à la déformation moyenne du matériau suspendant, ou l'estimation autocohérente construite en estimant les mêmes quantités $< \boldsymbol{e} >_i$ et $< \boldsymbol{\tau} >_i$ par celles qui s'établissent dans une bulle immergée dans le matériau équivalent cherché [1]. Ces différentes estimations sont tracées sur les figures 1 et 2 pour différentes valeurs du nombre capillaire. Pour les trois schémas, la transition entre les bulles renforçant le milieu et les bulles

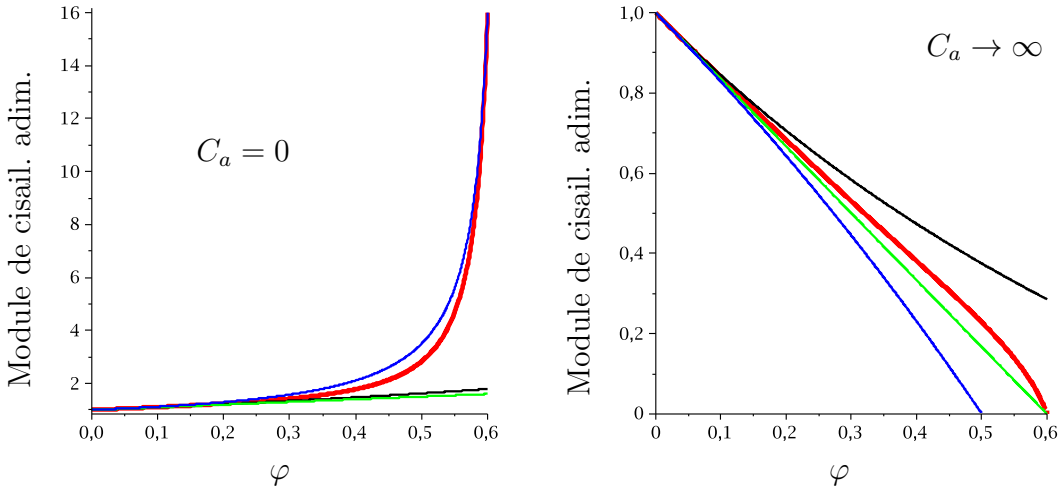


FIGURE 1 – Estimations du module de cisaillement adimensionné en fonction de la fraction volumique en bulles pour une suspension isotrope de bulles monodisperse pour $C_a = 0$ et $C_a \to \infty$. Vert : estimation diluée , noir : estimation de Mori-Tanaka ou de Maxwell, bleu : estimation autocohérente et rouge : estimation par motifs morphologiques.

assouplissant le milieu se produit pour $C_a = 1/2$.

On peut améliorer ces estimations en mettant en œuvre une approche par motifs morphologiques [1]. Le principal avantage de cette approche par rapport aux schémas classiques est de permettre de mieux prendre en compte le phénomène de percolation des bulles au sein de la suspension. L'estimation par approche morphologique est construite en considérant un motif constitué d'une bulle sphérique entourée d'une couronne de matériau suspendant dont l'épaiseur diminue quand la fraction volumique en bulles augmente et une inclusion sphérique constituée uniquement du matériau suspendant. Pour une valeur de la déformation macroscopique imposée $\boldsymbol{E}$, les moyennes des contraintes et des déformations dans chacun des deux motifs sont calculées en considérant qu'ils sont immergés dans un milieu linéaire dont les caractéristiques matérielles sont celles de la suspension ; il s'agit donc d'une approche autocohérente. Le module de cisaillement du milieu homogène équivalent est solution de

$$G^{hom} = \frac{\varphi_1 V_1(\varphi, G, G^{hom}) + (1-\varphi_1) V_2(G, G^{hom})}{\varphi_1 U_1(\varphi, G, G^{hom}) + (1-\varphi_1) U_2(G, G^{hom})} \tag{6}$$

avec $U_i$ et $V_i$ les coefficients de proportionnalité reliant respectivement la moyenne de la déformation et de la contrainte à la déformation de cisaillement appliquée à l'infini pour chacun des motifs et $\varphi_1$ la valeur du seuil de percolation des bulles pour laquelle le module de cisaillement s'annule (cas des bulles déformables) ou atteint sa valeur maximale (cas des bulles peu déformables).

