Analyse numérique des écoulements internes au sein des moteurs à propergol solide. Vers une prise en compte des mécanismes instationnaires couplés

Phu Ho Tran

▶ **To cite this version:**

Phu Ho Tran. Analyse numérique des écoulements internes au sein des moteurs à propergol solide. Vers une prise en compte des mécanismes instationnaires couplés. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique - Poitiers, 2013. Français. NNT : 2013ESMA0030 . tel-00951242

HAL Id: tel-00951242
https://theses.hal.science/tel-00951242

Submitted on 24 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET D'AÉRONAUTIQUE

(Diplôme national – Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : SIMMEA

Secteur de Recherche : ENERGETIQUE, THERMIQUE, COMBUSTION

Présentée par :

Phu Ho TRAN

ANALYSE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS INTERNES AU SEIN DES MOTEURS A PROPERGOL SOLIDE – VERS UNE PRISE EN COMPTE DES MECANISMES INSTATIONNAIRES COUPLES

Directeur de thèse : Frédéric PLOURDE

Soutenue le 16 Décembre 2013

devant la Commission d'Examen

-Jury-

Rapporteurs

Patrick BONTOUX, Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire M2P2, Marseille

Jean Paul CALTAGIRONE, Professeur, TREFLE, Laboratoire I2M, Bordeaux

Examinateurs

Daniel PETIT, Professeur, ENSMA, Institut PPrime

Renato NUNES, Docteur Ingénieur, Expert en Propulsion, Institut Aéro-Espace du Brésil

Dominique COUTON, Maître de Conférences, Université de Poitiers, Institut PPrime

Frédéric PLOURDE, Directeur de Recherche CNRS, ENSMA, Institut PPrime

SOMMAIRE

NOMENCLATURE 5

CHAPITRE 1 11

CHAPITRE 2 17

2.1 INTRODUCTION 19
2.2 EQUATIONS GENERALISEES 19
2.3 MODELISATION DE LA TURBULENCE 21
2.3.1 Modèle LES de la turbulence 21
2.3.2 Modélisation Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) 24
2.4 MAILLAGE OCTREE ET 2^N TREE 29
2.5 LOI DE PAROI 31
2.6 PRESENTATION DU SCHEMA NUMERIQUE 33
2.6.1 Discrétisation spatiale 35
2.6.1.1 Partie convective 35
2.6.1.2 Partie diffusive 40
2.6.1.3 Termes sources 41
2.6.2 Discrétisation temporelle 42
2.7 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES 43
2.7.1 Conditions d'entrée 45
2.7.1.1 Entrée subsonique 45
2.7.1.2 Entrée supersonique 46
2.7.1.3 Condition d'injection pariétale 46
2.7.2 Conditions de sortie 47
2.7.2.1 Sortie subsonique 47
2.7.2.2 Sortie supersonique ou gradient nul 49
2.7.2.3 Sortie libre 49
2.7.3 Autres conditions 49
2.7.3.1 Symétrie 50
2.7.3.2 Paroi 50

CHAPITRE 3 51

3.1 INTRODUCTION 53
3.2 DIFFERENTS TRAITEMENTS AUX FRONTIERES 57
3.2.1 Techniques d'interpolation 57
3.2.2 Méthode et précision d'interpolation 59
3.3 CONDITIONS SPECIFIQUES EN FORMULATION IBM 62
3.3.1 Condition de glissement 63
3.3.1.1 Définition 63
3.3.1.2 Implémentation et validation de la condition de glissement 64
3.3.2 Condition d'injection pariétale 74

3.3.2.1 Spécification de la condition 74
3.3.2.2 Cas test de Taylor 76

CHAPITRE 4 81

4.1 ECOULEMENTS INTERNES ET INSTABILITES 83
4.1.1 Identification du rôle des mécanismes tourbillonnaires 83
4.1.2 Mécanismes et couplage en gaz froid 86
4.1.2.1 Configuration Fin combustion 87
4.1.2.2 Configuration Mi combustion 92
4.1.3 Mécanismes et couplage en gaz chaud 92
4.2 SIMULATION DE MOTEUR INTERNE 99
4.2.1 Prise en compte de la régression du propergol 99
4.2.2 Simulation d'un moteur d'essai : BATES 100
4.3 VERS UNE MODELISATION INSTATIONNAIRE 103
4.3.1 Spécificité et limitation du suivi d'interface 104
4.3.2 Introduction d'une méthode de tracking 110
4.3.2.1 Résolution de la méthode Level Set 113
4.3.2.2 Méthode locale de Level Set et réinitialisation 116
4.3.3 Conséquence de l'introduction de la méthode de Level Set 120
4.3.3.1 BATES 7 2D 120
4.3.3.2 MAVOT 2D 124

CHAPITRE 5 131

5.1 FAISABILITE D'UN TRAITEMENT COUPLAGE FLUIDE / STRUCTURE 133
5.1.1 Modélisation mécanique 134
5.1.2 Couplage entre les approches compressible/ASTER 136
5.2 INFLUENCE D'UNE PROTECTION SOUPLE 139

CHAPITRE 6 149

ANNEXE 153

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 159

REMERCIEMENTS

Lors de la rédaction de mon travail de thèse, la partie la plus difficile pour moi est sans conteste ces quelques mots de remerciement.

Tout d'abord, je souhaite remercier mes deux rapporteurs, M. Patrick BONTOUX et M. Jean-Paul CATAGIRONE qui ont accepté d'évaluer ce travail et d'en être entre les rapporteurs. Merci pour leurs remarques détaillées dans mon manuscrit. Un remerciement particulier à M. BONTOUX, qui grâce à ses conseils nous a permis de présenter avec succès un article au journal international Computer & Fluids.

Ensuite, je ne peux pas oublier M. Daniel PETIT qui a été président de mon jury de thèse. Je suis également très reconnaissant envers M. Renato NUNES, pour sa participation dans ce jury et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux. Et aussi, je remercie M. Dominique COUTON d'avoir participé à mon jury et d'avoir corrigé avec détail mon rapport de thèse.

Lors de ma soutenance, le professeur DOAN Kim Son était présent et c'est un grand honneur pour moi. Il est un professeur et un ''père'' des étudiants vietnamiens en général et mon ''surveillant'' en particulier. Je le remercie de sa préoccupation et ses encouragements dans mes travaux de thèse.

Je remercie aussi mes collègues du département et plus particulièrement de l'équipe COST pour leur gentillesse et leur enthousiasme.

Finalement, et mes dernier mots, je tiens à remercier M. Frédéric PLOURDE qui est directeur de ma thèse. Tu es mon directeur de thèse, mon professeur, mon ''binôme'' et aussi mon ami. Je ne sais pas comment dire pour t'exprimer mon remerciement. Tu m'as beaucoup aidé dans mon travail de thèse. La thèse n'aurait pas finalisée si tu n'avais pas été à mes côtés à me donner tes conseils et élaborer la stratégie. Je suis très heureux d'avoir eu la chance de travailler avec toi et j'espère que l'on va travailler ensuite dans l'avenir.

Nomenclature

A, B, C	matrice Jacobienne suivante x, y et z	
E, F, G	partie convective suivante direction x, y et z	
E_v, F_v, G_v	partie diffusive suivante direction x, y et z	
c	vitesse du son	(m/s)
C_p	chaleur spécifique massique à pression constante	(J/kgK)
C_v	chaleur spécifique massique à volume constant	
C_d	coefficient du modèle Smagorinsky	
C_I, C_S	coefficient du modèle Smagorinsky, $C_S = \sqrt{C_d}$	
C_p	coefficient de la pression	
d_{ref}	distance référence de raffinement	
ds	surface unitaire	
E	énergie totale par unité de masse	(J/kg)
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur	(m/s^2)
g_0	accélération de la pesanteur locale	(m/s^2)
G	fonction de filtrage	
H	terme source	
k	énergie cinétique de turbulence par unité de masse	(m^2/s^2)
l	échelle intégrale	
M	nombre de Mach	
$\vec{n}$	vecteur normal à la surface	
p_t	pression statique moyenne	(Pa)
P	matrice du Jacobien $P = \partial\widetilde{Q} / \partial\widetilde{Q}_v$	
Pr	nombre de Prandtl	
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent	
q	flux de chaleur	(W/m^2)
q_j	tenseur de sous-maille d'énergie	
Q	variables conservatives (c.f. chapitre 2)	
Q_v	variables primitives (c.f. chapitre 2)	
R	constante universelle des gaz parfait	
Re	nombre de Reynolds	
Re_1	nombre de Reynolds locale	
S_{ij}	tenseur de deformation	

Su	température de reference	(K)
t	Temps	(s)
T	Temperature	(K)
TVD	limiteur du schéma TVD (Total Variation Diminishing)	
u_i	composante de vitesse	(m/s)
u,v	composante longitudinale et transversale de vitesse	(m/s)
u_τ	vitesse de frottement	(m/s)
u^+	vitesse adimensionnée $u^+ = U / u_\tau$	
v_r	vitesse de regression	(m/s)
x,y,z	coordonnées cartésiennes	
y	distance normale	(m)
y^+	distance normale adimensionnée $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$	

Lettres grecques

α	coefficient de critère de raffinement	
α	angle d'incidence	(°)
δ	angle d'incidence totale	(°)
δ_0	epaisseur de la couche limite	(m)
ε_r	coefficient de raffinement	
ε_c	coefficient de deraffinement	
η	échelle Komogorov	
κ	conductivité thermique	(W/m.K)
κ	constante de von Karman	
λ_i	vecteur proper	
$\mathcal{L}_i$	amplitudes des ondes caractéristiques	
μ	viscosité dynamique	(kg.m/s)
μ_0	viscosité dynamique de référence	(kg.m/s)
μ_T	viscosité turbulente	(kg.m/s)
ρ	Masse volumique	(kg/m^3)
σ_{ij}	tenseur visqueux	(kg.m/s)

τ	contraintes de cisaillement	
τ_{ij}	tenseur des contraintes de sous-maille	
ν	viscosité cinématique moléculaire	(m^2/s)
ν_t	viscosité cinématique turbulente	(m^2/s)
r_i	vecteur propre	
ϕ	valeur de distance de function	
Δd	distance entre l'onde choc et paroi	
Δt	pas de temps	(s)
Δt_{CFL}	pas de temps déterminé par condition CFL	(s)

Exposant et indice

$\bar{(\,)}$	quantité filtrée
$\tilde{(\,)}$	quantité par le filtre de Favre
$\hat{(\,)}$	quantité par le filtre test
$\vec{(\,)}$	Vecteur
$\dot{(\,)}$	dérivée temporelle ordre 1
$(\,)^D$	valeur à droite
$(\,)^G$	valeur à gauche
$(\,)^{ROE}$	variable au sens de ROE
$\langle \cdot \rangle$	moyenne sur le plan parallèle à la paroi
$(\,)_\infty$	valeur à infini.

Chapitre 1

Introduction

La modélisation numérique prend aujourd'hui une place prépondérante dans les développements actuels et est devenue un outil quotidien de l'ingénieur. Par exemple, dans le domaine de la propulsion spatiale, les premières caractérisations dans les années quatre-vingts des écoulements au sein des moteurs propergols avaient initialement comme objectif de qualifier les écoulements internes. Aujourd'hui, la qualité des modèles, notamment des modèles de turbulence mais surtout avec la formidable augmentation de puissance des machines, permet d'évaluer numériquement les niveaux des oscillations de pression au sein des moteurs segmentés d'Ariane 5 [1]. La connaissance interne de l'écoulement fluide permet donc d'atteindre une analyse des plus prédictives. De plus, les écoulements internes au sein des moteurs fusées sont le siège de multi-physiques complexes (turbulence, combustion et combustion érosive, phase dispersée, …) et des efforts en modélisation sont toujours évidemment nécessaires. Les influences entre l'écoulement et ses frontières peuvent également jouer un rôle déterminant. Le couplage fluide/structure, possible entre les écoulements et les matériaux de protection thermique disposés au sein des moteurs segmentés, influence directement les niveaux des instabilités [2]. De tels couplages restent délicats à caractériser expérimentalement et des approches numériques, notamment par la technique dite Abribrary Lagrangian Eulerian [3], assurent une prise en compte de ces oscillations ; cependant, ces techniques restent cependant limitées à des oscillations de faibles amplitudes.

Au-delà même des problématiques d'interactions fluide/structure, des mécanismes de vibration de la tuyère, d'ablation au col ainsi que les variations drastiques subies par la géométrie interne d'un propulseur à poudre sont autant de sujets qui ne sont pas, à notre connaissance, pris en compte lors des simulations numériques internes. En fait, en se référant à la forte variation de la géométrie lors de la régression du propergol par exemple, les modifications sont telles qu'elles nécessitent de réaliser les calculs en remaillant au cours du temps le domaine lors de l'utilisation d'un solveur classique. L'idée pour nous a alors été de proposer un nouveau solveur dédié à la propulsion solide et permettant de traiter de manière automatique de telles variations de la géométrie tout en assurant une discrétisation aisée et surtout rapide, ne pénalisant pas les temps de calcul à mettre en jeu. Ce solveur, dans l'idéal, doit prendre en compte de très grandes variations géométriques au cours de la simulation tout en ouvrant des communications avec d'autres solveurs, comme par exemple des solveurs dédiés à la mécanique du solide. Récemment, l'utilisation de méthodes aux frontières immergées a permis de mettre en place un solveur compressible dédié aux écoulements externes en couplant ce dernier à un outil de mécanique du vol et capable de traiter les

mécanismes d'ablation de manière assez simple [4]. Même s'il ne s'agit que d'un premier pas, la faisabilité d'une ouverture vers une approche multi-physique a ainsi pu être validée. Les frontières immergées assurent la présence d'une paroi par le jeu de termes sources, ce qui peut alors faciliter les couplages éventuels avec d'autres sources. Comme nous le verrons par la suite, les techniques de frontières immergées peuvent assurer le traitement d'écoulements complexes et surtout de fortes modifications de la géométrie en traitant par exemple le déploiement d'un parachute en cours de vol [5] ou bien encore le lâcher d'un obus sous une aile d'avion [4]. Par contre, alors que la littérature est plutôt riche pour la simulation d'écoulements incompressibles, les traitements avec des solveurs compressibles demeurent plutôt discrets [6,7,8,9].

L'objectif de ce travail est donc, à partir d'un solveur compressible basé sur une discrétisation 2^n tree et d'une formulation classique de frontières immergées, de caractériser les écoulements internes caractéristiques de moteurs à propergol solide. A notre connaissance, une telle approche n'a pas encore été réalisée et ceci malgré l'importance des travaux numériques concédés à l'analyse des instabilités au sein des moteurs à propergol solide [10,11,12]. Avant de directement aborder ce type d'écoulements, il nous est apparu essentiel de tester le solveur proposé sur des écoulements caractéristiques compressibles, la finalité étant double. D'une part, une confiance de l'approche numérique considérée peut s'en dégager mais surtout, certains développements additionnels peuvent être établis. Des conditions aux limites spécifiques à la propulsion ou bien simplement utile pour caractériser de tels écoulements (condition de combustion du propergol, paroi glissement) peuvent s'avérer des plus utiles, dans le but par exemple de valider les résultats numériques avec des approches théoriques. Ces conditions ont alors été développées via des approches aux frontières immergées. Le choix de cette technique étant justifié par une facilité de traitement des grandes variations du domaine de calcul, la simulation de la régression du propergol au cours du calcul est donc un enjeu primordial dans ce travail. Les simulations numériques avec frontières immergées fixes pourront être comparées à des résultats établis de la littérature dans le domaine des instabilités au sein des moteurs à propergol solide et des nombreux résultats de la littérature à disposition. En effet, dans les années 1990, l'Europe sous l'impulsion du CNES a proposé un programme d'envergure afin de qualifier les instabilités d'origine tourbillonnaire et ces mécanismes ont été identifiés comme source de bruit principale. La possibilité d'une véritable résonance entre les champs dynamique et acoustique confère des oscillations mécaniques remarquables à ces moteurs et au-delà même de ces

sources se met en place des couplages multi physiques complexes qu'il est difficile de caractériser avec les outils numériques actuels.

Au-delà des résultats de la caractérisation d'écoulements internes, notre idée est de tester l'aptitude de la modélisation proposée à «s'ouvrir» vers une approche multi-physique en communiquant avec plusieurs autres modèles, par exemple afin de qualifier le rôle d'une protection souple sur les niveaux d'instabilités d'un moteur segmenté et plus globalement, en assurant une prédictibilité des mécanismes physiques toujours plus précise.

Chapitre 2

Modélisation mathématique & Schémas numériques

2.1 Introduction

La simulation numérique des écoulements au sein des moteurs à propergol solide (chambre de combustion et tuyère) requiert l'utilisation d'une formulation compressible des équations de la mécanique des fluides et de traitements dédiés (maillage, conditions aux limites, …). Le principal objectif de ce chapitre 2 est de détailler de manière exhaustive l'ensemble des formulations et schémas numériques développées dans le cadre de ce travail. L'intégration des équations généralisées de la mécanique des fluides a été réalisée par une méthode de volumes finis avec une formulation située au centre des mailles sur un maillage structuré. Une méthode de séparation en temps et en espace est appliquée i.e. la discrétisation s'effectue en deux parties distinctes :

- une intégration temporelle explicite d'ordre de discrétisation un ou deux. La méthode explicite s'effectue soit par une méthode d'Euler (ordre 1) soit par une méthode de Runge-Kutta (ordre 2 ou ordre 3),
- une intégration en espace pour le calcul des flux conductifs et convectifs. Comme nous le verrons par la suite, les flux conductifs sont traités à partir d'une méthode d'approximation centrale de second ordre.

En plus d'une présentation exhaustive du solveur ainsi développé, le mailleur automatique structuré en Octree et 2^n tree est détaillé ainsi que le traitement des conditions aux limites. Afin d'assurer le traitement d'une géométrie complexe (sur un maillage structuré), la technique des frontières immergées est introduite. L'ensemble de ces points numériques a donc été codé et intégré et tout l'enjeu de ce travail de thèse se résume en quelques questions : Que vaut un tel solveur dans le cadre de la propulseur interne ? Est-ce une ouverture vers des traitements multi-physiques couplés ? Avant d'analyser la gestion des frontières mobiles, indispensable dans le suivi de la régression de surface des propergols ou encore l'analyse fluide/structure, présentons les bases du solveur fluide.

2.2 Equations généralisées

La dynamique de l'écoulement compressible visqueux est décrite par les équations de Navier-Stokes, incluant la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au sein du domaine de calcul. Les équations de conservation s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho E + p\right)u_j = \rho g_i u_j - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} u_j\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x_j}\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

avec

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{2.2}$$

$$\rho E = \rho H - p = \rho h - p + \frac{1}{2}\rho u_k u_k \tag{2.3}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, p est la pression thermodynamique, ρu_i la quantité de mouvement suivant la direction x_i et ρE l'énergie totale (cinétique et thermique). De plus, l'hypothèse d'un fluide Newtonien est appliquée et le gaz suit un comportement de type gaz parfait non réactif :

$$p=\rho RT \tag{2.4}$$

La viscosité dynamique est régie par la loi de Sutherland :

$$\mu\left(T\right) = \mu_{ref}\left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2}\frac{T_{ref} + Su}{T + Su} \tag{2.5}$$

avec T_{ref} et Su respectivement la température de référence et la constante de Sutherland. Finalement, κ est la conductivité thermique du fluide. Le nombre de Prandtl Pr est alors défini comme :

$$\mathrm{Pr} = \frac{C_p \mu}{\kappa} \tag{2.6}$$

Le système (2.1) permet de caractériser un écoulement instationnaire à partir d'une simulation directe (DNS), i.e. sans modèle de turbulence dédié. Piomelli [13] a estimé qu'une approche directe offre un coût CPU global équivalent proportionnel à Re^3 ce qui représente un coût difficilement accessible pour traiter les configurations industrielles envisagées. Dans ces conditions, une modélisation de la turbulence a été introduite et nous nous sommes plus

particulièrement intéressés aux modèles de type «Large Eddy Simulation» dénommés par la suite par l'acronyme «LES».

2.3 Modélisation de la turbulence

La prise en compte de la turbulence a été initialement développée par l'intermédiaire de la modélisation LES décrite ci-après.

2.3.1 Modèle LES de la turbulence

La modélisation des grandes échelles de turbulence (LES) a été initialement proposée par Smagorinsky [14]. Cette méthode résout directement les grosses structures représentatives des échelles inertielles caractéristiques de l'écoulement tandis que les plus petites structures sont modélisées. Une séparation entre les grandes et petites échelles est obtenue à partir d'un opérateur de filtrage spatial. Dans notre cas, le filtrage est implicite à partir de la discrétisation spatiale imposée par le maillage. En plus, l'opérateur de filtrage de Favre est appliqué :

$$\widetilde{f} = \overline{\rho\, f} \,/\, \overline{\rho} \tag{2.7}$$

L'ensemble des équations de Navier-Stokes s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u}_j\right) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j\right) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho}\left(\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i\widetilde{u}_j\right)\right]}_{I} \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\sigma}_{ij} - \widetilde{\sigma}_{ij}\right)}_{II} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + \overline{p}\right)\widetilde{u}_j - \frac{\partial \widetilde{u}_i\widetilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\kappa}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}\right) = \\ &\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{(\rho E + p)u_j} - \left(\overline{\rho}\widetilde{E} + \overline{p}\right)\widetilde{u}_j\right]}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i\sigma_{ij}} - \widetilde{u}_i\widetilde{\sigma}_{ij}\right)}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\kappa\frac{\partial T}{\partial x_j}} - \overline{\kappa}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}\right)}_{V}\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\overline{p} = \overline{\rho} R \widetilde{T} \tag{2.11}$$

avec $\widetilde{\sigma}_{ij} = \mu\left(2\widetilde{S}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\widetilde{S}_{kk}\right)$ le tenseur visqueux filtré, μ la viscosité suivant également la loi de Surtherland à la température filtrée $\widetilde{T}$. Le tenseur visqueux de sous-maille s'écrit :

$$\tau_{ij} = \overline{\rho}\left(\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j\right) \tag{2.12}$$

tandis que l'énergie totale filtrée se compose de plusieurs termes :

$$\overline{\rho}\widetilde{E} = \overline{\rho} C_v \widetilde{T} + \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u_i u_i} = \overline{\rho} C_v \widetilde{T} + \frac{1}{2}\overline{\rho}\tilde{u}_i \tilde{u}_i + \overline{\rho} k \tag{2.13}$$

avec $\overline{\rho} k$ désignant l'énergie cinétique de sous-maille dont la définition est :

$$\overline{\rho} k = \frac{1}{2}\tau_{ii} \tag{2.14}$$

Dans les équations ainsi filtrées, des termes supplémentaires apparaissent traduisant les effets de sous-maille et pour fermer le système alors obtenu, des hypothèses simplificatrices sont nécessaires. Tout d'abord, les termes non-linéaires de diffusion dans l'équation de mouvement et dans l'équation d'énergie sont considérés comme négligeables. De plus, à faible nombre de Mach, le terme non-linéaire de dissipation peut être également négligé. Pour des valeurs de nombre de Mach plus élevées, comme dans les applications visées, une modélisation de ce terme a été proposée par Vreman et al. [15]. A partir de l'équation d'enthalpie, de l'expression de l'énergie totale filtrée et de l'équation d'état filtrée, le terme s'écrit :

$$\overline{(\rho E + p)u_j} - \left(\overline{\rho}\widetilde{E} + \overline{p}\right)\tilde{u}_j = \overline{\rho} C_p \left(\widetilde{Tu_j} - \widetilde{T}\tilde{u}_j\right) + \frac{1}{2}\overline{\rho}\left(\widetilde{u_i u_i u_i} - \widetilde{u_i u_i}\tilde{u}_j\right) \tag{2.15}$$

$$q_j = \overline{\rho} C_p \left(\widetilde{Tu_j} - \widetilde{T}\tilde{u}_j\right) \tag{2.16}$$

$$d_j = \frac{1}{2}\overline{\rho}\left(\widetilde{u_i u_i u_i} - \widetilde{u_i u_i}\tilde{u}_j\right) \approx \tilde{u}_i \tau_{ij} \tag{2.17}$$

avec q_j et d_j représentant respectivement les flux d'énergie de sous-maille et les flux de diffusion de turbulence. Finalement, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\right) = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i \tilde{u}_j\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + \overline{p}\right)\tilde{u}_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\kappa}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\kappa}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{2.20}$$

Ces équations sont similaires aux équations de base de Navier-Stokes (2.1). Pour les résoudre, des modèles de fermeture permettent de modéliser les tenseurs de sous-maille des quantités de mouvement et d'énergie. Les différentes évolutions de la modélisation LES

s'accompagnent bien évidemment du développement des modèles de sous-maille et il existe plusieurs «catégories» de modèle. L'initiateur de ces modèles est Smagorinsky [16] dont le modèle est sans aucun doute le plus célèbre et certainement le plus utilisé. Il suppose une dépendance directe entre les tenseurs de sous-maille et les valeurs filtrées. Une multitude de simulations numériques a été menée validant ainsi cette méthode. Cependant, il est nécessaire de fixer des variables, supposées constantes, de proportionnalité entre les différents termes. Ainsi, et notamment sous l'impulsion de Germano [16] ou encore de Meneveau [17] pour n'en citer que deux, des procédures dites «dynamiques» ont été développées. Ces dernières offrent l'avantage d'estimer en espace et en temps ces variables mais peuvent également offrir quelques instabilités numériques.

Comme pour la plupart des modèles LES, les modèles développés dans ce mémoire sont basés sur l'hypothèse de Boussinesq, un comportement analogue au mouvement brownien étant supposé au mouvement des échelles non résolues. Les tenseurs de sous-maille de quantité de mouvement et d'énergie s'écrivent alors :

$$\tau_{ij}^{d} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\mu_T\left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2.21}$$

$$q_j = -C_p\frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_j} \tag{2.22}$$

et sont dénommés modèle de viscosité de sous-maille et modèle de diffusion visqueuse. μ_T et Pr_t correspondent respectivement à la viscosité turbulente et au nombre de Prandtl turbulent. Comme nous l'avons au préalable indiqué, ce modèle [18] est caractérisé par une modélisation de la partie déviatrice du tenseur de sous-maille et à partir d'une analyse dimensionnelle, la viscosité turbulente peut être déduite comme :

$$k_T = C_I\overline{\Delta}^2\left|\tilde{S}\right|^2 \tag{2.23}$$

$$\mu_T = C_S\overline{\rho}\overline{\Delta}^2\left|\tilde{S}\right| \tag{2.24}$$

avec C_I=0.09, C_S=0.0256, Pr_T=0.7 [18] et le tenseur de déformation $\tilde{S}$ est défini comme :

$$\left|\tilde{S}\right| = \left(2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

avec $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$

2.3.2 Modélisation Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

Bien que la modélisation LES assure une bonne description des mécanismes instationnaires turbulents et malgré des puissances des calculateurs toujours plus performantes, une caractérisation des écoulements turbulents par LES demeure toujours coûteuse d'un point de vue temps CPU ; d'une part la résolution spatiale doit être suffisamment fine pour s'assurer de capter les structures et d'autre part, une caractérisation stationnaire requiert une procédure de moyenne (nécessitant une analyse sur un temps caractéristique suffisamment long). Pour pouvoir caractériser les écoulements turbulents de manière plus «rapide», une approche RANS a été également introduite.

Le principe de la méthode RANS est d'appliquer un filtre temporel aux équations bilan (2.1) et de modéliser alors les termes non-linéaires provenant des termes fluctuants croisés, les termes du tenseur de Reynolds. Concernant le filtrage temporel, considérons la composante de vitesse instantanée u décomposée en une valeur moyenne $\bar{u}$ et une valeur fluctuante u' telle que :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ \overline{u'^2} &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

En appliquant ce filtre temporel, la notion de filtrage appliquée au niveau de la méthode RANS est donc bien différente de celle appliquée dans l'approche LES. Des équations caractéristiques de l'activité turbulente au sens RANS, comme par exemple l'énergie cinétique de turbulence et le terme de la dissipation de l'énergie de turbulence, sont alors établies et au prix d'hypothèses de fermeture, l'ensemble du système peut être résolu. La littérature est très riche sur les différentes modélisations de la turbulence et les modèles à zéro, à une équation ou à deux équations sont nombreux. L'un des modèles de turbulence RANS les plus connus est sans aucun doute le modèle $k-\varepsilon$ proposé initialement par Launder et Spalding [19]. Marvin et Coakley [20] souligne que ce type de modèle présente un certain nombre de limitations et favorise l'apparition d'instabilités numériques. Le modèle $q-\omega$ de Wilcox [21] a donc été préféré et intégré dans le code. Le lecteur intéressé par les détails des modèles pourra se référer aux références [20,21]. Cependant, une description sommaire du modèle RANS est proposée et les principales étapes de l'obtention des équations de la turbulence sont rapidement décrites.

$$\overline{\rho\varphi} = \bar{\rho}\tilde{\varphi} \tag{2.27}$$

A partir des équations de conservation (2.1) et de la décomposition de Reynolds, le système s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\right) = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ji} - \overline{\rho u_j^{"} u_i^{"}}\right] \tag{2.29}$$

avec

$$\tilde{\sigma}_{ji} = \mu_L\left(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\tilde{u}_{k,k}\right) \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho}\left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}\right) + \frac{\overline{\rho u_i^{"} u_i^{"}}}{2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho}\tilde{u}_j\left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}\right) + \tilde{u}_j\frac{\overline{\rho u_i^{"} u_i^{"}}}{2}\right] = \\ &\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-q_{L_j} - \overline{\rho u_j^{"} h^{"}} + \overline{\sigma_{ji} u_i^{"}} - \overline{\rho u_j^{"}\frac{1}{2}u_i^{"} u_i^{"}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tilde{u}_i\left(\tilde{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u_i^{"} u_j^{"}}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$P = \overline{\rho} R\tilde{T} \tag{2.32}$$

(~) désignant la procédure de moyenne de Favre et on introduit l'énergie cinétique de turbulence comme :

$$k = \frac{1}{2\overline{\rho}}\overline{\rho u_i^{"} u_i^{"}} \tag{2.33}$$

ainsi que le flux d'enthalpie de turbulence par :

$$q_{T_j} = \overline{\rho u_j^{"} h^{"}} \tag{2.34}$$

A ce stade, des modélisations pour fermer le système d'équations sont nécessaires.

a) Fermeture du modèle ou modélisation RANS

La décomposition de Reynolds introduit implicitement des nouvelles variables et la résolution des équations bilan passe par une modélisation de ces termes issus de la non-linéarité convective. A partir de l'hypothèse de Boussinesq, une similitude entre mouvement fluide et viscosité est appliquée introduisant alors la notion de viscosité et de nombre de Prandtl turbulent définie comme :

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i^{"} u_j^{"}} = \mu_T\left(\tilde{u}_{ii,j} + \tilde{u}_{ij,i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{u}_{ik}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\overline{\rho} k\delta_{ij} \tag{2.35}$$

$$q_{T_j} = \overline{\rho u_j^{"} h^{"}} = -\frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_T} h_j \text{ et } \mathrm{Pr}_T = \frac{C_P\mu_T}{k_T} \tag{2.36}$$

avec κ_T correspondant à une équivalence de conductivité turbulence. Une approximation basée sur l'analogie classique de Reynolds [22] avec «l'approximation de diffusion par gradient» est employée :

$$\overline{\sigma_{ji}u_i^{"}} - \overline{\rho u_j^{"}\frac{1}{2}u_i^{"}u_i^{"}} = \left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{2.37}$$

Finalement, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\right) = 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right) = -\frac{\partial p_t}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-q_{L_j} - q_{T_j} + \left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial\tilde{u}_i\overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} \tag{2.40}$$

b) Caractérisation de l'énergie cinétique de turbulence

A partir des équations précédentes, la détermination de l'énergie cinétique de turbulence *k* est nécessaire. Pour obtenir l'équation de *k*, un arrangement des équations de quantité de mouvement est réalisé. Chaque équation bilan de quantité de mouvement est en fait multipliée par sa composante $u_i^{"}$ et une procédure de moyenne est appliquée à la somme des trois équations de quantité de mouvement.

$$\overline{\rho u_i^{"}\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho u_i^{"}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\overline{u_i^{"}\frac{\partial P}{\partial x_i}} + \overline{u_i^{"}\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j}} \tag{2.41}$$

ou

$$\overline{\rho u_i^{"}u_{i,t}} + \overline{\rho u_i^{"}u_j u_{i,j}} = -\overline{u_i^{"}\frac{\partial P}{\partial x_i}} + \overline{u_i^{"}\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j}} \tag{2.42}$$

En détaillant quelque peu les étapes du calcul, on peut écrire :

$$\overline{\rho u_i^{"}u_{i,t}} = \overline{\rho u_i^{"}\left(\tilde{u}_i + u_i^{"}\right)_t} = \overline{\rho u_i^{"}}\tilde{u}_{i,t} + \overline{\rho u_i^{"}u_{i,t}^{"}} = \overline{\rho\left(\frac{1}{2}u_i^{"}u_i^{"}\right)_t} = \frac{\partial\overline{\rho}k}{\partial t} - \overline{\frac{1}{2}u_i^{"}u_i^{"}\frac{\partial\rho}{\partial t}} \tag{2.43}$$

avec $\overline{\rho u_i^{"}} = 0$

$$\rho u_i'' u_j u_{i,j} = -\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i k + \overline{\rho u_j''\frac{1}{2}u_i'' u_i''}\right) - \overline{\frac{1}{2}u_i'' u_i''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)} \quad (2.44)$$

$$\overline{u_i''\frac{\partial P}{\partial x_i}} = \overline{u_i''}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho' u_i''}\right) - \overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} \quad (2.45)$$

$$\overline{u_i''\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{t_{ji}u_i''}\right) - \overline{t_{ji}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \quad (2.46)$$

Grâce à l'équation de conservation de masse $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\right) = 0$, on obtient :

$$\overline{\frac{1}{2}u_i'' u_i''\frac{\partial p}{\partial t}} + \overline{\frac{1}{2}u_i'' u_i''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)} = 0 \quad (2.47)$$

A partir de (2.42), (2.43), (2.44), (2.45), (2.46) et (2.47), on obtient finalement l'équation pour *k* :

$$\frac{\partial \overline{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}_i k}{\partial x_j} = \tau_{ij}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{t_{ji}u_i''} - \overline{\rho u_j''\frac{1}{2}u_i'' u_i''} - \overline{\rho' u_j''}\right] - \overline{u_i''}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} \quad (2.48)$$

En appliquant les hypothèses simplificatrices suivantes :

Terme de diffusion de pression $\frac{\partial \overline{\rho' u_j''}}{\partial x_j} = 0$

Terme de travail de la pression $\overline{u_i''}\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$

Terme de dilatation de pression $\overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} = 0$

On obtient alors l'équation de *k* :

$$\frac{\partial \overline{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}_i k}{\partial x_j} = \tau_{ij}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\sigma_{ji}u_i''} - \overline{\rho u_j''\frac{1}{2}u_i'' u_i''}\right] \quad (2.49)$$

c) Modèle à deux équations

Comme nous l'avons signalé auparavant, les modèles de type RANS sont basés sur l'hypothèse de Boussinesq et sont classifiés dans la catégorie dite du premier ordre de

fermeture ; il s'agit de la catégorie de modélisation la plus simple pour fermer les termes du tenseur de Reynolds et comme nous l'avons également évoqué, des modèles à zéro, une ou deux équations sont disponibles. Un modèle à zéro équation peut s'avérer convenable pour des écoulements turbulents non décollés mais demeure limité. Un modèle à une équation assure un lien entre l'énergie de turbulence *k* et une échelle de longueur de turbulence. Une telle approche assure une analyse assez précise de l'écoulement turbulent en présence d'un gradient de pression adverse [20] voire encore dans la capture de la transition laminaire à turbulent [20]. Cependant, la limitation d'un modèle de turbulence à une équation provient essentiellement du fait que l'existence d'une multitude d'échelles n'est pas prise en compte et ceci explique alors le succès des modèles à deux équations de fermeture. En effet, la majeure partie des simulations d'écoulements turbulents par l'intermédiaire d'un modèle RANS utilise ce type de modèle. La littérature demeure donc très riche sur ces modèles et il existe une grande variété de modèles à deux équations de fermeture. Coakley [20] propose une formulation commune :

$$\frac{\partial \bar{\rho} s_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} s_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = h_i \bar{\rho} \omega s_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_i}\right)\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right] \quad (i = 1,2) \tag{2.50}$$

avec $h_i = C_{i1}\left(C_\mu f \frac{S}{\omega^2} - \frac{2}{3}\frac{D}{\omega}\right) - C_{i2}$ (2.51)

s_i correspondant soit à *k*, *q* ou ω en fonction du modèle retenu. *S* et *D* sont les tenseurs définis comme suivant :

$$\begin{aligned} S &= \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)u_{i,j} - \frac{2}{3}u_{k,k}^2 \\ D &= u_{k,k} \end{aligned} \tag{2.52}$$

- **Modèle** $k-\omega$

Ce premier modèle RANS à deux équations a été proposé par Kolmogorov [23]. La première équation permet de calculer l'énergie cinétique de turbulence alors que la seconde permet d'évaluer la fréquence caractéristique de la dissipation ω. Plusieurs versions améliorées du modèle initial de Kolmogorov ont été proposées incluant celles de Jones et Launder [24,25], Launder et Sharma [26], Launder et Spalding [27]. Dans sa version, Wilcox [28] propose les coefficients suivants :

$C_\mu = 1,\ f = 1, C_{11} = 1, C_{12} = 0.09, C_{21} = 5/9, C_{22} = 3/40, \mathrm{Pr}_1 = 2, \mathrm{Pr}_2 = 2$

• **Modèle** $k - \varepsilon$

La dissipation de la turbulence ε est construite à partir de l'équation :

$$\overline{\rho}\varepsilon = \overline{t_{ji} \frac{\partial u_i^{"}}{\partial x_j}} \tag{2.53}$$

mais pour des raisons de simplification numérique, les chercheurs ont proposé une formulation pour ε identique à celle pour k. De manière explicite, Launder et Spalding [27] présente un modèle $k - \varepsilon$ avec les coefficients suivants :

$C_\mu = 0.09, C_{11} = C_{12} = f = \mathrm{Pr}_1 = 1, C_{21} = 1.45, C_{22} = 1.92, \mathrm{Pr}_2 = 1.3$

• **Modèle** $q - \omega$

De manière similaire, Coakley a bâti une modèle avec deux équations de $q - \omega$ et les coefficients :

$C_\mu = 0.09, f = 1, C_{11} = C_{12} = 1/2, C_{21} = 0.45, C_{22} = 0.92, \mathrm{Pr}_1 = 1, \mathrm{Pr}_2 = 1.3$

Le cadre du développement de notre outil, le modèle $q - \omega$ a été retenu et introduit dans le modèle en cours de développement.

2.4 Maillage Octree et 2^n tree

L'objectif de cet outil réside dans la possibilité de réaliser des maillages automatiques et d'offrir des possibilités de raffinements et déraffinement. Pour cela, le choix d'une discrétisation spatiale cartésienne a été effectué. Dans notre étude, le maillage cartésien est donc utilisé en association avec une structure d'arborescence hiérarchisée. En effet, cette association est facile à implanter et offre une méthode plus dynamique que les autres structures lors du changement de maillage pour suivre le mouvement de l'objet ou capter les différentes contraintes par exemple. Dans un premier temps, la structure «Octree» a été proposée. Un octree est une structure de données de type arbre le plus souvent utilisé pour partitionner une espace tridimensionnel en le subdivisant récursivement en huit octants. Chaque octant correspond à un nœud de l'octree et peut être divisé en huit sous octants dénommés *Bottom-South-West* (BSW), *Bottom-South-Est* (BSE), *Bottom-North-West*

(BNW), *Bottom-North-Est* (BNE), *Top-South-West* (TSW), *Top-South-Est* (TSE), *Top-North-West* (TNW), *Top-North-Est* (TNE) (Fig. 2-1).

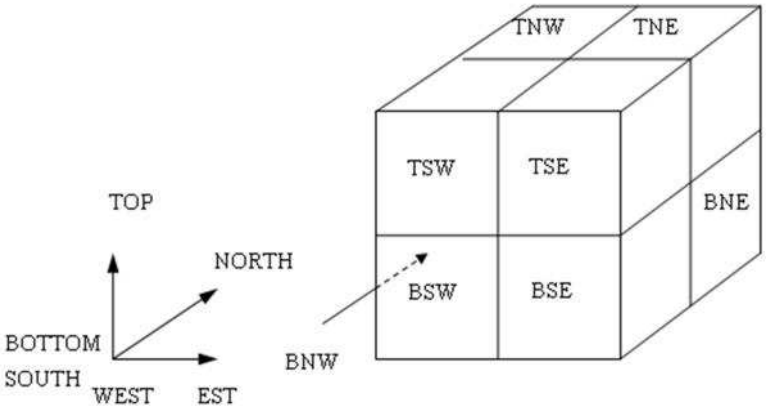


Fig. 2-1 : Adresses locales des différents sous-octants possibles

Un inconvénient évident de cette méthode adaptive est son incapacité à soutenir un raffinement directionnel local, ce type de maillage ne pouvant effectivement pas offrir une quelconque non-isotropie de maillage. Pour éviter ce défaut, Wang et al. [29] ont amélioré la technique octree en proposant la génération de maillages non-isotropes dénommés 2^n tree. La structure en 2^n tree assure un développement binaire, quatree et octree et permet ainsi un maillage adaptif cartésien pour un raffinement du maillage non-isotrope (Fig. 2-2).

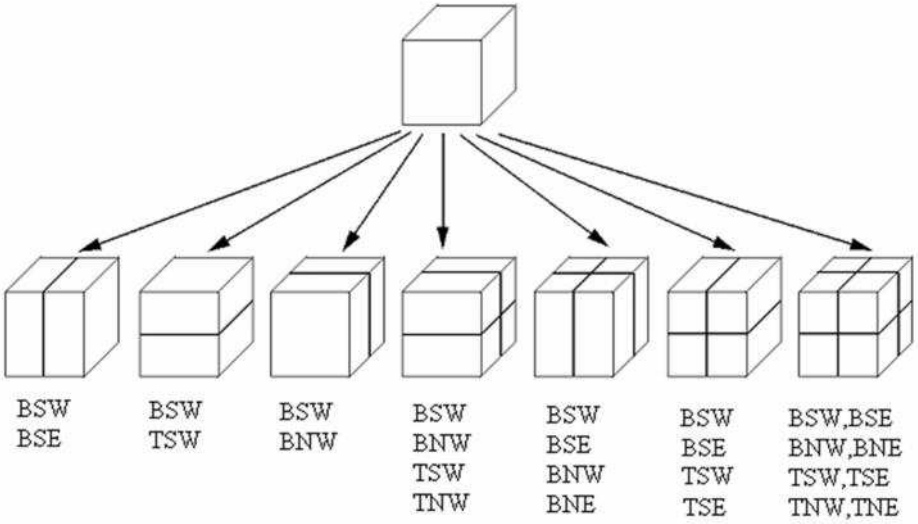


Fig. 2-2 : Identification des adresses locales pour l'ensemble des sous-octants en formation 2^n tree.

L'avantage d'introduire un maillage automatique Octree ou 2^n tree réside principalement dans l'adaptabilité de la discrétisation du maillage en fonction du développement de l'écoulement. Il est alors relativement aisé de proposer des critères de raffinement ou de développement automatique. Actuellement, deux types de critères ont été introduits :

- **détection automatique des ondes de choc**

  Un choc introduit en fait une très forte discontinuité et un critère de raffinement ou de déraffinement local a été proposé en suivant les travaux de Sun et al. [30]. En fonction de la valeur de ϕ_i, une modification du maillage est appliquée :

  $$\phi_i > \varepsilon_r \rightarrow \text{raffinement} \tag{2.54}$$

  $$\phi_i < \varepsilon_c \rightarrow \text{déraffinement} \tag{2.55}$$

  avec i la direction spatiale et ϕ_i le rapport de la dérivée spatiale de la densité estimée au 2nd ordre avec celle estimée au 1er ordre. On a donc en fonction des différentes directions les valeurs suivantes :

  $$\phi_X = \frac{\left|\overline{\rho}_{VW} + \overline{\rho}_{VE} - 2\overline{\rho}\right|}{\alpha\overline{\rho} + \left|\overline{\rho}_{VE} - \overline{\rho}_{VW}\right|}, \phi_Y = \frac{\left|\overline{\rho}_{VN} + \overline{\rho}_{VS} - 2\overline{\rho}\right|}{\alpha\overline{\rho} + \left|\overline{\rho}_{VN} - \overline{\rho}_{VS}\right|}, \phi_Z = \frac{\left|\overline{\rho}_{VT} + \overline{\rho}_{VB} - 2\overline{\rho}\right|}{\alpha\overline{\rho} + \left|\overline{\rho}_{VT} - \overline{\rho}_{VB}\right|} \tag{2.56}$$

  avec ε_r et ε_c des valeurs seuils égales à 0.05 et 0.03 respectivement. Le dénominateur de l'évaluation de ϕ_i possède le terme $\alpha\overline{\rho}$ avec $\alpha = 0.4$ servant à empêcher le dénominateur d'être nul.

- **détection de la présence à la paroi**

  Un raffinement local à la paroi est également possible et en se basant sur une valeur y^+ seuil, le raffinement au cours du calcul sera automatique pour assurer que l'ensemble des points au voisinage de la paroi soit représenté avec une résolution spatiale adéquate.

2.5 Loi de paroi

Bien qu'une procédure de raffinement au voisinage de la paroi soit possible de manière automatique, l'introduction d'une loi de paroi peut permettre d'utiliser des mailles

plus grandes en proche paroi et donc de réduire les coûts CPU. En effet, d'après Piomelli [31], le coût de la résolution de la sous-couche visqueuse et de la couche externe est proportionnel à $Re^{1.8}$ et $Re^{0.6}$ respectivement, i.e le coût global de la prise en compte de la couche limite à l'échelle intégrale est de $Re^{2.4}$. Dans de telles conditions, la résolution de la couche limite de paroi en LES est souvent limitée à des nombres de Reynolds modérés [32]. Dans notre étude, le modèle d'équilibre utilisé est similaire à celui utilisé par Kalitzin et al. [33] et la loi de paroi est vue au sens moyenné. En effet, ce choix se justifie par une facilité de sa prise en compte. La contrainte de cisaillement τ_ω dans les cellules adjacentes à la paroi est obtenue à partir d'un processus itératif de Newton :

$$\tau_\omega = \rho u_\tau^2$$
$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) = f\left(y^+\right) = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \le 11.13 \\ \frac{1}{\kappa}\log y^+ + 5.0 & \text{si } y^+ > 11.13 \end{cases} \quad (2.57)$$

avec u_τ la vitesse de frottement et au premier point du maillage, le nombre de Reynolds local est calculé par :

$$\mathrm{Re}_1 \equiv y_1 U_1 / \nu = y_1^+ U^+\left(y_1^+\right) = F\left(y^+\right) \quad (2.58)$$

$$\mathrm{Re}_1 = \begin{cases} y_1^{+2} & \text{pour } y^+ \le 11.13 \\ y_1^+\left[\frac{1}{\kappa}\log y_1^+ + 5.0\right] & \text{pour } y^+ > 11.13 \end{cases} \quad (2.59)$$

En inversant cette fonction, on obtient :

$$y^+ = y_1 u_T / \nu = F^{-1}\left(\mathrm{Re}_1\right) = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{Re}_1} \\ F^{-1}\left[y^+\left(\frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B\right)\right] \end{cases} \quad (2.60)$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, nous utilisons la méthode itérative de Newton :

$$y_1^+ = y_0^+ - \frac{f\left(y_0^+\right)}{f'\left(y_0^+\right)} \quad (2.61)$$

Par conséquent, u_τ peut être estimée et les contraintes pariétales sont alors résolues.

2.6 Présentation du schéma numérique

Sachant que le choix d'un modèle de turbulence plutôt qu'un autre n'impacte pas significativement le schéma numérique développé, nous présentons par la suite la modélisation numérique en se basant sur une modélisation RANS de la turbulence avec le modèle $q-\omega$ de Coakley [20]. Sous sa forme vectorielle, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t}}_{\text{TAUX ACCROISSEMENT TEMPOREL}} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{G}}{\partial z}}_{\text{PARTIE CONVECTIVE}} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{G}_v}{\partial z}}_{\text{PARTIE DIFFUSIVE}} + \underbrace{S}_{\text{TERME SOURCE}} = 0 \qquad (2.62)$$

avec $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ les flux convectifs et $\tilde{E}_v, \tilde{F}_v, \tilde{G}_v$ les flux visqueux et S le terme source. Les vecteurs des variables conservatives et des variables primaires s'écrivent :

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\tilde{u} \\ \overline{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho}\tilde{w} \\ \overline{\rho}\tilde{E} \\ \overline{\rho}q \\ \overline{\rho}\omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_v = \begin{pmatrix} p_t \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{T} \\ q \\ \omega \end{pmatrix}^T$$

et les vecteurs convectifs s'écrivent :

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\tilde{u} \\ \overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t \\ \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w} \\ \left(\overline{\rho}\tilde{E} + p_t\right)\tilde{u} \\ \tilde{u}\overline{\rho}q \\ \tilde{u}\overline{\rho}\omega \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \overline{\rho}\tilde{v}^2 + p_t \\ \overline{\rho}\tilde{v}\tilde{w} \\ \left(\overline{\rho}\tilde{E} + p_t\right)\tilde{v} \\ \tilde{v}\overline{\rho}q \\ \tilde{v}\overline{\rho}\omega \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\tilde{w} \\ \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w} \\ \overline{\rho}\tilde{v}\tilde{w} \\ \overline{\rho}\tilde{w}^2 + p_t \\ \left(\overline{\rho}\tilde{E} + p_t\right)\tilde{w} \\ \tilde{w}\overline{\rho}q \\ \tilde{w}\overline{\rho}\omega \end{pmatrix}$$

et les vecteurs diffusifs :

$$\widetilde{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ \Theta_x \\ \left(\mu_l + \sigma^* \mu_t\right)\dfrac{\partial q}{\partial x} \\ \left(\mu_l + \sigma \mu_t\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \end{pmatrix}, \widetilde{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ \Theta_y \\ \left(\mu_l + \sigma^* \mu_t\right)\dfrac{\partial q}{\partial y} \\ \left(\mu_l + \sigma \mu_t\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial y} \end{pmatrix}, \widetilde{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \Theta_z \\ \left(\mu_l + \sigma^* \mu_t\right)\dfrac{\partial q}{\partial z} \\ \left(\mu_l + \sigma \mu_t\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix}$$

et le vecteur correspondant aux termes sources :

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_1 - C_{12}\bar{\rho}\omega q \\ \tau_2 - C_{22}\bar{\rho}\omega^2 \end{bmatrix}$$

Le tenseur de Reynolds est défini comme :

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k$$

$$\tau_{yy} = \frac{4}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k$$

$$\tau_{zz} = \frac{4}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\mu_l + \mu_T\right)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\bar{\rho}k$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \left(\mu_l + \mu_T\right)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \left(\mu_l + \mu_T\right)\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \left(\mu_l + \mu_T\right)\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)$$

Alors que les vecteurs Θ_x , Θ_y et Θ_z s'écrivent ;

$$\Theta_x = \tilde{u}\tau_{xx} + \tilde{v}\tau_{xy} + \tilde{w}\tau_{xz} + C_p\left(\frac{\mu_l}{\mathrm{Pr}_l} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \frac{2}{3}\tilde{u}\bar{\rho}k$$

$$\Theta_y = \tilde{u}\tau_{xy} + \tilde{v}\tau_{yy} + \tilde{w}\tau_{yz} + C_p\left(\frac{\mu_l}{\mathrm{Pr}_l} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} - \frac{2}{3}\tilde{v}\bar{\rho}k$$

$$\Theta_z = \tilde{u}\tau_{zx} + \tilde{v}\tau_{zy} + \tilde{w}\tau_{zz} + C_p\left(\frac{\mu_l}{\mathrm{Pr}_l} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} - \frac{2}{3}\tilde{w}\bar{\rho}k$$

Concernant le schéma numérique développé, la partie convective induisant des comportements non linéaires est évidemment sensible et donc sera traitée avec beaucoup d'attention pour éviter d'éventuelles instabilités numériques.

2.6.1 Discrétisation spatiale

Cette discrétisation est présentée en trois parties relatives aux traitements des termes convectifs, diffusifs et des termes sources.

2.6.1.1 Partie convective

Le traitement de la partie convective est décrit ci-après et pour des raisons de simplification de présentation, nous nous intéressons à l'équation en formulation Euler (i.e. sans termes visqueux) comme l'équation suivante :

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial z}=0 \tag{2.63}$$

Si on considère une approximation linéaire, cette équation se réécrit alors :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \widetilde{Q}}\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{Q}}\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \widetilde{Q}}\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t}+A\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x}+B\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}+C\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial z}=0\end{aligned} \tag{2.64}$$

Avec les matrices *A*, *B* et *C* les matrices Jacobiennes. Par exemple, la matrice *A* s'écrit comme :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\tilde{u}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & 2\tilde{u}+\frac{\partial p_t}{\partial \rho u} & \frac{\partial p_t}{\partial \rho v} & \frac{\partial p_t}{\partial \rho w} & \frac{\partial p_t}{\partial \rho E} & \frac{\partial p_t}{\partial \rho q} & \frac{\partial p_t}{\partial \rho \omega}\\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & u & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\tilde{u}\tilde{w} & \tilde{w} & 0 & \tilde{u} & 0 & 0 & 0\\ -\tilde{u}\widetilde{H}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & \widetilde{H}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho u} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho v} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho w} & \tilde{u}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho E} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho q} & 0\\ -q\tilde{u} & q & 0 & 0 & 0 & \tilde{u} & 0\\ -\omega\tilde{u} & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{u}\end{bmatrix}$$

Son obtention ainsi que celles des matrices *B* et *C* est détaillée dans l'annexe 1. En déterminant les valeurs propres de la matrice Jacobienne *A*, les 7 valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2,3,4,5}=\tilde{u},\ \lambda_6=\tilde{u}+\tilde{c},\ \lambda_7=\tilde{u}-\tilde{c}$$

A chaque valeur propre correspond un vecteur propre associé donné :

$$r^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}\\ \tilde{v}\\ \tilde{w}\\ \frac{1}{2}q_t^2\\ q\\ \omega\end{bmatrix},\ r^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\bar{\rho}\\ 0\\ -\bar{\rho}\tilde{v}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ r^{(3)}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \bar{\rho}\\ \bar{\rho}\tilde{w}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ r^{(4)}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ r^{(5)}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ r^{(6)}=\begin{bmatrix}\frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\left(\tilde{u}+\tilde{c}\right)\\ \frac{\bar{\rho}\tilde{v}}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}w}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\left(\widetilde{H}+\tilde{u}\tilde{c}\right)\\ \frac{\bar{\rho}q}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}\omega}{2\tilde{c}}\end{bmatrix},\ r^{(7)}=\begin{bmatrix}\frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\left(\tilde{u}-\tilde{c}\right)\\ \frac{\bar{\rho}\tilde{v}}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}w}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}}{2\tilde{c}}\left(\widetilde{H}-\tilde{u}\tilde{c}\right)\\ \frac{\bar{\rho}q}{2\tilde{c}}\\ \frac{\bar{\rho}\omega}{2\tilde{c}}\end{bmatrix}$$

avec q_t l'énergie cinétique de turbulence telle que :

$$\frac{1}{2}q_t^2=\frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2+\tilde{w}^2\right)-\frac{q^2}{\gamma-1}\left(\frac{5}{3}-\gamma\right)$$

Dans les applications visées, la présence de fortes discontinuités au sein du fluide est attendue et de telles variations brusques doivent être prises en compte numériquement. Ces discontinuités sont traitées en suivant l'approche de Riemann [34]. Pour résoudre le problème de Riemann, plusieurs types de schémas approchés existent [34] mais nous nous limiterons exclusivement aux schémas impliquant des différences de flux dont le plus célèbre est sans doute le schéma de Roe [34]. L'approximation de Riemann développé par ROE est basée sur la décomposition de la différence des flux tout en assurant la conservation des propriétés. L'approche de ROE est une extension de la décomposition linéaire aux équations non linéaires. La conservation des propriétés de la décomposition d'une onde impose qu'elle s'écrive toujours sous la forme d'une différence d'un flux et une idée simple est donc de définir une matrice Jacobienne *A* au point milieu (*i+1/2*) telle que :

$$f_{i+1}-f_i=A\left(\frac{U_i+U_{i+1}}{2}\right)\left(U_{i+1}-U_i\right)\equiv A_{i+1/2}\left(U_{i+1}-U_i\right) \qquad (2.65)$$

Cependant, si les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice sont estimés comme une simple décomposition, l'égalité ne sera pas respectée. Les propriétés de la matrice A doivent donc suivre :

- que pour les valeurs U_i et U_{i+1}, l'égalité (2.66) doit être respectée :

$$f_{i+1} - f_i = \overline{\overline{A}}(U_i, U_{i+1})(U_{i+1} - U_i) \tag{2.66}$$

- que pour $U_i = U_{i+1} = U$, alors $\overline{\overline{A}}(U,U) = A(U) \equiv \frac{\partial f}{\partial U}$,
- que la matrice $\overline{\overline{A}}$ possède des valeurs propres réelles avec des vecteurs propres linéaires.

Les trois propriétés de cette matrice doivent donc être respectées. Les variables de ROE à l'interface se déduisent d'une simple moyenne arithmétique entre l'état à droite U_D et l'état à gauche U_G à partir d'un vecteur Z défini comme :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \sqrt{\overline{\rho}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

avec $\tilde{H}$ l'enthalpie totale et $\tilde{H} = \tilde{E} + \overline{p} / \overline{\rho}$. Ces vecteurs $\tilde{E}$ et $\tilde{Q}$ s'écrivent en fonction de Z comme suivant [35] :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 \\ w_1 w_4 \\ w_1 w_5 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} w_1 w_5 + \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 \right) + \frac{3\gamma - 5}{3\gamma} k w_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} w_2 w_1 \\ w_2^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} w_1 w_5 - \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 \right) - \frac{3\gamma - 5}{3\gamma} k w_1^2 \\ w_2 w_3 \\ w_2 w_4 \\ w_2 w_5 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Roe a défini les valeurs de Z comme :

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_1 &= \frac{\sqrt{\overline{\rho}^{G}_{i+1/2}} + \sqrt{\overline{\rho}^{D}_{i+1/2}}}{2} \\
\overline{Z}_2 &= \frac{\sqrt{\overline{\rho}^{G}_{i+1/2}}\,\tilde{u}^{G}_{i+1/2} + \sqrt{\overline{\rho}^{D}_{i+1/2}}\,\tilde{u}^{D}_{i+1/2}}{2} \\
\overline{Z}_3 &= \frac{\sqrt{\overline{\rho}^{G}_{i+1/2}}\,\tilde{v}^{G}_{i+1/2} + \sqrt{\overline{\rho}^{D}_{i+1/2}}\,\tilde{v}^{D}_{i+1/2}}{2} \\
\overline{Z}_4 &= \frac{\sqrt{\overline{\rho}^{G}_{i+1/2}}\,\tilde{w}^{G}_{i+1/2} + \sqrt{\overline{\rho}^{D}_{i+1/2}}\,\tilde{w}^{D}_{i+1/2}}{2} \\
\overline{Z}_5 &= \frac{\sqrt{\overline{\rho}^{G}_{i+1/2}}\,\tilde{H}^{G}_{i+1/2} + \sqrt{\overline{\rho}^{D}_{i+1/2}}\,\tilde{H}^{D}_{i+1/2}}{2}
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Donc, on peut déduire les variables au sens de ROE :

$$
\overline{\rho}^{ROE}_{i+1/2} = \overline{Z}_1^{\,2},\ \tilde{u}^{ROE}_{i+1/2} = \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1},\ \tilde{v}^{ROE}_{i+1/2} = \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1},\ \tilde{w}^{ROE}_{i+1/2} = \frac{\overline{Z}_4}{\overline{Z}_1},\ \tilde{H}^{ROE}_{i+1/2} = \frac{\overline{Z}_5}{\overline{Z}_1} \tag{2.70}
$$

L'estimation des flux au sens de Roe [34] peut s'écrire suivant :

$$
\tilde{E}^{*}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\tilde{E}^{D}_{i+1/2} + \tilde{E}^{G}_{i+1/2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{7}\left|\overline{\overline{\lambda}}_{(j)}\right|\partial w_j\, \overline{\overline{r}}^{(j)} \tag{2.71}
$$

avec $\overline{\overline{\lambda}}_j$: valeurs propres calculées d'après la valeur de ROE,

$\overline{\overline{r}}^{(j)}$: vecteur propre correspondant à $\overline{\overline{\lambda}}_j$,

∂w_j : dérivation des variables caractéristiques.

L'approche de ROE assure l'estimation des flux malgré le fait que deux points soient séparés par une onde de choc mais en présence d'une onde de détente, l'approche de ROE peut engendrer des valeurs non-physiques [34]. Pour pallier à un tel défaut, Harten [36] a présenté une modification des valeurs propres :

$$
\left|\lambda\right|_{\text{mod}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^{2}_{ROE}}{\varepsilon} + \varepsilon\right) \quad \text{si} \quad \left|\lambda_{ROE}\right| < \varepsilon \tag{2.72}
$$

$$
\text{avec}\ \varepsilon = \max\left[0, \left(\lambda_{ROE} - \lambda_i\right), \left(\lambda_{i+1} - \lambda_{ROE}\right)\right].
$$

λ_i et λ_{i+1} étant les valeurs propres à gauche et droite de la face (*i+1/2*). Pour finaliser cette partie, exprimons la transformation des variables caractéristiques aux variables primaires :

$$
\partial w = L^{-1}\partial V \tag{2.73}
$$

avec : w : les variables caractéristiques où $\partial w = \left[\partial w_1 \quad \partial w_2 \quad \partial w_3 \quad \partial w_4 \quad \partial w_5 \quad \partial w_6 \quad \partial w_7\right]^T$

V : les variables primaires où $\partial V = \left[\partial \bar{\rho} \quad \partial \tilde{u} \quad \partial \tilde{v} \quad \partial \tilde{w} \quad \partial p_t \quad \partial q \quad \partial \omega\right]^T$

La Matrice L^{-1} est donnée alors par :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tilde{c}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}\tilde{c}} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}\tilde{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

La méthode de discrétisation au sens de ROE n'offre une précision qu'à l'ordre 1 et pour assurer une précision au second ordre en espace, la méthode MUSCL couplée à un limiteur de pente est appliquée :

$$\tilde{Q}^D_{v(i+1/2)} = \tilde{Q}_{v(i+1)} - TVD_{i+1} \left.\frac{\partial \tilde{Q}_v}{\partial x}\right|_{i+1} \frac{\Delta X_{i+1}}{2}$$

et $$\tilde{Q}^G_{v(i+1/2)} = \tilde{Q}_{v(i)} + TVD_i \left.\frac{\partial \tilde{Q}_v}{\partial x}\right|_{i} \frac{\Delta X_i}{2}$$

avec

$$\left.\frac{\partial \tilde{Q}_v}{\partial x}\right|_{i+1} = \frac{\tilde{Q}_{v(i+2)} - \tilde{Q}_{v(i)}}{\Delta X_{i+1/2} + \Delta X_{i+3/2}} + O\left(\Delta x^2\right)$$

et $$\left.\frac{\partial \tilde{Q}_v}{\partial x}\right|_{i} = \frac{\tilde{Q}_{v(i+1)} - \tilde{Q}_{v(i-1)}}{\Delta X_{i-1/2} + \Delta X_{i+1/2}} + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$TVD_{i+1} = f\left(\tilde{Q}_{v(i)}, \tilde{Q}_{v(i+1)}, \tilde{Q}_{v(i+2)}\right) \text{et } TVD_i = f\left(\tilde{Q}_{v(i-1)}, \tilde{Q}_{v(i)}, \tilde{Q}_{v(i+1)}\right) \tag{2.75}$$

Il existe une multitude de fonctions TVD disponibles et la fonction la plus usuelle, i.e. la fonction min-mod, a été introduite avec un schéma up-wind ordre 2 :

$$\text{minmod}(a,b) = \begin{cases} a \text{ si } |a| \le |b| \text{ et } ab \ge 0 \\ \text{b si } |a| \ge |b| \text{ et } ab \ge 0 \\ 0 \text{ si } \qquad\qquad ab \le 0 \end{cases} \tag{2.76}$$

La discrétisation spatiale de la partie convective suivant la direction longitudinale *x* avec le vecteur associé $\widetilde{E}$ est appliquée de manière similaire aux autres directions.

2.6.1.2 Partie diffusive

La discrétisation de la partie diffusive est détaillée en s'appuyant sur celle correspondante à la direction *x*, le vecteur $\widetilde{E}_v$ étant égal :

$$\widetilde{E}_v = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} & \Theta_x & \left(\mu_l + \sigma^* \mu_t\right)\dfrac{\partial q}{\partial x} & \left(\mu_l + \sigma \mu_t\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

Les deux autres vecteurs $\widetilde{F}_v$ et $\widetilde{G}_v$ correspondant aux deux autres directions sont obtenus de manière analogue et ne seront pas détaillés par la suite. Ces flux contiennent les gradients des termes diffusifs et une discrétisation centrée est appliquée. L'estimation des flux s'effectuant à la frontière (faces *i+1/2* et *i-1/2* définies Fig. 2-3), on obtient directement les valeurs aux faces.

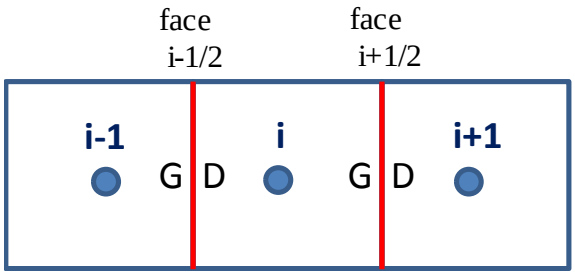


Fig. 2-3 : Schéma des nœuds et faces mis en jeu

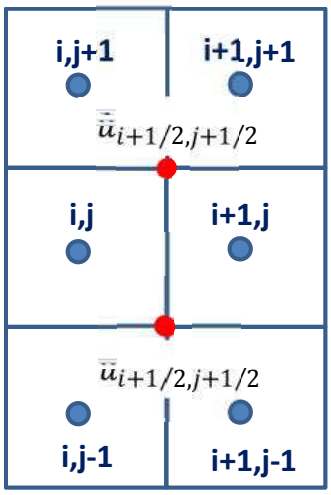


Fig. 2-4 : Exemple de discrétisation pour le calcul des flux de type $\dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$ en 2D

Les valeurs nécessaires à la face *i+1/2* se déduisent par une interpolation linéaire comme :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{i+1/2} &= \tilde{u}_F = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}\right) \\
\tilde{v}_{i+1/2} &= \tilde{v}_F = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}_i + \tilde{v}_{i+1}\right) \\
\tilde{w}_{i+1/2} &= \tilde{w}_F = \frac{1}{2}\left(\tilde{w}_i + \tilde{w}_{i+1}\right) \\
\mu_{i+1/2} &= \mu_F = \frac{1}{2}\left[\left(\mu_L + \mu_T\right)_i + \left(\mu_L + \mu_T\right)_{i+1}\right] \\
k_{i+1/2} &= k_F = \frac{1}{2}\left[k_i + k_{i+1}\right]
\end{aligned} \tag{2.77}$$

avec k la conductivité totale qui s'écrit : $k = C_P\left(\frac{\mu_L}{\mathrm{Pr}_L} + \frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_T}\right)$. Pour le calcul des gradients, en fonction de l'écriture, on écrit les gradients à la face *(i+1/2)*, par exemple le gradient de la composante u_i suivant la direction i s'écrit :

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}_{i,j}}{\partial x}\right|_{i+1/2} = \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j}}{\Delta x}$$

alors que les gradients de la composante u_i suivant les autres directions (suivant j Fig. 2-4) sont obtenue par :

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}_{i,j}}{\partial y}\right|_{F} = \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2} - \tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y}$$

pour estimer les composantes de vitesse, les interpolations suivantes seront retenues :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{4}\left(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} + \tilde{u}_{i+1,j+1}\right) \\
\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2} &= \frac{1}{4}\left(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}\right)
\end{aligned}$$

L'extension pour le traitement d'un cas 3D est directe.

2.6.1.3 Termes sources

Les termes sources S proviennent des équations de la turbulence et pour éviter des traitements complexes, ces derniers sont intégrés en une seule et unique étape temporelle, en début d'itération. Le principe est de considérer l'intégration des termes à un système différentiel ordinaire, intégré analytiquement pour conférer une grande robustesse au schéma numérique employé. Pour cela, en considérant la variation temporelle des équations uniquement liées aux termes sources, les équations de q et ω sont résolues de manière

analytique. Une fois les nouvelles valeurs considérées et obtenues sans prendre en compte les termes de convection-diffusion, les équations sont résolues en prenant en compte les nouvelles valeurs des différents paramètres.

2.6.2 Discrétisation temporelle

L'intégration temporelle des équations de conservation s'effectue explicitement soit à partir d'un schéma d'Euler ordre 1 ou bien d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 3. En appliquant la méthode des «volumes finis», les équations de Navier-Stokes compressibles s'écrivent, en intégrant les parties convective et diffusive ainsi que le terme source dans le second membre (RHS), sous la forme vectorielle suivante :

$$\Omega_j \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial t} = -RHS(\widetilde{Q}_j)$$

avec Ω_j correspondant au volume de la cellule j. $\widetilde{Q}$ est le vecteur des variables primaires :

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\widetilde{u} \\ \overline{\rho}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{E} \\ \overline{\rho}q \\ \overline{\rho}\omega \end{pmatrix}$$

Le schéma temporel d'Euler est bien évidemment direct mais l'ordre peu élevé peut introduire des instabilités d'ordre numérique notamment à faible vitesse. Ainsi, et bien que les schémas de Runge Kutta soient également explicites, leur construction en plusieurs étapes leur confère une facilité de mise en œuvre et une plus grande stabilité. Afin de stabiliser l'évolution temporelle au mieux, l'introduction de schémas temporels de type TVD a été considérée. Contrairement à l'approche TVD d'un schéma spatial utilisant des fonctions de limitation des gradients, le schéma TVD temporel est simplement assuré par l'introduction de coefficients optimaux [37] dans les différentes étapes du schéma. Dans ce mémoire, les schémas Runge-Kutta 2 TVD et Runge-Kutta 3 TVD ont été programmés :

- ***Runge Kutta 2 avec TVD***

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{n+1/2} &= \widetilde{Q}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta\Omega} RHS(\widetilde{Q}^{n}) \\ \widetilde{Q}^{n+1} &= \frac{1}{2}\widetilde{Q}^{n} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\Omega} RHS(\widetilde{Q}^{n+1/2})\end{aligned} \tag{2.78}$$

et ce schéma peut s'écrire de manière équivalente à :

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{n^*} &= \widetilde{Q}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta\Omega} RHS(\widetilde{Q}^{n}) \\ \widetilde{Q}^{n^{**}} &= \widetilde{Q}^{n^*} - \frac{\Delta t}{\Delta\Omega} RHS(\widetilde{Q}^{n^*}) \\ \widetilde{Q}^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\widetilde{Q}^{n} + \widetilde{Q}^{n^{**}}\right)\end{aligned} \tag{2.79}$$

- ***Runge Kutta 3 avec TVD***

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_i^{n^*} &= \widetilde{Q}_i^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta\Omega_i} RHS(\widetilde{Q}_i^{n}) \\ \widetilde{Q}_i^{n^{**}} &= \frac{3}{4}\widetilde{Q}_i^{n} + \frac{1}{4}\widetilde{Q}_i^{n^*} - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta\Omega_i} RHS(\widetilde{Q}_i^{n^*}) \\ \widetilde{Q}_i^{n+1} &= \frac{1}{3}\widetilde{Q}_i^{n} + \frac{2}{3}\widetilde{Q}_i^{n^{**}} - \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{\Delta\Omega_i} RHS(\widetilde{Q}_i^{n^{**}})\end{aligned} \tag{2.80}$$

Le pas de temps pour chaque itération correspond au pas de temps minimal estimé dans l'intégralité du domaine de calcul et déterminé à partir de la condition de *CFL* appliquée à chaque élément *i* suivant :

$$\Delta t = CFL / \max\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{|u_i + c|}{\Delta x_i} + 2\frac{\mu + \mu_t}{\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\Delta x_i^2}\right] \tag{2.81}$$

avec, comme consigne, une condition de *CFL* inférieure ou égale à l'unité.

2.7 Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont traitées à l'ordre de discrétisation spatiale du schéma numérique, i.e. à l'ordre deux à l'aide de deux points fictifs [38] et les traitements associés dépendent du signe des valeurs propres de la matrice Jacobienne [34]. Hirsh [34] souligne en effet que le nombre de conditions physique et numérique dépend de l'information transportée. Par exemple, en considérant une équation d'Euler monodimensionnelle, trois courbes caractéristiques de l'évolution des paramètres sont possibles correspondant aux trois valeurs propres *u*, *u+c* et *u-c* liées aux courbes C_0, C_+ et C_- (Cf. Fig. 2-5) respectivement. Le

nombre de conditions physiques à la frontière correspond au nombre de paramètres entrant dans le domaine de calcul. Une condition subsonique (Fig. 2-5) à $x = 0$ engendre deux valeurs positives C_0 et C_+ offrant alors deux conditions physiques à l'entrée. Une condition d'entrée supersonique offre trois conditions physiques. Une condition de sortie à $x = 1$ offre trois conditions numériques en sortie supersonique et deux conditions en sortie subsonique.

Le traitement des conditions correspond soit à une condition isentropique soit un invariant dit de Riemann. L'identification du nombre de variables physiques et numériques est déterminante pour le traitement des conditions aux limites. Les conditions physiques sont en effet basées sur l'état physique des variables considérées tandis que les conditions numériques reposent sur une extrapolation de l'intérieur du domaine de calcul vers les nœuds fictifs. Par la suite, l'ensemble des traitements associés aux différentes conditions aux limites est détaillé de manière exhaustive.

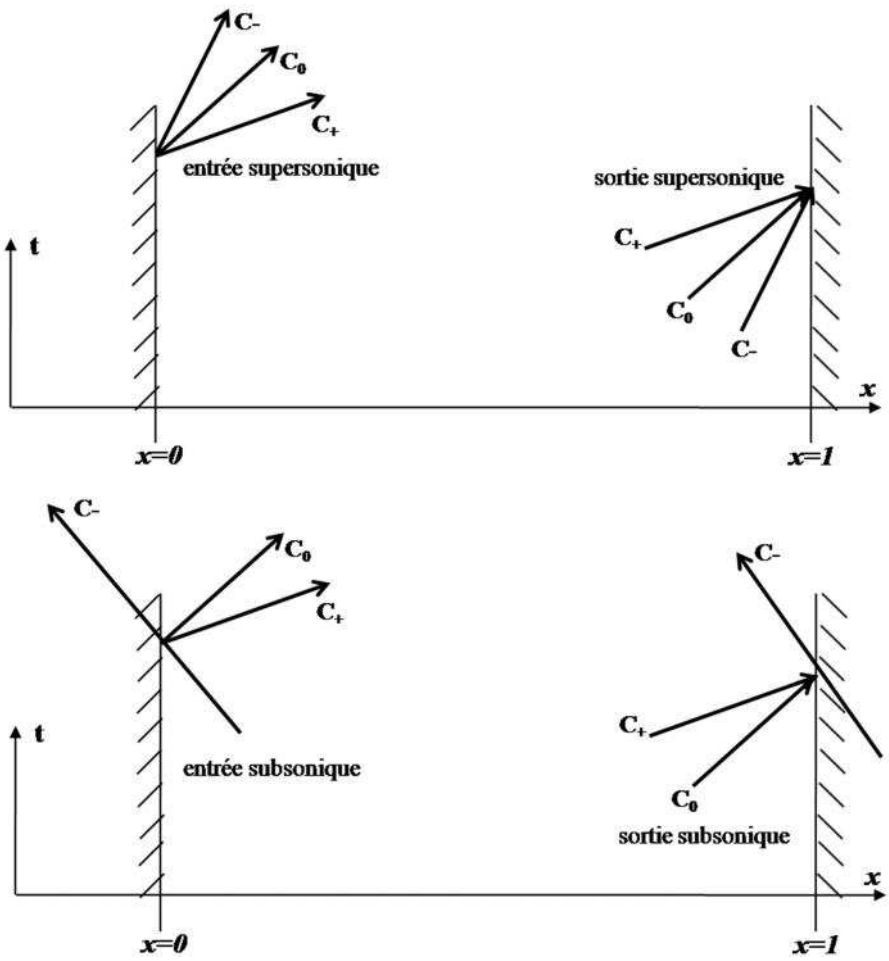


Fig. 2-5 : Détail des conditions aux limites d'entrée et de sortie subsonique et supersonique

2.7.1 Conditions d'entrée

Ces conditions sont composées par deux types de condition : entrée subsonique et entrée supersonique

2.7.1.1 Entrée subsonique

Comme nous l'indiquions précédemment, le traitement des conditions aux limites repose sur la détermination des variables au niveau des deux nœuds fictifs (Fig. 2-6).

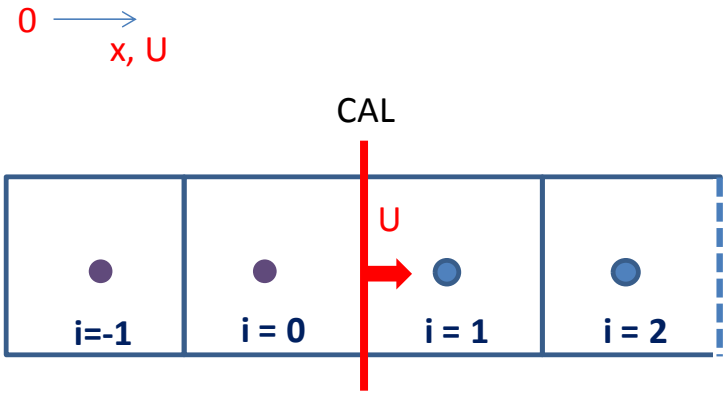


Fig. 2-6 : Exemple de condition d'entrée subsonique face *OUEST* (i=1/2)

En condition d'entrée subsonique, 4 valeurs propres sont négatives contre une unique valeur positive et donc 4 conditions physiques et une condition numérique sont à considérer. On suppose que les valeurs de la pression et de la température à l'infinie sont connues (i.e. la pression totale P_∞ et la température totale T_∞) et deux relations physiques correspondant à la condition d'isentropie sont appliquées :

$$\begin{cases} \dfrac{T_\infty}{T_f} = 1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_f^2 \quad ou \quad T_\infty = \dfrac{c_f^2}{\gamma R} + \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma R} u_f^2 \\ \dfrac{p_\infty}{p_f} = \left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_f^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases} \tag{2.82}$$

et deux autres conditions physiques à la face sont considérées :

$$v_f = v_1$$

$$w_f = w_1$$

La condition numérique est, quant à elle, obtenue par une relation d'invariant de Riemann :

$$I_f = I_i \tag{2.83}$$

$$u_f - \frac{2c_f}{\gamma - 1} = I_i$$

avec I_1 connu. «*f*» correspond aux valeurs aux faces (i.e. *i=1/2* dans l'exemple). Les équations (2.82) et (2.83) permettent d'estimer les valeurs de u_f et c_f à la frontière. Une fois ces valeurs estimées, la température T_f et la pression p_f sont accessibles. L'estimation des valeurs à la face permet de calculer les valeurs aux nœuds fictifs par extrapolation :

$$\begin{cases} p_0 = 2p_f - p_1 \\ u_0 = 2u_f - u_1 \\ v_0 = v_1 \\ w_0 = w_1 \\ T_0 = 2T_f - T_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_{-1} = 3p_f - 2p_1 \\ u_{-1} = 3u_f - 2u_1 \\ v_{-1} = v_1 \\ w_{-1} = w_1 \\ T_{-1} = 3T_f - 2T_1 \end{cases} \tag{2.84}$$

2.7.1.2 Entrée supersonique

La condition d'entrée supersonique équivaut à ce que l'ensemble des valeurs propres soient positives et donc 5 conditions numériques sont à considérer. En prenant l'exemple de la direction *x*, les variables des nœuds fictifs sont imposées par les conditions à l'infinie :

$$\begin{cases} p_{-1} = p_0 = p_\infty \\ u_{-1} = u_0 = u_\infty \\ v_{-1} = v_0 = v_\infty \\ w_{-1} = w_0 = w_\infty \\ T_{-1} = T_0 = T_\infty \end{cases}$$

2.7.1.3 Condition d'injection pariétale

La condition d'injection pariétale s'assimile à une condition d'entrée subsonique et donc 4 valeurs propres négatives et 1 valeur propre positive sont à traiter. Le débit normal à la paroi est supposé connu et les conditions sont donc alors :

- débit imposé $\dot{m}$ =constant
- énergie totale constante H_0= constant
- deux composantes de vitesse suivant les directions perpendiculaires de la face d'injection nulle i.e. $v = w = 0$

Seule la seule condition numérique correspondant à un gradient de pression nul est appliquée

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Tout d'abord, on a :

$$H_0 = C_p T_F + \frac{1}{2} u_{inj} u_{inj} = C_p T_F + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{\rho_F}\right)^2 \tag{2.85}$$

ou encore :

$$T_F = \frac{p_i}{R\rho_F} \tag{2.86}$$

avec i désignant l'état intérieur dans le domaine de calcul. En remplaçant T_F dans H_0, une équation d'ordre 2 avec une unique racine possible pour ρ_F permet d'en estimer la masse volumique à la frontière :

$$\rho_F = \frac{-C_p p_i - \sqrt{\left(C_p p_i\right)^2 + 2\,RH_0 \times R\dot{m}^2}}{-2RH_0} \tag{2.87}$$

D'où, on obtient alors :

$$u_{inj} = \frac{\dot{m}}{\rho_F} \text{ ou } u_F = \frac{\dot{m}}{\rho_F} \tag{2.88}$$

Les équations (2.87) et (2.88) permettent de déterminer u_f et ρ_f et puis ensuite, on calcule T_f et p_f. Quand les valeurs à la face sont bien identifiées, les valeurs aux nœuds fictifs sont calculées facilement par extrapolation comme ceci est décrit précédemment (2.84).

2.7.2 Conditions de sortie

Ces conditions sont composées par trois types de condition : sortie subsonique, sortie supersonique et sortie libre.

2.7.2.1 Sortie subsonique

Dans cette condition, on considère la frontière entre les nœuds *imax* et *imax+1*, deux nœuds fictifs étant *imax+1* et *imax+2* (Fig. 2-7).

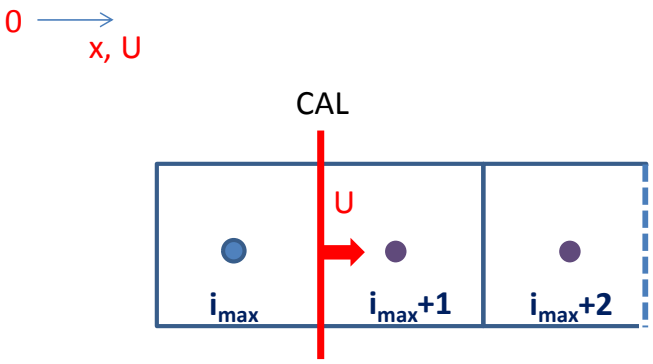


Fig. 2-7 : Sortie subsonique

La pression à l'infinie p_∞ est considérée comme la condition physique et il reste à déterminer les conditions numériques. Toujours pour simplifier, considérons la direction x comme perpendiculaire à la condition à traiter (Fig. 2-7). On a :

- Condition physique appliquée : $p_{i_{max}+1} = p_\infty$ (2.89)
- Conditions numériques appliquées : conditions d'extrapolation pour les deux composantes de vitesse v et w

$$\begin{aligned} v_{i\max+1} &= 2\times v_{i\max} - v_{i\max-1} \\ w_{i\max+1} &= 2\times w_{i\max} - w_{i\max-1} \end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned} I_{i\max+1} &= 2\times I_{i\max} - I_{i\max-1} \\ S_{i\max+1} &= 2\times S_{i\max} - S_{i\max-1} \end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\text{avec } I_{i\max+1} = u_{i\max+1} + 2\times\frac{c_{i\max+1}}{\gamma-1} \text{ et } c_{i\max+1} = \sqrt{\gamma R T_{i\max+1}} \tag{2.92}$$

Quand S_{imax+1} est estimée, en utilisant la relation isentropique, on obtient la valeur de densité au nœud fictif :

$$\rho_{i\max+1} = \left(\frac{p_\infty}{S_{i\max+1}}\right)^{1/\gamma} \tag{2.93}$$

A partir de l'équation d'état des gaz parfait, la température s'estime :

$$T_{i\max+1} = \frac{p_\infty}{\rho_{i\max+1} R} \tag{2.94}$$

L'équation (2.92) permet de caractériser u_{imax+1} quand l'invariant et la vitesse du son sont calculés :

$$u_{i\max+1} = I_{i\max+1} - 2\times\frac{c_{i\max+1}}{\gamma-1} \tag{2.95}$$

Les valeurs au niveau du premier nœud fictif assurent la détermination au niveau du second nœud fictif (i.e. nœud *imax+2*) par extrapolation (i.e. nœud *imax+1*):

$$\begin{aligned} p_{i\max+2} &= p_\infty \\ v_{i\max+2} &= 3\times v_{i\max} - 2\times v_{i\max-1} \\ w_{i\max+2} &= 3\times w_{i\max} - 2\times w_{i\max-1} \\ I_{i\max+2} &= 3\times I_{i\max} - 2\times I_{i\max-1} \\ S_{i\max+2} &= 3\times S_{i\max} - 2\times S_{i\max-1} \end{aligned} \tag{2.96}$$

A partir des invariants et en se référant à la procédure détaillée auparavant, on obtient les valeurs pour le deuxième nœud fictif.

2.7.2.2 Sortie supersonique ou gradient nul

Dans cette condition, considérons par exemple la frontière entre les nœuds *imax* et *imax+1*, comme précédemment (Fig. 2-7). En considérant une sortie supersonique, les 5 valeurs propres sont positives, i.e. 5 conditions numériques sont à considérer. Tous les gradients sont supposés nuls et cela revient alors à :

$$\begin{aligned} p_{i\max+1} &= p_{i\max+2} = p_{i\max} \\ u_{i\max+1} &= u_{i\max+2} = u_{i\max} \\ v_{i\max+1} &= v_{i\max+2} = v_{i\max} \\ w_{i\max+1} &= w_{i\max+2} = w_{i\max} \\ T_{i\max+1} &= T_{i\max+2} = T_{i\max} \end{aligned} \tag{2.97}$$

2.7.2.3 Sortie libre

Cette condition est une combinaison entre sortie subsonique et sortie supersonique. Donc, en fonction de l'état au niveau de la frontière si le nombre de Mach local à la face est inférieur à 1, la condition sortie subsonique est appliquée et, dans le cas contraire, la condition de sortie supersonique est utilisée.

2.7.3 Autres conditions

Ces conditions sont composées par deux types de condition : paroi et symétrie.

2.7.3.1 Symétrie

La prise en compte de la symétrie (par exemple localisée à *i=1/2* dans la Fig. 2-8 revient à considérer tous les gradients nuls exceptés la composante normale à la paroi qui est nulle.

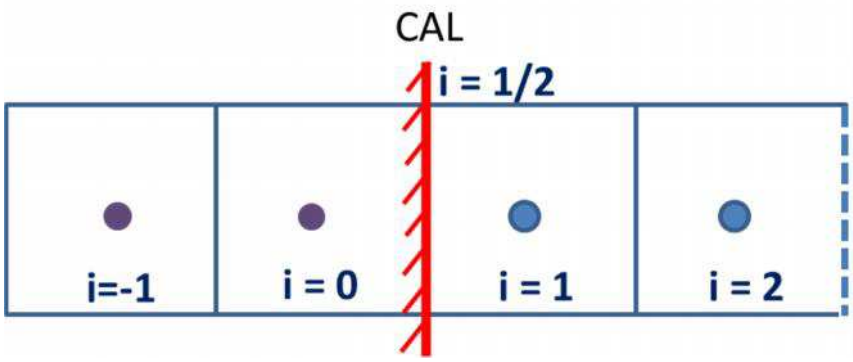


Fig. 2-8 : Symétrie

On applique donc :

$$\begin{array}{ll} p_0 = p_1 & p_{-1} = p_2 \\ u_0 = -u_1 & u_{-1} = -u_2 \\ v_0 = v_1 \quad \text{et} & v_{-1} = v_2 \\ w_0 = w_1 & w_{-1} = w_2 \\ T_0 = T_1 & T_{-1} = T_2 \end{array} \tag{2.98}$$

2.7.3.2 Paroi

Une paroi avec glissement est traitée exactement comme une condition de symétrie. Par contre, la paroi sans glissement, souvent utilisée pour les écoulements visqueux, est traitée de manière classique avec la vitesse sur paroi égale à zéro (i.e. paroi sans mouvement). On a alors les relations suivantes aux nœuds fictifs :

$$\begin{array}{ll} p_0 = p_1 & p_{-1} = p_2 \\ u_0 = -u_1 & u_{-1} = -u_2 \\ v_0 = -v_1 \quad \text{et} & v_{-1} = -v_2 \\ w_0 = -w_1 & w_{-1} = -w_2 \\ T_0 = T_1 & T_{-1} = T_2 \end{array} \tag{2.99}$$

Chapitre 3

Frontières Immergées appliquées aux écoulements compressibles : Potentialités & limitations

3.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné lors de l'introduction, les méthodes aux frontières immergées, dénommées par la suite par l'acronyme IBM, ont connu un essor remarqué par rapport aux méthodes numériques plus classiques. Simuler le battement d'un cœur humain, par exemple, constitue un challenge de la modélisation en mécanique des fluides, le cœur offrant des variations volumiques d'un facteur de 1 à 3. Sans l'utilisation des méthodes aux frontières immergées, il est probable que Peskin [39] n'aurait pas réussi à décrire de tels battements. De nombreuses applications dans le domaine biomédical ont, par la suite, été réalisées comme par exemple l'étude acoustique de la voix humaine [40]. Grâce à la prise en compte de surfaces complexes, la technique des frontières immergées est également utilisée dans l'étude des turbines à gaz [41], la compréhension des techniques de déplacement des poissons [42] ou encore dans l'analyse du vol d'insectes [43]. En outre, cette technique offre l'avantage de facilement étudier des couplages multi-physiques. Kim et al. [5] ont étudié l'interaction fluide/structure au cours de l'ouverture d'un parachute et de ses interactions avec l'environnement immédiatement autour. La voilure du parachute est évidemment soumise à de très fortes variations alors que les forces aérodynamiques exercées dépendent de la forme de la voilure du parachute. En fait, comme nous le voyons dans ces quelques applications, les méthodes IBM offrent la possibilité de traiter des problèmes complexes avec des systèmes dont la géométrie peut fortement varier au cours du calcul. Il s'agit d'un avantage vis-à-vis des modélisations classiques de type «body-fitted» nécessitant de transformer ou de régénérer un maillage au cours du temps. Les méthodes aux frontières immergées offrent néanmoins des inconvénients [44] qu'il convient de citer :

- une nécessité accrue de contrôler la précision et d'assurer une conservation des quantités mises en jeu,
- l'introduction de mailles inutiles dans la partie solide lorsque l'on s'intéresse à la partie fluide uniquement,
- un traitement des conditions non universel. En effet, une rapide revue bibliographique souligne le nombre important de types de traitement sans qu'aucune hiérarchie n'ait été, à ce jour, véritablement établie.