L'estimation du module de cisaillement s'obtient en résolvant une équation polynomiale de degré supérieur à trois. Il n'est donc pas possible d'en donner une expression analytique. Dans ce travail,

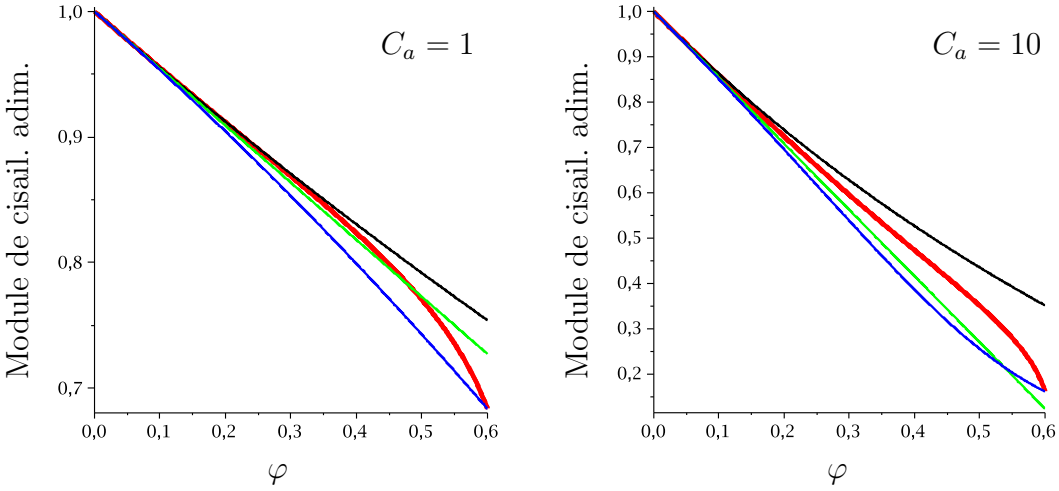


FIGURE 2 – Estimations du module de cisaillement adimensionné en fonction de la fraction volumique en bulles pour une suspension isotrope de bulles monodisperse pour $C_a = 1$ et $C_a = 10$. Vert : estimation diluée, noir : estimation de Mori-Tanaka ou de Maxwell, bleu : estimation autocohérente et rouge : estimation par motifs morphologiques.

on a fixé arbitrairement à 60% la seuil de percolation des bulles, une valeur proche de la fraction d'empilement désordonné de sphères monodisperses. Les prédictions de ce schéma sont également représentées sur les diagrammes des figures 1 et 2 (courbes rouges). Les prédictions obtenues en mettant en œuvre le schéma morphologique sont toujours comprises entre l'estimation autocohérente et l'estimation de Mori-Tanaka (voir figures 1 et 2). On constate également sur la figure 2 que les estimations obtenues pour chaque schéma sont relativement proches les unes des autres pour des nombres capillaires compris entre 1 et 10. Pour la comparaison avec les valeurs expérimentales on utilisera de façon systématique les prédictions du schéma à motifs morphologiques.

## 2.1 Seuil d'écoulement de la suspension

On s'intéresse maintenant à la prédiction du seuil d'écoulement de la suspension. On se restreint ici aux suspensions dont le nombre capillaire est nul ou tend vers l'infini. Dans ces deux situations, les interfaces capillaires ne stockent pas d'énergie lorsque la suspension est déformée. On peut alors utiliser directement les relations données dans [2] pour des suspensions de particules dans un fluide à seuil en mettant en œuvre la méthode d'homogénéisation non linéaire sécante modifiée présentée en détail dans [5]

$$\tau_c^{hom}(\varphi) = \tau_c \times \sqrt{(1-\varphi)\, g(\varphi)} \tag{7}$$

En reportant l'estimation diluée 5 dans la relation 7, on prédit que l'ajout de bulles peu déformables n'a, au premier ordre en $\varphi$, pas d'effet sur le seuil ($\tau_c^{hom}(\varphi) = \tau_c$ si $C_a = 0$) et diminue le seuil si les bulles sont très déformables ($\tau_c^{hom}(\varphi) = \tau_c\,(1 - 4/3\varphi)$ si $C_a \to \infty$). On peut évidemment reporter les estimations du schéma par motifs morphologiques dans la relation 7. Les prédictions obtenues pour les deux valeurs extrêmes de $C_a$ sont représentées sur la figure 3. Pour les faibles valeurs de la fraction volumique en bulles, on retrouve évidemment les mêmes tendances que pour l'estimation diluée. Pour les bulles indéformables ($C_a = 0$) on prévoit une brusque augmentation de la contrainte seuil pour des valeurs de fraction volumique supérieures à 50% vers une valeur finie pour $\varphi = 60\%$. Pour les valeurs de la fraction volumique en bulles inférieures à 50%, l'ajout de bulles ne modifie pratiquement pas le seuil de la suspension. Dans le cas des bulles très déformables ($C_a \to \infty$), on prédit une décroissance régulière du seuil de la suspension lorsque l'on ajoute des bulles jusqu'à une valeur nulle pour $\varphi = 60\%$.