Depuis les années 70 et les travaux pionniers de Peskin [39], la communauté scientifique a effectivement été très active dans le développement des méthodes IBM et deux familles différentes ont émergé: les techniques dites de «forcing» et celles dites de «cut-cell». Cette dernière a été récemment introduite par Clarke [45] et a principalement été développée

pour pallier les lacunes des familles de type Forcing. A partir d'une discrétisation en volumes finis, un bilan est réalisé au niveau de la cellule immergée pour assurer la conservation des variables extensives. Bien qu'une telle idée soit des plus séduisantes scientifiquement, elle n'est pas sans conséquence sur la méthode elle-même. En effet, dans le cas d'un objet pointu, des instabilités numériques peuvent être induites par le traitement sur les cellules ainsi découpées. Le pas de temps de l'ensemble du schéma peut s'en trouver alors d'autant limité. De plus, l'intégration de cette méthode dans un maillage non-uniforme introduit une multitude de traitements spéciaux compliquant d'autant le codage. Ces défauts rendent cette technique plus rigide et les avantages de la méthode aux frontières immergées peuvent s'en trouver alors fortement altérés. Ceci explique sans doute pourquoi la majeure partie des études se référant aux méthodes aux frontières immergées emploie la technique de «forcing». Deux tendances existent également au sein de cette technique : forçage discret ou continu. Dans ce dernier cas, un terme source est ajouté dans les équations avant toute discrétisation Peskin [39], Goldstein et al. [46] ou encore Saiki et Biringen [47] ont utilisé, pour n'en citer que quelques uns, avec succès ce type d'approche.

Un forçage discret est également appliqué et peut-être soit explicite soit implicite dans les équations. En l'introduisant de manière implicite, une indépendance vis-à-vis de la discrétisation spatiale est obtenue mais cela induit alors une certaine diffusivité dans le traitement de la condition aux limites. En fait, la condition aux limites n'est pas imposée de manière précise spatialement mais demeure plutôt localisée dans une région autour de la frontière. Cette diffusivité milite plutôt pour l'introduction d'un forcing discret explicite. Le traitement est, contrairement à la méthode implicite, très localisé mais dépendant de la résolution spatiale. A partir d'une telle technique, la prise en compte de la géométrie offrant de fortes angularités est accessible et malgré la présence possible d'instabilités numériques notamment liées au fait que l'aspect conservatif ne soit pas automatiquement assuré, cette technique est largement utilisée dans la littérature [6,42,48] par sa simplicité d'implémentation et sa très grande flexibilité.

L'introduction des méthodes aux frontières immergées constitue une opportunité de multi-couplages physiques et malgré les défauts de l'approche discrète explicite [44], notre volonté de traiter des mécanismes de multi-couplage (couplage fluide-structure, régression de surface par combustion, ablation…) requiert un traitement robuste et rapide. La méthode de forçage discret explicite sera donc la méthode retenue.

La communauté scientifique est particulièrement active dans le développement des méthodes de forcing discret et une multitude de traitements plus ou moins différents existe

sans que, à notre connaissance, un véritable inventaire n'ait été effectué. Dans le cadre du forcing point, la technique de reconstruction à appliquer doit être la plus flexible possible [49,50] tout en assurant un ordre de précision donné. Plusieurs variantes existent, à commencer par la très populaire méthode de reconstruction par cellules fictives dénommé «ghost-cell approach» où le traitement s'applique sur des points immédiats de l'interface solide/fluide, côté solide. Le choix d'une reconstruction se référant qu'aux points fluides immédiatement positionnés proche de l'interface peut également s'appliquer et il s'agit alors de la méthode dite de «forcing point».

La tendance générale associée à ses techniques de forçage, que ce soit la méthode «forcing» [51] ou la méthode «ghost-cell» [49], est d'introduire un terme source de manière explicite au sein des équations de conservation de la quantité de mouvement assurant alors d'imposer la valeur souhaitée (cette valeur est à interpoler ou extrapoler grâce aux valeurs fluides et à la condition de frontière). Détaillons ce principe sur une formulation incompressible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = RHS_i + f_i \tag{3.1}$$

avec u_i la composante de vitesse suivant la direction i, RHS_i intégrant l'ensemble des termes convectif, diffusif et de pression et f_i correspondant au terme lié à la méthode IBM. Une discrétisation en temps est faite au «forcing point» (ou «ghost-cell point») ; on a donc :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = RHS_i + f_i \tag{3.2}$$

La force f_i n'existe que pour le point proche de la frontière pour prendre en compte la condition aux limites désirée. Soit u_Ψ la vitesse calculée par une interpolation ou extrapolation à partir des points fluides proches et de la condition à imposer à la frontière, la force f_i est donc donnée par :

$$f_i = -RHS_i + \frac{u_\Psi - u^n}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Au pas de temps suivant, la valeur de vitesse de u_i^{n+1} est donc la valeur u_Ψ. Grâce à f_i, on peut calculer la valeur de vitesse au nouveau pas de temps et cette valeur est évidemment calculée par une méthode d'interpolation ou d'extrapolation. f_i est présentée de manière implicite parce que l'on peut obtenir la valeur de vitesse sans calcul explicite. Lorsque la frontière se déplace dans le domaine de calcul, les natures mêmes des cellules peuvent être modifiées. Lors d'un changement d'un «état» solide à fluide, il n'existe aucun antécédent pour les valeurs de vitesse ou de pression au pas de temps correspondant au changement d'état et ce choix peut introduire des parasites en vorticité le long de la paroi et conduire ainsi à des erreurs. Yang et al. [51] ont proposé de coupler les informations de «forcing» et de «ghost-cell» points. Yannick et al. [52] proposent une autre technique qui s'est avérée être robuste dans le cas d'un traitement couplage fluide/structure, dénommé «Ghost/Fluide». Cette méthode permet de capter la condition à la limite de manière implicite par une construction d'un «ghost/fluide» i.e. la notion de fluide artificiel. Le principe de cette méthode est de modifier le flux au forcing point grâce à la prise en compte d'une discontinuité de vitesse basée sur une approche de Riemann. Cette technique assure de bien localiser la frontière mais demeure plus compliquée que l'approche ghost-cell dans la mise en place du solveur, notamment lorsqu'une modification des flux est nécessaire sur les faces des cellules près des frontières.

A partir de ce rapide état de l'art sur les différentes techniques aux frontières immergées, force est de constater la très riche activité scientifique et la multitude des techniques et traitements appliqués sans qu'aucune universalité ne se soit réellement dégagée. En se référant aux techniques de forçage discret, il existe également beaucoup de variantes dans les traitements. A notre connaissance, peu ou pas d'études ont réellement comparé les différences de traitements. Au-delà même des performances d'un traitement de reconstruction plutôt qu'un autre, notre objectif est, à partir des méthodes aux frontières immergées, de traiter à terme des écoulements au sein des moteurs à propergol solide. Leur géométrie interne peut s'avérer complexe avec une forme géométrique en «étoile» par exemple et surtout il se produit des variations considérables de la géométrie interne au cours du temps. Réaliser de telles simulations nécessite des techniques simples, efficaces et précises. L'objet de cette partie vise, à partir des techniques immergées «discrètes», de définir les contours de notre modélisation.

3.2 Différents traitements aux frontières

3.2.1 Techniques d'interpolation

Comme nous l'avons préalablement indiqué, les techniques discrètes de forçage ont retenu notre attention. La philosophie de telles techniques réside dans l'approximation des valeurs des différents champs immédiatement voisins de la condition limite à traiter. La Fig. 3-1 définit de manière schématique la topologie complète des points du maillage au voisinage d'une paroi. Les définitions suivantes accompagnant les différents points sont listées ci-après :

- **Point fluide** : point fluide n'ayant aucun point solide comme voisin.
- **Point solide** : point dans la partie de solide n'ayant aucun point fluide comme voisin.
- **Point marqueur** : point définissant l'interface fluide/solide.
- **Forcing points** : points fluides proches de la surface. Il faut donc introduire un terme source pour calculer les variables en ces points.
- **Ghost-cell points** : similaires à la définition des «forcings points» mais côté solide et peuvent servir, similairement aux forcings points, à la caractérisation des variables (pression, vitesse, température) par interpolation avec les cellules fictives.

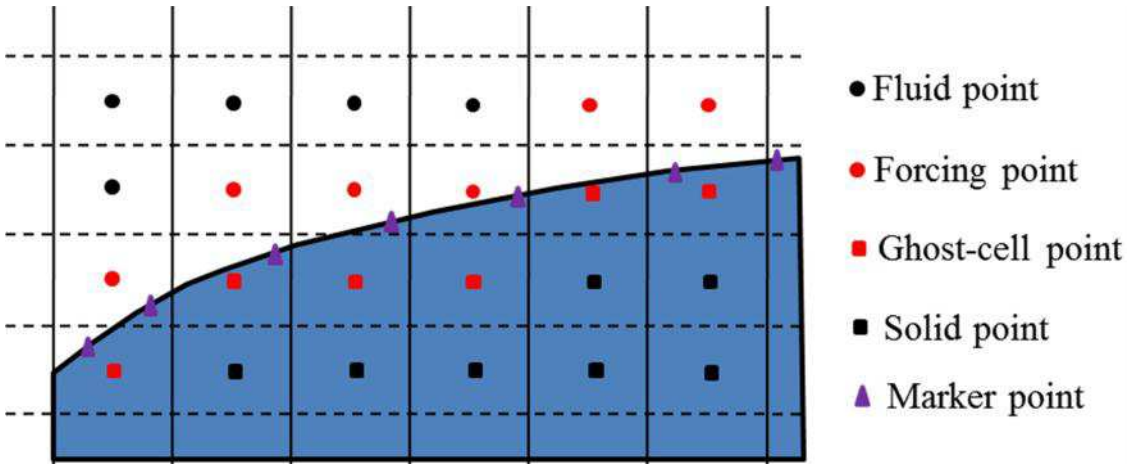


Fig. 3-1 : Définition de la topologie des différents points fluide, forcing point, solide, ghost-cell et marqueur définissant l'interface fluide/solide

Comme nous l'avons souligné auparavant, il existe à ce jour peu d'études relatives aux écoulements compressibles employant le traitement des frontières immergées. Dans le cas de notre développement, notre objectif est de disposer d'un solveur compressible d'ordre 2 en

espace avec un schéma convectif de type ROE capable de gérer de manière précise la régression de surface du propergol solide. Notre problématique concerne donc un traitement avec surface mobile.

Comme nous l'avons évoqué lors de la présentation du schéma numérique (Cf. 2.5.1), le calcul des flux sur une face nécessite la connaissance des flux de part et d'autre de l'interface et donc un point fluide a besoin de deux valeurs ; au voisinage de la frontière, la connaissance à la fois du «forcing point» et du point à l'intérieur du solide capable d'assurer la condition aux limites est donc nécessaire. Dans leur approche, Palma et al. [6] ont considéré la valeur impliquée dans la partie solide égale à zéro et une interpolation côté fluide est appliquée ; les résultats présentés dans les différentes configurations semblent des plus intéressantes mais la précision du schéma est d'ordre 1. Mittal [8] propose lui d'employer la technique IBM avec les nœuds fictifs, mais sans se référer à un traitement de l'autre côté de la paroi (i.e. côté fluide). De manière similaire à Palma et al. [6], la précision à l'ordre 2 du schéma n'est pas assurée dans sa globalité. Récemment, Chaudhuire et al. [48] ont eu recours à deux couches de nœuds fictifs et ainsi, en introduisant ces deux points, cette technique assure un schéma d'ordre 2 à l'interface. En traitant un objet immobile, l'écoulement en formulation Euler a été simulé et les interactions complexes chocs/paroi pour des écoulements supersoniques ont été traitées. Un tel traitement rend cependant difficile la possibilité de prendre en compte des obstacles mobiles. Plus récemment, Merlin et al. [9] ont effectué une combinaison forcing point/ghost-cell point en couplant les approches de type «cut-cell» (bilan conservatif) côté fluide et les approches de forçage côté solide. Avec une telle méthode, les auteurs ont pu caractériser avec succès des écoulements visqueux compressibles, la turbulence ayant été traitée par une méthode de type LES. La qualité des comparaisons avec les résultats expérimentaux disponibles sont de nature à être optimiste sur l'utilisation de telles méthodes. Néanmoins, le traitement nécessitant un bilan conservatif employé côté fluide peut favoriser des instabilités [44] tout en imposant de lourdes complexités dans la programmation, surtout lorsque l'on traite des frontières mobiles. Ces raisons nous ont alors conduites à ne considérer que les techniques d'interpolation dans notre travail (i.e. pas de méthode dite de «cut-cell»).

La combinaison de l'utilisation des forcings points et ghost-cell points avec une formulation de type forçage continue n'a pas été utilisée, à notre connaissance, pour des formulations compressibles. Dans le cas d'un écoulement incompressible autour d'un objet mobile, Balaras [51] s'est préalablement référé à une telle technique. Il l'a appliqué pour une formule d'interpolation d'ordre 1 au niveau des forcing points et de la projection de ghost-

cell point. Dans sa formulation, Balaras [51] a montré que de tels choix se sont avérés des plus efficaces dans le traitement des frontières mobiles. Une formulation similaire dans le cadre du développement de notre solveur compressible pourrait être tout aussi gagnante.

3.2.2 Méthode et précision d'interpolation

Le principe du forçage discret, que ce soit la méthode des nœuds fictifs ou des forcing points, est de construire une approximation des valeurs aux nœuds et une telle construction est bien évidemment fonction du type de condition aux limites à appliquer, i.e. conditions de Dirichlet, de Neumann voire condition mixte de Robin :

- Condition de Dirichlet : $\phi|_{\Omega} = f$
- Condition de Neumann : $\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\Omega} = f$
- Condition de Robin : $\alpha\phi + \beta \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\Omega} = f$

avec ϕ la variable à considérer. La valeur est calculée grâce à une formule d'interpolation ou d'extrapolation. L'interpolation est dédiée au forcing point alors que l'extrapolation est induite dans le cas d'un nœud fictif (ghost-cell point).

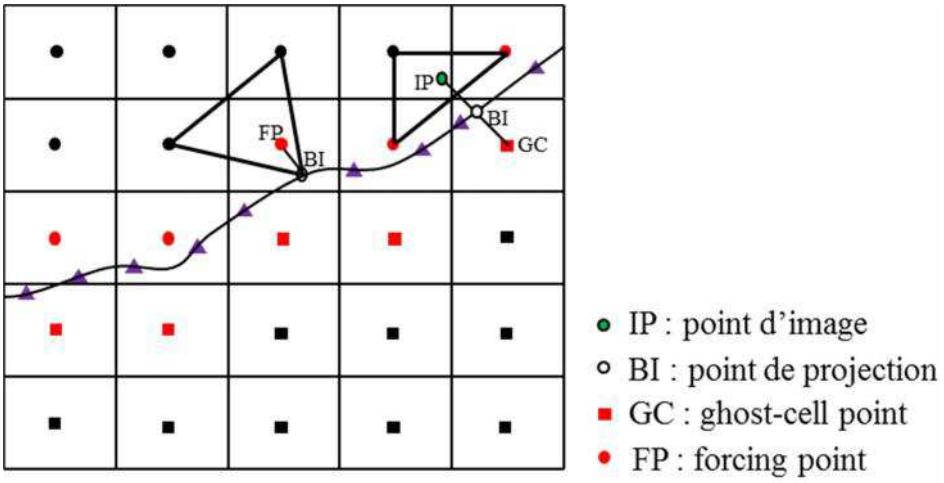


Fig. 3-2 : Schéma d'interpolation

Dans le premier cas, prenons par exemple le forcing point FP (Fig. 3-2) dont sa projection sur la surface frontière est le point BI. La valeur des paramètres (vitesses, pression, température,…) au point FP est déduite par une interpolation entre les points formant le

triangle entourant le point FP. Dans le cas d'une construction à partir d'un ghost-cell point (par exemple le point GC dont la projection sur l'interface est le point BI), l'extrapolation peut conduire à de fortes instabilités et mettre en péril l'intégrité même du calcul. Pour éviter d'en arriver là, la plupart des travaux utilisant la notion de Ghost-cell point transforme ce traitement en une interpolation. Pour cela, le point GC est projeté dans le domaine fluide et une interpolation de ce point image avec des nœuds fluides est effectuée à des points fluides (point fluide ou forcing point) comme le souligne la Fig. 3-2. Les techniques d'interpolation sont multiples et le Tableau 3-1 recense la majorité des formules disponibles dans la littérature. Comme le tableau le souligne, les formulations vont d'une simple interpolation mettant en jeu deux points à l'utilisation d'une multitude de points.

Afin de détailler la technique des frontières immergées, prenons par exemple la reconstruction de 3 points d'ordre 1 [51] dans un cas 2D i.e. une variable ϕ quelconque suit la formulation suivante dans un plan:

$$\phi = c_1 x + c_2 y + c_3 \tag{3.4}$$

et les coefficients c_i peuvent donc être déterminés en inversant le système suivant :

$$[\phi] = M\,[c_i] \tag{3.5}$$

avec M une matrice 3x3 dont l'écriture dépend des conditions aux limites à imposer sur la frontière. En imposant, par exemple, une condition de Dirichlet à la frontière, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Dans le cas d'une condition de Neumann à la paroi, alors on a alors :

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\Omega} = \phi_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = c_1 n_x + c_2 n_y \tag{3.7}$$

On a donc,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Ainsi, quelle que soit la condition aux limites considérée, l'obtention des coefficients d'interpolation est assez aisée ; dans le cas du traitement d'une surface immobile, les coefficients calculés au préalable sont conservés. Lorsque la géométrie est mobile, la procédure de détermination des coefficients d'interpolation est à effectuer à chaque mise à jour de la géométrie. Cette procédure s'applique évidemment à une interpolation en trois dimensions mais nécessite évidemment plus de points.

Désignation	Formulation	Ordre	Référence
2 points	$\phi(x) = c_1 x + c_2$	1	[6]
3 points	$\phi(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3$	1	[51]
4 points bilineaire	$\phi(x, y) = c_1 xy + c_2 x + c_3 y + c_4$	1	[42]
4 points	$\phi_{IP} = \sum_{k=1}^{4} \delta_k \phi_{NP_k}$ où $\delta_k = \eta_k \left(\sum_{k=1}^{4} \eta_k \right)^{-1}$ avec $\eta_k = 1/d_k^2$ et d_k 's est la distance entre IP et NP_k	1 ou 2	[48]
6 points	$\phi(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2 + c_5 y^2$	2	[49]
N points	$\phi(x', y', z') \approx \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} c_{ijk} (x')^i (y')^i (z')^i$ avec $i + j + k \leq N$	Dépend de N	[40]

Tableau 3-1 : Liste des principales formules d'interpolation identifiées dans la littérature

L'équipe convection thermique turbulente de l'ENSMA a initié des travaux avec frontières immergées [53] en suivant une interpolation introduite par Balaras [51] : 3 points en 2D et 4 points en 3D. Une telle approche procure généralement de bons résultats et reste une méthode

facile à implémenter. Sauf avis contraire, nous nous référons à cette formulation. Les conditions aux frontières immergées présentées dans les publications se réfèrent quasiment toutes à des conditions de paroi sans glissement. Par contre, dans les applications spatiales visées, des besoins spécifiques peuvent être nécessaires et deux types de condition additionnelles ont été identifiées : les conditions d'injection pariétale utiles dans la caractérisation des moteurs à propergol solide ainsi que des conditions de glissement dans le cas, par exemple, où la tuyère est considérée comme condition d'amorçage acoustique sans toutefois nécessiter une analyse des transferts en son sein. Ces conditions spécifiques n'ont pas, à notre connaissance, été développées dans la littérature mais restent cependant indispensables à maitriser dans le cadre, plus général, d'un code dédié aux moteurs à propergol solide. Les travaux par la suite vont s'attacher à décrire l'implémentation de telles conditions spécifiques.

3.3 Conditions spécifiques en formulation IBM

Même si la méthode des frontières immergées a connu depuis les années 2000 un vif intérêt, avec des articles scientifiques toujours plus nombreux et des sessions spécifiques dans les conférences internationales, force est de constater que les écoulements compressibles n'ont pas fait l'objet d'une aussi grande attention et les écoulements compressibles internes (à l'intérieur de propulseur) n'ont jamais, à notre connaissance, été étudiés à partir de méthodes aux frontières immergées. Notre étude s'inscrit donc dans une volonté de tester ces techniques pour de tels écoulements. Le domaine de la propulsion regorge notamment de validations analytiques, dans lesquelles des conditions de glissement peuvent s'avérer utiles ; aucun article n'a fait référence, à ce jour, à des conditions de ce type avec des méthodes aux frontières immergées. De plus, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, nous souhaitons étudier les variations géométriques au sein des propulseurs à propergol solide à partir d'une approche aux frontières immergées et les conditions de débit d'injection pariétale n'ont également fait l'objet d'aucune étude identifiée dans la littérature. A partir des développements détaillant le traitement et les formulations dédiées aux frontières immergées, il semble que l'introduction de ces deux conditions aux limites, injection pariétale et condition de glissement, soient tout à fait envisageables et ceci fait l'objet d'une approche détaillée par la suite.

3.3.1 Condition de glissement

3.3.1.1 Définition

Les conditions de type glissement sont évidemment des conditions non réalistes et peuvent souvent être utilisées dans les simulations numériques pour simplifier l'approche. Par exemple, le développement d'une couche limite n'ayant pas de conséquence directe sur l'objet de l'étude peut être négligé par l'introduction d'un glissement. La validation de codes numériques passe également par la réalisation de cas tests simplifiés dont la condition de glissement peut également s'avérer déterminante. La Fig. 3-3 illustre schématiquement le cas d'une paroi incurvée sur laquelle la condition de glissement doit s'appliquer.

Mathématiquement, dans le repère local $\left(P, \vec{n}, \vec{t}\right)$, on a :

Dirichlet : $$u_n = 0 \tag{3.9}$$

Neumann : $$\frac{du_t}{dn} = 0, \frac{dp}{dn} = 0, \frac{dT}{dn} = 0 \tag{3.10}$$

avec u_n et u_t représentant les composantes de la vitesse suivant le vecteur normal et le vecteur tangentiel local respectivement, p et T la pression et la température respectivement.

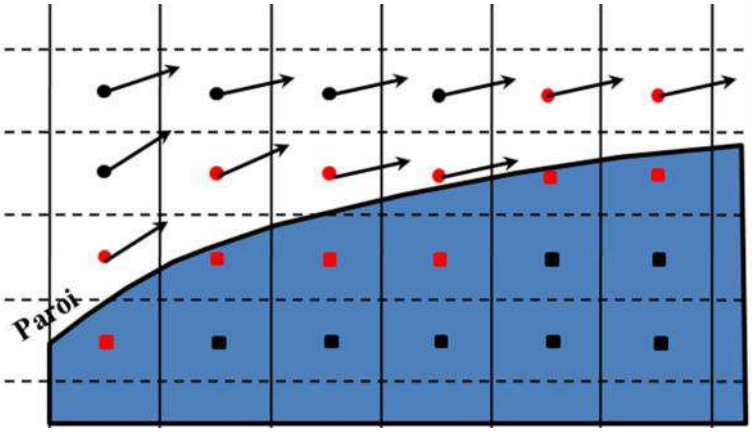


Fig. 3-3 : Exemple de distribution de vecteurs de vitesse le long de la paroi avec condition de glissement

L'application de ce type de contrainte à la paroi ne pose pas de problème particulier, les conditions de Dirichlet et de Neumann ayant été préalablement introduites dans les techniques IBM [8]. Par contre, la difficulté repose plus singulièrement sur le fait qu'il

s'agisse d'appliquer les conditions aux limites pour la vitesse sur les composantes locales normales et tangentielles et donc il ne faut pas utiliser les composantes de la vitesse dans le référentiel global. Nous présenterons les différents traitements établis dans le cas d'un forcing point et d'un ghost-cell point.

Traitement des forcings points : La Fig. 3-4 présente schématiquement le traitement dans le cas d'un forcing point dénommé FP. Les vitesses aux différents points (point A et B sur la Fig. 3-4) servant à l'interpolation sont tout d'abord calculées dans le repère local normal et tangentiel et la procédure d'interpolation s'applique avec la valeur limite à imposer sur la paroi considérée.

Traitement des ghost-cell points : Pour le traitement de type ghost-cell point GP (Cf. Fig. 3-5), l'interpolation s'effectue sur le point d'image pour éviter d'effectuer une extrapolation. Le point miroir est donc construit par symétrie du point GP vis-à-vis de la paroi et une interpolation entre les points A, B et les conditions à la paroi à réaliser. La valeur du ghost-cell point est alors déduite par rapport au point image.

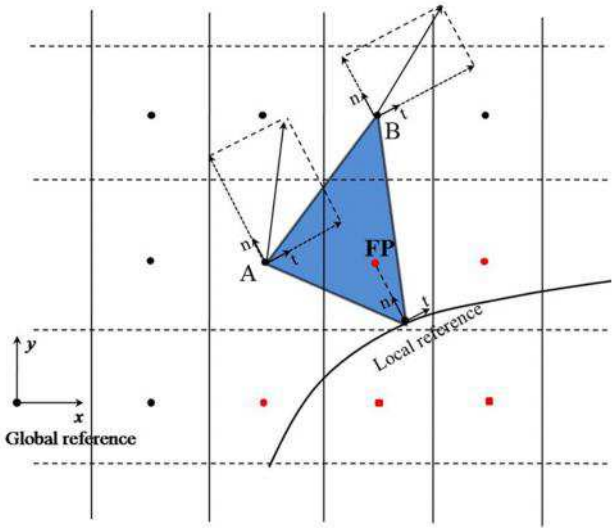


Fig. 3-4 : Interpolation dédiée pour le forcing point

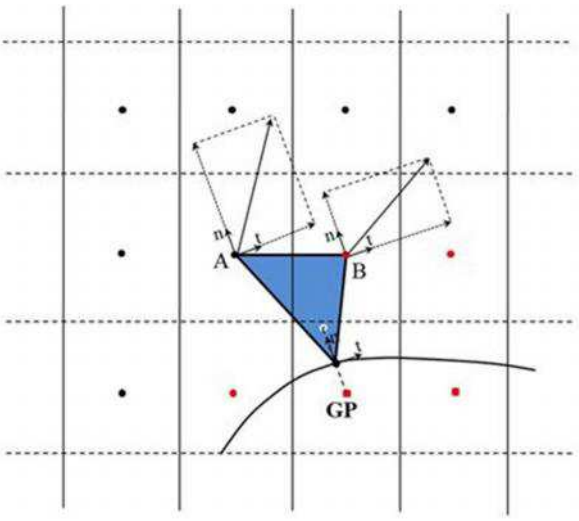


Fig. 3-5 : Interpolation dédiée au point ghost-cell

3.3.1.2 Implémentation et validation de la condition de glissement

A partir de la condition de glissement présentée auparavant, une implémentation a été réalisée dans le code et les premiers tests qualitatifs ont été réalisés afin de s'assurer du

comportement consistant. Au-delà de ces vérifications d'usage, la nouvelle condition implémentée a été testée en se référant à la fois à des développements théoriques ainsi qu'aux résultats issus de la littérature, l'objectif étant cette-fois d'apporter des confrontations plus quantitatives. Trois configurations ont été réalisées : écoulement au-dessus d'une marche, écoulement au sein d'une tuyère en régime transsonique et le cas d'un choc oblique.

a) Marche circulaire

Les configurations de marche circulaire ou encore «Bump» sont des configurations ayant font l'objet d'une multitude de travaux antérieurs et la Fig. 3-6 détaille la configuration étudiée par Dimindzie et al. [54], Manna [55] ou encore Van der Aeul et al. [56] pour ne citer que trois références. Comme le souligne la Fig. 3-6, la condition au niveau de l'arc de cercle est considérée comme une condition de glissement par les différents auteurs cités, l'idée résidant essentiellement à décrire les effets de restrictions géométriques sur un écoulement incompressible à nombre de Mach *M=0.1*. Les différentes études ayant été conduites en formulation Euler, avec les différentes conditions rappelées Fig. 3-6, les investigations numériques ont été réalisées de manière similaire.

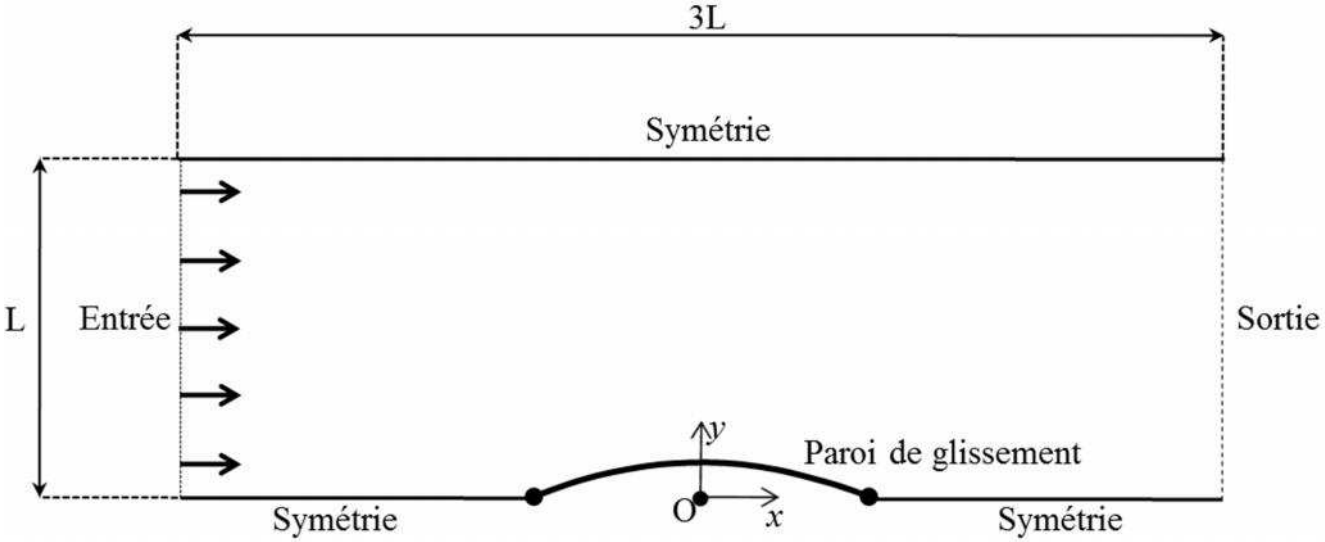


Fig. 3-6 : Configuration de la marche circulaire

condition d'entrée : écoulement subsonique
condition de sortie : écoulement subsonique
faces supérieure et inférieure : condition de symétrie
condition IBM de paroi sans glissement imposée sur la marche circulaire

Tableau 3-2 : Condition aux limites du cas de marche circulaire

Bien que des solveurs incompressibles soient plus consistants pour traiter ce type d'écoulement, le solveur compressible en cours de développement a été utilisé. Deux résolutions ont été testées, avec respectivement 75x75 et 600x200 éléments pour le maillage régulier et, à l'aide de l'approche récursive 2^n tree, un raffinement a été opéré au niveau 2 au voisinage du Bump. On rappelle qu'utiliser un tel niveau de raffinement conduit à considérer une réduction caractéristique de l'ordre de 4 (Cf. 2.4 Chapitre 2).

Les calculs ont été lancés à partir de champs constants homogènes avec une formulation temporelle explicite, 900000 itérations étant nécessaires afin que l'écoulement soit établi et qu'une moyenne soit obtenue. La Fig. 3-7 présente la distribution moyenne du nombre de Mach et du champ de pression pour les deux résolutions étudiées. Le comportement général de l'écoulement est bien reproduit, quelle que soit la résolution du maillage retenu et le résultat principal concerne l'organisation symétrique de l'écoulement de part et d'autre de la marche circulaire. On constate dans le cas de la résolution spatiale la plus faible des zones de gradients plus faibles au voisinage de la marche circulaire aussi bien au niveau du champ de nombre de Mach que de la pression. D'ailleurs, on retrouve évidemment cette tendance sur la courbe du coefficient de pression *Cp* le long de la face inférieure (condition de symétrie + condition de glissement le long de la marche circulaire). Au niveau du sommet de la marche circulaire, quelques oscillations indésirables liées à une résolution spatiale trop faible pour le maillage A (75x75) sont identifiées alors pour le maillage B (600x200), l'évolution du *Cp* conserve une évolution très lisse et surtout s'accorde parfaitement avec les résultats numériques de Hirsh [34]. Le profil de *Cp* reste en fait principalement marqué par la présence de deux pics de maximum du coefficient de pression *Cp* à *X=-0.498* et *+0.498* comme attendu.

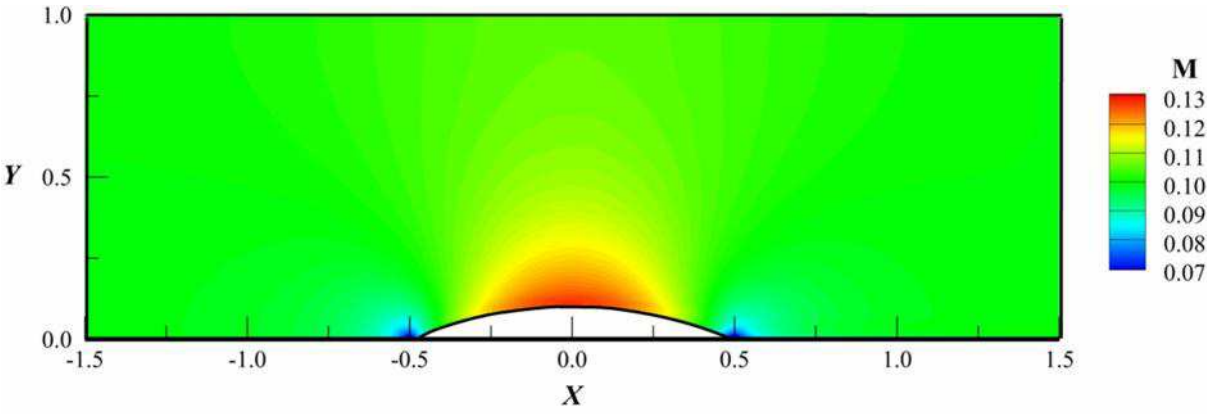


Fig. 3-7 : Distribution de nombre de Mach dans le cas de la marche circulaire

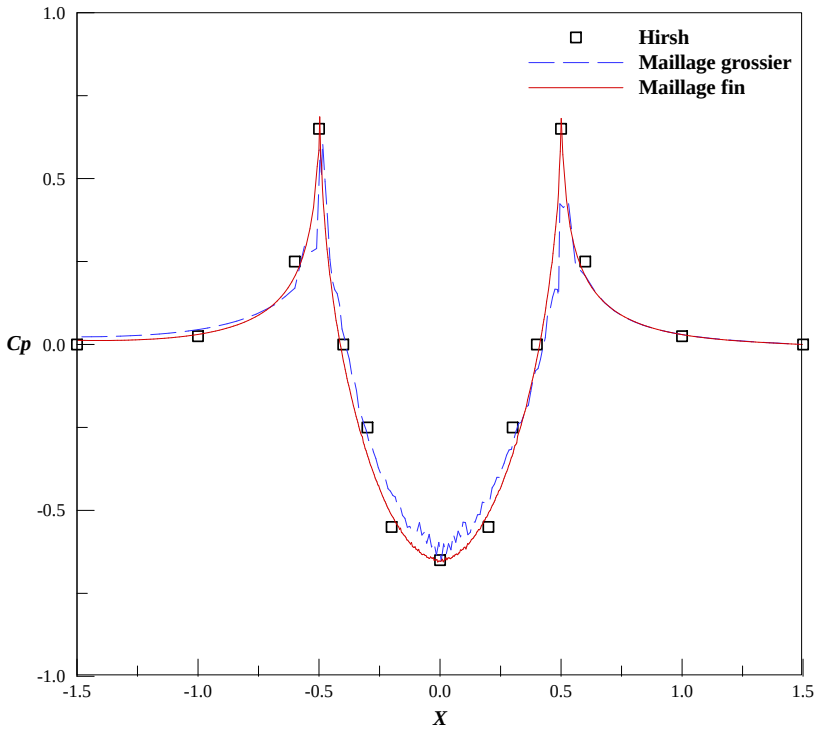


Fig. 3-8 : Distribution de C_p en basse domaine dans le cas de la marche circulaire

b) Tuyère en condition transsonique

A partir du cas précédent, force est de constater que le code compressible dans son ensemble (schéma, condition aux limites dont la condition de glissement) se comporte comme attendu pour des écoulements incompressible. L'idée consiste alors, en se référant au cas de la tuyère NASA A1 [57], d'étudier un cas bien plus sévère et notamment d'analyser l'aptitude de notre outil numérique à bien capter le développement d'ondes de choc ne s'alignant pas sur les lignes des maillages. La Fig. 3-9 détaille une coupe de la géométrie de la tuyère NASA A1 ayant fait l'objet d'une multitude de travaux aussi bien expérimentaux [57] que numériques [58]. Dans une approche numérique, Zha [58] a considéré le cas transsonique au sein de la tuyère en supposant l'écoulement non visqueux avec un schéma de type MUSCL à l'ordre 3 en espace, la partie supérieure de la tuyère étant considérée comme une paroi avec glissement.

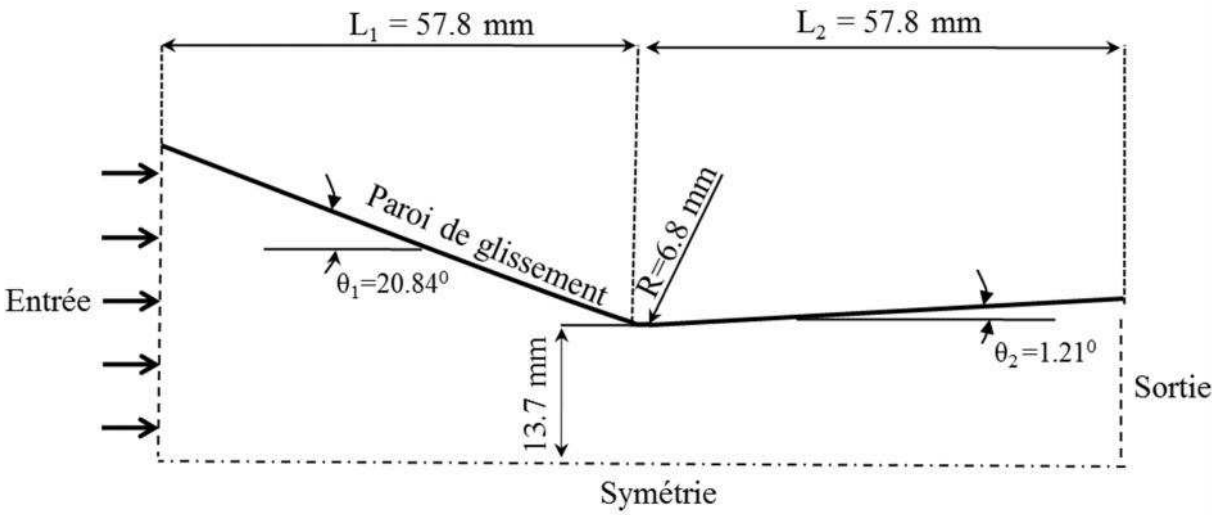


Fig. 3-9 : GéométrieTuyère_A1

	Maillage grossier (MB1)	Maillage fin (MB2)
Configuration	*NX*x*NY*=200x60 $\Delta X_{min}x\Delta Z_{min}$=0.048mmx0.045 mm	*NX*x*NY*=600x180 $\Delta X_{min}x\Delta Z_{min}$=0.1445mmx0.293mm
Conditions aux limites	Entrée: P_{total} = 300935.25 Pa et T_{total} = 300 K Sortie libre avec pression imposée de 101325 Pa	
Conditions initiales	*u*=74.8 m/s, *v*=0 m/s, *P*=101325 Pa et *T*=298 K	

Tableau 3-3 : Conditions aux limites du cas test tuyère NASA A1

Une approche numérique similaire a donc été réalisée avec deux résolutions spatiales différentes (Cf. Tableau 3-3) et deux maillages, les maillages MB1 et MB2 correspondant respectivement au maillage grossier et fin, ont été étudiés. Alors que des conditions subsoniques à l'entrée sont imposées avec un nombre de Mach à *M=0.22*, le traitement de la condition à la sortie dépend des conditions locales alors calculées. En effet, lorsque le nombre de Mach local est subsonique, la pression de sortie est supposée égale à la pression atmosphérique alors que si le nombre de Mach local offre des conditions supersoniques, des conditions de type gradient nul sont imposées (Cf. 2.6 Chapitre 2). Bien que le schéma numérique ne soit que d'ordre deux, les deux maillages MB1 et MB2 offrent des résultats tout à fait conformes à ceux attendus. En effet, la Fig. 3-10 présente, pour les deux maillages, les distributions du nombre de Mach moyen et du rapport moyenné de la pression sur la pression totale *P/Pt*. Pour les deux distributions, la partie supérieure correspond aux résultats

obtenus pour la résolution la plus fine (maillage MB1), la partie inférieure correspondant en fait aux résultats obtenus dans le cas du maillage grossier. A partir des distributions des champs moyens ainsi obtenus, un réseau d'ondes de choc se créé au sein du divergeant et les ondes obliques se propagent vers le centre de la tuyère. On assiste à une multi-réflexion de part et d'autre des parois au sein du divergeant. On note, au fur et à mesure de la propagation dans la tuyère, qu'une réduction des niveaux de choc s'opère.

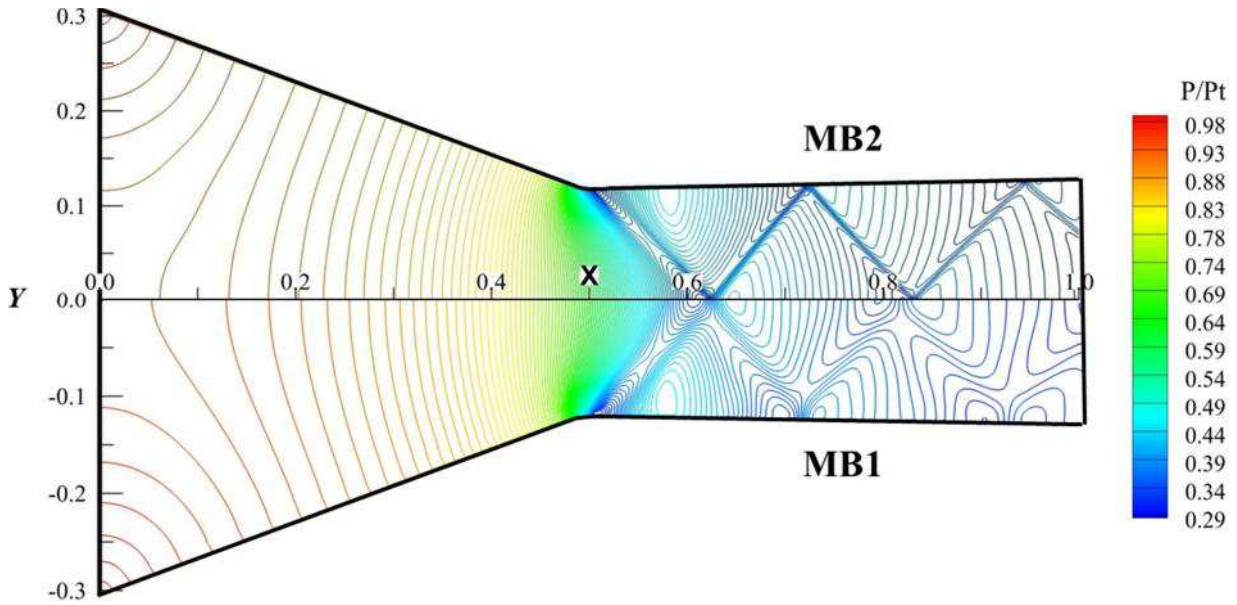


Fig. 3-10 : Distribution de la pression normalisée dans la tuyère NASA A1

L'intensité des ondes de choc se trouve amoindrie par la résolution spatiale, les champs moyens de nombre de Mach et de pression normés *P/Pt* obtenus avec le maillage MB2 soulignant l'existence de gradients plus amortis que ceux observés avec une résolution MB1. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux ont également été réalisées, en comparant directement le profil axial de *P/Pt* (Fig. 3-11). Les profils numériques, quelle que soit la résolution utilisée, sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux de Mason [57] mais il demeure évident que le maillage le plus fin permet mieux de « fitter » les valeurs expérimentales. Notons que le calcul est conduit avec de fortes hypothèses, comme par exemple l'utilisation de conditions de glissement aux parois, et que même en considérant de telles simplifications, la confrontation des résultats numérique/essai est excellente.

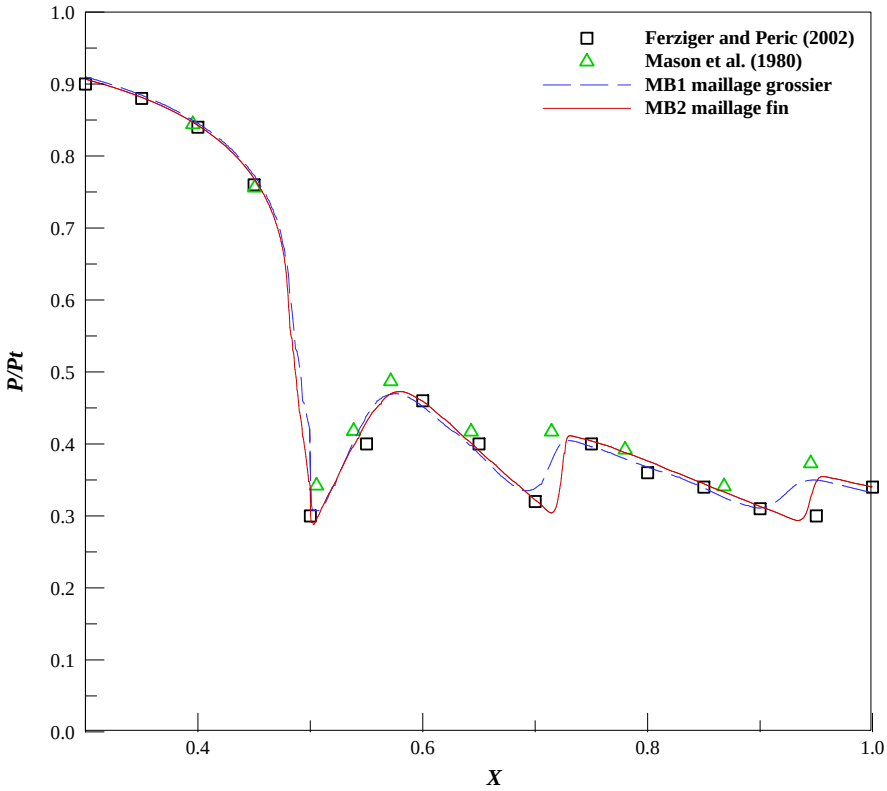


Fig. 3-11 : Distribution de pression sur l'axe de glissement la tuyère NASA A1

c) Recompression par choc oblique d'un écoulement uniforme

Le développement d'écoulement supersonique s'écoulant le long d'une paroi dont l'orientation change brusquement à partir d'un point A (Cf. Fig. 3-12) peut-être décrit de manière analytique.

En effet, en considérant l'écoulement uniforme et le fluide parfait (non visqueux) en régime stationnaire avec M_0 le nombre de Mach amont à la pression P_0, une solution existe au-delà du point A constituée par un écoulement uniforme, de direction identique à la paroi et séparée de l'état amont par une onde de choc issue du point A et d'un angle ϕ. Au point A, la paroi présente un changement de direction brutal d'angle $\Delta\phi = \phi$ en demeurant rectiligne après A. La question qui se pose est de déterminer l'écoulement en aval de A. En écoulement supersonique, une solution possible à ce problème est constituée par un écoulement uniforme, de direction parallèle à la paroi, séparé de l'état amont par une onde de choc oblique issue de A et d'angle relativement σ à ϕ_0.

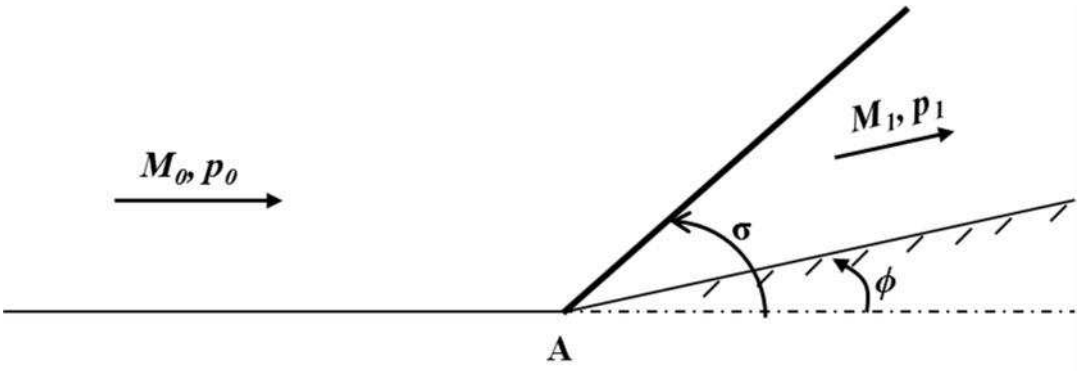


Fig. 3-12 : Schéma de l'analyse de développement d'une onde de choc oblique

Il est possible de démontrer [59] que les résultats relatifs au choc droit s'appliquent directement à la condition de remplacer le nombre de Mach amont M_0 par le nombre de Mach normal à condition de :

$$M_{n0} = M_0 \sin\sigma \tag{3.11}$$

Le nombre de Mach en aval du choc M_1 est ainsi obtenu à partir de :

$$M_{n1} = M_1 \sin(\sigma - \phi) \tag{3.12}$$

avec M_{n1} se déduisant de M_{n0} par les relations du choc droit. Les relations suivantes, reliant les grandeurs de part et d'autre de l'onde de choc dans le cas d'un gaz parfait, peuvent également être démontrées :

Rapport de pression :

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_0^2 \sin^2\sigma - 1\right) \tag{3.13}$$

Rapport de masse spécifique :

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma+1) M_0^2 \sin^2\sigma}{(\gamma-1) M_0^2 \sin^2\sigma + 2} \tag{3.14}$$

Rapport de température :

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\left[2\gamma M_0^2 \sin^2\sigma - (\gamma-1)\right]\left[(\gamma-1) M_0^2 \sin^2\sigma + 2\right]}{(\gamma+1)^2 M_0^2 \sin^2\sigma} \tag{3.15}$$

L'angle du choc σ est calculé à partir de l'équation :

$$\cot g\phi = tg\sigma\left[\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_0^2}{M_0^2\sin^2\sigma-1}-1\right] \qquad (3.16)$$

Il existe une déviation maximale ϕ_{max} au-delà de laquelle une solution de type oblique attaché issu de A n'est plus possible. Quand $\phi > \phi_{max}$, l'onde de choc se détache de A : d'abord normale à la paroi, elle s'incurve progressivement pour devenir pratiquement rectiligne à grande distance de A ; l'écoulement en aval n'est donc plus uniforme. En particulier, une poche subsonique se forme au voisinage de la paroi. Le calcul d'un tel écoulement est nettement plus complexe et doit faire appel à des techniques de résolution numérique des équations d'Euler. L'angle de choc σ_{max} correspondant à la déviation maximale ϕ_{max} est uniquement fonction du nombre de Mach M_0 et de γ . Il est donné par l'expression :

$$\sin^2\sigma_{max} = \frac{1}{4\gamma M_0^2}\left[(\gamma+1)M_0^2-4+\sqrt{(\gamma+1)\left[(\gamma+1)M_0^4+8(\gamma-1)M_0^2+16\right]}\right] \qquad (3.17)$$

Ces résultats théoriques peuvent être calculés facilement grâce à un outil informatique. Ce cas test est donc intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, et comme nous venons de le détailler, il existe une solution analytique. De plus, il s'agit d'un cas de calcul sévère qui doit alors permettre de souligner la robustesse des schémas numériques mis en place. La Fig. 3-13 présente schématiquement les principaux paramètres de la configuration numérique retenue et le Tableau 3-4 recense les principaux paramètres numériques.

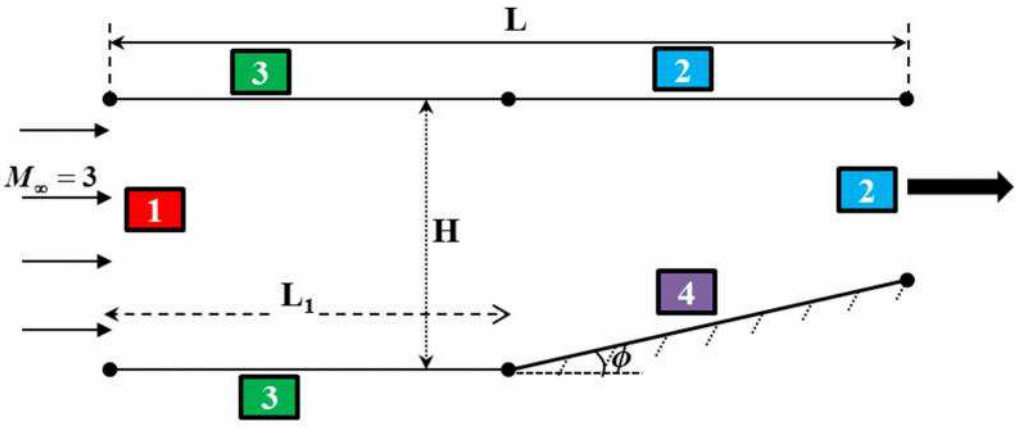


Fig. 3-13 : Configuration géométrique du cas test «choc oblique»

LX = L =1.5 m	NX = 120 mailles

LY = H =1.259 m $\phi = 15^0$ et L_1 = 1 m	NY = 46 mailles
1 : Entrée supersonique 2 : Sortie supersonique 3 : Symétrie 4 : Paroi de glissement	

Tableau 3-4 : Condition aux limites du cas test «choc oblique»

La Fig. 3-14 présente le champ de pression et la distribution du nombre de Mach obtenus pour un écoulement amont de nombre de Mach *M=3.0* et le Tableau 3-5 recense les valeurs caractéristiques du nombre de Mach, de la pression à l'arrière du choc ainsi que l'angle d'inclinaison de ce dernier. L'accord avec la théorie est parfait.

	Résultat théorique	Résultat numérique	Différence en %
Nombre de Mach	2.25	2.25	0.00%
Pression (atm)	2.82	2.82	0.00%
Angle du choc	32.22^0	32.83^0	0.02%

Tableau 3-5 : Comparaison résultats théorique/numérique du cas test choc oblique choc

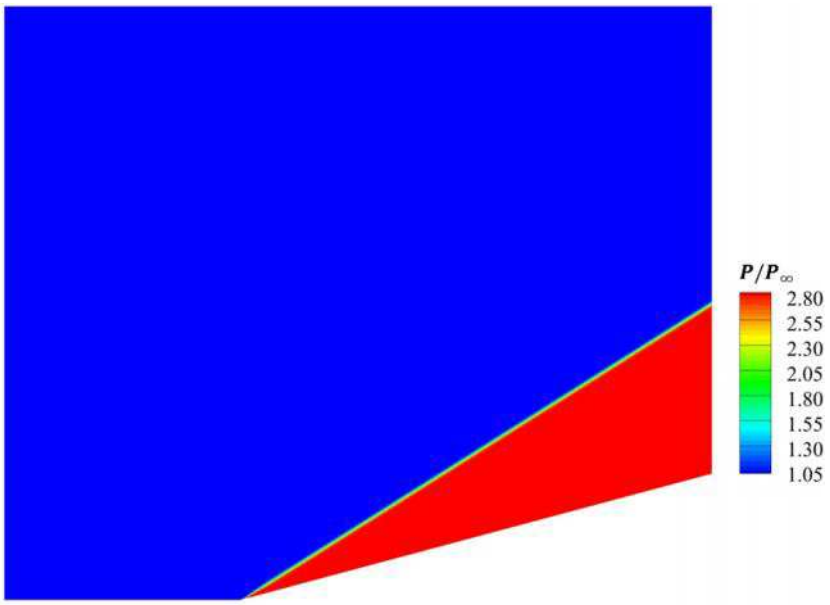


Fig. 3-14 : Distribution spatiale de la pression normée avec P_∞ =101325 Pa

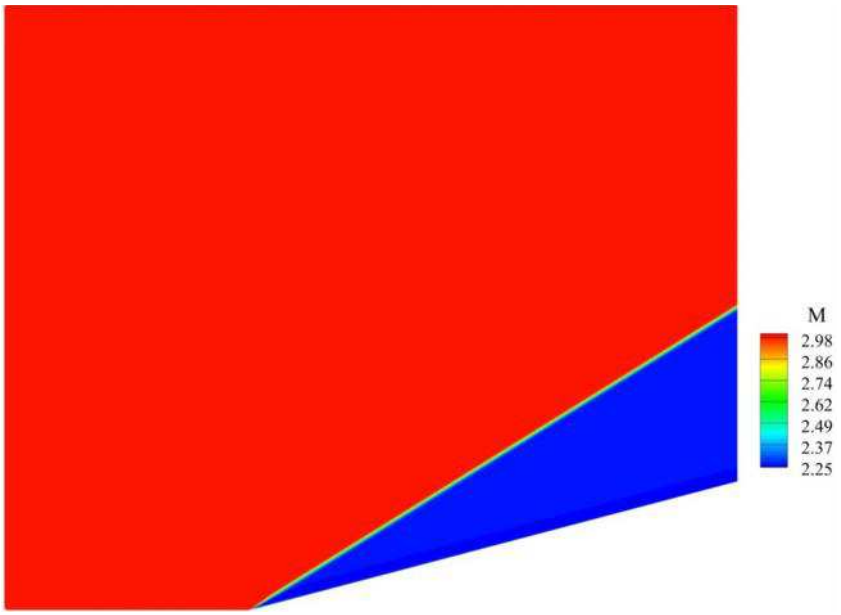


Fig. 3-15 : Distribution spatiale de nombre de Mach

Le cas onde de choc oblique a requis environ 9 heures de calculs pour réaliser 10000 itérations effectuées sur 8 processeurs en parallèle. Comme nous l'avons signalé, la méthode aux frontières immergées mise en place n'est pas une méthode «consommatrice» de temps CPU et elle équivaut à un cout de condition aux limites classique, dans le cas où la frontière immergée demeure immobile. Plus généralement, les différents cas tests ainsi effectués soulignent le comportement consistant du code avec frontières immergées et la condition de glissement développée.

3.3.2 Condition d'injection pariétale

3.3.2.1 Spécification de la condition

La condition d'injection pariétale correspond physiquement à une multitude de cas réels nécessaire à modéliser comme par exemple la transpiration au travers un matériau poreux ou bien encore la combustion d'un bloc de propergol en combustion (Cf. Chapitre 4). En fait, dans les deux cas, la modélisation offre une simplification de la physique en imposant vitesse et température débitante :

$$V_w = \frac{\dot{m}}{\rho_w}$$

$$T_w = \frac{p_w}{\rho_w R} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

avec V_w la vitesse d'injection supposée normale à la paroi, T_w la température des gaz débitants, $\vec{n}$ le vecteur normal à la paroi et p la pression (Fig. 3-16). Tout comme la condition de glissement, imposer une telle condition à partir de la méthode aux frontières immergées est pratiquement directe, les conditions de Neumann et de Dirichlet nécessaires étant par nature prises en compte dans les travaux liés à la méthode utilisée. En fait, la condition d'injection pariétale s'assimile à une condition d'entrée subsonique sous le type «injection pariétale» (Cf. 2.6.1.3).

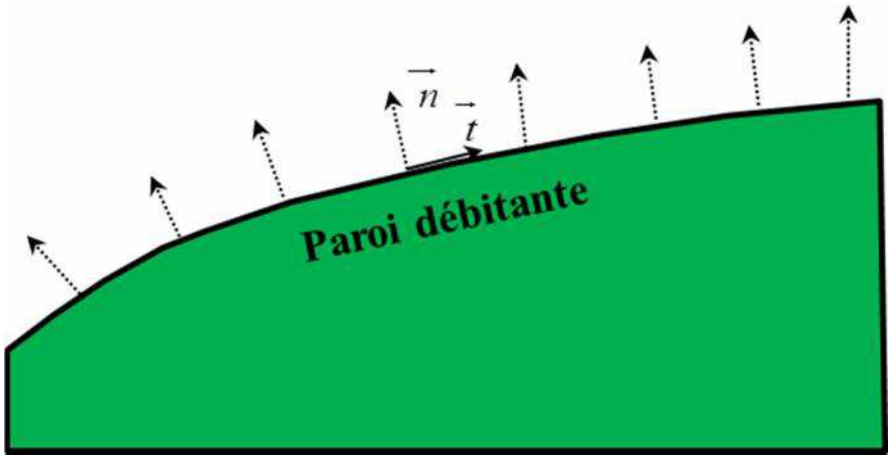


Fig. 3-16 : Vecteur normal et tangent le long de la frontière immergée

Le champ de pression à la paroi est reconstruit à partir de la condition de Neumann à la paroi débitante et des conditions de Dirichlet sont imposées pour l'énergie totale et la densité, la connaissance de ces valeurs assurant l'estimation de l'ensemble des conditions débitantes. De manière similaire à la condition de glissement, le traitement aux frontières immergées s'applique également dans le référentiel local ; un changement de repère global au local de l'ensemble des vitesses aux nœuds impliqués dans la reconstruction est nécessaire. Une fois

le traitement aux frontières immergées effectué, un changement de repère local à global est réalisé.

3.3.2.2 Cas test de Taylor

Les écoulements induits par injection au travers d'une paroi poreuse ont été très largement étudiés, aussi bien de manière analytique [60] que numérique [61]. Dès 1953, Taylor [60] a en effet proposé une solution analytique d'un écoulement au sein d'une conduite plane ou cylindrique dont les parois sont débitantes. Les hypothèses pour atteindre ce résultat théorique sont la prise en compte d'un écoulement stationnaire, laminaire et non visqueux. Alors que ces hypothèses demeurent très restrictives, une multitude d'approches expérimentales a vérifié le très bon comportement de la loi de Taylor ; les conditions d'injection ayant un pouvoir stabilisant remarquable, certains auteurs avaient même qualifié les écoulements ainsi étudiés d'inconditionnellement laminaire [62]. En fait, il s'est avéré qu'une transition intervenait et cette dernière a été observée expérimentalement par Avalon et Comas [63]. Des études théoriques de stabilité des écoulements à injection pariétale ont été réalisées et le changement de la transition laminaire/turbulente a même été estimé en fonction du couple nombre de Reynolds d'injection-nombre de Reynolds de l'écoulement principal.

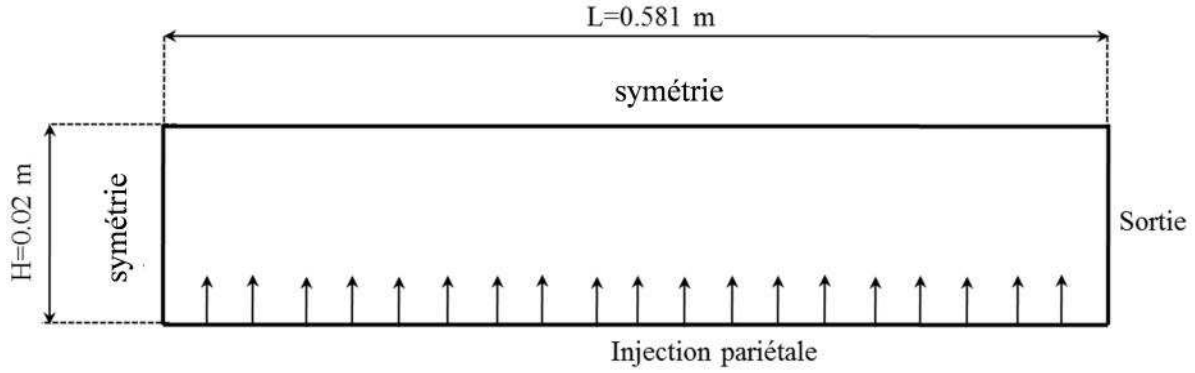


Fig. 3-17 : Schéma du cas test de Taylor

La validation de la condition aux limites d'injection pariétale a donc été réalisée à partir de la configuration de Taylor décrite schématiquement Fig. 3-17. La figure détaille également les différentes conditions aux limites spécifiques appliquées.

Configuration	*NX* x *NY*=581x20 $\Delta X_{min} : \Delta Z_{min}$ = 0.25 mm : 0.25 mm
Conditions aux limites	Débit injecté $\frac{NX \times}{Z_{min}}$ 2.42 kg/m^2/s, T_f = 303 K Pression de sortie : 150000 Pa
Initiale condition	u=v=0 m/s, P=150000 and T=300 K

Tableau 3-6 : Configuration du cas dit Taylor

Le Tableau 3-6 liste les différents paramètres de calcul ; une configuration bidimensionnelle a été retenue avec un maillage régulier de 581x20 offrant une discrétisation spatiale égale et constante de 2.5×10^{-4} m. Numériquement, l'écoulement est supposé laminaire et au-delà de 1000 itérations, 5000 itérations sont nécessaires pour atteindre la convergence en moyenne de l'écoulement. La Fig. 3-20 présente la distribution spatiale de la composante longitudinale de la vitesse ainsi que de la distribution de pression avec les lignes de courant. Par ajout de masse le long de la paroi débitante, l'écoulement s'en trouve directement accéléré et ceci de manière linéaire. Taylor [60] a démontré les solutions analytiques suivantes pour un cas 2D.

Pression dépendant de la position longitudinale *x* :

$$P(x) = P(L) + \frac{\rho U_m^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \tag{3.19}$$

avec $U_m = \frac{\pi L}{2h} V_{inj}$ et *P(L)* la pression imposée en sortie

Théoriquement, la distribution de la vitesse moyenne axiale et radiale est également définie :

$$u(x,y) = V_{inj} \frac{\pi x}{2h} \sin\left(\frac{\pi y}{2h}\right)$$

$$v(x,y) = V_{inj} \cos\left(\frac{\pi y}{2h}\right)$$

Les calculs ont été conduits en traitant les conditions d'injection comme des conditions IBM ou bien comme des conditions «non IBM». Pour réaliser cette dernière, il suffit que le domaine de calcul coïncide avec la condition aux limites d'injection.

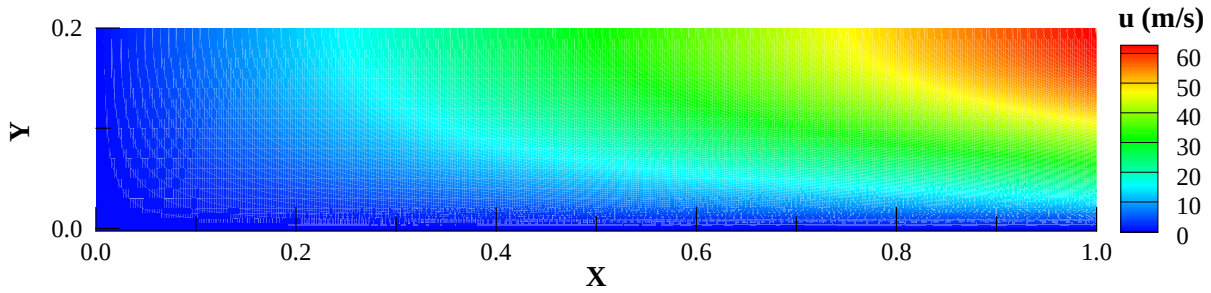


Fig. 3-18 : Champ de vitesse longitudinale instantanée pour le calcul IBM

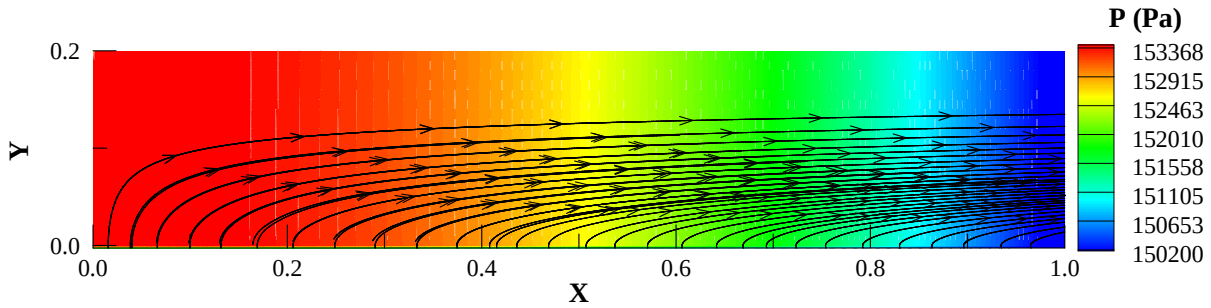


Fig. 3-19 : Champ de pression et ligne de courant pour le calcul IBM

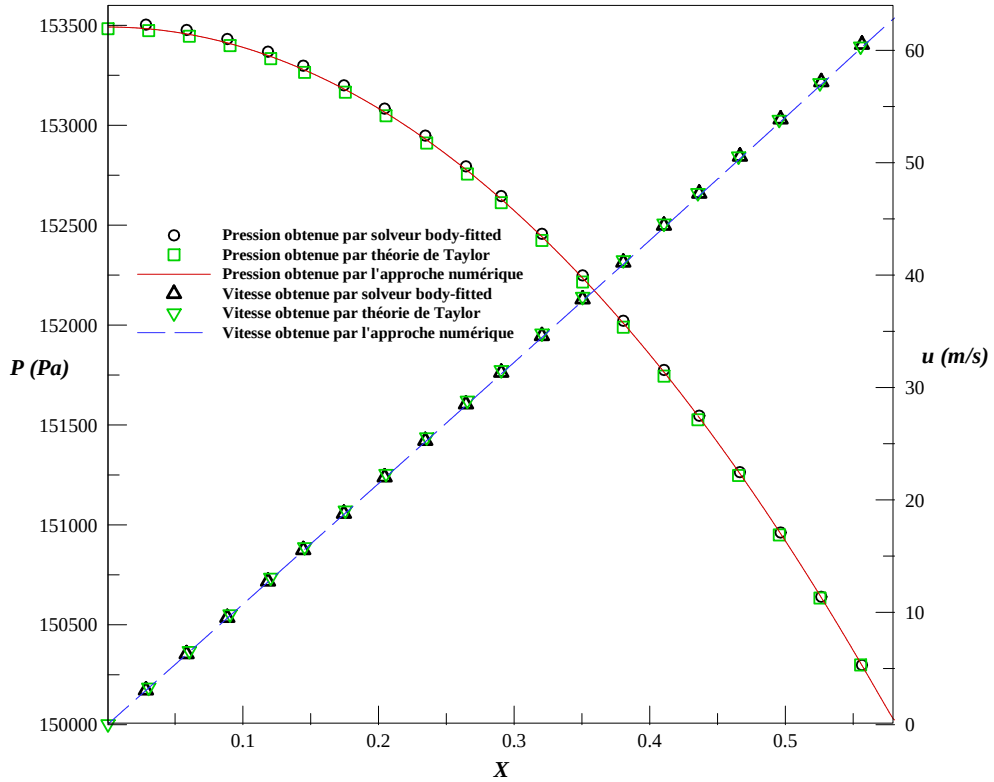


Fig. 3-20 : Comparaison des profils de pression et de vitesse longitudinale obtenues théoriquement par Taylor avec les résultats numériques avec/sans technique IBM

Les résultats obtenus, que ce soit en formulation IBM ou non, sont excellents et s'accordent en tout point avec l'approche théorique (Cf. Fig. 3-20)

L’ensemble des configurations numériques présentées dans ce chapitre a ainsi permis de souligner le comportement consistant du code compressible, comprenant une discrétisation spatiale 2^n tree et un traitement des conditions aux frontières immergées. Deux conditions - glissement et injection pariétale – ont été proposées et validées. L’aspect de maillage automatique et l’adaptation de la résolution à partir du 2^n tree gérée par la technique des frontières immergées sont des caractéristiques qui peuvent faciliter la prise en compte de frontières mobiles (régression surface, déplacement de parois au cours du calcul) et ce point va être abordé dans le chapitre 4.

Chapitre 4

Vers une caractérisation multi-physique dédiée à la balistique interne

Les résultats précédemment obtenus soulignent l'intérêt du modèle compressible basé sur une approche aux frontières immergées et couplée avec un maillage adaptatif automatique. Bien qu'il s'agisse d'écoulements complexes compressibles, les travaux ne ciblaient pas directement les écoulements internes au sein des propulseurs à poudre et ces derniers font alors l'objet d'une attention toute particulière par la suite.

4.1 Ecoulements internes et instabilités

4.1.1 Identification du rôle des mécanismes tourbillonnaires

Au cours des années 90, des efforts sensibles en recherche ont été effectués en vue de caractériser des écoulements au sein des moteurs à propergol solide [64]. En effet, que ce soit aux USA avec le moteur TITAN [65,66,67] ou bien plus tard en Europe avec la problématique des moteurs à propergol segmentés, i.e. avec la présence de plusieurs blocs de propergol (Fig. 4-1), des comportements instables aérodynamiques ont été identifiés. En effet, les premiers tirs du moteur MPS230 d'ARIANE 5 (dont les dimensions sont conséquentes avec plus de 23 mètres de long) ont souligné la présence d'oscillations de faibles amplitudes auto-entretenues de pression et de poussée. Des essais au sol ont révélé des niveaux de 0,5% pour les oscillations de pression 0 à crête engendrant des oscillations de poussée d'environ 5%. Bien que la faiblesse de ces niveaux ne semble pas compromettre la mission pour laquelle le propulseur à poudre a été dimensionné, les oscillations peuvent, par transmission par la structure du lanceur, se propager à la charge utile et éventuellement l'endommager.

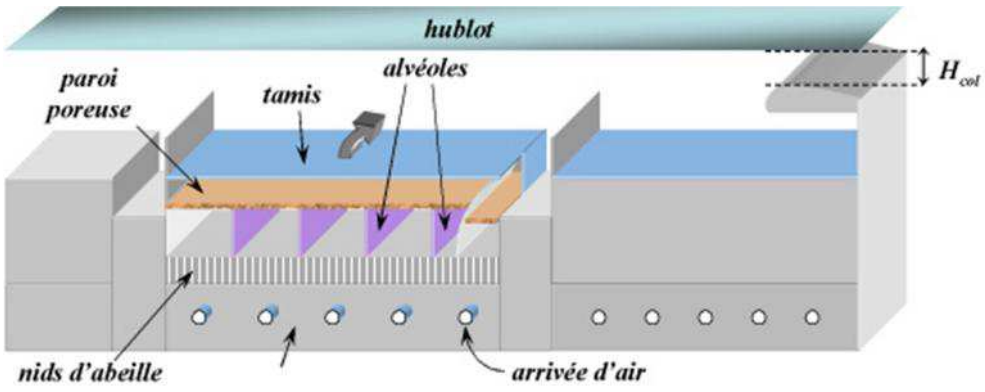


Fig. 4-1 : Schéma de principe d'une géométrie interne avec présence de protections thermiques – montage MICAT 1

De plus, sachant que les moteurs fonctionnent par pair, un comportement instable peut s'amplifier en cas d'oscillations entre les moteurs à poudre. D'un point de vue théorique, les analyses par des calculs acoustiques classiques ne permettaient pas de produire le comportement de ces moteurs [68], de tels modèles étant basés sur une méthode de linéarisation des bilans acoustiques. De nouvelles sources de bruit sont donc ainsi mises en jeu. Sauf erreur de notre part, Dunlap et Brown [69] furent les premiers à associer les instabilités de nature acoustique avec des mécanismes d'écoulements tourbillonnaires. En effet, à partir d'une maquette à échelle réduite, l'excitation de l'acoustique de la chambre a été identifiée par le mécanisme de détachement tourbillonnaire enclenché dans le sillage des protections thermiques.

Dans un moteur segmenté et pour éviter la génération d'écoulements à contre – courant, des matériaux s'ablatant moins vite que le propergol sont placés en amont de chaque bloc assurant ainsi la non génération de gaz brûlés sur ces surfaces. Au cours du tir, les matériaux de protection thermique jouent littéralement le rôle d'obstacle à l'écoulement des gaz brulés et donc favorise le développement de zones fortement cisaillées. Le sillage imposé par les protections thermiques est donc le siège d'un cisaillement intense au sein duquel des structures tourbillonnaires se développent et peuvent interagir avec l'acoustique de la chambre. Sous certaines conditions, un véritable couplage acoustique – tourbillon peut s'établir et générer des niveaux de fluctuations auto-entretenues. Comme l'a souligné Vuillot [10] à partir de simulations numériques, les sources tourbillonnaires au sein de géométries internes des moteurs à propergol solide sont multiples :

- à l'arrière des protubérations thermiques (i.e. protection thermique),
- dans les angles des blocs de propergol pour certains chargements,
- au voisinage des blocs débitants.

Ces différentes sources de couplage aéroacoustique sont schématiquement décrites Fig. 4-2. Alors que les deux premières sources sont liées à la naissance d'un cisaillement, les tourbillons de paroi ont été particulièrement difficiles à identifier et sauf erreur de notre part, leur existence a été initialement soulignée par des travaux numériques [10]. Leur existence a également été identifiée à partir d'expériences gaz froid réalisée sur la base du montage VALDO [70]. En fait, les conditions d'expérimentation sont évidemment sévères expliquant

l'intérêt porté par les chercheurs sur les moyens d'investigations numériques et les simulations expérimentales en gaz froid. Un montage d'investigation couplage acoustique tourbillon (MICAT), qui servira de référence pour un des cas de validation par la suite, a permis d'étudier les mécanismes aéroacoustiques [71]. Un parallèle entre les essais gaz froid et un tir sur banc d'essai [72] a souligné toute la consistance et la pertinence des travaux gaz froid dans le cadre des instabilités au sein des moteurs à propergol solide. Comment s'organisent alors ces instabilités observées ?

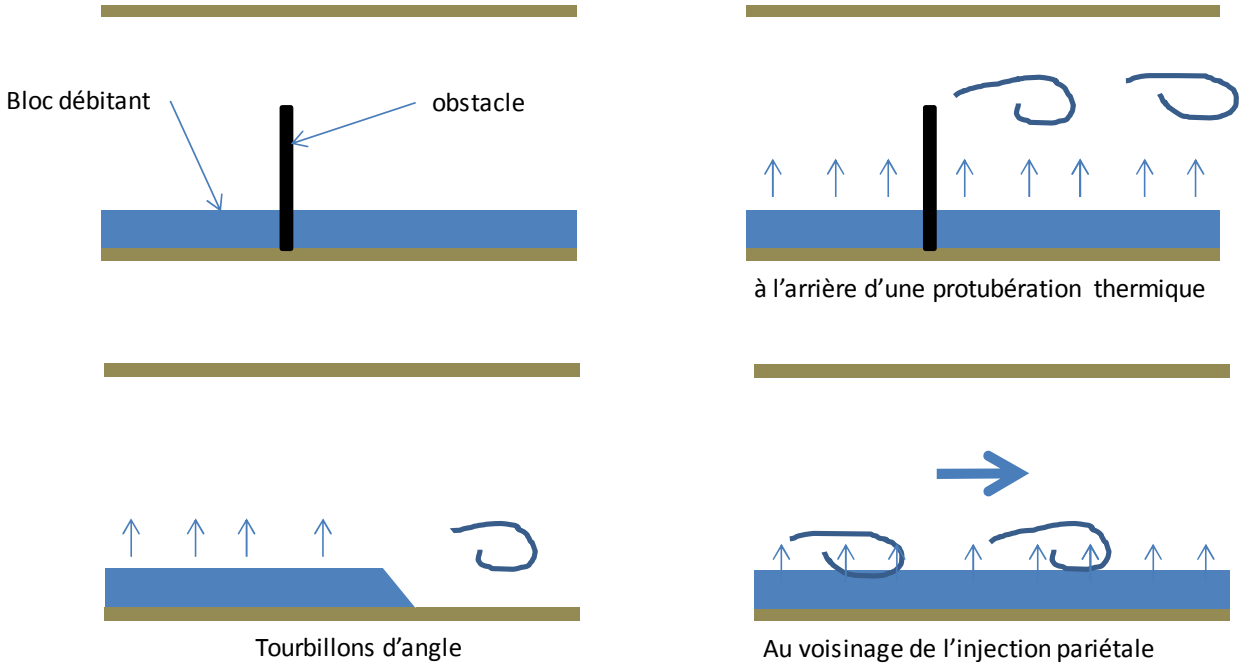


Fig. 4-2 : Recensement schématique des configurations engendrant potentiellement des instabilités tourbillonnaires

Dans les zones de cisaillement intense se créent des enroulements tourbillonnaires se convectant vers la tuyère qui s'impactent sur le fond arrière constitué de la tuyère. L'impact tourbillonnaire crée une onde de pression qui se propage vers le fond avant et va, au voisinage de la zone dynamiquement perturbée, forcer le tourbillon à se créer : l'acoustique force donc la dynamique. Par contre, les fréquences excitées de l'acoustique sont proches d'un mode acoustique et des variations des conditions dynamiques jouent sur la fréquence. Par exemple, Vetel et al. [73] modifient les conditions dynamiques en modulant la hauteur de la tuyère au cours d'essai sur le banc gaz froid MICAT ; ils ont constaté que la fréquence la plus énergétique évolue au voisinage des modes acoustiques ; la dynamique de l'écoulement agit donc sur la réponse acoustique et il s'en suit un véritable couplage. Dans un tel contexte,

il est intéressant d'identifier l'aptitude de l'outil numérique à appréhender de tels mécanismes complexes. Ayant à disposition l'ensemble des données MICAT, ce cas test, bien que complexe, s'est naturellement imposé comme cas test de validation.

4.1.2 Mécanismes et couplage en gaz froid

Le montage MICAT est un montage gaz froid à l'échelle 1/40 d'un moteur d'appoint de propergol solide reproduisant les principales caractéristiques géométriques internes : segmentation des blocs, tuyère intégré, protection thermique… Le but principal d'un tel montage étant d'appréhender les mécanismes d'instabilités, des simplifications d'opérabilité expérimentale ont également été introduites :

- géométrie 2D plane,
- fluide est de l'air à température ambiante,
- interchangeabilité de la géométrie interne afin de simuler plusieurs instants de la vie du propulseur.

Comme Vetel [74] l'indique clairement, les essais MICAT ont pour objectif d'appréhender les mécanismes de base sans tenter de reproduire les niveaux recueillis au sein des moteurs réels. Les fondements de la maquette gaz froid sont de conserver les nombres de Strouhal et de Mach afin de reproduire les conditions d'instabilité de la couche de cisaillement s'établissant dans le sillage de la protection thermique. Freymuth [75] a également souligné que l'influence d'une géométrie 2D plane ou cylindrique sur les mécanismes d'instabilité tourbillonnaire était du second ordre ; la forte corrélation soulignée entre des essais MICAT dédiés et des essais de tir d'un moteur [72] valide cette hypothèse. Une hypothèse forte également appliquée à la fois aux essais gaz froid et aux simulations numériques concerne la géométrie interne considérée comme fixe. En effet, et bien que la géométrie interne d'un propulseur évolue de manière significative au cours d'un tir, consommation des blocs de propergol oblige, les temps caractéristiques d'instabilité sont bien plus faibles que les temps de variation géométrique liée à la consommation du propergol. La vie des écoulements au cours d'un tir n'est donc pas simulée en continue mais plutôt en figeant des géométries caractéristiques d'instants discrets ! Dans le cadre du montage MICAT, deux configurations

géométriques ont plus particulièrement été mises en évidence, les configurations dites *Mi combustion* et *Fin combustion*.

4.1.2.1 Configuration Fin combustion

Comme son nom en témoigne, la configuration dit *Fin combustion* a été dimensionnée en supposant que la quasi – intégralité du propergol avait été consommée. Cette étape est sensible car l'inertie liée à la masse du propulseur s'est considérablement réduite. L'ensemble des paramètres géométriques est donnée Fig. 4-3. En se reportant aux résultats expérimentaux [74], cette configuration est principalement caractérisée par un comportement fortement instationnaire et laminaire. Les calculs proposés ont donc alors été basés sur une approche de type Navier-Stoke 2D, le but étant d'optimiser au mieux les temps CPU. Le Tableau 4-1 liste les différentes conditions aux limites aussi que les paramètres géométriques requis.

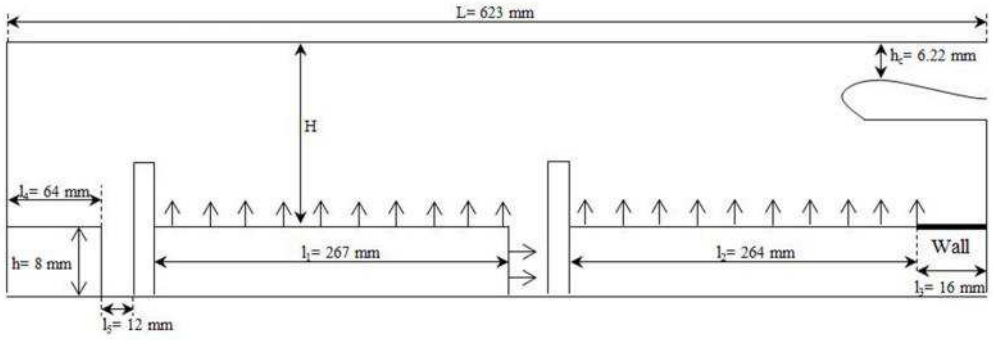


Fig. 4-3 : Géométrie de MICAT en 2D

Caractéristiques de résolution spatiale			
L_x L_y	623 mm 44 mm	Δx en *mm* Δy en *mm*	0.5 mm 0.5 mm
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa Débit injecté en kg/m^2/s	101325 3.8314
Niveau de Raffinement	2 suivant x 2 suivant y		

Tableau 4-1 : Paramètres de calcul MICAT

Sachant que des mécanismes tourbillonnaires sont attendus, la résolution spatiale du maillage a été suffisamment fine pour assurer une discrétisation spatiale suffisante. La Fig. 4-4 offre une vue détaillée du maillage avec une résolution de $0.5.10^{-3}$ m x $0.5.10^{-3}$ m au sein de l'écoulement principal. Au niveau de la protection thermique (obstacle dans le cas MICAT) et des blocs débitants de la tuyère, une résolution automatique a été réalisée avec un raffinement de niveau 2 i.e. une réduction de la discrétisation spatiale d'un facteur 4 soit alors un maillage *1246x88*.

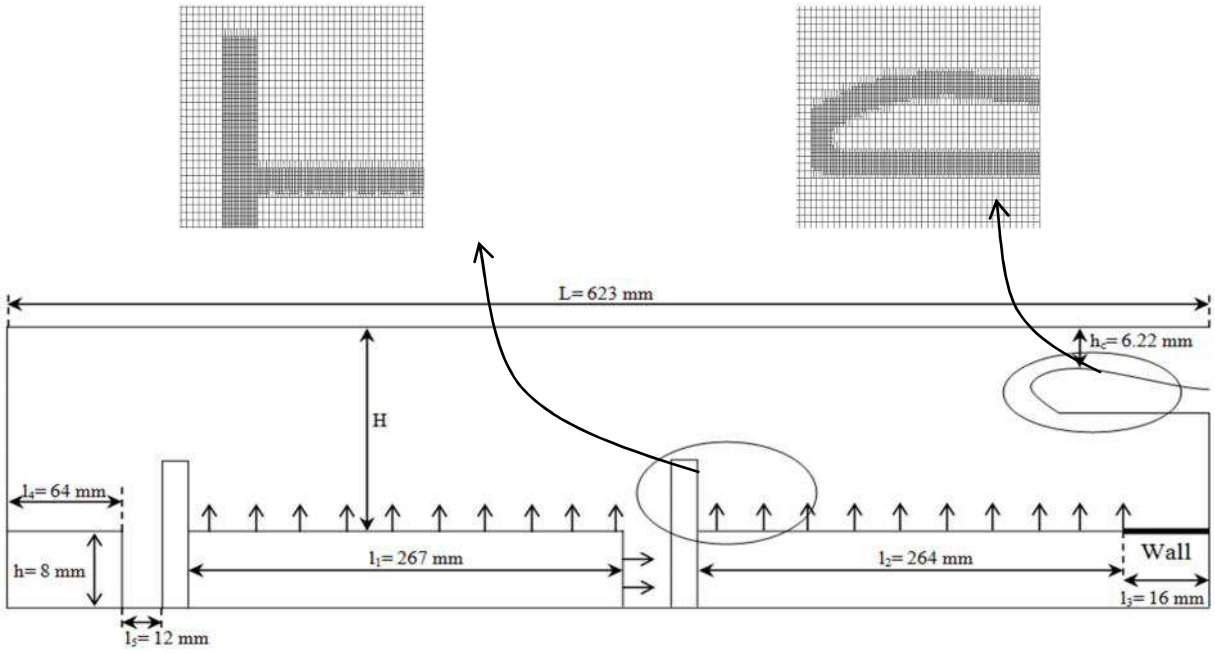


Fig. 4-4 : Maillage de MICAT en 2D

La Fig. 4-5 présente l'évolution de la pression fond-avant en fonction du temps. Comme le souligne l'évolution de cette dernière, une valeur moyenne est rapidement atteinte alors que des fluctuations sont créées autour de cette valeur moyenne. Les niveaux de fluctuations recueillies sont de l'ordre de +/- 1400 Pa environ soient des niveaux de pression relative par rapport à la pression moyenne obtenue de 0.90%. Pour identifier les fréquences excitées, une densité spectrale de puissance est estimée à partir de 147375 points avec une fréquence d'échantillonnage de f = 1.4x10^6 Hz environ ; une résolution de 9.7 Hz environ est donc disponible et la Fig. 4-6 présente la répartition spectrale ainsi obtenue. Le pic de fréquence énergétique est atteint à 257 Hz et cette dernière correspond à la fréquence du premier mode acoustique fermé-fermé dont la valeur théorique est :

$$f_n = \frac{n2c}{L} \tag{4.1}$$

avec *c* la célérité du son et *L* distance entre fond-avant et tuyère, n correspondant au mode impliqué (n=1 étant le fondamental et n>1 représentant les hamoniques).