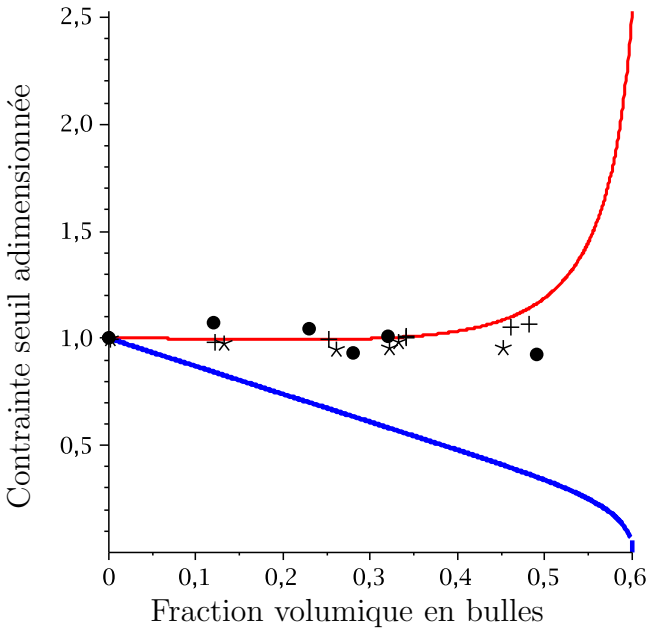


FIGURE 3 – Seuil de contrainte adimensionné en fonction de la fraction volumique en bulles. Rouge : prédiction pour $C_a = 0$, bleu : prédiction pour $C_a \to \infty$, croix : bulles de 100$\mu$m - SDS, étoiles : bulles de 300$\mu$m - SDS, disques pleins : bulles de 1600$\mu$m - SDS.

## 3 Validation expérimentale

On a représenté sur les figures 3 et 4 la comparaison des prédictions théoriques aux résultats expérimentaux décrits dans [3]. Les valeurs du module de cisaillement et de la contrainte seuil ont été mesurées pour plusieurs mélanges d'une mousse acqueuse avec une émulsion huile dans l'eau. Deux tensio-actifs différents (du SDS et du TTA) ont été utilisés. La même valeur de la tension a été mesurée dans les deux cas ($\gamma = 35$mN m$^{-1}$). Pour toutes les suspensions préparées, le rayon des bulles a été mesuré. Les résultats de ces mesures ont permis de calculer les nombres capillaires nécessaires pour les estimations théoriques ; aucun paramètre d'ajustement n'a donc été utilisé. Le lecteur intéressé est renvoyé à [3] pour une présentation détaillée de ces expériences.

On constate sur la figure 4 que l'on obtient un très bon accord entre théorie et expérience pour trois systèmes (bulles de 100$\mu$m avec TTA, bulles de 300$\mu$m avec TTA et bulles de 1600$\mu$m avec SDS) et un accord moyen pour la suspension de bulles de 300$\mu$m avec SDS. Pour la suspension de bulles de 100$\mu$m avec SDS, la situation est nettement moins satisfaisante puisque l'approche théorique prédit que ces bulles devraient avoir un effet renforçant ($C_a < 1/2$) alors que les résultats expérimentaux montrent qu'elles ont un effet assouplissant.

Comme on obtient un bon accord entre théorie et expérience pour les trois tailles de bulles et les deux tensio-actifs mis en œuvre, il n'est pas possible à ce stade d'identifier un domaine de validité claire du modèle proposé. Compte tenu de la difficulté des expériences et de la fragilité du matériau testé, plusieurs vérifications sont actuellement en cours pour s'assurer que les expériences ont bien été effectuées sur des systèmes dont les caractéristiques sont conformes à celles souhaitées, des phénomènes de fracturation ou coalescence des bulles pouvant se produire lors du mélange mousse-émulsion. Il est également possible que l'interface air-matériau suspendant possède une élasticité non négligeable dans certaines situations.