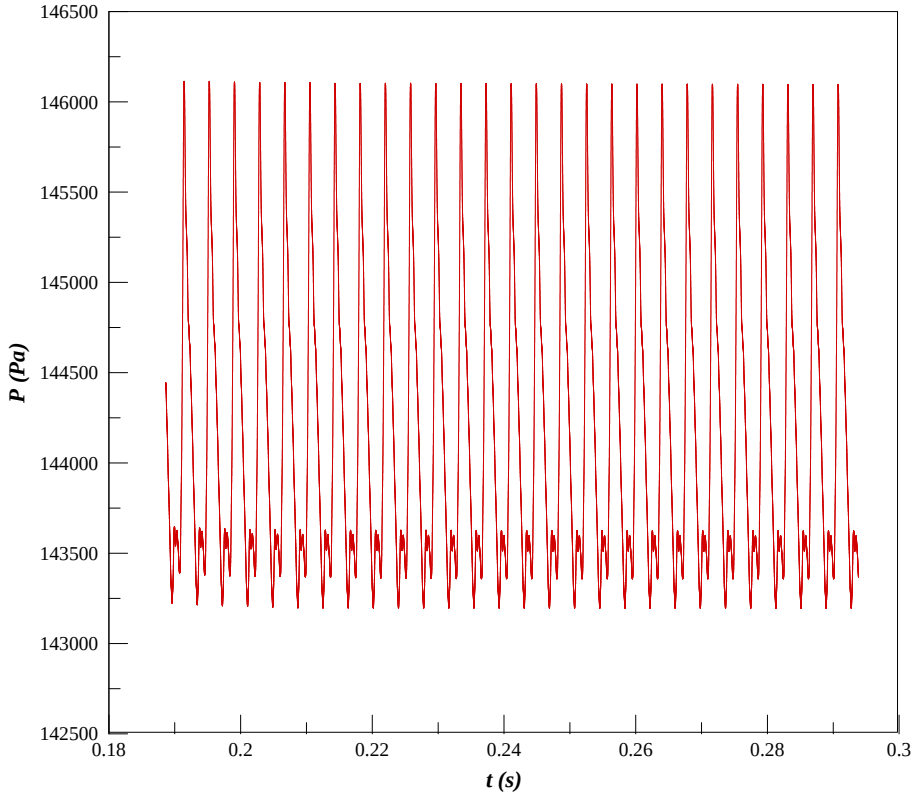


Fig. 4-5 : Signal de pression en fonction du temps de MICAT en 2D

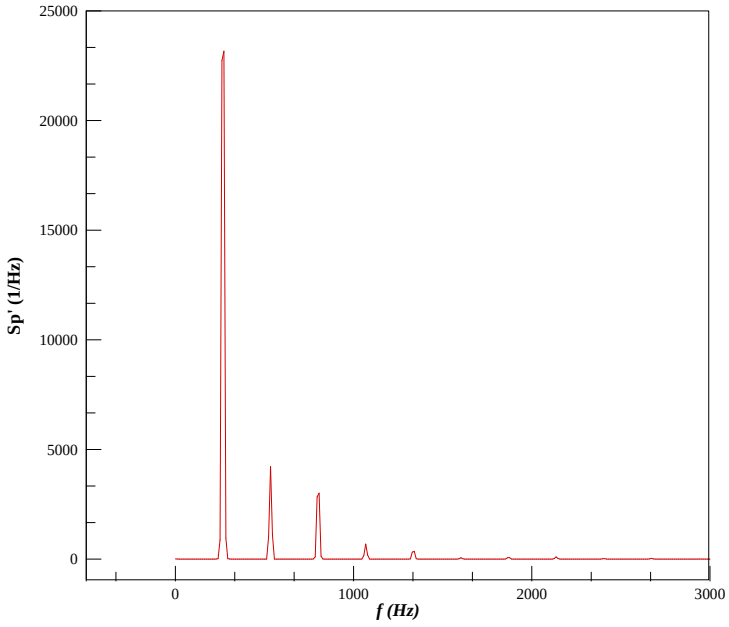


Fig. 4-6 : Spectre de Pression MICAT en 2D

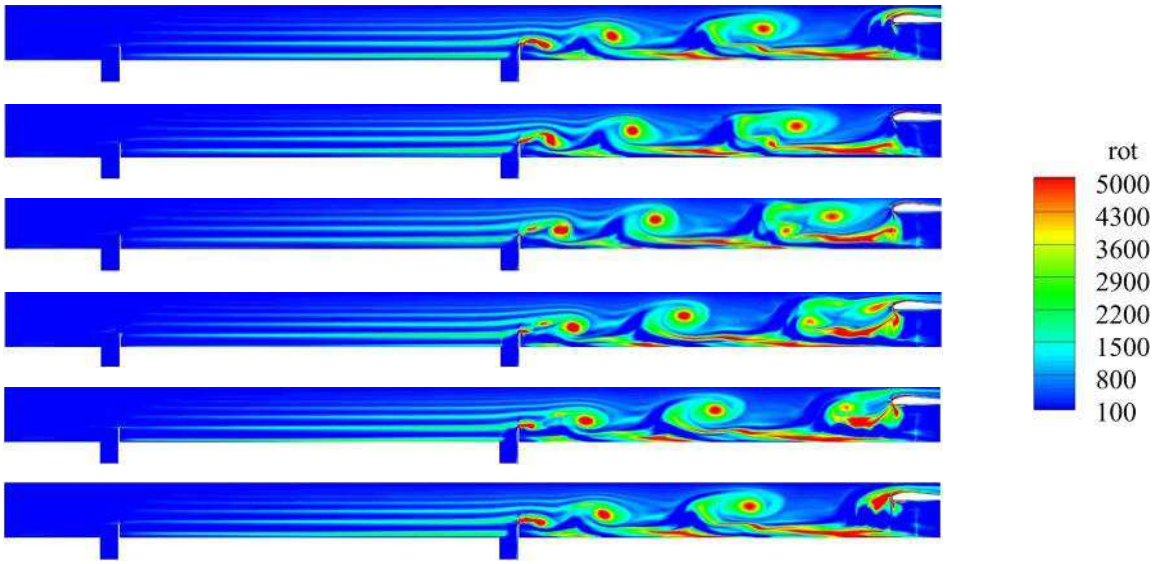


Fig. 4-7: Tourbillons MICAT en 2D

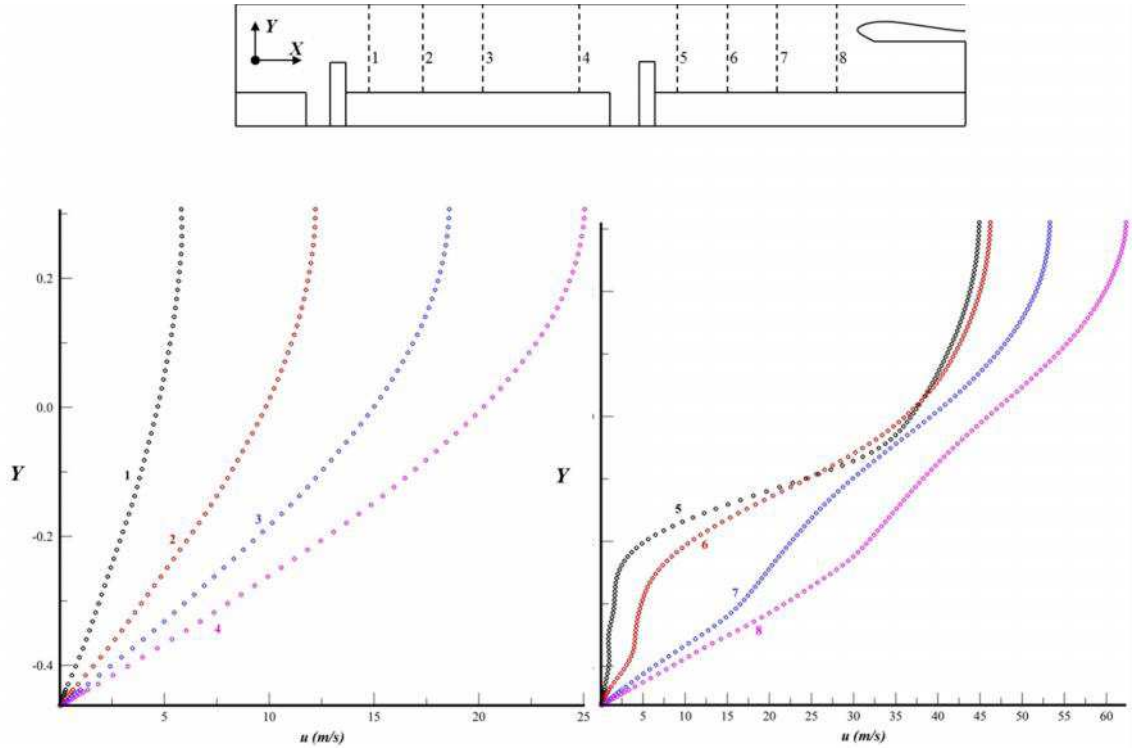


Fig. 4-8 : Profils de la composante longitudinale de vitesse moyenne dans le montage MICAT en 2D

Le mode fermé-fermé correspond à une condition de tuyère acoustiquement fermée et donc les bruits aérodynamiques sont piégés dans la chambre. Les conditions acoustiques des parois débitantes étant supposées parfaitement réfléchissantes, aucune perte acoustique n'est

supposée et ceci favorise l'excitation des modes harmoniques. Le spectre offre, en effet, des traces du second jusqu'à cinquième mode. En suivant l'évolution à plusieurs instants du champ de vorticité, séparés de $\Delta t=7.10^{-4}$ s, force est de constater que les structures tourbillonnaires sont générées dans le sillage de la protection thermique. Les tourbillons ainsi générés évoluent au sein de l'écoulement et se convectent jusqu'au nez de la tuyère. La fréquence de détachement correspond en fait à la fréquence du premier mode. L'excitation acoustique provient donc d'une forte interaction de tourbillons générés au sein de la couche de cisaillement dont la fréquence s'accorde sur un mode acoustique. Ce résultat est en parfait accord avec les résultats attendus, qu'ils soient numériques [74] ou bien expérimentaux [74]. Cet accord pression – vitesse provient en fait d'un véritable couplage (démontré notamment expérimentalement) pour lequel l'impact des structures tourbillonnaires génère du bruit acoustique et l'onde de pression en se propageant vers le fond-avant force la couche de cisaillement à s'organiser autour de cette fréquence. L'acoustique force ainsi la dynamique. De plus, une variation de la vitesse interne (expérimentalement réalisée par une variation de la hauteur de la tuyère) engendre un forçage de l'acoustique engendrant à son tour une variation de la fréquence de résonance. Dans notre approche numérique, force est de constater la présence d'un couplage et nous nous limiterons à de telles observations.

De plus, des langues de vorticité sont également détectées au voisinage de la paroi débitante. Ceci est lié à l'interaction des deux écoulements, écoulement principal et secondaire issus de l'injection pariétale. Ce mécanisme appelé vortex shedding pariétal [76], pour dénommer la génération des structures tourbillonnaires provenant de l'injection pariétale, est une spécificité des écoulements pariétaux et constitue également une caractéristique importante dans la stabilité des moteurs à propergol solide. En effet, comme on peut le discerner Fig. 4-7 au voisinage du fond-arrière, les structures pariétales s'en trouvent convectées vers la tuyère et vont, de la même manière que les tourbillons générés au sein de la couche de cisaillement, participer à la génération de bruit acoustique avec leur impact sur la tuyère. La configuration étudiée a été qualifiée de fortement résonante par Vetel et al. [74] qui avait souligné la possible fusion des deux mécanismes tourbillonnaires ; les résultats numériques alors obtenus soulignent le bon comportement de l'approche numérique proposée. A notre connaissance, l'utilisation d'un modèle numérique avec une méthode aux frontières immergées dédiée à la caractérisation des écoulements instables internes n'avait, jusque-là, jamais été réalisée. L'écoulement moyen a été également caractérisé en procédant à une moyenne sur $4.2\text{x}10^{-4}$ s et les champs ainsi obtenus s'accordent avec les résultats

attendus. D'un point de vue temps CPU des calculs ainsi mis en jeu, le calcul a été réalisé sur 32 processeurs pour un temps CPU de 45h pour 400000 itérations temporelles. Malgré quelques simplifications (non prise en compte du hublot supérieur), les résultats numériques ainsi obtenus offrent de fortes corrélations avec les observations expérimentales et soulignent ainsi l'intérêt de notre modélisation.

4.1.2.2 Configuration Mi combustion

Cette configuration a été dimensionnée avec l'hypothèse que 50% de la masse du propergol seulement soit consommée ; la principale modification géométrique concerne la hauteur de veine, passant de 38 à 26 mm en se référant aux grandeurs du montage MICAT. Un tel confinement modifie considérablement le comportement de la couche de cisaillement dont le comportement turbulent est alors prédominant [74]. La conduite d'une telle configuration avec une modélisation LES a été effectuée à partir de plusieurs codes numériques et les temps de calculs obtenus ont alors été conséquents. En fait, l'écoulement est piloté par deux mécanismes antagonistes ; l'intense cisaillement au sein de la couche de cisaillement conduisant à un comportement turbulent et l'effet laminarisant de l'injection pariétale. Obtenir alors des résultats numériques consistant demande des ressources CPU conséquentes que nous n'avons pas pu trouver. Pour limiter les temps de calculs, une approche turbulente avec modèle RANS q-ω doit donc être privilégiée.

Le déploiement des calculs RANS n'apportant cependant pas d'informations supplémentaires vis-à-vis du modèle, les résultats RANS ne seront pas présentés par la suite, l'idée étant plutôt de se consacrer à la prise en compte des écoulements de propulseurs et de très vite tenter de caractériser les frontières mobiles que représentent les blocs de propergol.

4.1.3 Mécanismes et couplage en gaz chaud

L'objet de nos développements réside principalement dans la caractérisation des moteurs à propergol solide et bien que MICAT soit une maquette de validation des instabilités susceptibles d'intervenir au sein de tels moteurs, un certain nombre de paramètres ne sont évidemment pas pris en compte. Il est alors apparu intéressant de prolonger l'exploitation de notre outil numérique sur des configurations typiques de moteur. Le cas test numérique MAVOT [10] a été considéré comme étant un excellent candidat. En effet,

Lupaglazoff et Vuillot [10] ont étudié le cas MAVOT avec un outil de volumes finis classique au sein d'une géométrie caractéristique d'un moteur fusée à propergol solide (Fig. 4-9). De plus, comme les auteurs l'ont également effectué, les configurations géométriques 2D et axisymétrique ont été testées. Quelle que soit la géométrie considérée, la principale caractéristique du cas MAVOT est la présence d'un bloc de propergol unique offrant un angle abrupt au niveau de la partie arrière du bloc. Le fond-arrière est, quant à lui, constitué d'une tuyère intégrée à la géométrie.

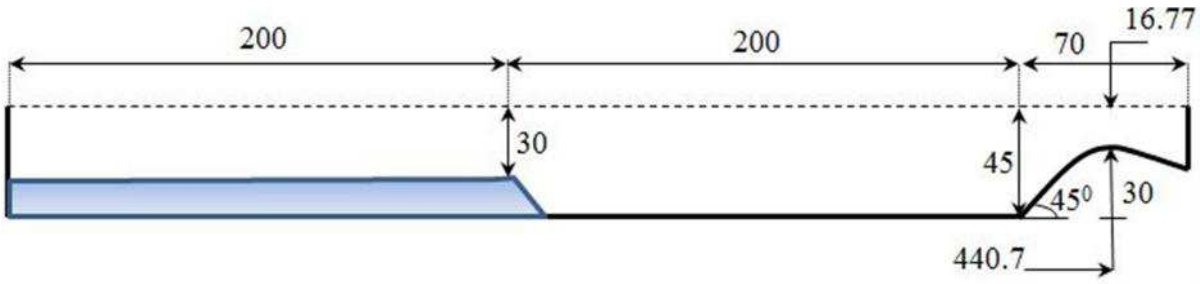


Fig. 4-9 : Géométrie de MAVOT en 2D

La configuration MAVOT correspond à une géométrie représentative d'un cas moteur au sein duquel le développement d'un cisaillement provoqué par la brusque interruption géométrique peut conduire à la naissance d'instabilités. De plus, un couplage du cisaillement avec l'acoustique peut être favorisé. En effet, alors que le premier mode acoustique est voisin de 1320 Hz, l'extrémité du bloc de propergol est localisée au milieu du moteur afin que la naissance de la couche de cisaillement soit placée à un maximum de vitesse acoustique. Le

Tableau 4-2 liste l'ensemble des paramètres et définit les conditions aux limites retenues. Pour ce calcul, une approche Navier-Stokes 2D laminaire instationnaire a été réalisée avec un maillage régulier de 1524x144 soit une résolution spatiale d'environ 3.10^{-4}m x $3{,}125.10^{-4}$m dans les directions longitudinale et latérale respectivement.

Concernant les conditions au niveau du propergol solide, une loi classique de type loi de Veille [77] a été imposée mais de manière constante. En effet, nous considérons la géométrie fixe pour l'instant bien que l'idée demeure de bénéficier de la méthode IBM pour le traitement des parois mobiles. Une vitesse de régression constante égale à 13 mm/s est imposée. En supposant la température de flamme adiabatique de 2977 K, les débits de génération des gaz brûlés sont estimés (Cf. 2.6 condition d'injection pariétale). En fait, il

s’agit ni plus ni moins que d’une condition de débit imposé, le débit étant déterminé par la loi de Veille.

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x	470 mm	Δx en mm	0.3084
L_y	45 mm	Δy en mm	0.3125
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa	101325

Tableau 4-2 : Paramètres requis pour le calcul MAVOT

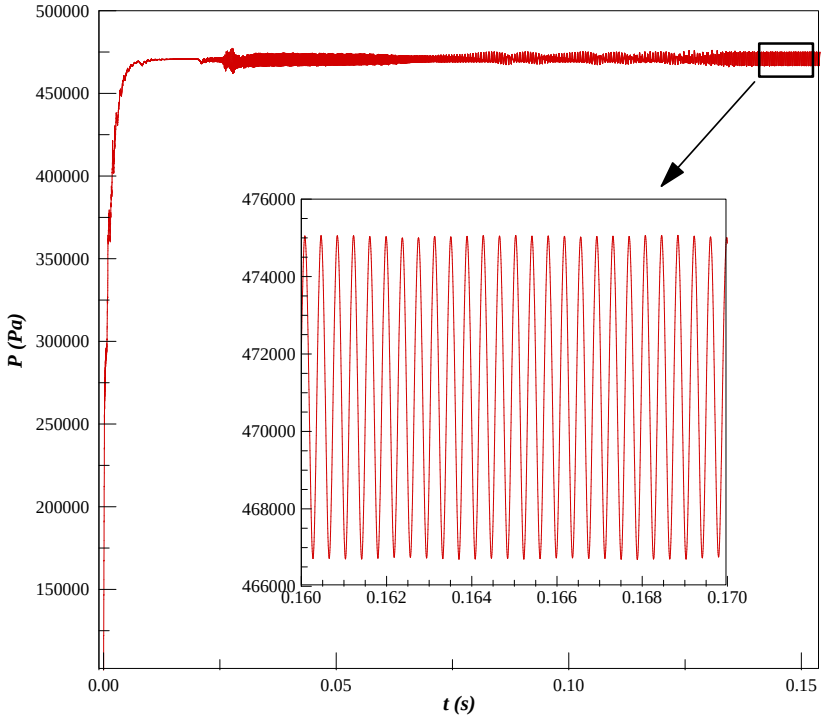


Fig. 4-10 : Pression en fonction du temps

En partant des conditions initiales indiquées (vitesse nulle, pression atmosphérique et température constante égale à la température ambiante), le calcul a été initié et l’historique de la pression en fonction du temps est présentée Fig. 4-10. Force est de constater que la montée en pression est très rapide et que moins de 10 ms sont nécessaires pour atteindre la valeur de pression de 4.65 atm. Cette valeur est quasiment égale à celle obtenue par une approche numérique classique [10], un écart de 0.96% seulement étant observé. De part et d’autre de

cette valeur moyenne, la pression subit des variations régulières quasiment sinusoïdales avec une amplitude de 8250 Pa. Un phénomène d'oscillations auto-entrenues est donc mis en place. La Fig. 4-12 présente les champs instantanés de la composante Ω_Z du vecteur rotation et avec les champs ainsi présentés, on peut suivre l'ondulation des lignes de courant jusqu'à la naissance des structures tourbillonnaires ainsi que leur convection jusqu'à leur impact. L'analyse spectacle du signal de pression souligne que la fréquence excitée correspond à une valeur de 2560 Hz i.e. fréquence s'apparentant au second mode acoustique longitudinal.

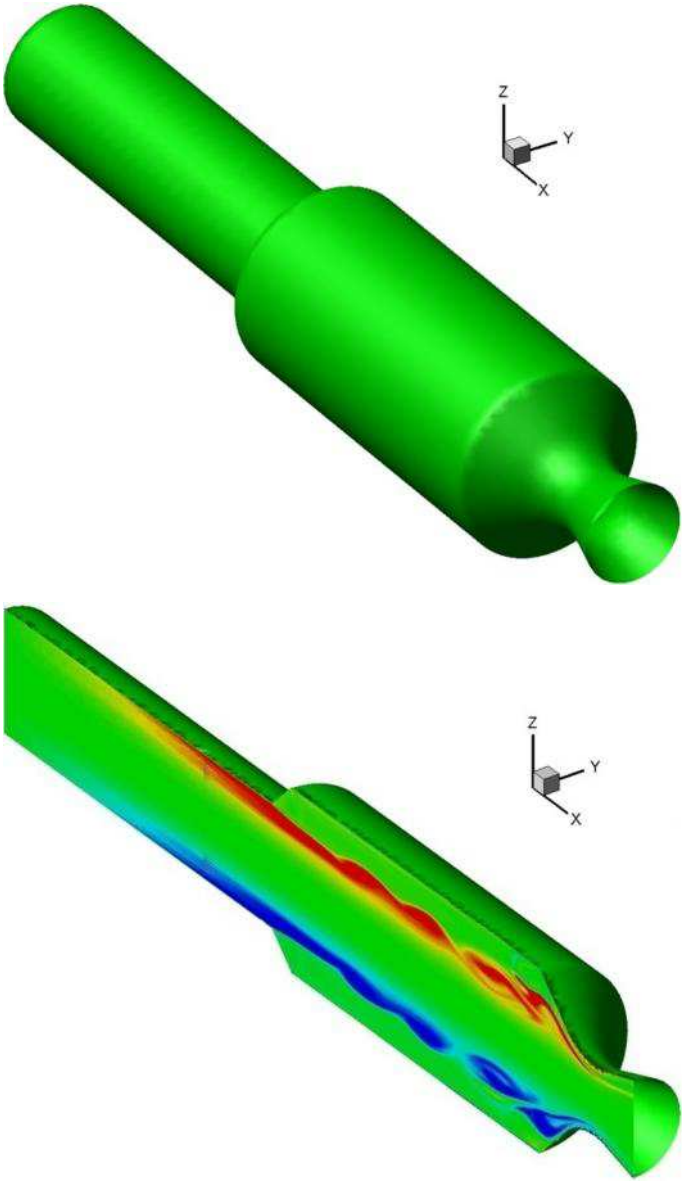


Fig. 4-11 : Géométrie de MAVOT en 3D

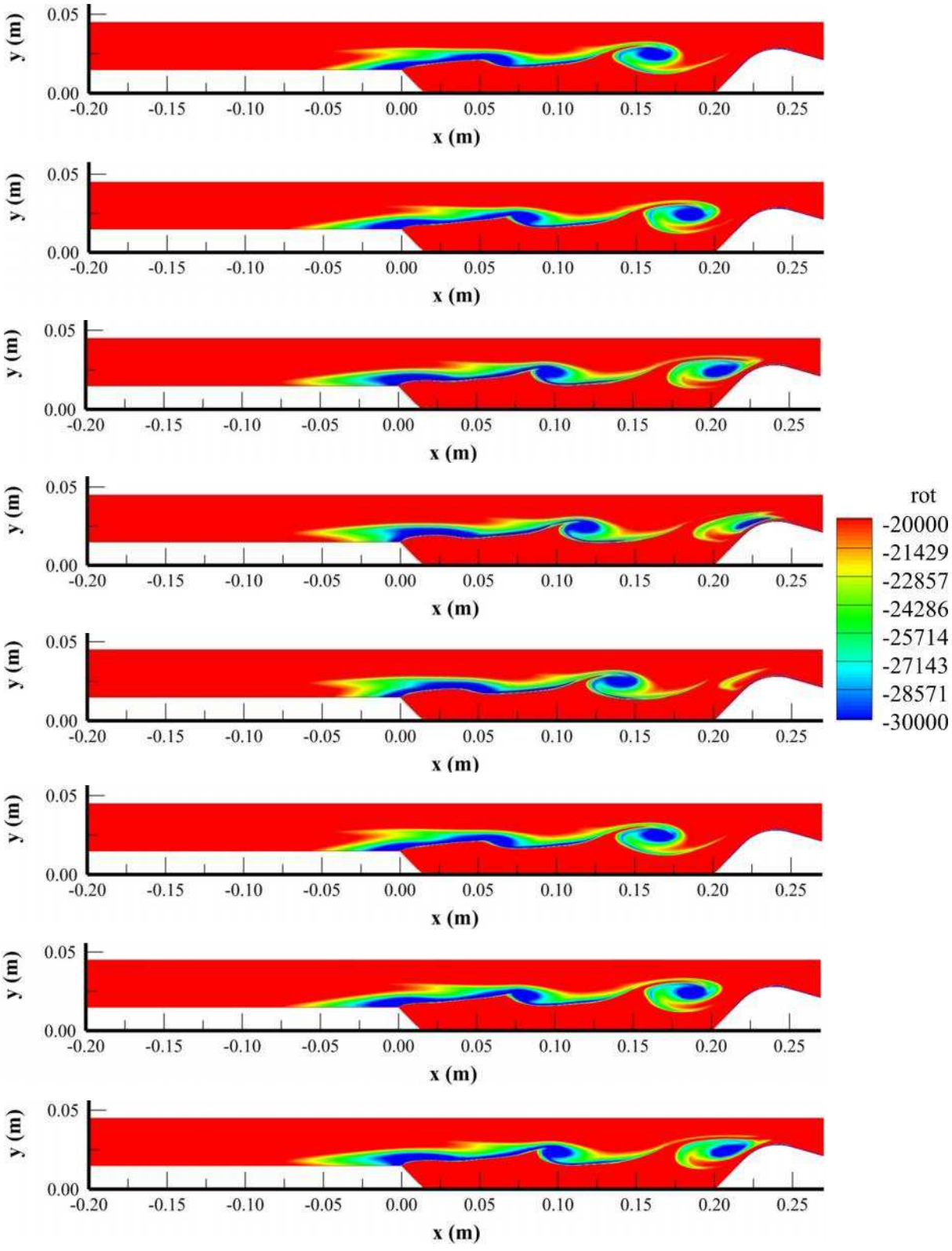


Fig. 4-12 : Champ de tourbillons entre t_1=0.19423 s et t_9=0.19462 s avec un temps de séparation entre chaque image égal à $\Delta t = 7.8125\times10^{-5}$ s)

En parallèle, la configuration MAVOT a été traitée en 3D. En fait, les conditions ont été intégralement reprises (type de propergol, dimensions caractéristiques,…) sauf que la

géométrie correspond à celle d'un moteur indiqué Fig. 4-11. Le Tableau 4-3 liste les caractéristiques du maillage retenu alors que la Fig. 4-13 présente, dans le plan médian, la distribution du champ instantané de la composante du vecteur tourbillon Ω_Z . Un comportement similaire de la dynamique des tourbillons par rapport au cas 2D est observé. On note cependant que les deux structures formées Fig. 4-14 (en 3D) le sont de manière plus marquée spatialement. En fait, les vitesses de convection des structures atteignent 243 m/s et 140 m/s pour les cas 2D plan et 3D asymétriques, valeurs corrélées par [9]. Le confinement imposé par la révolution est beaucoup plus significatif et les valeurs moyennes de la pression fond avant sont de 4.65 atm et 16.17 atm pour les cas 2D et 3D respectivement. Ces valeurs corrèlent celles de la littérature avec des différences de 0.96% et 1.94% sur les valeurs de pression attendues.

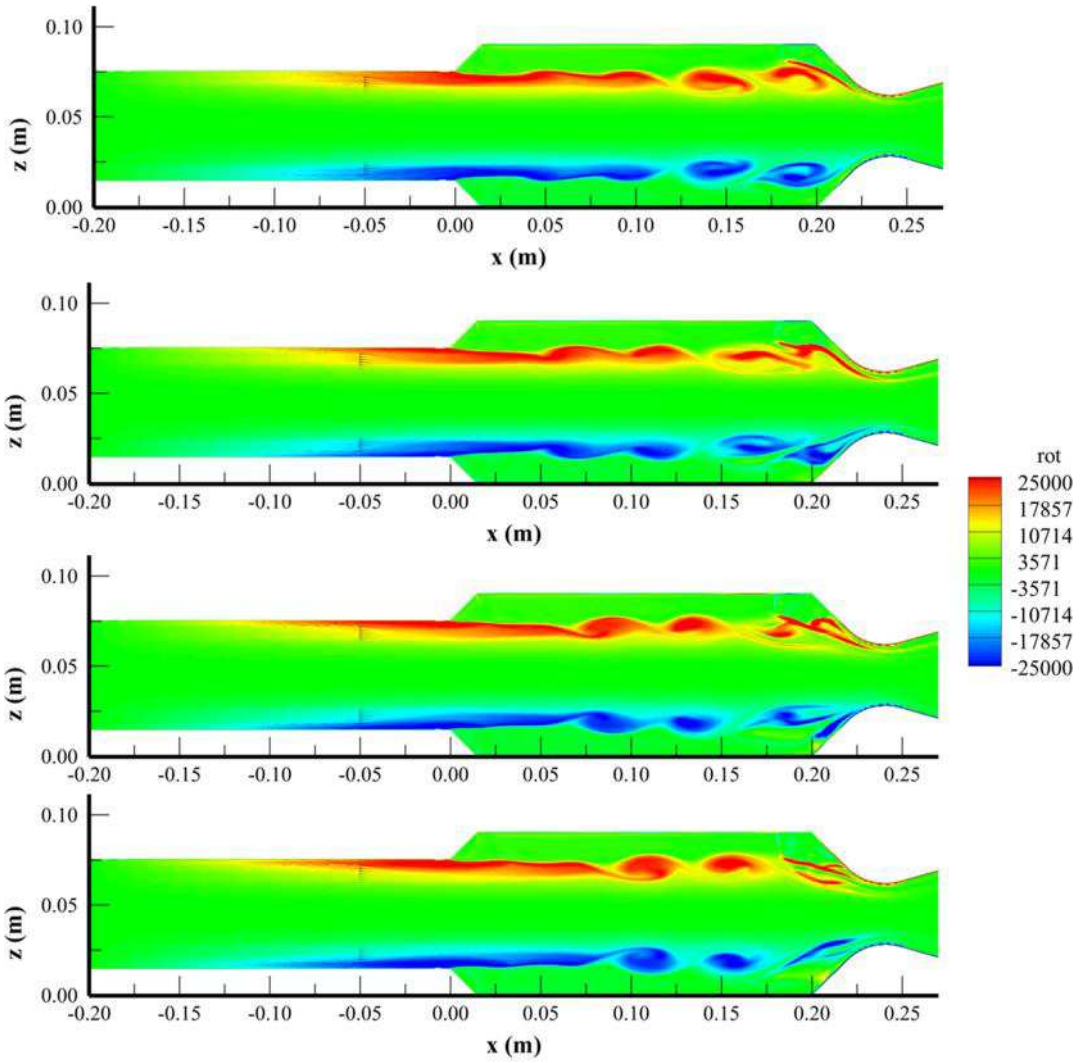


Fig. 4-13 : Tourbillons au sein du moteur MAVOT dans le plan médian obtenus dans le cas de calcul 3D

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x	544.48 mm	Δx en *mm*	7.5622
L_y	182.4 mm	Δy en *mm*	7.6000
L_z	182.4 mm	Δz en *mm*	7.6000
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa	327600
Niveau de Raffinement	2 suivant x	2 suivant y	2 suivant z

Tableau 4-3 : Paramètres de calcul MAVOT 3D

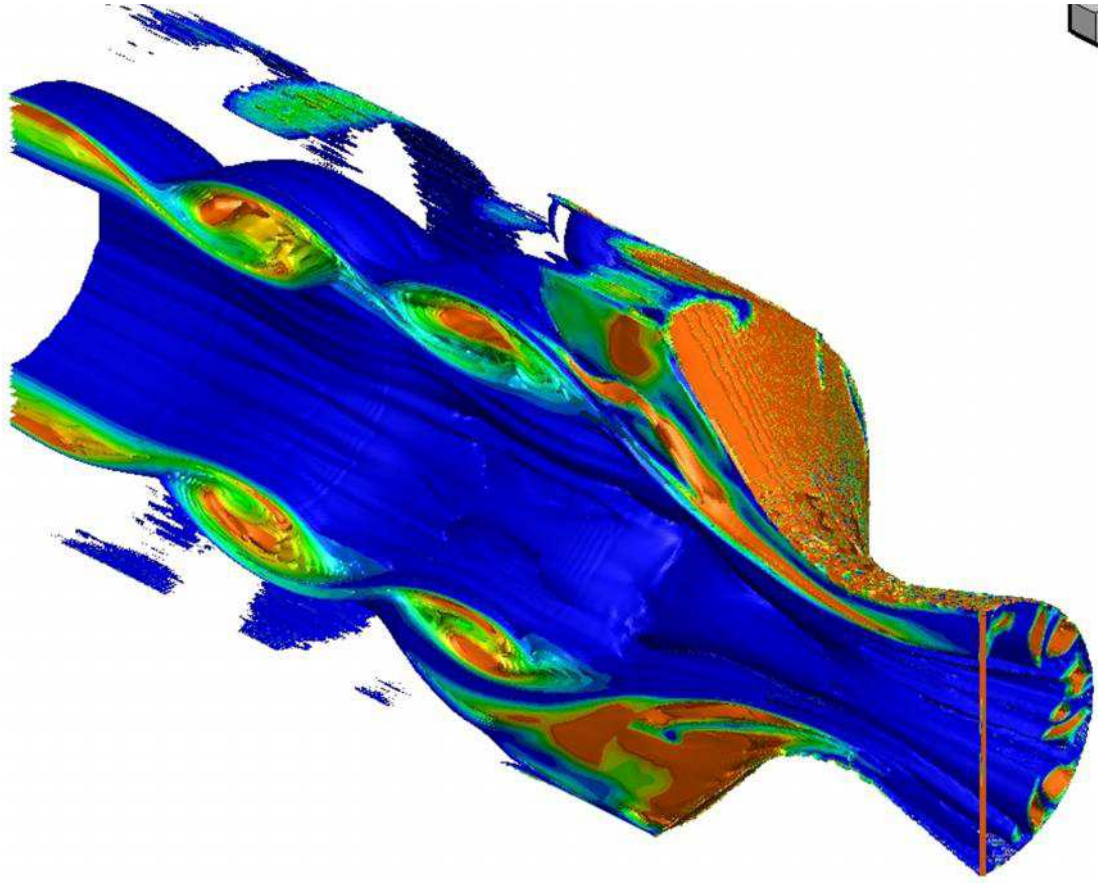


Fig. 4-14 : Champ de vorticité instantanés en 3D de la configuration MAVOT

4.2 Simulation de moteur interne

4.2.1 Prise en compte de la régression du propergol

Lors de la combustion du propergol, des phénomènes complexes de combustion du propergol interviennent sur une épaisseur très faible (quelques dizaines de microns) et au voisinage immédiat du bloc solide. Dans cette zone, les gradients sont intenses et un changement d'état s'opère avec des réactions chimiques très exothermiques. Considérant une aussi grande complexité mettant en jeu des multi-espèces et des échelles variables, la combustion et la régression du propergol sont pour la majeure partie du temps caractérisées par une loi globale, indépendantes des conditions internes de l'écoulement mais uniquement liées à la pression régnant dans la chambre. La loi de comportement a été établie par Veille [77,78] qui se désigne sous la forme :

$$r = aP^n \tag{4.2}$$

avec a et n les coefficients et P la pression dans la chambre. Cette loi correspond à la vitesse de régression du propergol au cours du tir et le débit des gaz générés au cours de la combustion sont :

$$\dot{m} = \rho_{propergol} \cdot r = \rho_{propergol} \cdot aP^n \tag{4.3}$$

Les coefficients dépendent directement des capacités énergétiques du propergol, ces derniers sont déterminés expérimentalement à partir d'essais propres, comme ceux menés dans le moteur «Cigarette» (Cf. 4.3.2). Le débit de gaz est supposé être généré normalement à la paroi et cette loi est qualifiée de stationnaire dans la mesure où les fluctuations rapides de la pression en fonction du temps ne sont pas considérées. Pour une prise en compte de la composante instationnaire, une réponse impulsionnelle du propergol doit être construite. Cependant, l'obtention de telles lois n'est pas aisée à obtenir mais sa prise en compte est facile à intégrer dans l'approche numérique. En parallèle, un autre phénomène joue un rôle déterminant sur l'augmentation de la vitesse de régression, le phénomène de combustion érosive [79,80,81]. Physiquement, cette survitesse est due à l'augmentation des transferts thermiques liés à la présence d'un écoulement principal. Plusieurs modèles existent mais ces derniers n'ont pas été intégrés. En effet, que ce soit la loi instationnaire ou les mécanismes de combustion érosive, à partir du moment où l'approche numérique est capable de traiter la régression de type «loi de Veille», alors il n'y a aucun obstacle à améliorer la description physique des lois de comportement plus prédictives. Ainsi, dans la suite de notre travail, la

prise en compte de la régression de la surface du propergol sera supposée s'assimiler à la loi de Veille.

4.2.2 Simulation d'un moteur d'essai : BATES

Comme nous venons de le souligner, le développement des performances balistiques en propulsion nécessite une multitude d'études ce qui explique le recours à des moteurs tests comme le moteur BATES [78,82]. Ce dernier est composé d'un bloc de propergol avec des dimensions physiques relativement petites, assurant techniquement parlant la réalisation d'une série d'essais de manière assez aisée à prix abordable. La Fig. 4-15 présente une coupe médiane du moteur BATES ainsi que ses principales dimensions.

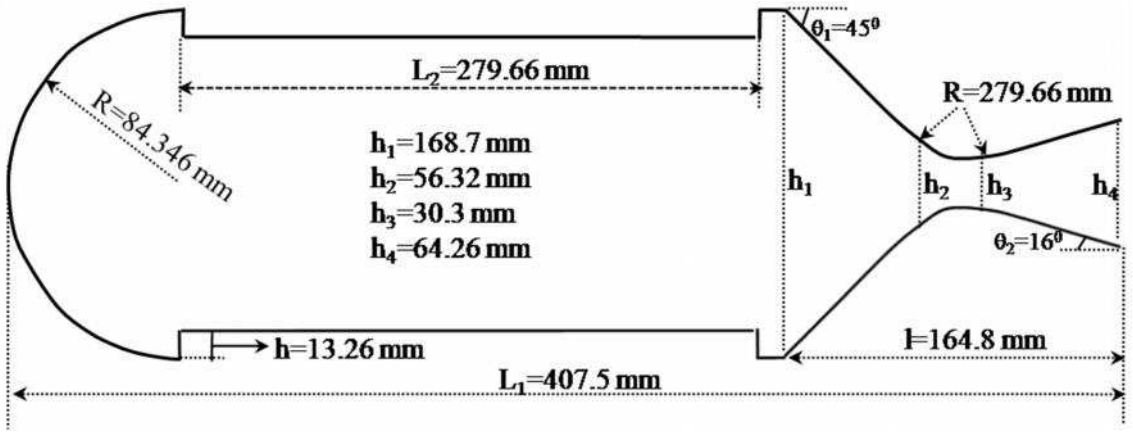


Fig. 4-15 : Schématic de BATES 7

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x	544.48 mm	Δx en *mm*	7.5622
L_y	182.4 mm	Δy en *mm*	7.6000
L_z	182.4 mm	Δz en *mm*	7.6000
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa	327600
Niveau de Raffinement	2 suivant x	2 suivant y	2 suivant z

Tableau 4-4 : Paramètre de calcul BATES

Pour assurer une performance de la balistique interne représentative d'un moteur, la simulation a été conduite en 3D et la géométrie correspond exactement à la configuration 2D en effectuant une révolution complète autour de l'axe du moteur. La Fig. 4-16 présente une vue 3D de la configuration ainsi que des différentes conditions aux limites utilisées.

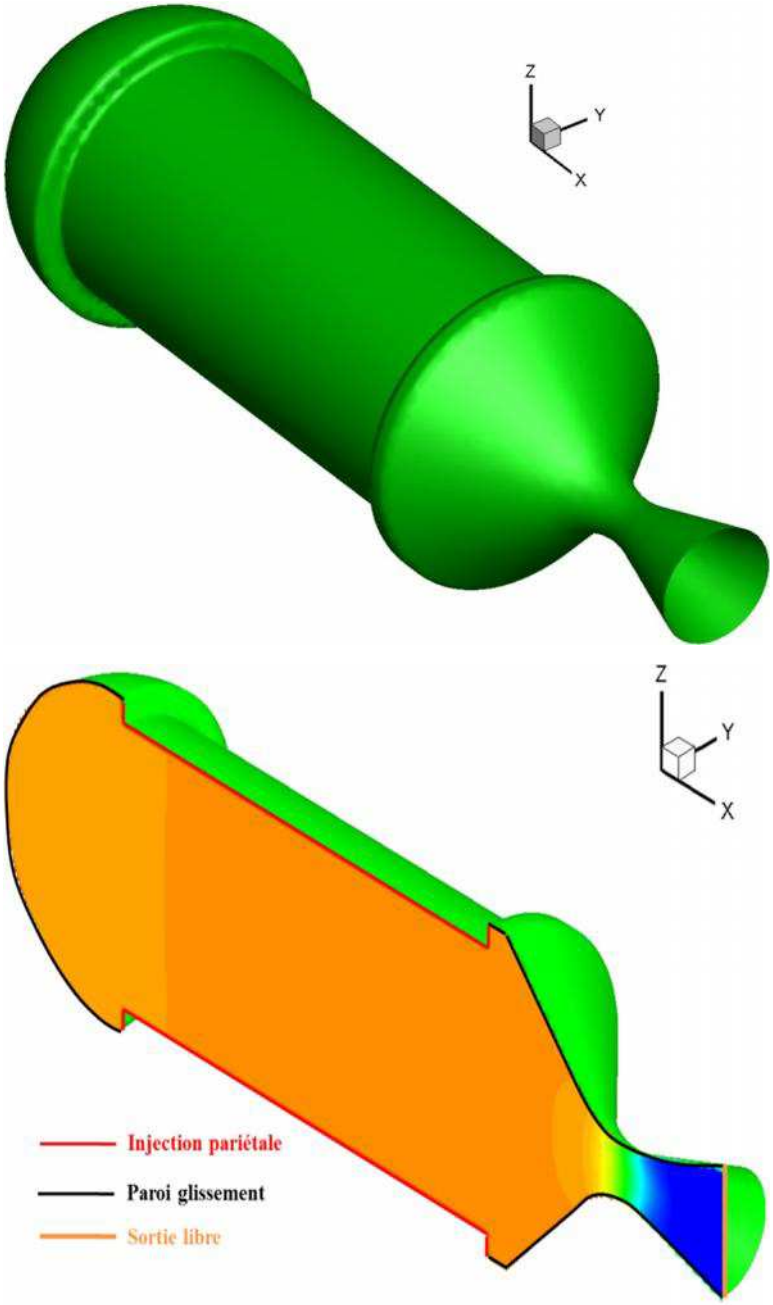


Fig. 4-16 : Conditions aux limites BATES 7

Pour les essais numériques réalisés, le comportement du propergol solide suit la loi de Veille avec les coefficients *a* et *n* correspondant respectivement à 0.625 et 0.67. L'ensemble des caractéristiques du calcul est donné dans le Tableau 4-4. Notons que ce cas de calcul a été

traité en 240 heures CPU sur 18 nœuds. La Fig. 4-17 présente dans le plan médian la pression moyenne et le nombre de Mach dans la chambre et le profil de ce dernier (Fig. 4-18) est comparé avec le nombre de Mach théorique [59] le long de l'axe. On constate une excellente corrélation et un comportement consistant de notre approche.

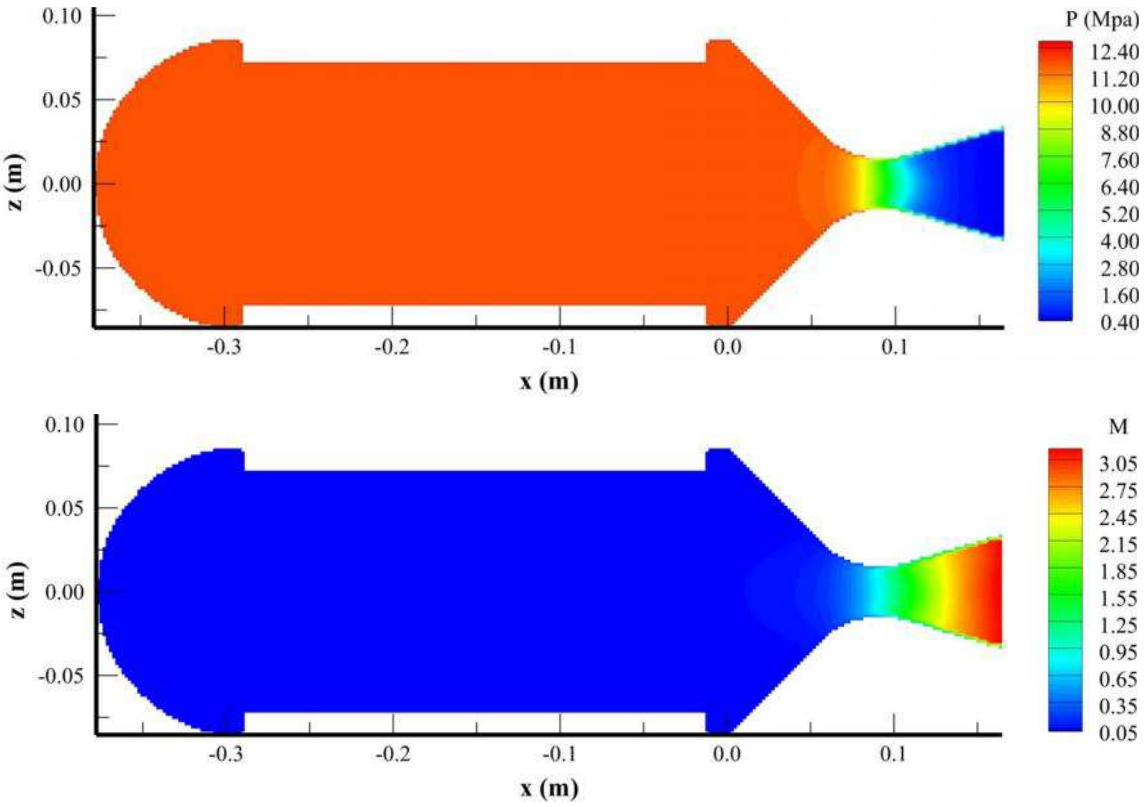


Fig. 4-17 : Pression et nombre de Mach de BATES 7

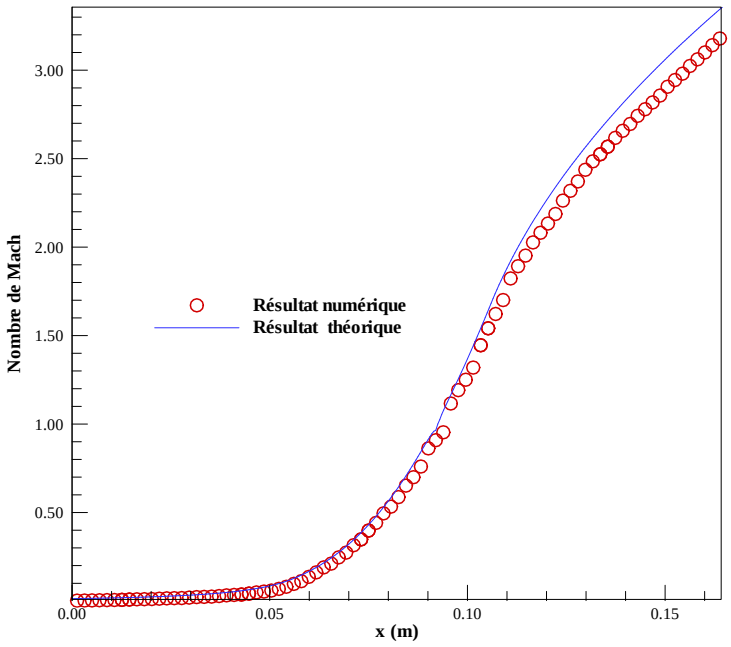


Fig. 4-18 : Profil du nombre de Mach sur l'axe du moteur BATES 3D

La Fig. 4-19 donne l'historique de la pression fond avant et force est de constater que l'écoulement interne atteint très rapidement une certaine stabilité, la pression moyenne de $11.66x10^5$ Pa étant parfaitement constante, cette valeur étant à rapprocher de la pression de $11.6x10^5$ Pa obtenue expérimentalement [78,82].

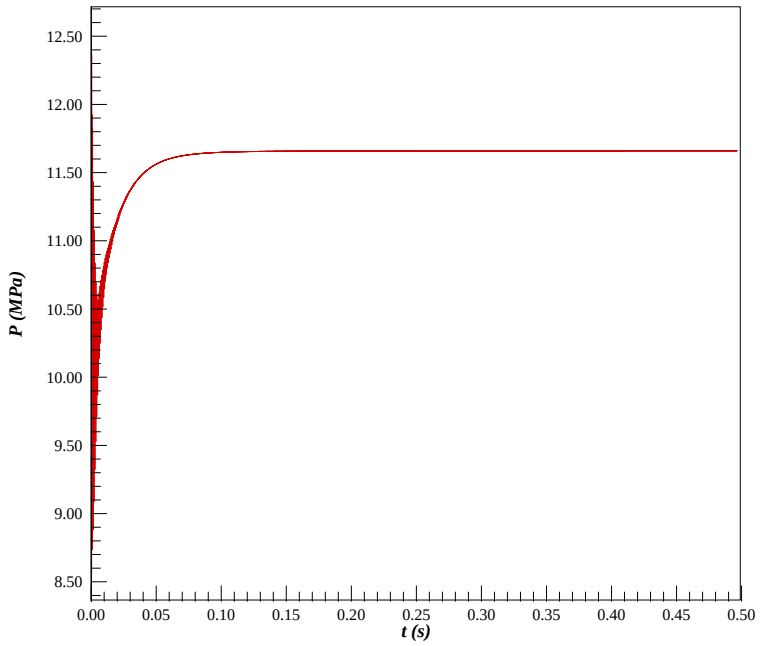


Fig. 4-19 : Pression au fond-avant en fonction du temps

4.3 Vers une modélisation instationnaire

Les travaux présentés jusqu'à présent concernent la modélisation des écoulements compressibles au sein des moteurs à propergol solide à partir d'une technique aux frontières immergées. L'analyse des instabilités aéroacoustiques (cas MICAT en gaz froid et MAVOT avec combustion du propergol) et des caractéristiques balistiques validées (propulseur BATES) ont permis de souligner l'intérêt du solveur ainsi mis en place. En effet, à partir d'une technique aux frontières immergées et le développement d'un mailleur automatique 2^n tree, la caractérisation des écoulements internes de propulseur à poudre est donc accessible et permet l'obtention de résultats cohérents sans avoir à recourir à un quelconque outil de maillage. Bien qu'il s'agisse d'un progrès technique indéniable, l'objectif ne se situe pas essentiellement sur de telles améliorations mais plutôt concerne l'accessibilité à une analyse purement instationnaire i.e. en tenant en compte la régression de surface du propergol solide. En effet, comme le schématise la Fig. 4-20, le bloc de propergol régresse à une vitesse au-

dessus du front de flamme. Il s'agit d'un problème à frontière mobile et l'intérêt d'introduire les techniques aux frontières immergées réside précisément dans la gestion de la frontière mobile et donc de donner accès à la simulation du moteur à propergol solide.

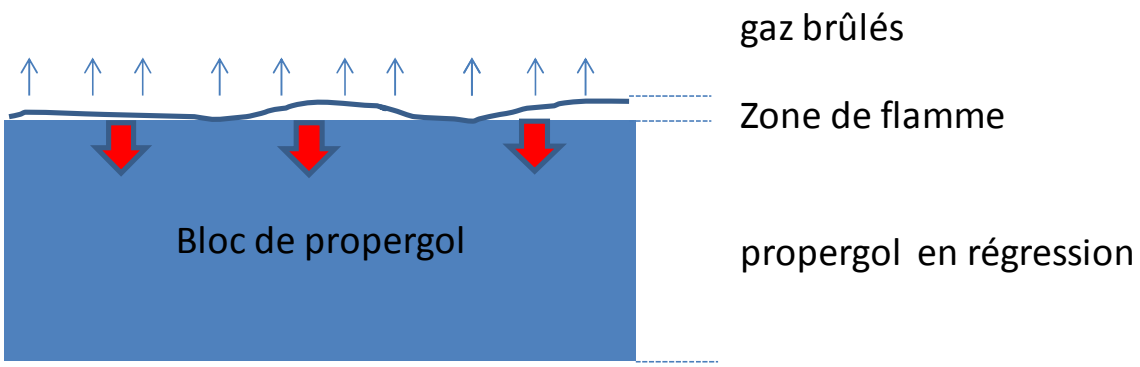


Fig. 4-20 : Régression d'un bloc de propergol au cours de sa combustion

La méthode aux frontières immergées permet, à l'aide de termes sources, de rendre compte de la présence d'une paroi et une gestion du déplacement est donc facilement intégrable.

4.3.1 Spécificité et limitation du suivi d'interface

L'ensemble des configurations traitées jusqu'à maintenant correspond à des géométries fixes et des écoulements compressibles plus ou moins complexes (gestion des ondes de choc, écoulements turbulents, instabilités aéroacoustiques,…) ont été traités avec succès. L'intégration des géométries complexes traitées par l'intermédiaire d'une technique aux frontières immergées permet d'utiliser une structure en 2^n tree automatique sachant que le principe de la méthode IBM réside dans la gestion de termes sources, la gestion de frontières mobiles est donc facilement accessible et correspond à notre objectif : peut-on simuler la régression de la surface d'un bloc de propergol solide au cours de la combustion tout en simulant la dynamique des écoulements internes ? Dans le cas BATES (§4.2.2) ou MAVOT (§4.1.3) précédemment traités, la définition géométrique du bloc de propergol est initialement introduite par une surface maillée en triangle (Fig. 4-21).

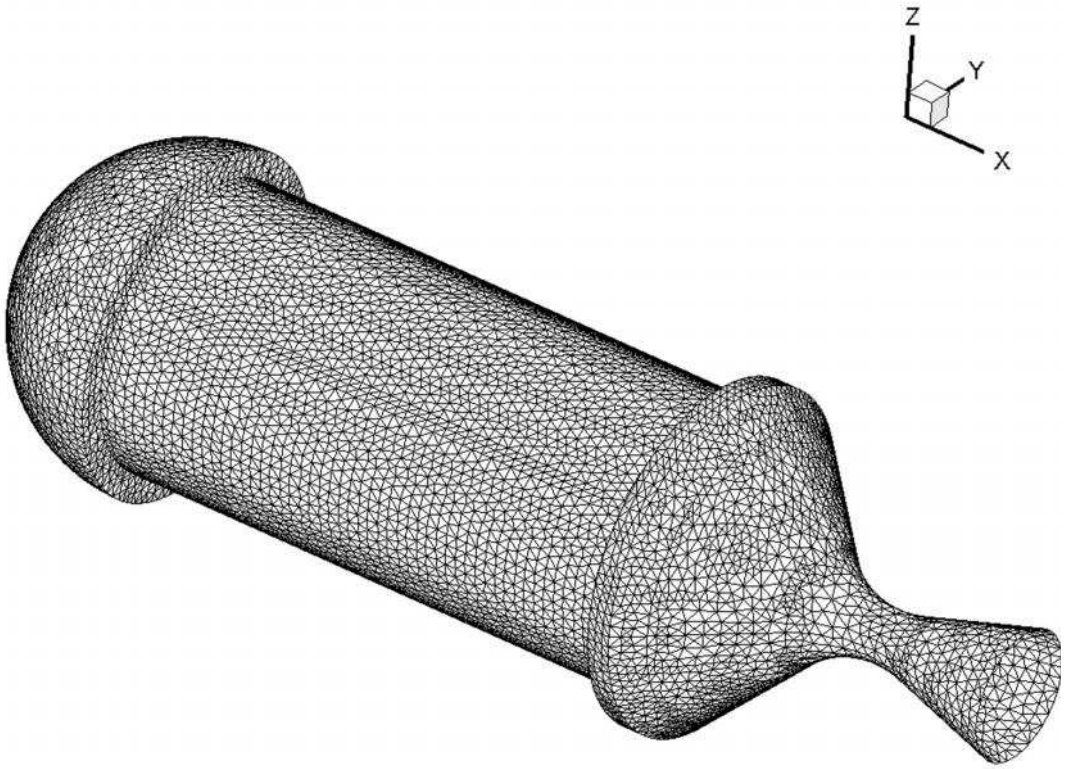


Fig. 4-21 : Maillage triangle définissant les surfaces fond-avant, bloc de propergol et tuyère de la configuration BATES

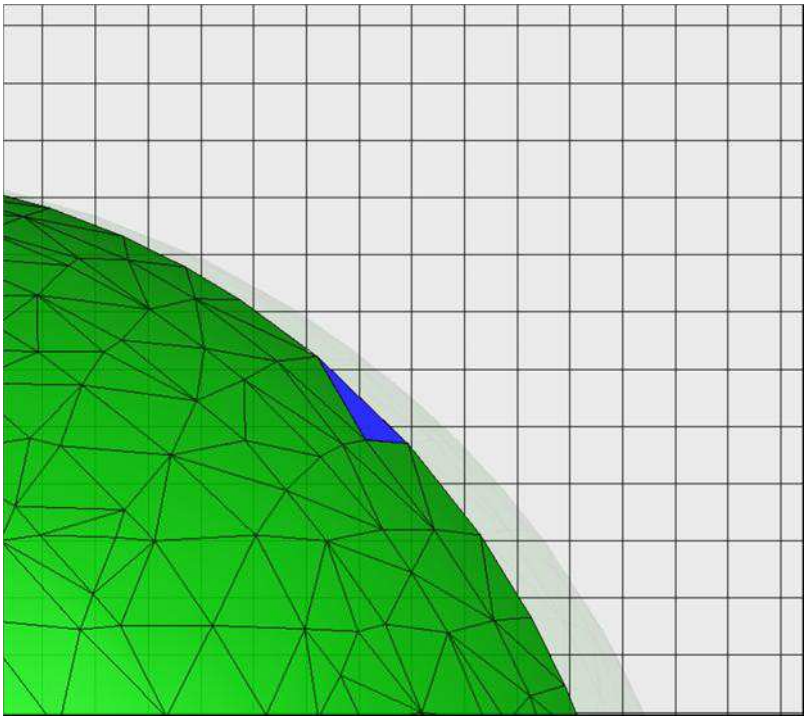


Fig. 4-22 : Maillage triangle de la surface de l'objet BATES

L'ensemble des paramètres connu permet de réaliser les calculs fluides. Donc, dans le cas où la frontière délimitée par le maillage surfacique triangulaire devient mobile, la connaissance de la nouvelle surface est nécessaire et suffisante pour conduire les calculs, imposer ainsi les termes sources et rendre compte de cette mobilité. Il devient donc nécessaire d'identifier la nouvelle position de la surface condition aux limites en fonction du temps ; cela revient à gérer le déplacement de l'ensemble des triangles constituant la surface immergée. Dans un premier temps, la prise en compte du déplacement des éléments en triangle a été effectuée par une approche directe de suivi de l'ensemble des éléments décrite ci-après.

En partant du constat que la géométrie est parfaitement connue, chaque coordonnée (x,y,z) des sommets de chaque triangle est connue et on applique un champ de vitesse de déplacement de la surface. Une fois le champ de vitesse déterminée sur les éléments de chaque sommet, chaque sommet va subir un déplacement spatial suivant la direction de la vitesse en fonction du temps :

$$\begin{cases} x_{elem}\left(t+\Delta t\right) = x_{elem}\left(t\right) + dt \times \vec{V}_N.\vec{n} \\ y_{elem}\left(t+\Delta t\right) = y_{elem}\left(t\right) + dt \times \vec{V}_N.\vec{n} \\ z_{elem}\left(t+\Delta t\right) = z_{elem}\left(t\right) + dt \times \vec{V}_N.\vec{n} \end{cases} \tag{4.4}$$

La connaissance des nouvelles positions des sommets assure la définition de la nouvelle position de la surface maillée en triangle. Cet algorithme est direct et facile à intégrer dans le code ainsi développé. Le modèle avec repositionnement de l'interface en fonction du temps a été appliqué sur plusieurs cas tests. Un cas test simple nommé moteur «***Cigarette***» est présenté. Le moteur dit «***Cigarette***» est un moteur ayant pour particularité de présenter la face du propergol en combustion parallèle au plan de la sortie de tuyère. Ces moteurs, bien que peu performants énergétiquement, assurent des campagnes de tests des performances des propergols tout en s'affranchissant de la présence d'écoulements s'écoulant le long du propergol. La Fig. 4-23 présente la géométrie du moteur cigarette utilisée à l'IAE[1] afin de déterminer les lois des propergols. Ces moteurs ont des durées de fonctionnement allant

[1] IAE est l'acronyme pour Institut Aéronautique et Espace de l'agence spatiale Brésilienne.

jusqu'à 80 s. Le cas actualisé correspond au moteur ***«Cigarette»*** dont les principales caractéristiques sont rappelées dans le Tableau 4-5.

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x	250 mm	Δx en *mm*	1.98
L_y	131 mm	Δy en *mm*	2.05
L_z	131 mm	Δz en *mm*	2.05
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa	101325
Vitesse de régression	5.35 mm/s	T_{flamme} en K $\rho_{propergol}$ en kg/m^3	3185 1700
Niveau de Raffinement	2 suivant x	2 suivant y	2 suivant z

Tableau 4-5 : Paramètres de calcul Cigarette

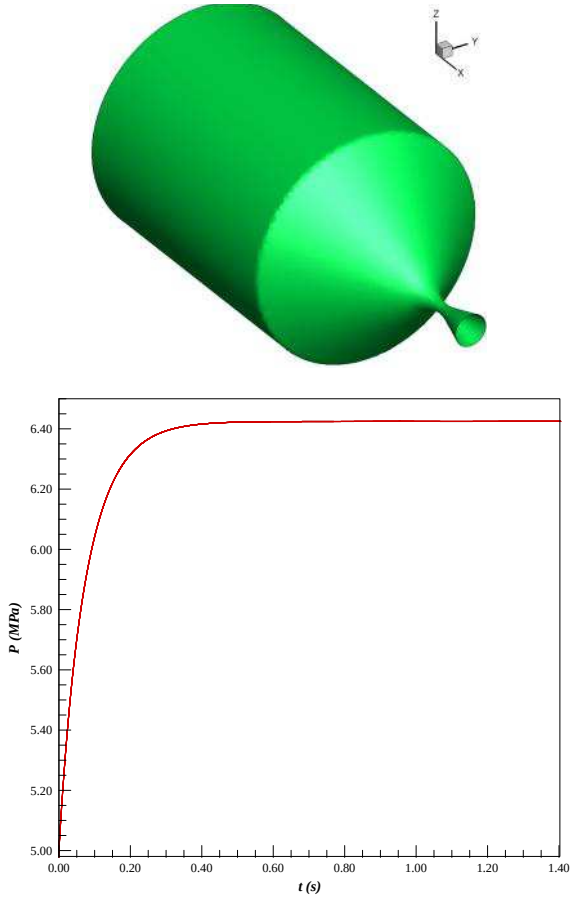


Fig. 4-23 : Géométrie du moteur Cigarette et évolution de la pression en fonction du temps

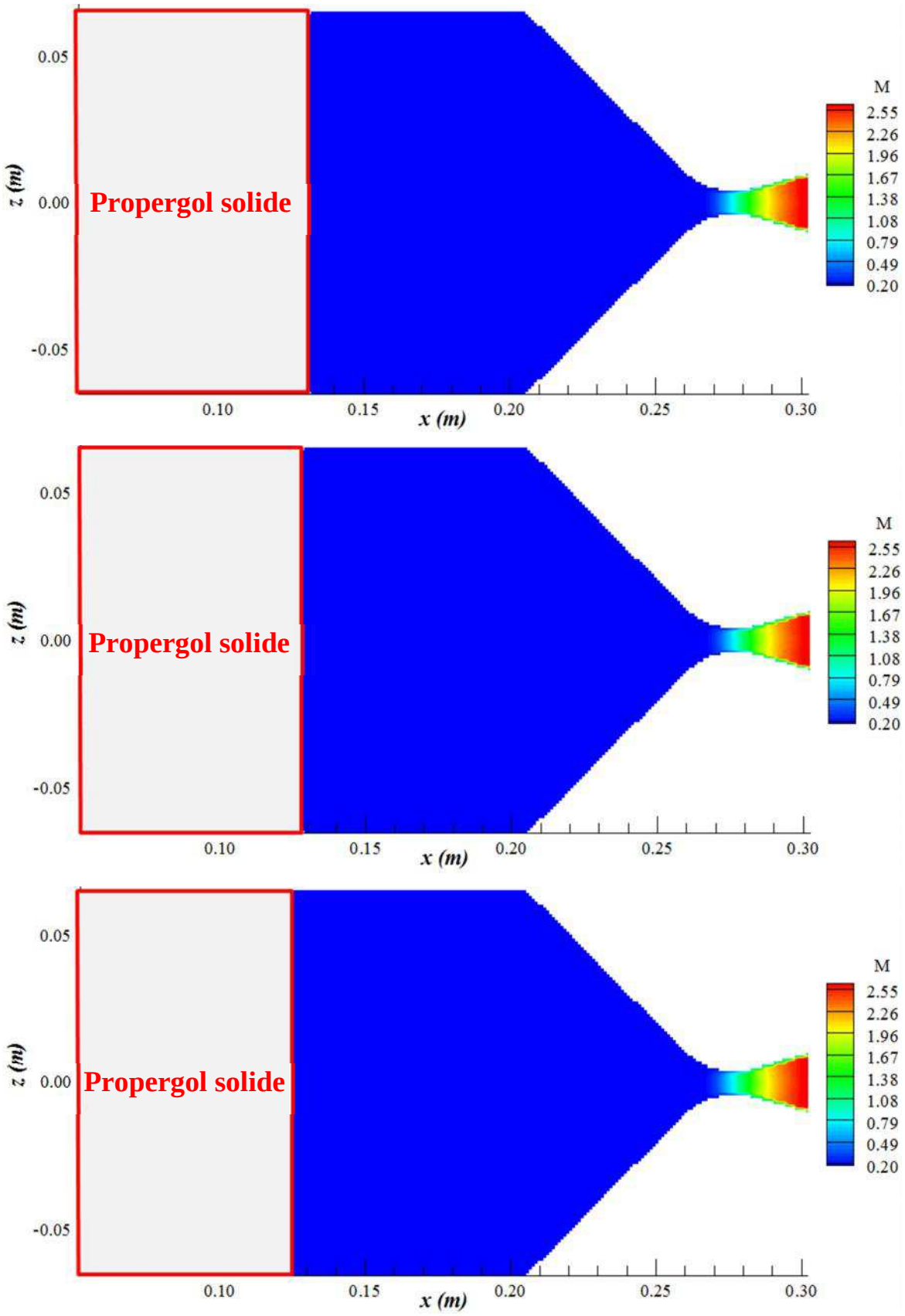


Fig. 4-24 : Champ de Mach en fonction de surface à 3 instants differents

Le cas cigarette offre une surface de régression plane et l'écoulement généré est intégralement perpendiculaire à la surface du propergol. Les premiers résultats témoignent ainsi que le suivi proposé fonctionne. Par contre, est-il toujours aussi performant pour des géométries plus complexes ?

Pour le vérifier, le cas BATES 2D a été repris et à partir d'un champ établi avec une géométrie fixe, les calculs ont été relancés (en appliquant une synchronisation t = 0) en considérant la régression de surface. La Fig. 4-25 témoigne, à differents instants, la géométrie. Cependant, en opérant un zoom, il semble que des problèmes de suivi de l'interface se développent !

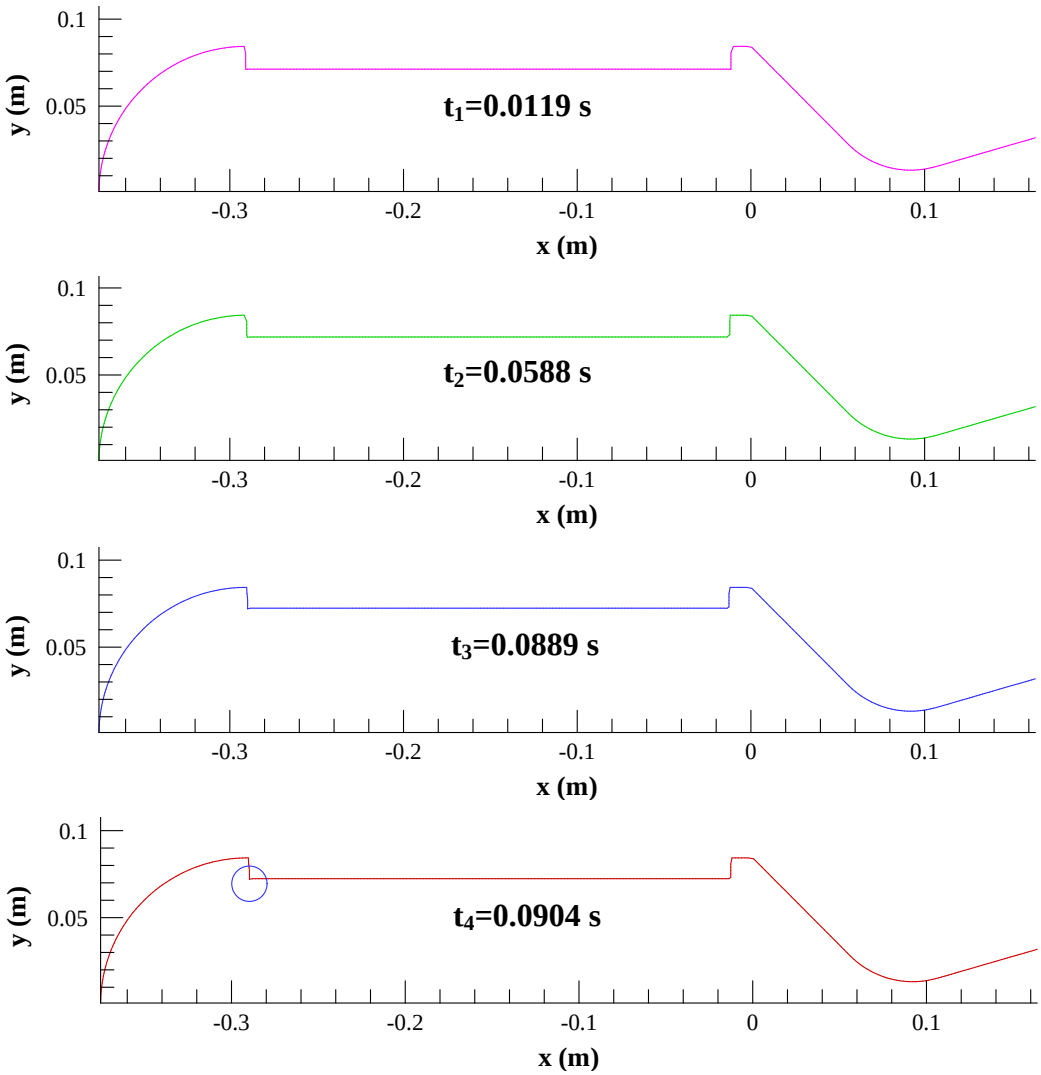


Fig. 4-25 : Régression de surface BATES 2D avec méthode tracking normale

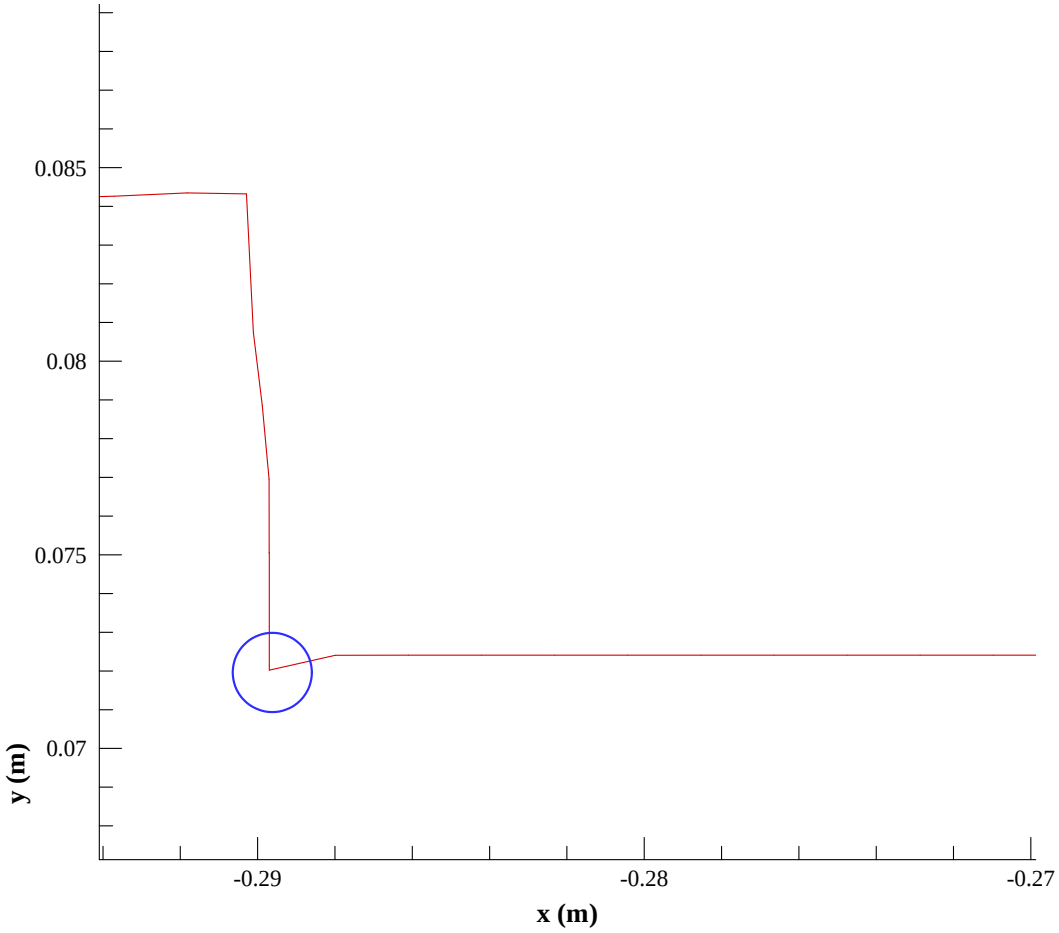


Fig. 4-26 : Problème de coin dans le calcul BATES 2D à l'instant t_4=0.0904 s

La géométrie alors considérée offre des angles droits et le traitement simpliste proposé ne considère pas de vitesses dans les coins, la normale n'étant pas définie. Ainsi, au fur et à mesure de la régression, ce point se déforme et finalement, va rendre la méthode aux frontières immergées non accessible. En effet, en poursuivant les calculs, l'interface peut se déformer jusqu'à générer une véritable boucle et alors la détection de la topologie liée aux frontières immergées n'est tout simplement plus possible.

4.3.2 Introduction d'une méthode de tracking

Après avoir introduit avec succès une méthode IBM sur des géométries fixes au cours de la simulation, les premiers tests prenant en compte la frontière du propergol solide se sont révélés complexes et impossible pour des géométries internes même simples (cas du moteur BATES, cas du moteur MAVOT…). En effet, la méthode IBM assure la prise en compte du traitement numérique d'une frontière immergée dans un volume, mais n'assure pas son

évolution. Face aux difficultés identifiées, l'introduction d'une technique de suivi de l'interface s'est avérée indispensable et notre choix s'est reporté sur la méthode la plus connue et la plus utilisée sans doute, la méthode dite de Level Set [83]. Son principe est simple ! Il s'agit de matérialiser une interface que l'on souhaite suivre au cours du temps et suivre la fonction ϕ qui correspond à la distance entre un point de l'espace et l'interface en question. La valeur ϕ est nulle sur l'interface et offre des valeurs positives ou négatives que le point considéré soit localisé d'un côté ou de l'autre de l'interface. La méthode de Level Set a été initialement proposée par Osher et Sethian [84] dans les années 80 et offre un véritable suivi des frontières mobiles. Son utilisation n'est pas limitée à un domaine mais son utilisation est multiple dans des domaines des plus variés allant aussi bien dans le traitement d'images [83], de la prise en compte de géométries complexes [83] voire la mécanique des fluides avec les traitements diphasiques [83]. Pour une surface définie à $\phi = 0$ (Fig. 4-27), sa dynamique est déterminée par l'évolution de la fonction ϕ . Considérons une particule sur la surface ; la valeur de ϕ associée à cette particule est toujours égale à zéro, l'équation d'évolution de ϕ dans le système Lagrangien s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \tag{4.5}$$

En transformant cette équation vers un système Euler, la dérivation temporelle par une dérivation matérielle donne :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + V.\nabla\phi = 0 \tag{4.6}$$

avec V est la vitesse à la surface, pouvant être une fonction de temps et de l'espace. Le principe de la méthode consiste donc à suivre l'évolution de la fonction dans tout le domaine concerné, $\phi = 0$ correspondant à la surface suivie. On a ϕ la fonction implicite telle que :

- $\phi\left(\overrightarrow{x}\right) > 0$ dans la région externe Ω^+
- $\phi\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ sur la frontière $\partial\Omega$
- $\phi\left(\overrightarrow{x}\right) < 0$ dans la région interne Ω^-

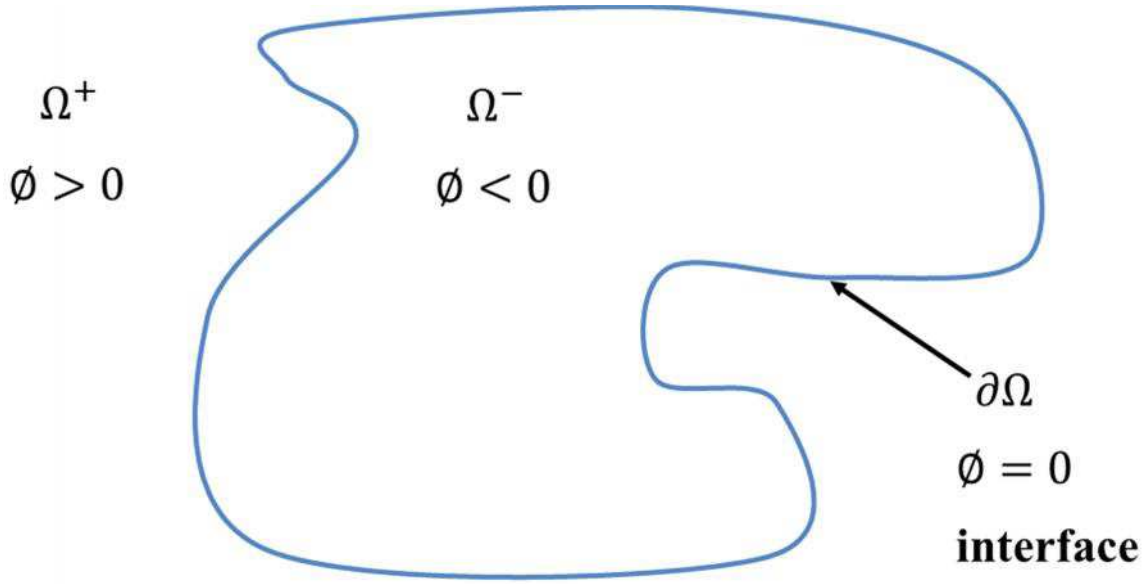


Fig. 4-27 : Courbe de Level Set Method

On définit aussi la fonction distance $d\left(\vec{x}\right)$ comme

$$d\left(\vec{x}\right) = \min\left(\left|\vec{x} - \vec{x}_I\right|\right) \tag{4.7}$$

pour tout $\vec{x}_I \in \partial\Omega$. En 2D par exemple, la fonction s'écrit comme :

$$d\left(\vec{x}\right) = \min\sqrt{\left(x - x_I\right)^2 + \left(y - y_I\right)^2} \tag{4.8}$$

et pour toute valeur $\vec{x}_I \in \partial\Omega$, on peut montrer aisément que $\left|\nabla d\left(\vec{x}\right)\right|$ est égale à 1.

$$\left|\nabla d\left(\vec{x}\right)\right| = 1 \tag{4.9}$$

En fait, la condition idéale pour jouer le rôle de la fonction implicite ϕ est la fonction distance algébrique telle que :

$$\begin{aligned} \phi\left(\vec{x}\right) &= 0 \ \text{ pour } \ \forall\vec{x} \in \partial\Omega \\ \phi\left(\vec{x}\right) &= -d\left(\vec{x}\right) \ \text{ pour } \ \forall\vec{x} \in \partial\Omega^- \\ \phi\left(\vec{x}\right) &= d\left(\vec{x}\right) \ \text{ pour } \ \forall\vec{x} \in \partial\Omega^+ \end{aligned} \tag{4.10}$$

Cette fonction offre la règle telle que :

$$\left|\nabla\phi\right| = 1 \tag{4.11}$$

Dans un premier temps, pour un modèle de couplage avec régression de surface, la vitesse de régression est supposée constante. La direction de cette vitesse est évidemment normale à la surface au cours de la régression. Pour suivre la variation de la surface du propergol au cours de régression, on considère cette dernière comme la vitesse V_N et la méthode de Level Set va permettre de suivre son évolution au cours du temps. L'équation à résoudre est donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \left| \nabla \phi \right| = 0 \tag{4.12}$$

avec V_N est la vitesse de régression :

$$V_N = -aP^n \tag{4.13}$$

avec a et n sont les coefficients de la loi de Vieille et P est la pression de la chambre de combustion. Détaillons mathématiquement les étapes de la méthode ainsi mises en jeu.

4.3.2.1 Résolution de la méthode Level Set

Pour trouver les valeurs de ϕ sur un maillage cartésien, on applique un schéma «découplé» i.e. la partie temporelle et la partie spatiale sont analysées individuellement de manière explicite.

a) Termes en espace

L'équation de la méthode dite de Level Set s'écrit de manière équivalente suivant plusieurs écritures :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \vec{N} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \frac{\left(\phi_x, \phi_y, \phi_z\right)}{\left|\nabla \phi\right|} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{V_N \phi_x}{\left|\nabla \phi\right|}, \frac{V_N \phi_y}{\left|\nabla \phi\right|}, \frac{V_N \phi_z}{\left|\nabla \phi\right|} \right) \cdot \nabla \phi = 0 \tag{4.16}$$

L'équation peut être résolue avec une formulation upwind. Dans le schéma upwind, le signe devant $\nabla \phi$ est important. Dans notre cas, $\frac{V_N \phi_x}{\left|\nabla \phi\right|}$ va décider du schéma «backward» ou « upward» à appliquer pour ϕ_x. On rappelle que le schéma upwind suivant x s'écrit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \phi_x = 0 \tag{4.17}$$

avec : si $V_N>0$: schéma backward utilisée ϕ_x^-

si$V_N<0$: schéma upward utilisée ϕ_x^+

En appliquant cette discrétisation dans l'équation (4.16), et en supposant $V_N>0$, par exemple que :

- Si $\phi_x^- > 0 \; et \; \phi_x^+ > 0 \; => \phi_x > 0 =>$ «backward» utilisé
- Si $\phi_x^- < 0 \; et \; \phi_x^+ < 0 \; => \phi_x > 0 =>$ «upward» utilisé

Par contre, si $\phi_x^- . \phi_x^+ < 0$, le schéma upwind n'est pas applicable et la méthode de Godunov [83] est donc préférée. Dans cette dernière, la dérivation d'un côté ou de l'autre dépend du produit entre la vitesse de convection et la dérivation de manière explicite :

$$\begin{aligned} V_N^+ &= V_N * \phi_x^+ \\ V_N^- &= V_N * \phi_x^- \end{aligned} \tag{4.18}$$

On a ainsi une formule suivante pour déterminer la dérivation :

$$\begin{aligned} \phi_x &= \phi_x^+ \text{ si } V_N^- \le 0 \text{ et} V_N^+ \le 0 \\ \phi_x &= \phi_x^- \text{ si } V_N^- \ge 0 \text{ et } V_N^+ \ge 0 \\ \phi_x &= 0 \text{ si } V_N^- \le 0 \text{ et } V_N^+ \ge 0 \\ \phi_x &= \phi_x^+ \text{ si } V_N^- \ge 0 \text{ et } V_N^+ \le 0 \text{ et} \left|V_N^+\right| \ge \left|V_N^-\right| \\ \phi_x &= \phi_x^- \text{ si } V_N^- \ge 0 \text{ et } V_N^+ \le 0 \text{ et} \left|V_N^+\right| < \left|V_N^-\right| \end{aligned} \tag{4.19}$$

Quand la décision upward ou backward est identifiée, la discrétisation ϕ en espace est assurée. Dans notre application, pour avoir un schéma de haute précision, le schéma WENO pour calculer ϕ_x a été mis en œuvre. Dans la formulation de WENO, on écrit la dérivation ϕ^- :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\phi(x-2)-\phi(x-3)}{\Delta x} \\
v_2 &= \frac{\phi(x-1)-\phi(x-2)}{\Delta x} \\
v_3 &= \frac{\phi(x)-\phi(x-1)}{\Delta x} \\
v_4 &= \frac{\phi(x+1)-\phi(x)}{\Delta x} \\
v_5 &= \frac{\phi(x+2)-\phi(x+1)}{\Delta x}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Dérivation ϕ^+ :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\phi(x+3)-\phi(x+2)}{\Delta x} \\
v_2 &= \frac{\phi(x+2)-\phi(x+1)}{\Delta x} \\
v_3 &= \frac{\phi(x+1)-\phi(x)}{\Delta x} \\
v_4 &= \frac{\phi(x)-\phi(x-1)}{\Delta x} \\
v_5 &= \frac{\phi(x-1)-\phi(x-2)}{\Delta x}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Les paramètres, par exemple suivant la direction *x*, s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
\phi_x^1 &= \frac{v_1}{3} - \frac{7v_2}{6} + \frac{11v_3}{6} \\
\phi_x^2 &= -\frac{v_2}{6} + \frac{5v_3}{6} + \frac{v_4}{3} \\
\phi_x^3 &= \frac{v_3}{3} + \frac{5v_4}{6} - \frac{v_5}{6}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

et la formulation de WENO devient :

$$
\begin{aligned}
\phi_x^+ &= \omega_1 \left(\phi_x^1\right)^+ + \omega_2 \left(\phi_x^2\right)^+ + \omega_3 \left(\phi_x^3\right)^+ \\
\phi_x^- &= \omega_1 \left(\phi_x^1\right)^- + \omega_2 \left(\phi_x^2\right)^- + \omega_3 \left(\phi_x^3\right)^-
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

avec

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$
$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$
$$\omega_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$
$$\alpha_1 = \frac{0.1}{\left(S_1 + \varepsilon\right)^2} \qquad (4.24)$$
$$\alpha_2 = \frac{0.6}{\left(S_2 + \varepsilon\right)^2}$$
$$\alpha_3 = \frac{0.3}{\left(S_3 + \varepsilon\right)^2}$$

où

$$S_1 = \frac{13}{12}\left(v_1 - 2v_2 + v_3\right)^2 + \frac{1}{4}\left(v_1 - 4v_2 + 3v_3\right)^2$$
$$S_2 = \frac{13}{12}\left(v_2 - 2v_3 + v_4\right)^2 + \frac{1}{4}\left(v_2 - v_4\right)^2 \qquad (4.25)$$
$$S_3 = \frac{13}{12}\left(v_3 - 2v_4 + v_5\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3v_3 - 4v_4 + v_5\right)^2$$

$\varepsilon = 10^{-6}$ dans notre case

b) Termes en temps

Concernant la dérivation temporelle, les schémas de type Euler et Runge-Kutta, déjà présenté §2.1.2, ont été appliqués. La résolution de l'équation de la méthode de Level Set s'écrit, par exemple pour le schéma Euler, comme :

$$\phi^{N+1} = \phi^N - V_N.\Delta t.\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2} \qquad (4.26)$$

4.3.2.2 Méthode locale de Level Set et réinitialisation

On peut résoudre l'équation (4.17) dans tout le domaine de calcul. Pourtant, cette approche coûte cher en temps de CPU [83]. Donc, les auteurs ont souvent recours à une zone réduite au voisinage immédiat de l'interface. En effet, il s'agit de suivre l'interface et non pas de suivre l'évolution de ϕ sur l'ensemble du domaine. En outre, avec la définition de la fonction de distance, l'évolution de surface en temps peut provoquer une violation de la

norme $|\nabla\phi| = 1$. Pour éviter ce problème, une procédure de réinitialisation est souvent nécessaire. Deux approches coexistent :

- Narrow band level set methods [85],
- Fast marching methods [85],

En effet, comme nous l'avons indiqué au préalable, il n'est pas nécessaire de résoudre la fonction distance sur l'ensemble du domaine de calcul mais une démarche plus intelligente (dans l'optique d'un suivi de l'interface) est d'appliquer la méthode de Levet-Set uniquement au voisinage de l'interface. Cette technique existe et se nomme méthode de Level Set avec narrow band. D'une manière plus explicite, décrivons les étapes à mettre en place pour une telle technique. Dans un premier temps, on considère 3 couches de points dans la partie positive d'un côté de l'interface et 3 autres couches dans la partie négative de l'autre côté. De plus, sachant que le schéma de WENO est appliqué, des couches supplémentaires sont nécessaires en tant que nœuds fictifs afin d'appliquer les conditions aux limites tout en assurant la précision dans la discrétisation des opérateurs de dérivation. La Fig. 4-28 souligne la topologie ainsi requise sur un cas simple d'une interface formant un carré initialement.

Ainsi, dans la zone «Narrow Band» c'est à dire sur les 6 couches au voisinage de l'interface, l'équation de Level Set est résolue. Pour appliquer les conditions limites, les valeurs dans les zones fictives (côtés positif et négatif), une interpolation à partir des valeurs de la fonction distance calculée est appliquée. Pour cela, deux critères sont appliqués :

$$\phi_F = \phi_N + \overrightarrow{NF}.\nabla\phi \tag{4.27}$$

avec F désignant le nœud fictif et N le nœud dans la couche Narrow Band. On a également :

$$\left(\frac{\phi - \phi_N^x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\phi - \phi_N^y}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\phi - \phi_N^z}{\Delta z}\right)^2 = 1 \tag{4.28}$$

avec $\phi_N^x, \phi_N^y, \phi_N^z$ les valeurs de ϕ suivant les directions *x*, *y* et *z* respectivement dans le voisinage immédiat de l'interface. Cette équation provient en fait du critère de la fonction distance i.e. $|\nabla\phi| = 1$.