On constate sur la figure 3 que l'ajout de bulles n'a aucun effet sur la valeur du seuil (au moins pour les valeurs de la fraction volumique inférieures à 50%). Ce résultat expérimental est tout à fait compatible avec les prédictions du modèle théorique si l'on admet que le nombre capillaire tend vers zéro dans le régime plastique. Différents arguments peuvent être invoqués pour justifier ce point.

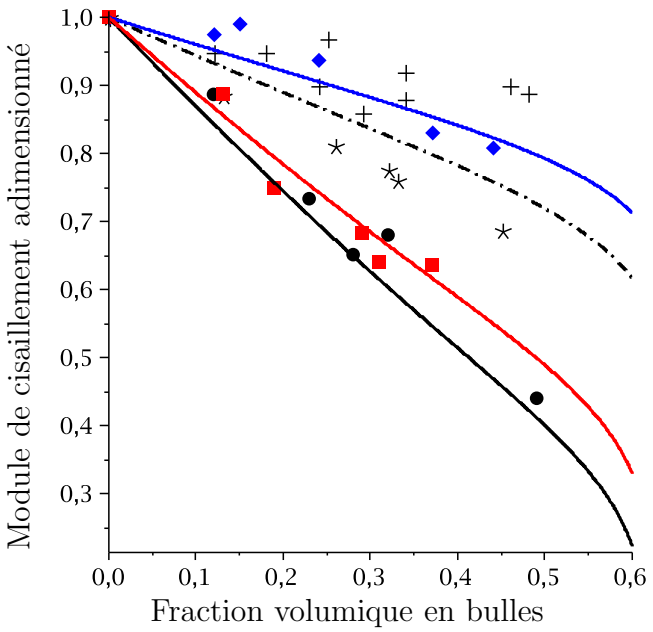


FIGURE 4 – Module de cisaillement adimensionné en fonction de la fraction volumique en bulles. croix : bulles de 100$\mu$m avec SDS - $C_a = 0.4$, courbe bleue : modèle pour $C_a = 0.92$, losanges bleus : bulles de 100$\mu$m avec TTA - $C_a = 0.92$, courbe noire pointillée : modèle pour $C_a = 1.2$, étoiles : bulles de 300$\mu$m avec SDS - $C_a = 1.2$, courbe rouge : modèle pour $C_a = 3.4$, carrés rouges : bulles de 300$\mu$m avec TTA - $C_a = 3.4$, courbe noire : modèle pour $C_a = 6.3$, disques pleins : bulles de 1600$\mu$m avec SDS - $C_a = 6.3$.

Une première possibilité est de comparer la rigidité de la bulle caractérisée par le rapport $\gamma/a$ au module tangent du matériau suspendant dans le régime plastique. Comme ce dernier tend vers zéro quand la déformation augmente, on forme bien ainsi un nombre capillaire qui tend vers zéro en régime d'écoulement. Une autre possibilité est de comparer non plus les rigidités de la bulle et du milieu suspendant mais les contraintes. Dans cette situation, le nombre capillaire à considérer est défini comme le rapport de la contrainte seuil du matériau suspendant sur la pression capillaire régnant dans la bulle. Pour tous les systèmes formulés dans cette étude, ce rapport est très faible (entre 0.1 et 0.01). Si les deux interprétations permettent d'obtenir le résultat souhaité (un nombre capillaire faible en régime d'écoulement), il nous semble néanmoins que la comparaison du module tangent du matériau suspendant avec la pression capillaire de la bulle possède l'avantage d'être cohérente avec la méthode théorique utilisée pour estimer le seuil de la suspension.

## Références

[1] Bornert, M. 2001 Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations. *In Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques (ed. M. Bornert, T. Bretheau et P.Gilormini)*, pp. 133-221, Hermes, Paris.

[2] Chateau, X., Ovarlez, G. et Trung, K.-L. 2008 Homogenization approach to the behavior of suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids. *J. of Rheol*, **52** :2 489-506.

[3] Kogan, M., Ducloué, L., Goyon, J., Chateau, X., Pitois, O. et Ovarlez, G. 2013 Mixture of foam and paste : suspensions of bubbles in yield stress fluids. *Rheol Acta* DOI 10.1007/s00397-013-0677-7

[4] Palierne, J.-F. 1990 Linear Rheology of viscoelastic emulsions with interfacial tension. *Rheol Acta* **29** 204-214.

[5] Suquet, P. 1997 Effective properties of nonlinear composites. *In Continuum Micromechanic (ed P. Suquet)*, pp. 197-264, Springer, New-York.