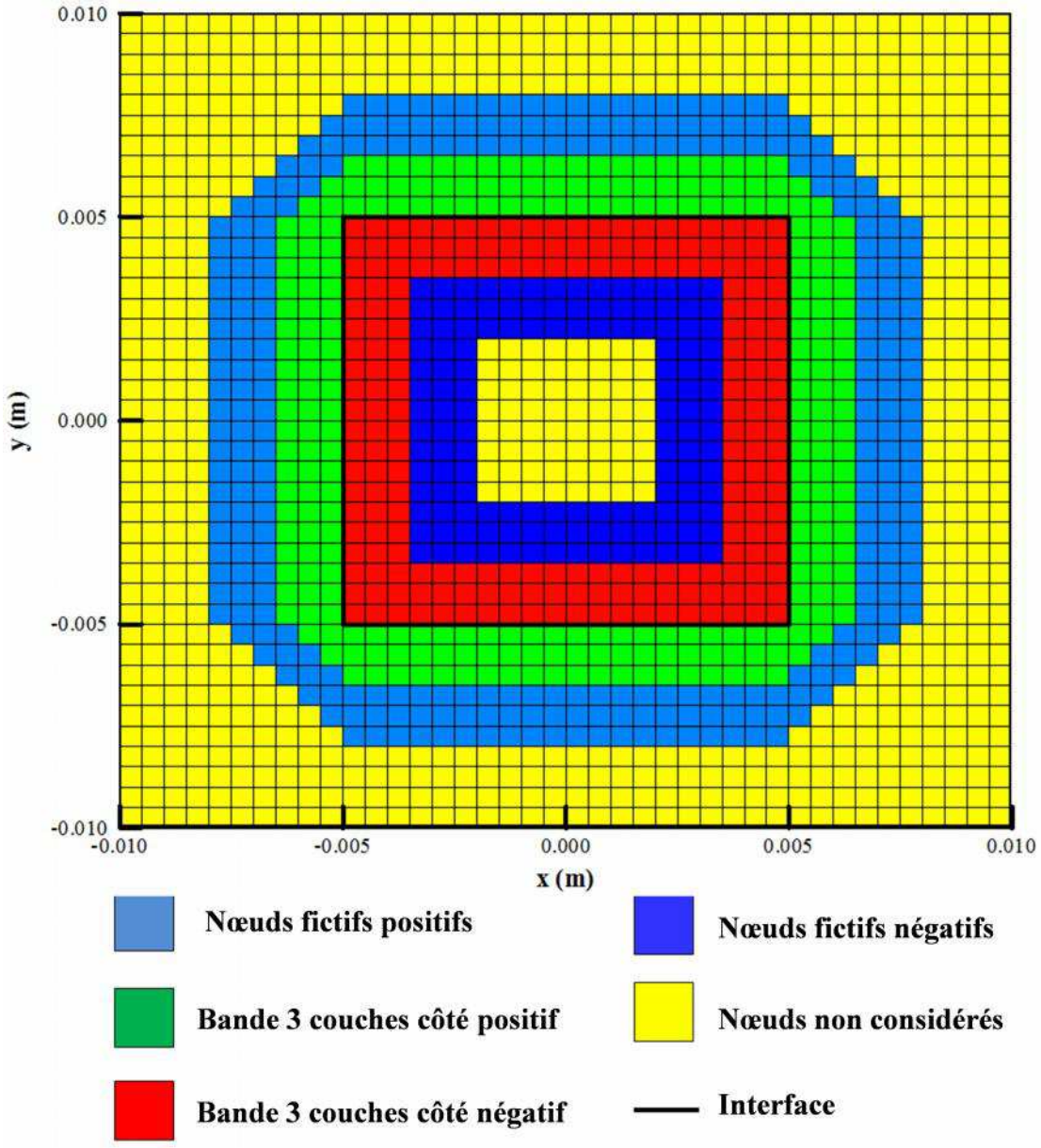


Fig. 4-28 : Topologie pour un calcul Level-Set avec bandes localisées (méthode dite de Narrow band)

La Fig. 4-29 présente une déformation d'une géométrie 2D initiale en forme d'un carré et se régressant à vitesse constante, le suivi de l'interface étant opéré par Level Set. En fait, au niveau des angles droits, le calcul de la distribution de la distance joue un rôle d'érosion ce

qui a pour conséquence de bien traiter les géométries complexes (ou du moins avec des angles importants).

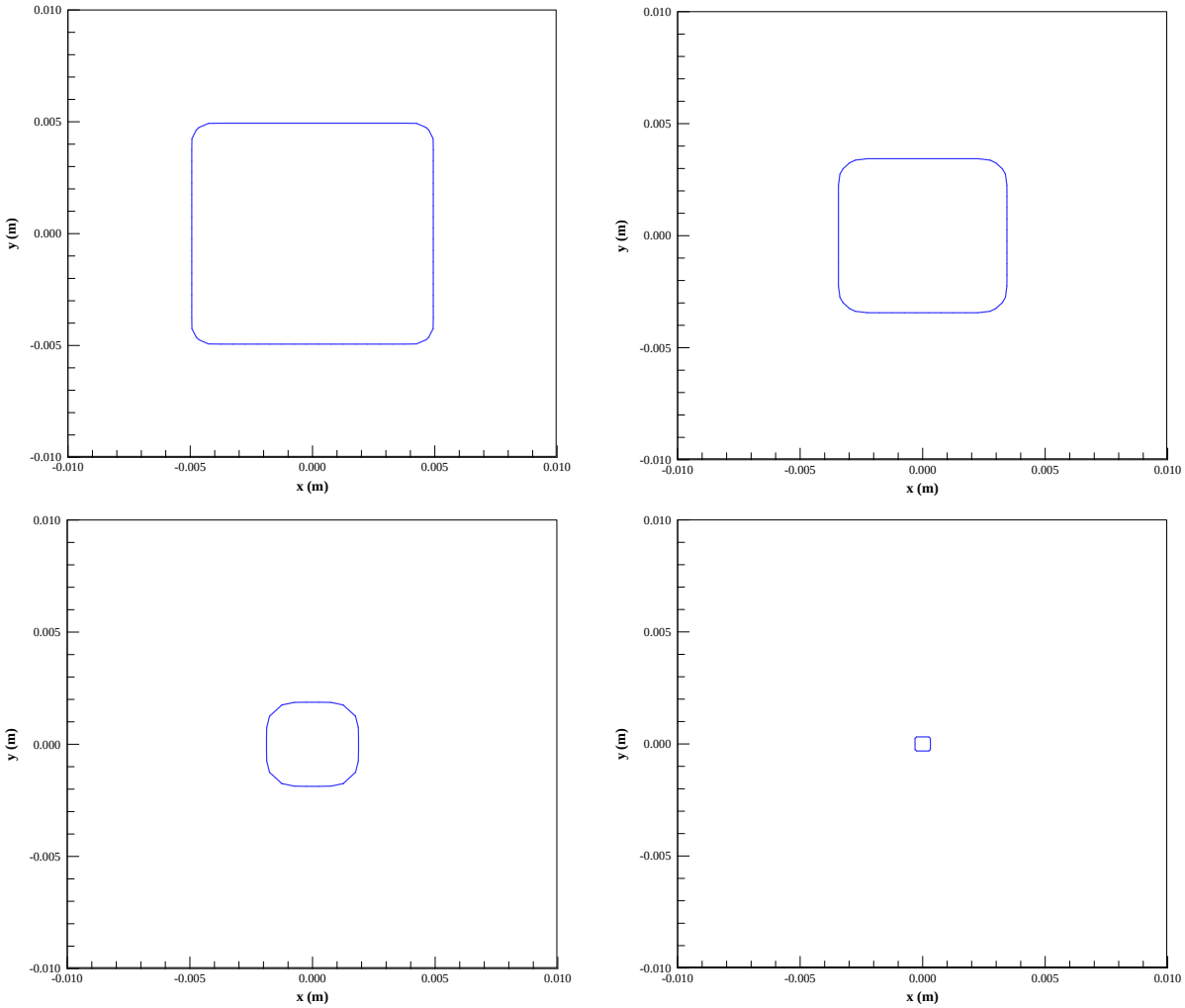


Fig. 4-29 : Evolution de la géométrie initialement carrée avec V_N = -1 m/s – la méthode LVS induit en comportement diffusif dans les coins

Au cours de l'évolution de l'interface, dès lors que cette dernière se trouve déplacée en dehors de la bande, une réinitialisation est nécessaire. Cette dernière implique une redistribution de l'ensemble de la topologie précédemment décrite (bandes côté positif et côté négatif ainsi que les couches respectives de nœuds fictifs). D'un point de vue pratique, le critère définissant la mise en place d'une procédure de réinitialisation correspond à un changement de signe de la fonction ϕ pour un nœud fictif. De plus, soulignons qu'au fur et à mesure des calculs, à partir de l'accumulation des erreurs numériques au cours de la

résolution de ϕ, cette dernière a tendance à ne plus respecter la contrainte $|\nabla\phi| = 1$. Dans ce cas également, une réinitialisation est nécessaire. Sethian [85] détaille clairement trois méthodes de restrictions dénommées :

- évaluation directe,
- par itération,
- en suivant le principe de Huygens.

Dans un premier temps, la méthode par itérations a été retenue pour sa simplicité de mise en œuvre. Pour cela, on résout l'équation suivante par une méthode itérative :

$$\phi_t = sign(\phi)\left(1 - |\nabla\phi|\right) \tag{4.29}$$

Une fois le résultat établi (i.e. $\phi_t = 0$), ceci assure $1 - |\nabla\phi| = 0$ le critère de la fonction de distance. Dans l'équation (4.29), $sign(\phi)$ vaut soit +1 et -1. Si on considère $sign(\phi)$ comme $S(\phi_0)$, on a alors :

$$\phi_t + S(\phi_0)\left(|\nabla\phi| - 1\right) = 0 \tag{4.30}$$

Sachant que les variations de ϕ peuvent être de fortes amplitudes, une méthode définie par Peng et al. [86] permet de rendre les variations continues en appliquant :

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + |\nabla\phi|^2 (\Delta x)^2}} \tag{4.31}$$

et le choix du pas de temps est défini comme correspondant à $dt = \Delta x / 10$ dans le cas d'une vitesse unitaire.

4.3.3 Conséquence de l'introduction de la méthode de Level Set

4.3.3.1 BATES 7 2D

Comme nous l'avons explicitement souligné dans le §4.3.1, le modèle numérique s'appuyant uniquement sur une méthode IBM, avec un repositionnement direct de l'interface, ne permet pas d'assurer un quelconque suivi au cours de son déplacement. Le calcul a donc été refait en assurant le suivi de l'interface avec la méthode de Level Set i.e. le calcul des valeurs de ϕ pour le cas BATES. La configuration traitée est intégralement la même que

celle récemment effectuée en y ajoutant le calcul de la distance à l'interfaceϕ . Dans ce cas, le calcul de ϕ a été lancé à partir d'un champ initial de ϕ appliqué comme condition initiale.

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x L_y	544.48 mm 182.40 mm	Δx en *mm* Δy en *mm*	7.5622 7.6000
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa	327600
Niveau de Raffinement	Suivant x =2 Suivant y =2		
LVS méthode			
V_N	-13 mm/s		
Local level set méthod avec un band de 6 couches, le pas de temps pour faire un calcul LVS méthod est d'environ 100 itérations de calcul fluide.			

Tableau 4-6 : Paramètre de calcul BATES

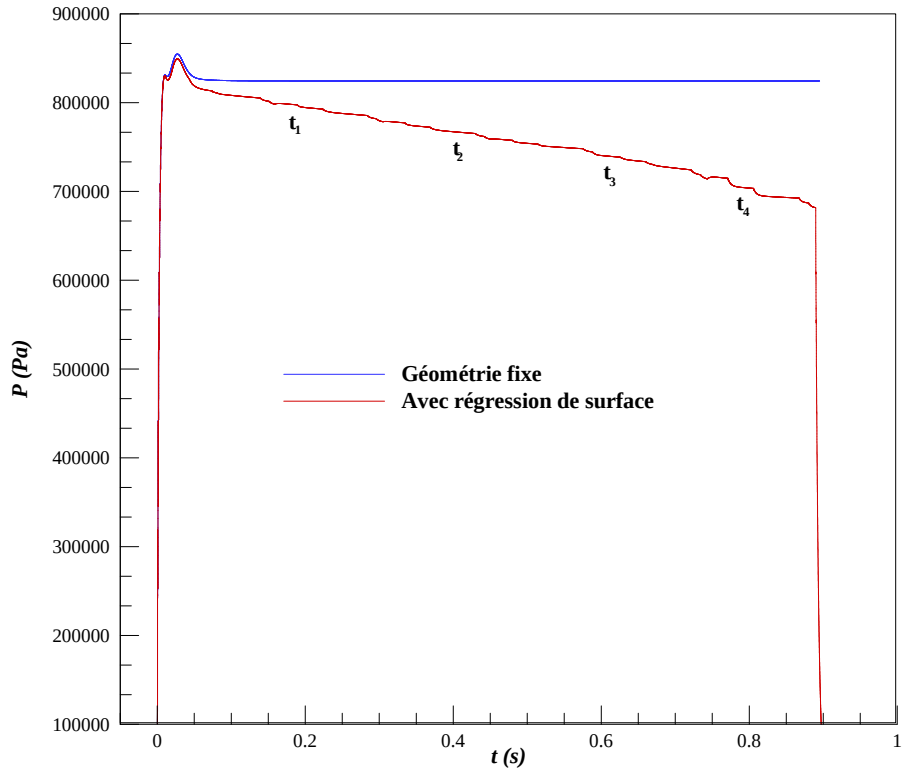


Fig. 4-30 : Variation temporelle de la pression pour le cas BATES avec ou sans prise en compte de régression de surface

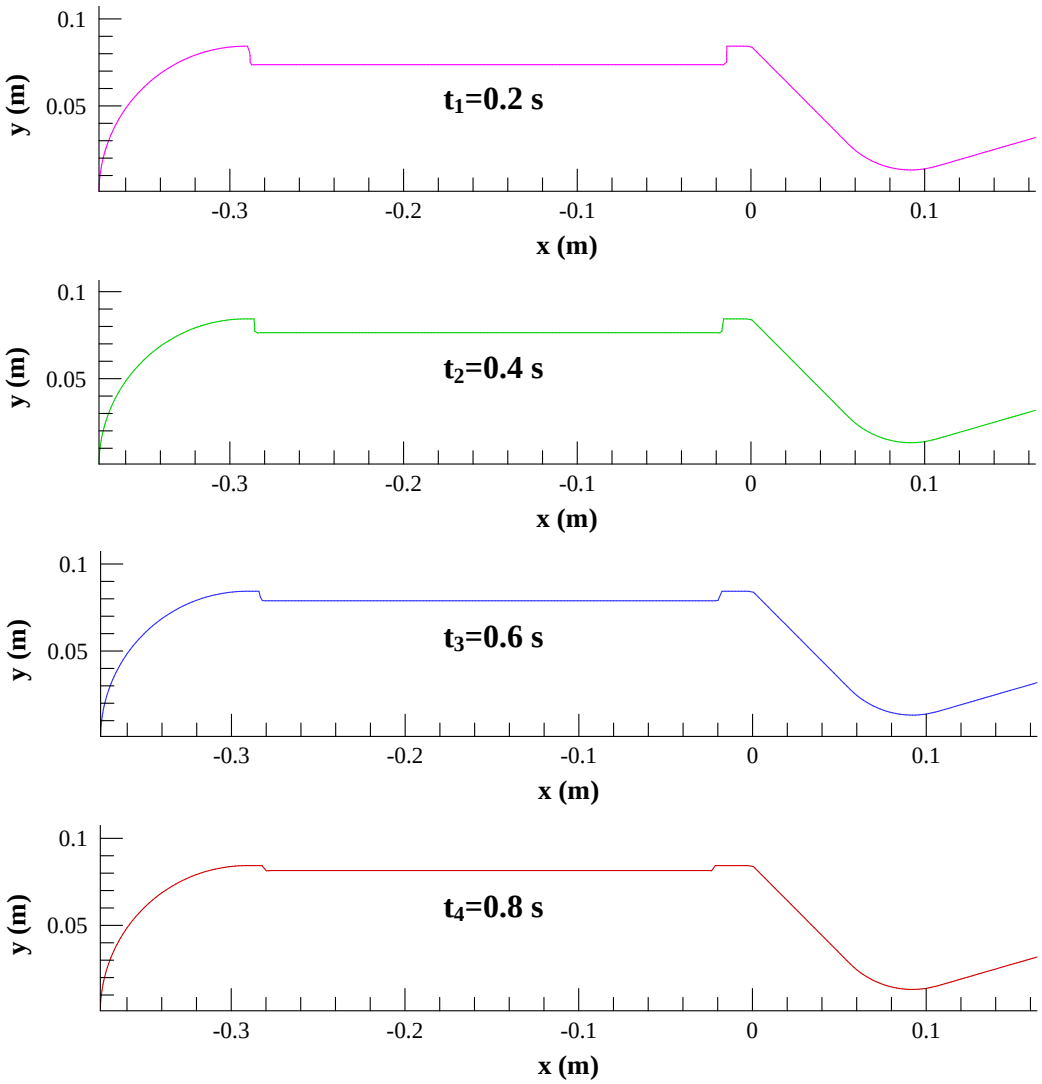


Fig. 4-31 : Coupe géométrie de BATES 2D

Afin de souligner les effets de la régression de surface, deux configurations sont comparées : avec prise en compte de la régression du bloc de propergol et avec la géométrie fixée. La Fig. 4-30 présente l'historique de la pression et force est de constater que le pic de pression atteint dès les premiers instants (~20 ms) est déjà plus faible que celui atteint dans le cas du calcul avec géométrie fixe. En fait, ce coup de bélier est lié à l'établissement de l'écoulement et la prise en compte de la variation géométrie réduit la surface débitante mise en jeu et une légère diminution de débit s'en suit, d'où cette réduction même légère de la pression. De plus, au fur et à mesure que la simulation progresse en temps, le niveau de pression fond-avant diminue de manière plus au moins stationnaire jusqu'à t=0.9s environ où, à cet instant, la pression chute brutalement. En effet, le bloc de propergol s'est entièrement consumé. Pour souligner l'évolution interne au cours du calcul, 4 instants (t_1 a t_4)

correspondant aux temps de simulation 0.2, 0.4, 0.6 et 0.8s respectivement sont pris en référence et la Fig. 4-32 présente une coupe de la géométrie interne et la distribution du nombre de Mach associée. La pression varie dans la chambre principalement à cause de la réduction de la surface de combustion et donc de la diminution des débits associés.

Une telle configuration est relativement simple et met en jeu des écoulements stationnaires (pas de présence de tourbillons et autre instationnarité au sein de l'écoulement) mais le suivi de l'interface permet de caractériser des variations de pression fond-avant et donc une meilleure prédiction de la balistique interne au cours de la vie du propulseur.

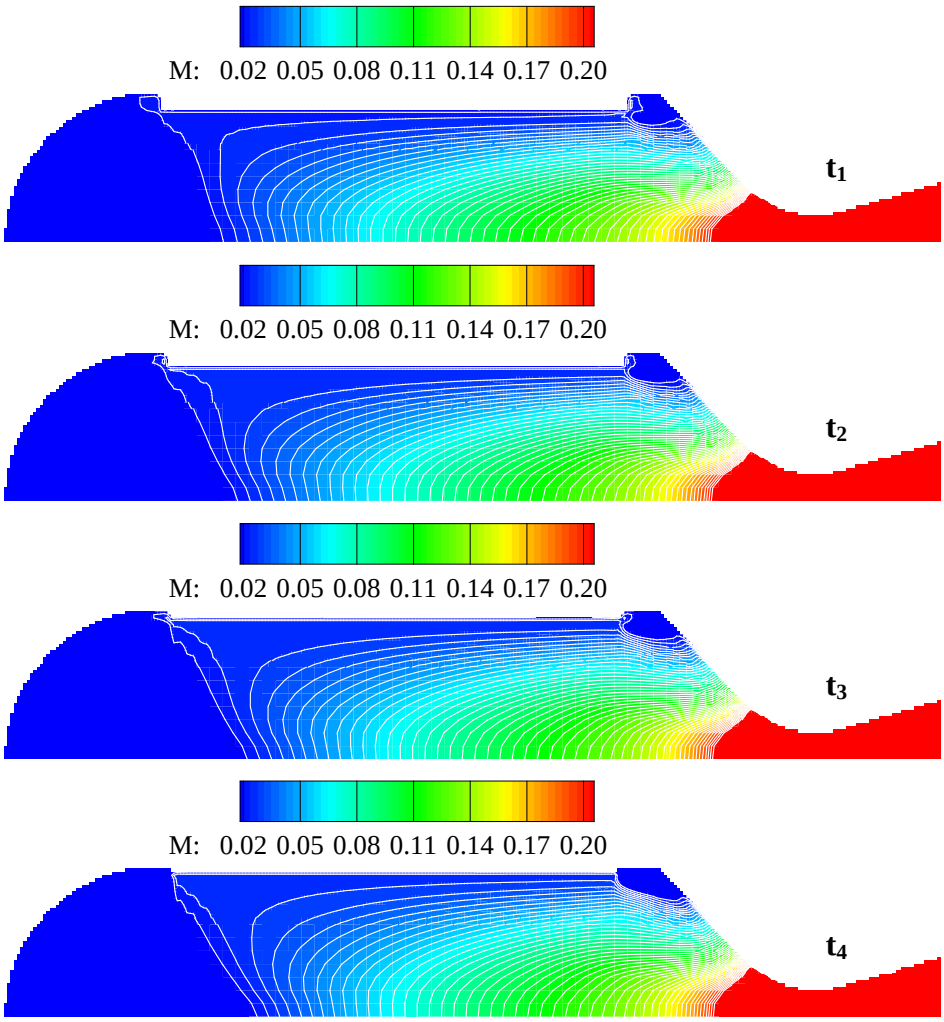


Fig. 4-32 : Distribution du nombre de Mach au sein du cas BATES 2D aux instants discrets t_1 à t_4

4.3.3.2 MAVOT 2D

La qualité des résultats obtenus dans la configuration étudiée précédemment souligne la nécessaire introduction de la technique de Level-Set et démontre toute la faisabilité de la technique mise en place. Le modèle aux frontières immergées avec un suivi de l'interface et un solveur compressible est donc prêt d'un point de vue numérique. Alors que la prise en compte directement et intégralement de la régression d'un bloc de propergol ouvre de nouvelles perspectives, comme par exemple une possible prise en compte de la combustion érosive. Nous nous sommes intéressés au rôle potentiel de la forte variation de la géométrie interne sur les instabilités aéroacoustiques. Bien que ce problème constitue sans aucun doute un travail à part entière, il nous est apparu intéressant de traiter un cas test offrant de telles instabilités et d'identifier si la variation géométrique pouvait avoir un rôle direct. Pour cela, le cas MAVOT a été repris en considérant cette fois-ci l'interface comme mobile (son suivi étant assuré par la méthode de Level Set évidemment).

Pour des raisons de temps CPU, le cas MAVOT avec suivi d'interface a été initialisé alors que l'ensemble de l'écoulement est préalablement établi et pour ce faire, le temps *t=0 s* correspond alors à une condition d'écoulement établi obtenue avec l'hypothèse d'une frontière fixe (§4.1.3). Pour assurer le suivi de l'interface, le champ initial de la distance à l'interface ϕ a été imposé Fig. 4-33 et le lancement du suivi également lancé à partir de l'écoulement établi (Fig. 4-34). Le champ est initialisé au voisinage immédiat de l'interface car la méthode de Narrow band est appliquée.

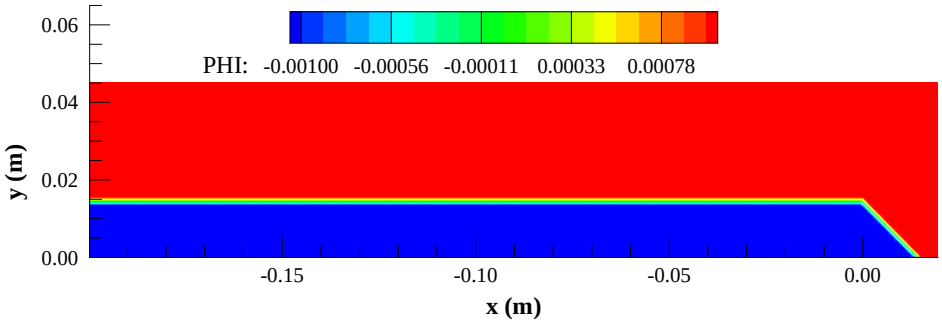


Fig. 4-33 : Champ initial de ϕ

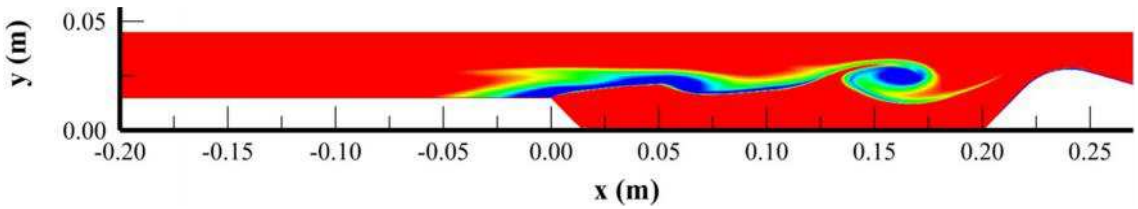


Fig. 4-34 : Écoulement instationnaire établi et servant de référence à t=0s pour la poursuite des travaux avec prise en compte de la régression de surface

A partir du champ établi (Fig. 4-34) correspondant à notre t=0 s, les conditions au niveau du propergol imposées sont pilotées par la loi de Veille correspondant dans ce cas à une vitesse de régression de V_r = 13 mm/s (vitesse de régression) et en laissant la géométrie se modifier. La Fig. 4-35 présente la courbe de pression en fonction du temps. Dès lors que la surface est laissée libre, la pression fond-avant diminue de manière relativement linéaire. Comme dans le cas BATES précédemment étudié, les variations de la géométrie imposent une réduction de la surface débitante due au fait de la «consommation» du propergol (Cf. Fig. 4-36) et ceci a pour conséquence de réduire le débit de manière continue et donc de faire directement diminuer la pression de la chambre ainsi attente. Plusieurs instants ont été soulignés (de t_0 à t_{12}) Fig. 4-35 et le profil de la surface à ces instants est présenté Fig. 4-36 pour ces différents instants.

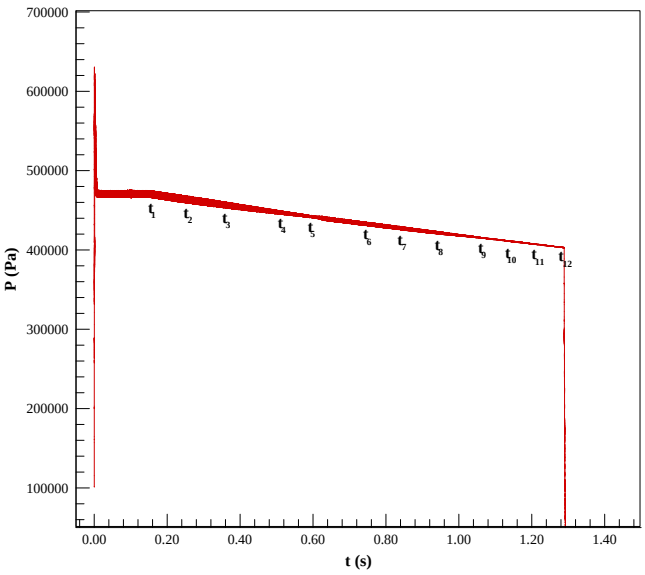


Fig. 4-35 : Champ pression à différents instants

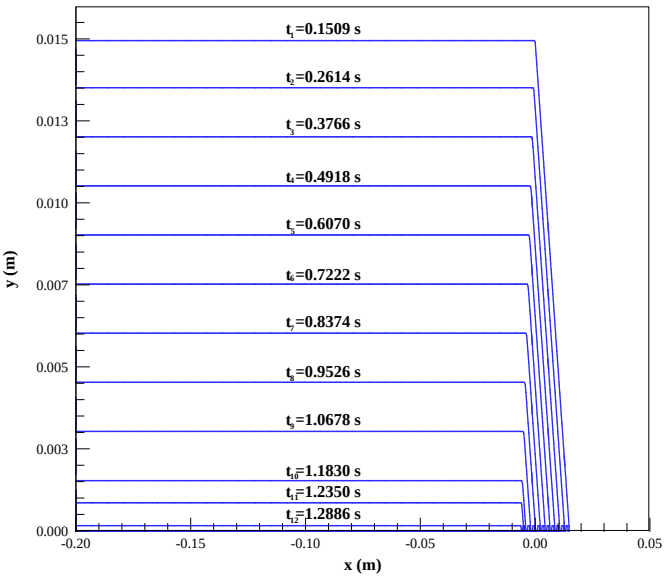


Fig. 4-36 : Régression de surface

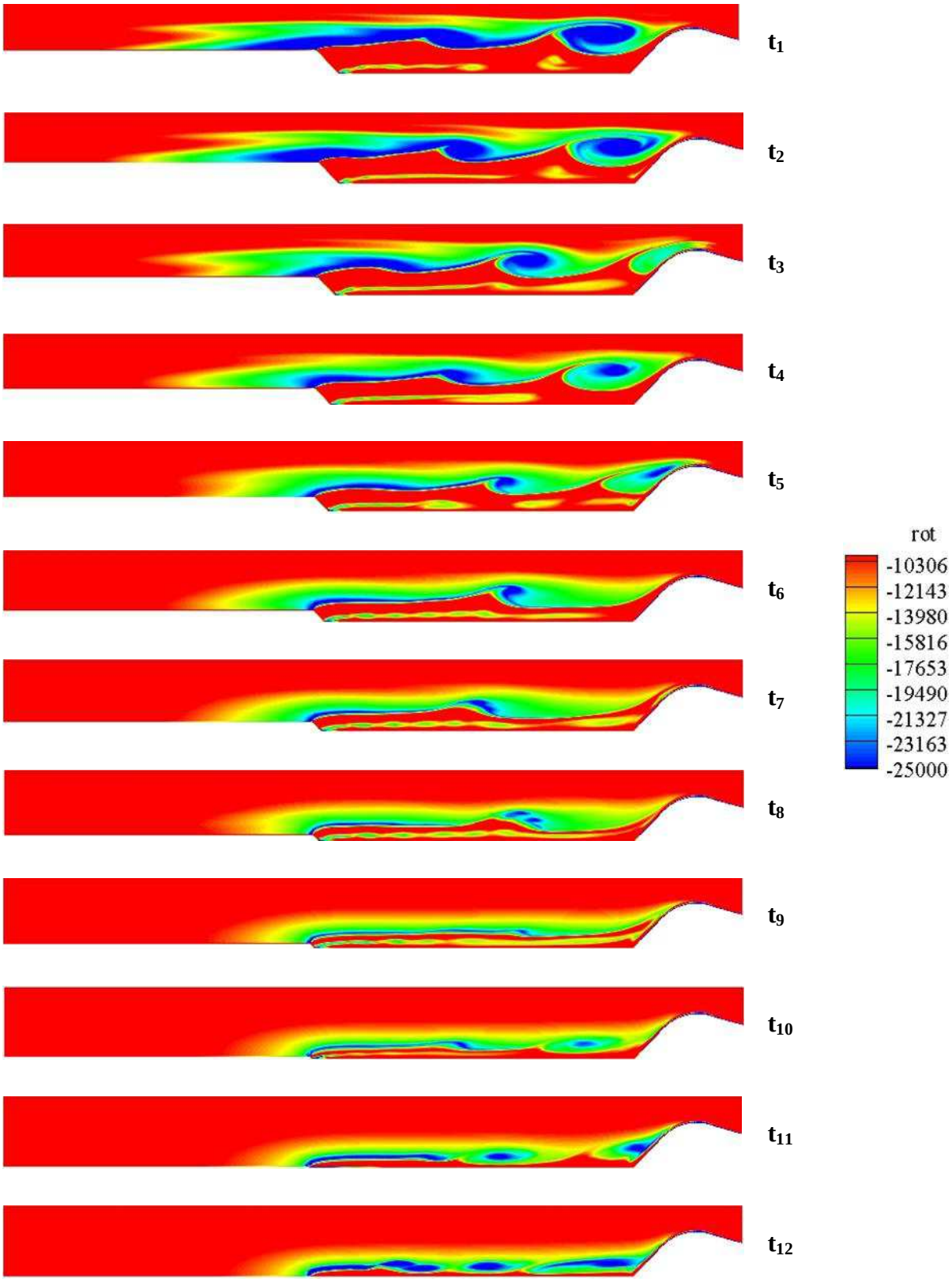
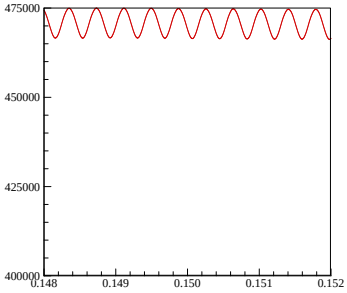


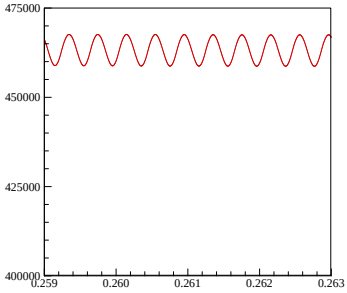
Fig. 4-37 : Champ tourbillonnaire instantané présenté aux instants t_1 à t_{12} préalablement définis

t_1



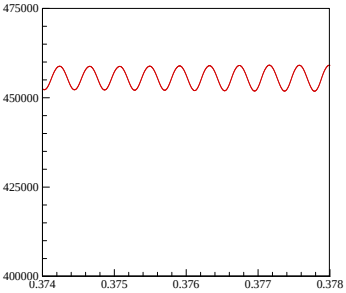
$f \approx 2577\ Hz$

t_2



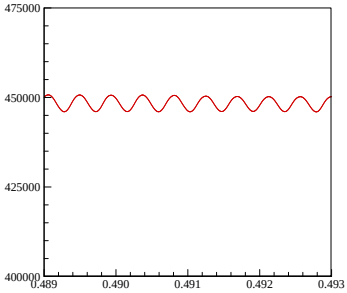
$f \approx 2445\ Hz$

t_3



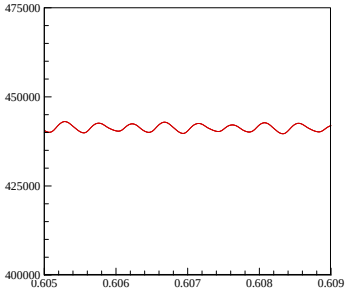
$f \approx 2415\ Hz$

t_4



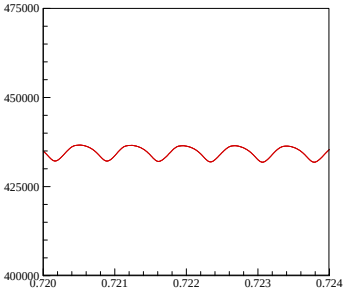
$f \approx 2247\ Hz$

t_5



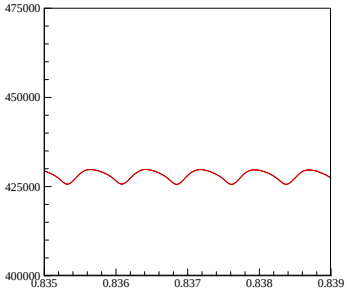
$f \approx 2157\ Hz$

t_6



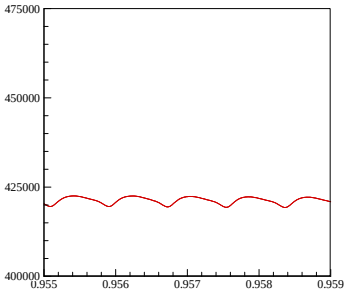
$f \approx 1370\ Hz$

t_7



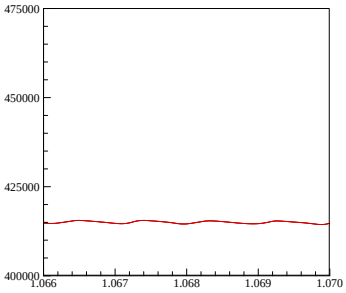
$f \approx 1297\ Hz$

t_8



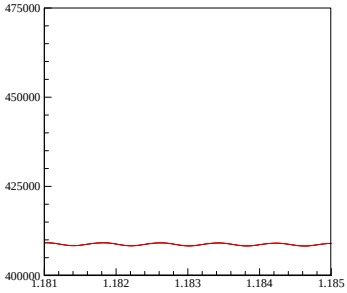
$f \approx 1215\ Hz$

t_9

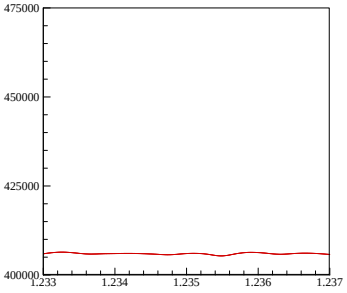


$f \approx 1010\ Hz$

t_{10}



t_{11}



t_{12}

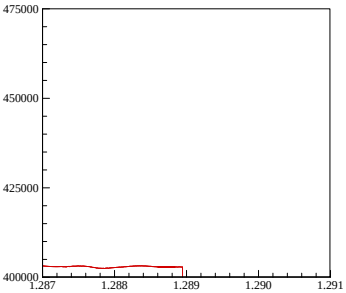


Fig. 4-38 : Suivi du tracé de pression autour des instants caractéristiques t_i définis

Pour les différents instants définis Fig. 4-35, le tracé instantané du champ de rotationnel (Cf. Fig. 4-37) est présenté Fig. 4-37. Ceci souligne très explicitement l'influence de la géométrie du chargement sur la génération de structures tourbillonnaires. En effet, et comme nous l'avons souligné §4.3.3.2, les calculs présentent une couche de cisaillement avec présence de deux tourbillons se convectant entre la zone de source et la tuyère au fond-arrière (par exemple à $t=t_3$) et la présence de ces tourbillons demeure jusqu'à $t=t_5$. Au cours de cette période, i.e. entre $t_0 \leq t \leq t_5$, les deux structures sont fortement altérées et leur taille caractéristique est réduite de manière considérable. Une telle diminution n'est pas sans conséquence sur les niveaux des instabilités, les fluctuations de pression étant amorties comme le souligne les signaux de pression en fonction du temps (Cf. Fig. 4-35). Pour mieux souligner de telles variations, la Fig. 4-39 présente l'évolution de la pression zoomée autour des 12 instants discrets et l'indication de la fréquence la plus excitée est également indiquée ; on constate qu'au fur et à mesure de l'avancée en temps, la fréquence évolue de 2577 à 2157 Hz entre $t_0 \leq t \leq t_5$. Cette variation souligne que la modification de la dynamique des tourbillons, pilotée par la variation géométrique, pilote également la fréquence acoustique excitée et qu'il s'agit donc bien d'un véritable couplage aéroacoustique. A partir de $t=t_6$, la fréquence la plus énergétique subit une variation brusque passant de 2157 Hz à 1370 Hz de t_5 à t_6. En fait, pour $t \geq t_6$, force est de constater qu'un unique tourbillon est généré, ce qui explique une fréquence quasiment divisée par deux entre t_1 et t_6. De t_6 à t_{12}, les tourbillons deviennent de moins en moins énergétiques et malgré le développement de plusieurs structures, générées en partie basse et venant s'impacter dans la partie basse de la tuyère (d'où des conséquences acoustiques moindres), les oscillations de pression demeurent également relativement faibles.

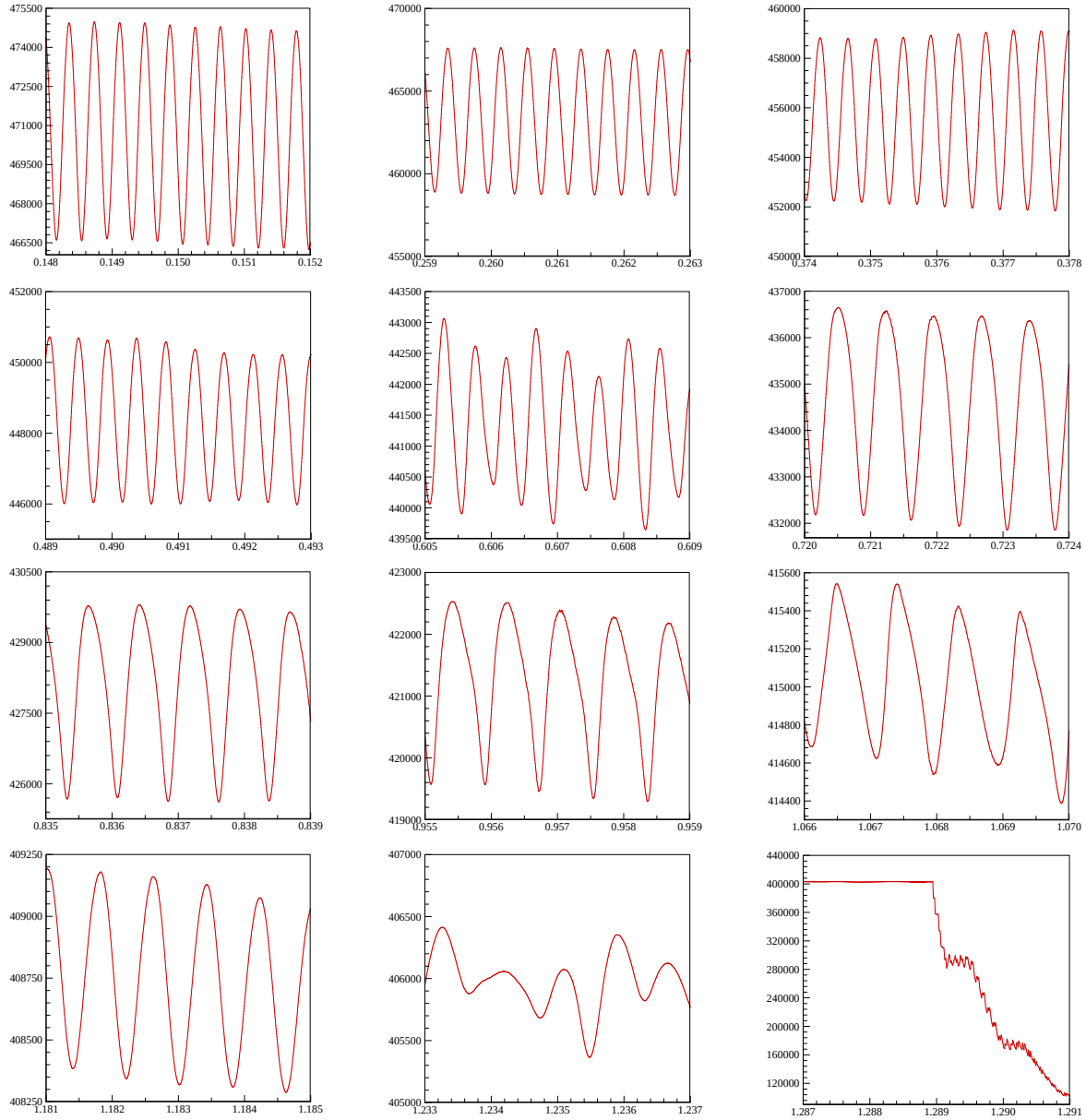


Fig. 4-39 : Suivi du tracé de pression autour des instants caractéristiques t_i définis (zoom)

Ces premiers calculs, en prenant en compte les variations géométriques internes, soulignent que le développement des instabilités peut être affecté par l'historique de l'écoulement et les modifications alors continues de la géométrie. Bien entendu, il ne s'agit que d'une première étude –qui demande beaucoup plus d'exploitations- mais à ce stade, le modèle numérique développé s'est ainsi montré être des plus utiles.

Chapitre 5

Couplage Fluide / Structure

Les travaux effectués jusqu'à présent ont soulignés le déroulement consistant du code et des schémas proposés pour traiter des transferts au sein des moteurs à propergol solide. Des études fondamentales, notamment sur l'effet de la variation géométrique interne au cours de la combustion sur les instabilités ainsi que la prise en compte de la combustion érosive, sont évidemment nécessaires et devront être conduites prochainement. Cependant, l'objectif de notre travail est d'évaluer la pertinence des modèles retenus pour caractériser les écoulements au sein des moteurs à propergol solide et notamment le rôle potentiel du couplage entre l'écoulement et les protections thermiques sur les niveaux des oscillations de pression. Dans ces conditions, notre travail s'est donc principalement focalisé sur la mise en œuvre d'une telle prise en compte et ceci constitue la dernière étape de notre étude.

5.1 Faisabilité d'un traitement couplage fluide / structure

L'influence du couplage fluide/structure au sein des moteurs segmentés n'a que peu été étudiée à ce jour et ceci est lié à la complexité de la modélisation ainsi qu'aux difficultés expérimentales d'investigation. La Fig. 5-1 présente un exemple de courbure de l'obstacle obtenu par Nunes et Plourde [87] expérimentalement et le choix des matériaux ainsi que la configuration induisent des oscillations de faibles amplitudes mais ayant néanmoins des interactions sensibles sur les niveaux de bruit.

D'un point de vue numérique, la prise en compte de frontières mobiles au cours du calcul rend évidemment possible de traiter un problème de couplage fluide/structure, le côté fluide étant d'ores et déjà disponible. En effet, le déplacement d'une frontière qu'elle corresponde à une paroi sans glissement ou bien à une condition de régression par combustion n'engendre pas de difficultés particulières dans le traitement du fluide. Les conditions et la position de la structure sont prises en compte par la discrétisation aux frontières immergées. Dans ces conditions, les matrices d'interpolation et la topologie des différents nœuds considérés doivent être cependant calculés à chaque prise en compte de la variation de la géométrie. Par contre, et contrairement à la régression de surface, les conditions de déplacement de la paroi ne dépendent pas uniquement des conditions à la surface (en l'occurrence les niveaux de la pression) mais également des équilibres déterminés au sein de la structure solide.

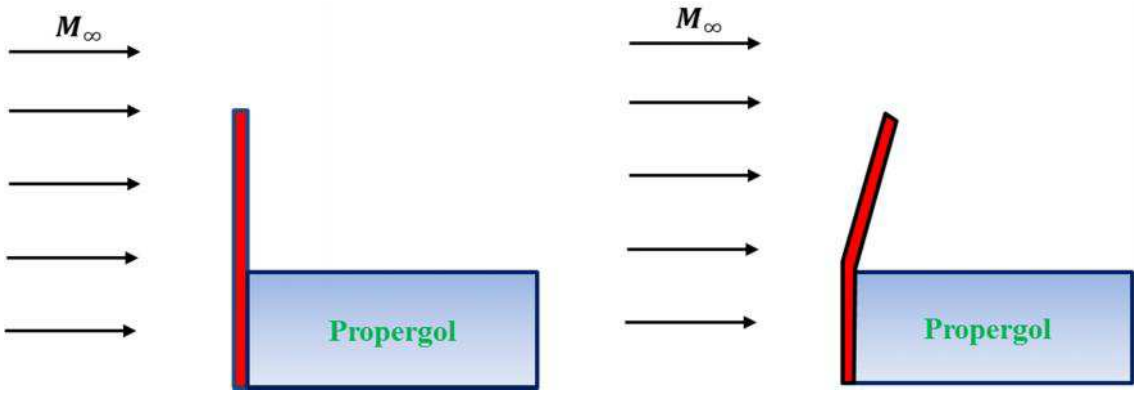


Fig. 5-1 : Problématique du couplage fluide/structure dans les moteurs segmentés

Dans la partie solide, l'équation de conservation de la quantité de mouvement correspondant à la première loi de Cauchy (équation (5.1)-a) est à résoudre. Dans cette équation, le champ de déplacements *u* (en m) est déterminé à partir de l'estimation du tenseur des contraintes de Cauchy σ_{ij} (d'ordre 2) et des éventuels efforts volumiques *f* (comme la gravité *g*, par exemple). Les conditions aux limites à la frontière du solide s'écrivent par un équilibre des déplacements (équation (5.1)-b) ainsi que l'équilibre des efforts :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \textit{dans la structure } \omega \\ \overrightarrow{u_f} = \overrightarrow{u_s} \\ \sigma_f . \overrightarrow{u_f} = \sigma_s . \overrightarrow{u_s} \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1.1 Modélisation mécanique

Les lois de comportement du matériau définissent l'expression des contraintes ainsi que la relation entre la contrainte générée par les forces externes (fluide notamment) et la déformation (provenant du changement de géométrie) dépendant du type de matériau. Dans le cadre de ce travail, seules les déformations élastiques linéaires seront considérées, c'est-à-dire que l'on considère que le matériau possède l'aptitude de reprendre sa forme initiale dès lors que les contraintes ayant conduit à sa déformation sont libérées. La loi de comportement

doit permettre de relier le tenseur des contraintes à l'instant *t* au tenseur des déformations en tout point du solide, quel que soit l'instant considéré. La façon pour représenter une relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations ε_{kl} est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{5.2}$$

avec C_{ijkl} le tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité, et le tenseur de déformation $\varepsilon_{kl} = \left(\partial u_l / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_l\right)/2$. Dans le cas particulier, d'un matériau isotrope élastique, la contrainte des déformations d'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{5.3}$$

avec λ et μ les coefficients de Lame et δ_{ij} le symbole de Kronecker respectivement.

Concernant la résolution du système d'équations (5.1), le code Aster développé principalement par EDF R&D [88] depuis 1989 a été utilisé. La méthode des éléments finis utilise une formulation intégrale (formulation faible de Galerkin) pour réduire le problème à un système d'équations algébriques, pouvant être résolu numériquement. Elle est basée sur deux principes fondamentaux : la discrétisation et l'interpolation. La méthode de Rayleigh-Ritz pose les bases des éléments finis en approximant la solution de l'équation différentielle par un nombre fini de fonctions *u(x,y,z)* dont la forme est connue, sur des formes géométriques simples. Les paramètres sont évalués par la minimisation de l'énergie potentielle du système. L'approximation polynomiale est la plus répandue. Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la solution continue à un nombre fini de points du domaine. Le champ restant inconnu dans le domaine entre les nœuds, un modèle approché et continu est défini par interpolation des valeurs nodales. Pour cela, des fonctions de forme sont utilisées à l'intérieur de chaque maille joignant un groupe de nœuds.

Le système d'équations, une fois discrétisé, est exprimé sous forme incrémentale et résolu par une méthode dite de «quasi-Newton». Les propriétés de la structure sont obtenues par assemblage de celles des éléments et par la prise en compte des conditions aux limites. La résolution du système permet d'obtenir les corrections des incréments des déplacements nodaux ainsi que les contraintes et les déformations en tout point de la structure. Pour résoudre le système matriciel tangent, il existe deux grandes familles de méthodes : «directe»

(Gauss, directe par factorisation de la matrice de rigidité, etc.) ou «itérative» (Gauss-Seidel, relaxation, gradient conjugué).

5.1.2 Couplage entre les approches compressible/ASTER

Après avoir détaillé les différents modèles dans les zones à considérer (fluide, solide), la stratégie de couplage à ce stade est indispensable et l'approche dite partitionnée a été préférée [89]. Avec une telle approche, le système couplé fluide/structure est résolu sous-système par sous-système, successivement ou itérativement, et des variables (correspondant aux forces d'action et de réaction d'un point de vue physique) sont échangées à l'interface fluide-structure (directement entre les solveurs ou par l'intermédiaire d'un coupleur). Felippa [89] indique qu'une telle approche assure l'adaptation aux spécificités de chaque milieu en matière de performance des modèles de résolution (discrétisations spatiales et temporelles, algorithmes,…). De plus, l'indépendance de la modélisation est favorisée et pouvoir réutiliser des codes existants, spécialisés dans la résolution d'une physique particulière, assure une grande modularité.

La procédure de couplage utilisée est présentée schématiquement Fig. 5-2, les conditions aux limites suivantes étant imposées à l'interface :

$$u_f^{\,n} = u_s^{\,n} \tag{5.4}$$

$$F_s^{\,n} = F_f^{\,n+1} \tag{5.5}$$

avec u^n la vitesse du solide à l'instant n et les indices *f* et *s* correspondent à la partie fluide et solide respectivement et F^n la force surfacique particulaire. Les principales étapes de résolution des systèmes couplés sont :

1. Calcul de l'état solide $\mathbf{S}^{n+1}$ à l'instant de couplage $t_c + \Delta t_{c,}$. Pour atteindre cet instant, plusieurs boucles en temps (sous cyclage) peuvent être appliquées pour la partie solide,
2. Transferts des nouvelles positions (des déplacements) et des vitesses aux frontières du solide,
3. Calcul de l'état du fluide $\mathbf{F}^{n+1}$ jusqu'à l'instant du couplage $t_c + \Delta t_c$, avec intégration des conditions imposées par la partie solide avec sous cyclage du pas de temps fluide,
4. Transferts des contraintes fluides imposées au solide à l'instant $t_c + \Delta t_c$.

La Fig. 5-2 détaillant le couplage présente une stratégie basée sur une procédure dite CSS pour «Conventional Serial Staggered» décrite par Piperno et al. [90]. L'approche CSS offre effectivement plusieurs avantages et, en premier lieu, son coût d'utilisation. Ce dernier représente en fait la somme des temps de calcul des deux milieux.

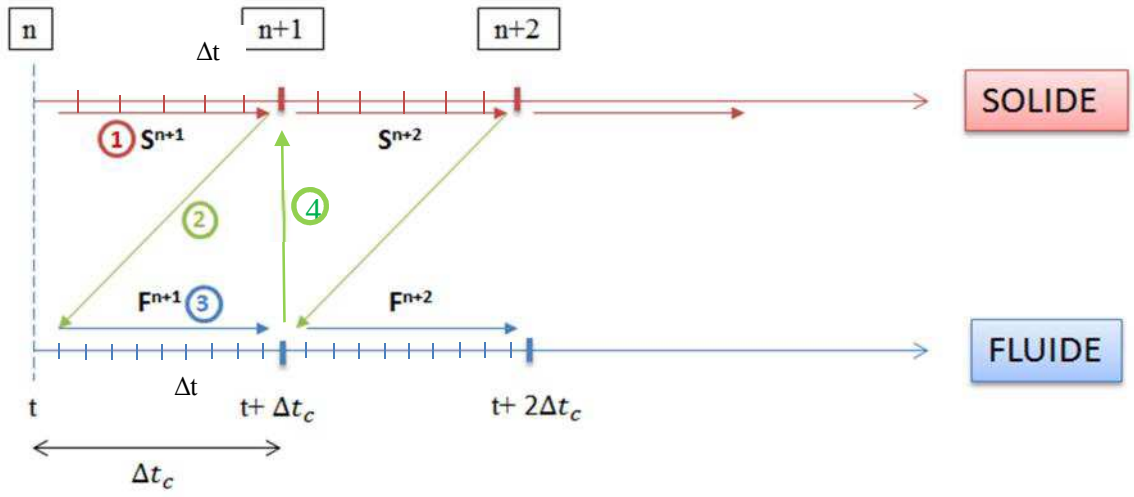


Fig. 5-2 : Procédure du couplage

Le calcul d'une des physiques a généralement besoin d'une résolution temporelle plus fine que l'autre et ceci est sans conséquence sur la procédure couplée. De plus, le sous-cyclage des calculs permet d'effectuer l'échange des données entre les deux solveurs à certains instants de la physique la plus rapide, à la fréquence de la physique la plus lente (par exemple avec un pas de temps de couplage Δt_s correspondant au temps caractéristique). Cette procédure CSS avec sous-cyclage offre un gain en temps de calcul et en transferts.

En partant des différents points évoqués précédemment pour réaliser le couplage fluide/structure (solveur fluide avec approche IBM, solveur mécanique, couplage partitionné,…), un algorithme de couplage a été proposé et est schématiquement présenté Fig. 5-3 constituée de 4 étapes principales. Dans un premier temps, une phase d'initialisation est nécessaire aussi bien pour le solveur fluide que solide et possède trois sous-étapes : le maillage mécanique/fluide ainsi que l'interface, la définition des paramètres du couplage et des paramètres de simulation des deux côtés (CFD et CAE) ainsi que la définition de l'état initial du système.

La seconde étape correspond à la partie ASTER-MECA récupérant les informations de pression sur toutes les mailles surfaciques afin de les utiliser comme conditions aux limites. ASTER-MECA effectue alors une résolution du problème dynamique des solides déformables permettant l'accès aux déformations subies par le solide. La sortie de cette partie (i.e. déplacement aux nœuds sur l'interface) est l'entrée de la troisième partie dans laquelle le calcul fluide est effectué. Quand le calcul fluide est fini, les informations de sortie comme la pression, la force dynamique sur l'objet déformable sont redonnées à l'ASTER_MECA pour refaire les calculs de structure. Une procédure similaire est répétée (i.e. des boucles de calcul) jusqu'à déterminé le calcul.

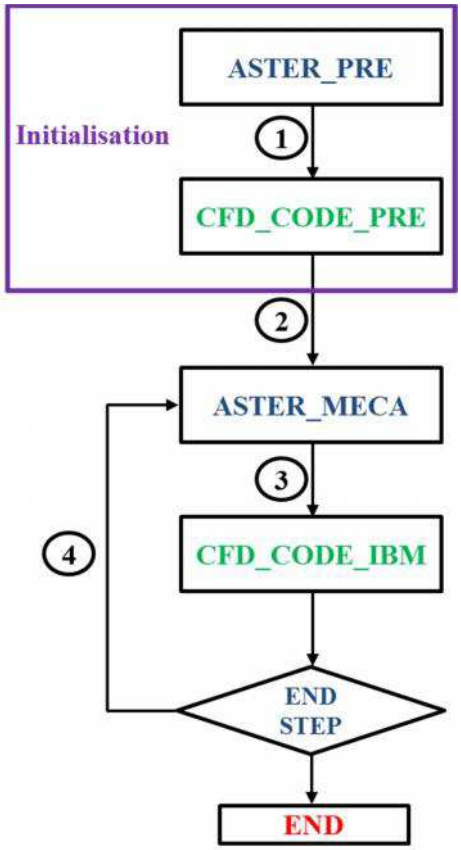


Fig. 5-3 : Algorithme de couplage CFD_CODE_IBM /ASTER

La réalisation des calculs numériques et les résultats obtenus sont évidemment directement conditionnés par les conditions aux limites imposées. Dans le cas d'un calcul couplé, les résultats du calcul fluide servent de conditions aux limites utilisées pour le calcul solide et vice-versa. L'estimation des forces aérodynamiques est donc déterminante et une attention particulière doit être apportée à cette étape.

5.2 Influence d'une protection souple

Comme nous venons de le présenter, le couplage proprement parlé entre le code compressible et un solveur propre dédié à la mécanique (ici nous utilisons le code ASTER) a été réalisé de manière assez aisée. En fait, le recours à une technique aux frontières immergées offre toutes les latitudes possibles ; en effet, l'interface étant d'ores et déjà traitée de manière différente et intégrée comme condition dans la partie fluide, il est ainsi implicitement possible que des informations provenant d'autres sources soient prises en compte et ainsi communiquées par frontières immergées. Dans le cas d'un traitement fluide/solide, comme nous l'avons évoqué précédemment, ASTER fournit une nouvelle position de la surface qui est prise en compte par les termes sources de la méthode aux frontières immergées. A notre connaissance, un solveur fluide compressible basé sur une technique de frontières immergées et couplé avec un outil de mécanique n'est pas des plus courants. Par contre, un tel assemblage permettrait de se donner un moyen, comme nous l'avons signalé en introduction, d'étudier l'influence de la flexibilité des protections thermiques sur le développement des instabilités. Notre objectif est, à ce stade, de vérifier la faisabilité en se basant sur un cas potentiellement intéressant et le cas MICAT a été à nouveau pris comme référence. Tout d'abord, la géométrie fin combustion de MICAT a d'ores et déjà fait l'objet d'analyses expérimentales propres sur le couplage fluide/structure [2,87]. De plus, il s'agit d'une configuration dédiée aux instabilités aéro-acoustiques et dont les travaux, par le passé, ont souligné la bonne corrélation avec les résultats de tir de moteurs tests à propergol solide.

Cependant, afin de réaliser un cas test proche de MICAT tout en allégeant les calculs, la configuration géométrique du fond arrière a été intégralement reconduite i.e. la géométrie allant de la protection thermique jusqu'à la tuyère. Par contre, dans un souci de réduire les temps CPU, la géométrie en amont de la protection thermique a été réduite à 30 mm seulement alors que l'ensemble du débit injecté au niveau du premier bloc débitant est considéré en injection fond avant (Cf. Fig. 5-4). Le Tableau 5-1 liste les principales caractéristiques du calcul alors réalisé.

En fait, les conditions initiales dans le champ fluide correspondent à l'écoulement établi obtenu dans le cas d'un obstacle rigide. Cet instant devient alors notre temps de référence (t = 0s) et les calculs sont alors conduits de manière couplée entre le solveur fluide et le solveur solide. S'agissant d'un premier cas de validation, le couplage fluide→solide et solide →

fluide s'effectue toutes les itérations temporelles i.e. tous les pas de temps $\Delta t = 10^{-7}$ s bien que les temps caractéristiques soient franchement différents. Sans surprise, le temps caractéristiques fluide est beaucoup plus contraignant que le pas de solide (un calcul uniquement CFD avec un chargement similaire mais par un traitement uniquement avec ASTER a besoin de 10^{-5} s par pas de temps). Notons cependant que le raccourcissement de la longueur de la veine n'est pas sans conséquence sur la physique.

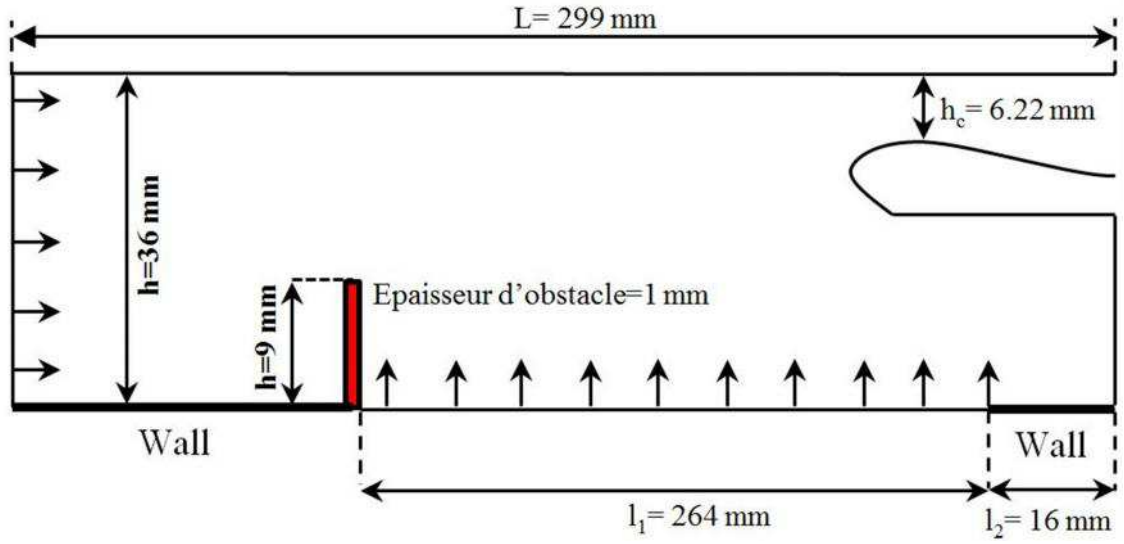


Fig. 5-4 : Représentation schématique du cas test CFS étudié

Caractéristiques du domaine de calcul			
L_x L_y	299 mm 36 mm	Δx en *mm* Δy en *mm*	0.5 0.5
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.5	p_∞ en Pa T_∞ en K	101325 293
Débit d'entrée *x*	29.2676 kg/m^2/s	Débit d'entrée *y*	3.8314 kg/m^2/s
Niveau de Raffinement	2 suivant x 2 suivant y		

Tableau 5-1 : Paramètre de calcul CFS

En effet, une chambre plus courte va engendrer des fréquences de résonance propres plus élevées et le couplage aéroacoustique risque d'en être affecté. Dans ces conditions, la fréquence du premier mode est égale à 568.56 Hz (Cf. équation (4.1)) et l'obstacle de 1 mm est, comme sur la figure précédente, équivalent à une poutre encastré à une extrémité et soumise directement à l'écoulement à une autre.

Dans le cadre de sa thèse, Nunes [2] a souligné que l'introduction d'un matériau souple, dont la fréquence naturelle de vibration est proche de celle de l'acoustique, joue un rôle sur les niveaux des oscillations atteints. Pour modifier les caractéristiques, Nunes [2] a expérimentalement jouer sur l'épaisseur de la protection thermique et les caractéristiques matériaux ont été choisies afin d'exciter le premier mode acoustique. De notre côté, nous avons également décidé numériquement d'exciter le premier mode acoustique pour un obstacle d'épaisseur de 10^{-3} m et les propriétés correspondent à un module d'Young et une densité de 0.0147 GPa et 1200 kg/m^3. Ces valeurs offrent, d'après la théorie mécanique, une fréquence naturelle propre de l'ordre du premier mode acoustique alors atteint dans la configuration MICAT modifiée. Notons cependant que la position de l'obstacle n'est pas des plus optimales vis-à-vis du champ acoustique (ce dernier n'est pas au milieu de la veine) mais la configuration envisagée correspond plus à un test de faisabilité qu'à une analyse physique de l'influence du couplage fluide/structure. Ainsi, à partir de l'écoulement instationnaire établi avec l'obstacle rigide et pris en référence à t = 0s, deux calculs ont été conduits parallèlement avec un obstacle souple et un obstacle rigide, l'idée étant de comparer de manière qualitative les éventuelles influences de la présence d'une protection thermique souple. Pour le calcul avec obstacle flexible, après chaque 100 itérations fluide i.e. toutes les 10^{-5}s, un couplage avec la mécanique est réalisée ; l'équilibre mécanique est donc résolu afin de déterminer une nouvelle position de la protection thermique et cette dernière est ainsi prise en compte dans la partie fluide en considérant la position en recalculant les termes d'interpolation de la méthode aux frontières immergées.

L'évolution des champs de vorticité obtenus dans le cas obstacle rigide et obstacle flexible est soulignée Fig. 5-5 et Fig. 5-6 et dans le cas du calcul flexible, l'oscillation de la protection thermique au cours du temps est soulignée Fig. 5-7. Bien entendu, l'équilibre de la protection thermique est quelque peu incliné sous l'effet de l'écoulement avec un mouvement oscillant de part et d'autre de cette position.

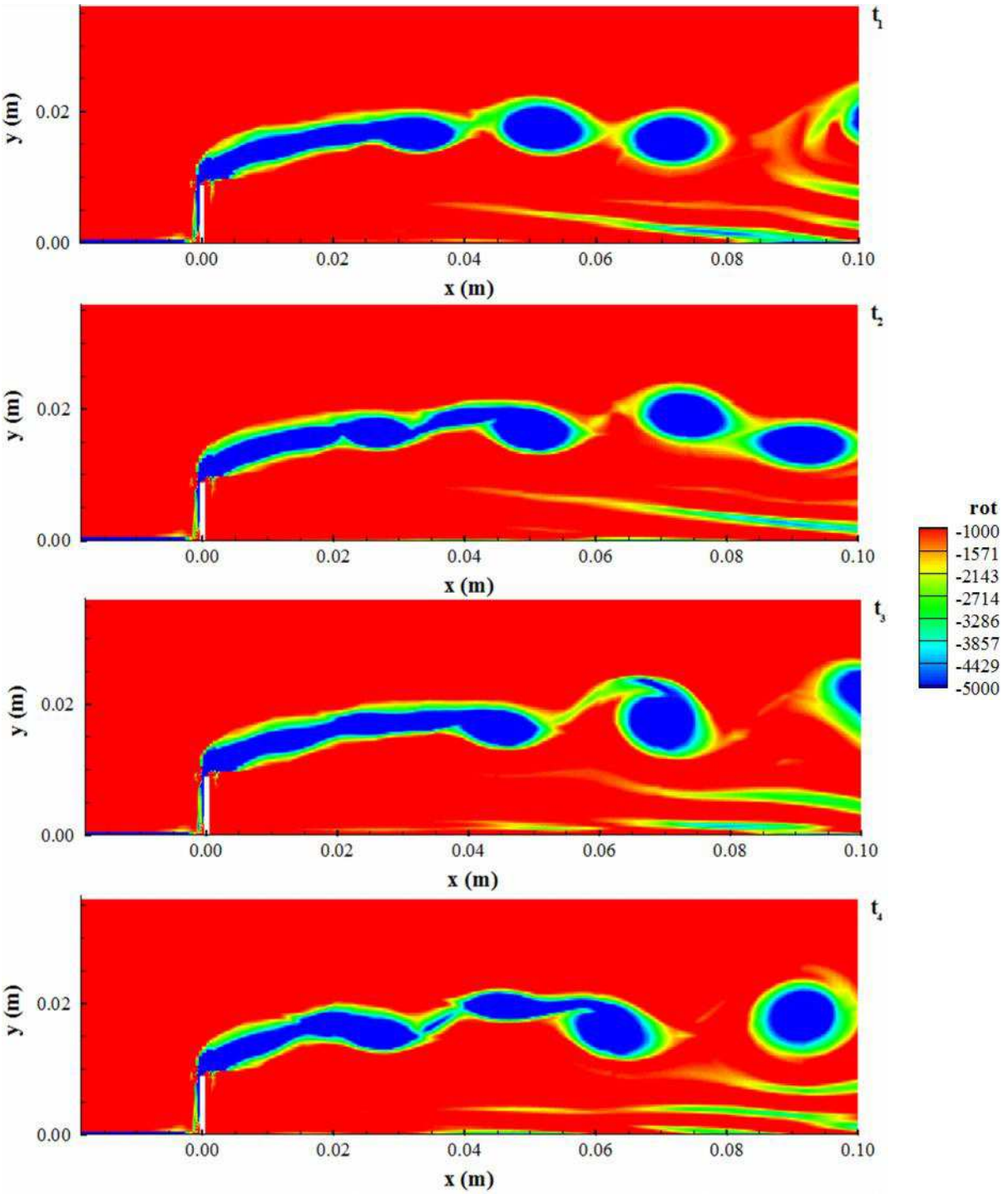


Fig. 5-5 : Evolution temporelle du champ de vorticité dans le cas de l'obstacle rigide (chaque image séparée de 0.001 s)

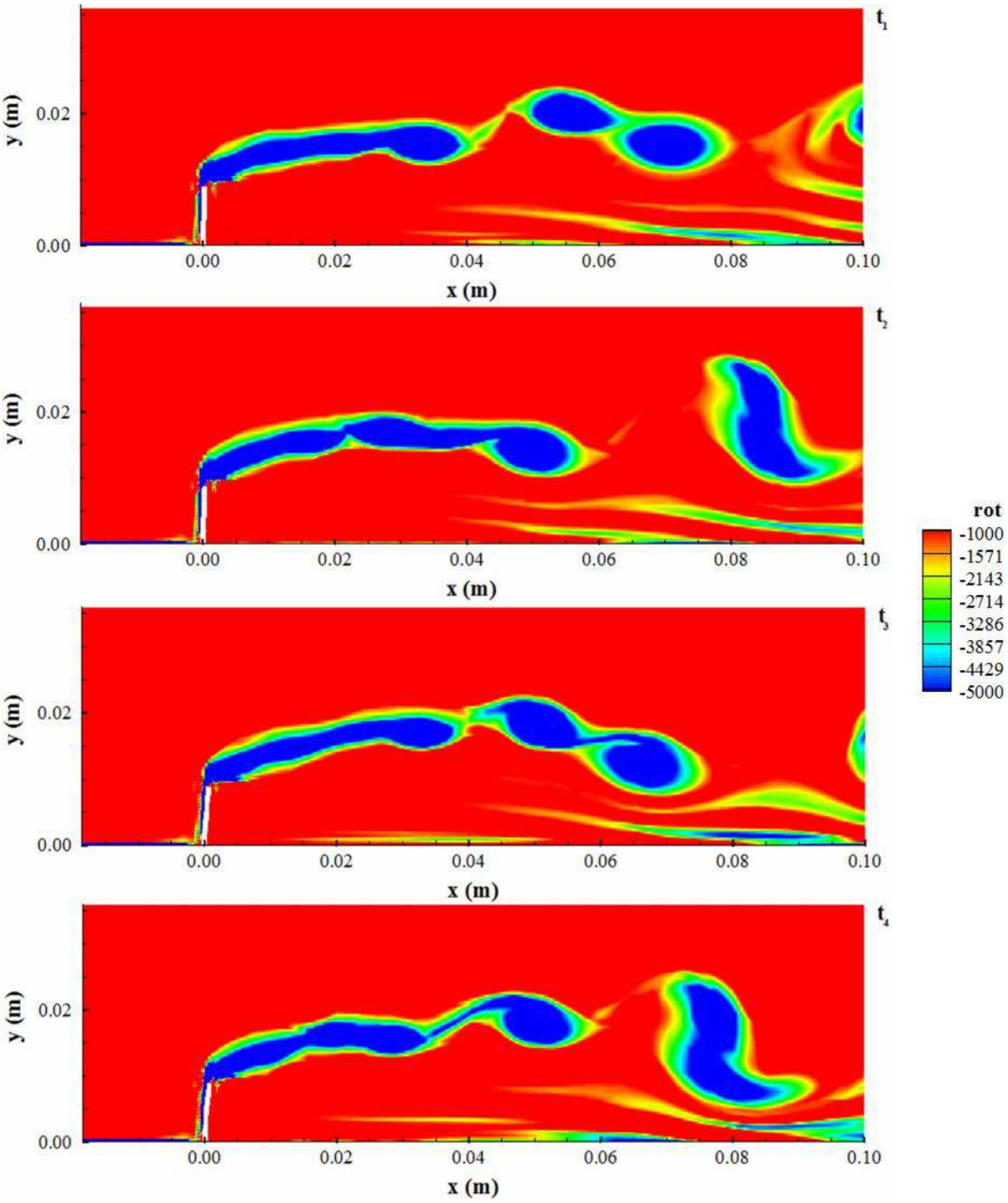


Fig. 5-6: Evolution temporelle du champ de vorticité dans le cas de l'obstacle flexible (chaque image séparée de 0.001 s)

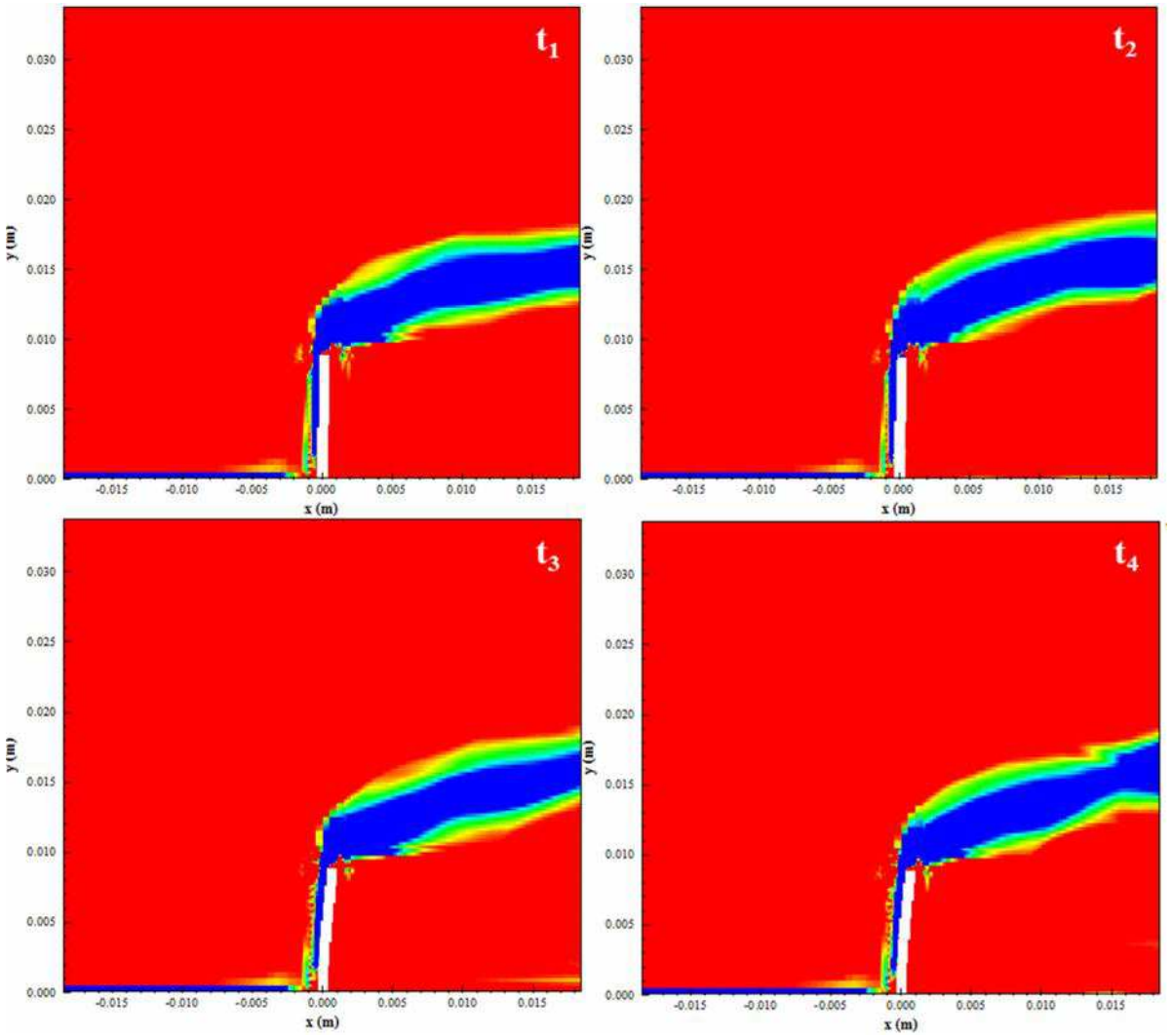


Fig. 5-7 : Zoom au voisinage immédiat de l'obstacle en fonction du temps

Le mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre, dans le cas de l'obstacle flexible est clairement souligné et force est de constater qu'il joue un rôle significatif sur les développements de tourbillon. En effet, l'oscillation de l'obstacle favorise un déplacement latéral des tourbillons qui se trouvent alors dans des zones de plus grandes vitesses (par le haut) et de plus faibles vitesses (par le bas) et ceci accentue en fait les gradients mais surtout les vitesses de convection des structures. Par exemple, à $t=t_3$, le phénomène d'appariement des deux structures est d'ores et déjà effectué dans le cas de l'obstacle flexible mais surtout la nouvelle structure a déjà été convectée à la limite du champ de visualisation. De plus, favoriser cette latéralité peut également favoriser l'interaction avec l'écoulement de paroi. Ces modifications clairement détectables dans la zone de l'obstacle ($0 \leq \boldsymbol{x} \leq 0.10$ m) demeurent au niveau de l'impact mais la combinaison des structures entre-elles au cours de leur convection a tendance à quelque peu les lisser (Fig. 5-8).

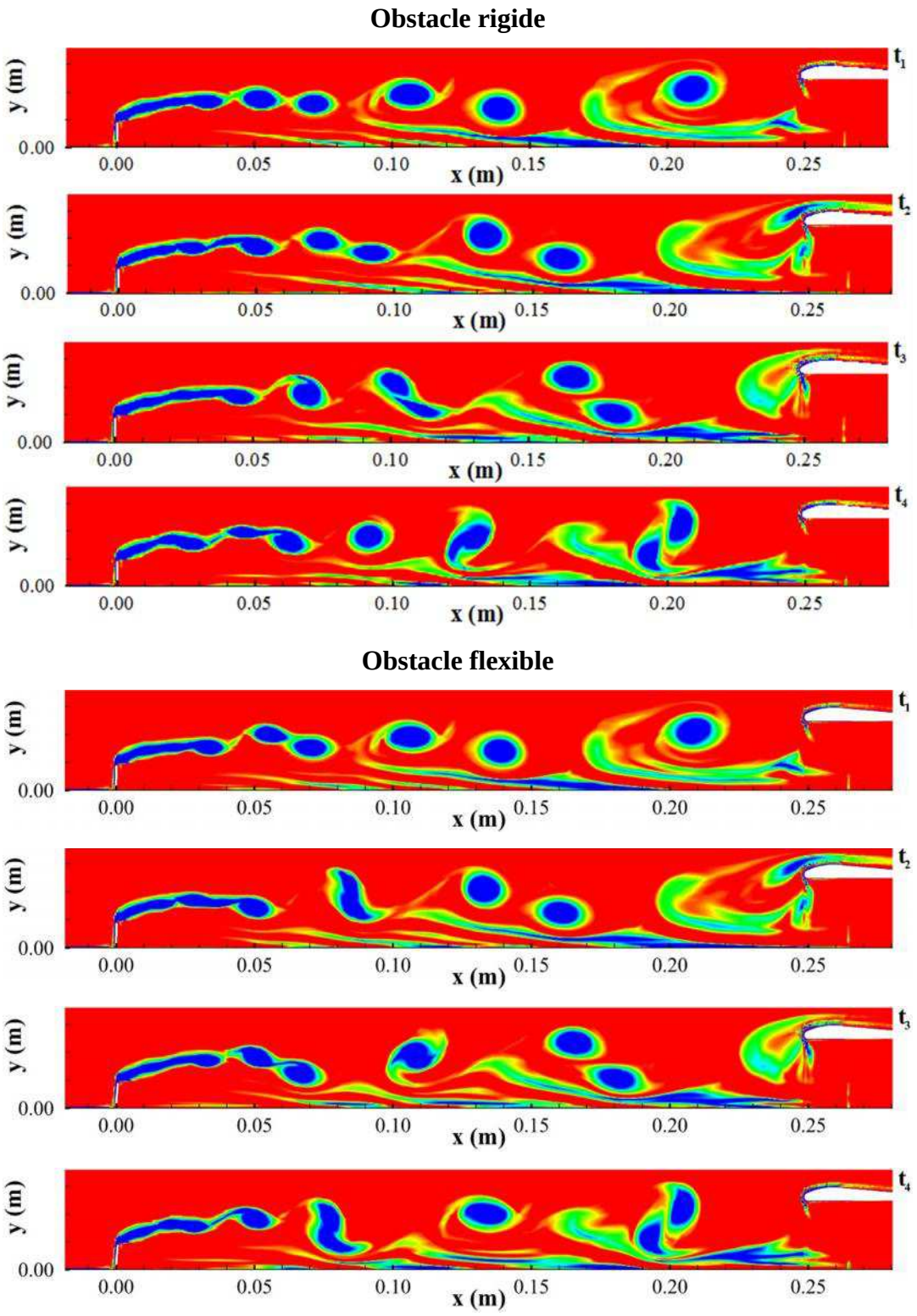


Fig. 5-8: Champ tourbillonnaire sur l'ensemble du domaine pour le cas obstacle rigide (haut) et flexible (bas)

Cependant, en suivant l'évolution temporelle de la pression recueillie au fond-avant (Fig. 5-9) pour les deux cas (obstacle rigide et flexible), un léger décalage (de quelques Pa)

intervient mais que les niveaux d'oscillations ne semblent pas atténuée. Au contraire, une activité plus dense semble se dessiner avec le cas obstacle flexible ce qui se traduit par des fluctuations temporelles de grandes fréquences venant s'additionner aux plus faibles fréquences (qui elles sont parfaitement similaires entre les deux configurations étudiées). Même si cela n'est pas clairement souligné, tout se passe comme si la prise en compte du mouvement de la protection thermique favorisait un transfert d'un écoulement laminaire vers un comportement plus turbulent. Le suivi du déplacement longitudinal de l'extrémité de l'obstacle (Fig. 5-10) témoigne également d'un comportement fluctuant de manière amortie.

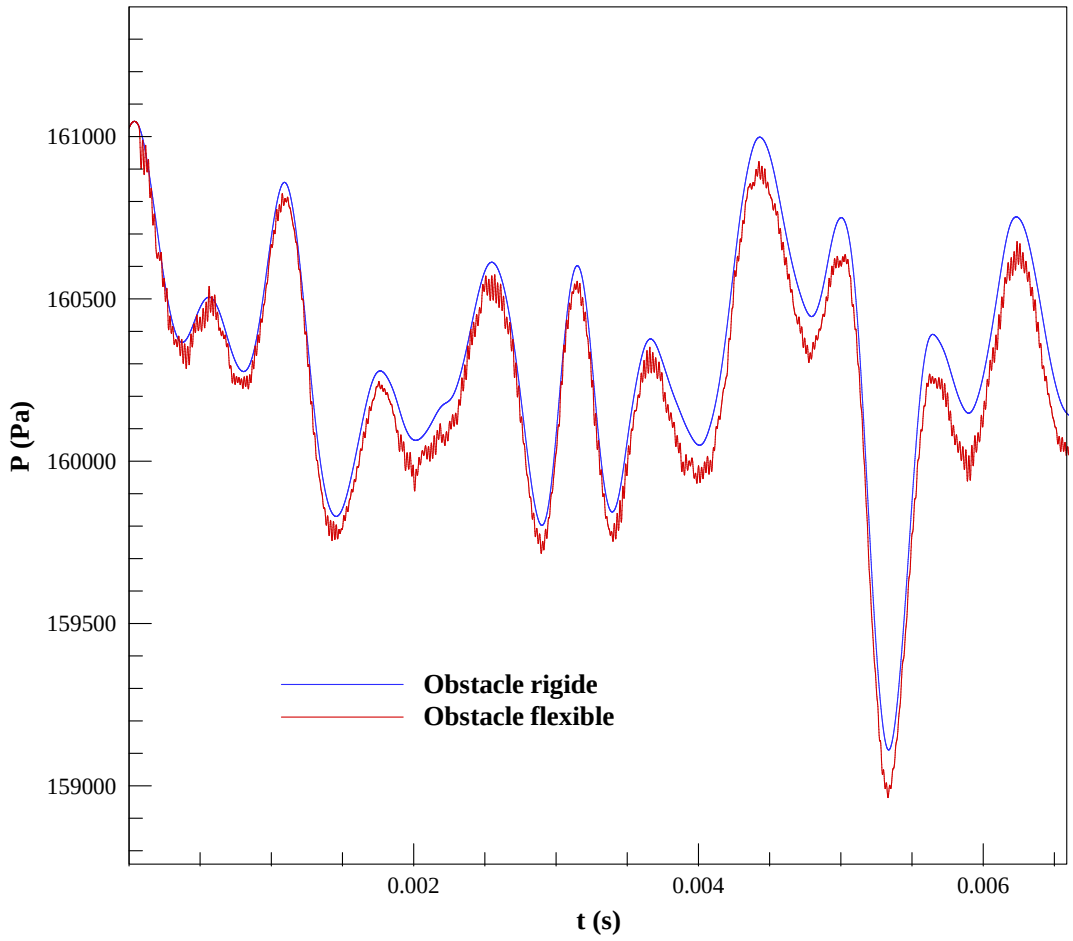


Fig. 5-9 : Evolution temporelle de la pression au fond avant pour les cas obstacle rigide et obstacle flexible

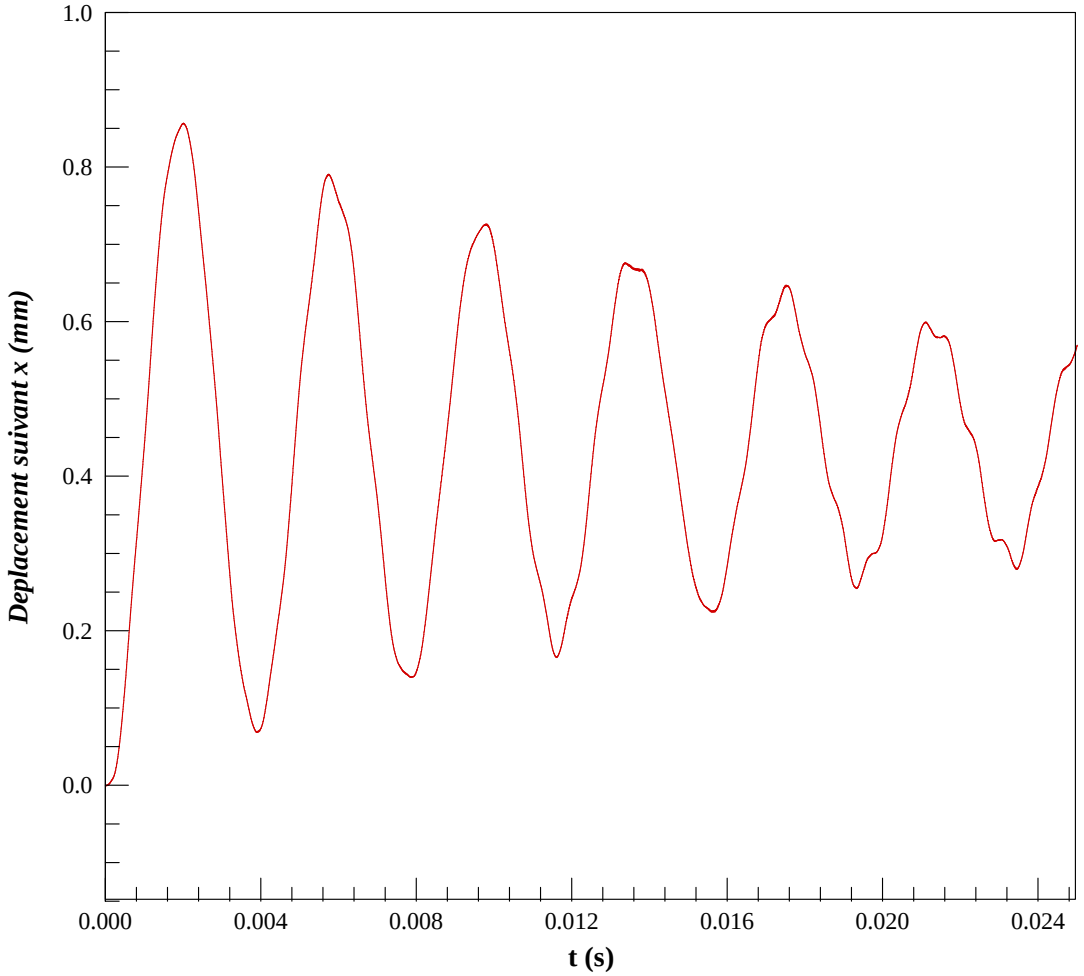


Fig. 5-10: Suivi temporelle de la position longitudinale de l'extrémité de l'obstacle flexible au cours du temps

La configuration présentée correspond à un cas test de faisabilité et ce dernier a clairement souligné l'accessibilité à des caractérisations multi-physiques, que ce soit à partir de couplage avec des solveurs mécaniques ou bien lors de la prise en compte de mécanismes couplés engendrant des modifications phénoménologiques conséquentes.

D'un point de vue temps CPU, la configuration couplée ne requiert uniquement que 15% de temps CPU que dans le cas sans couplage ! En effet, sur 8 processeurs, 570 s de temps CPU sont nécessaires pour effectuer 1000 itérations contre 600 s en prenant en compte le couplage. Il s'agit d'une intégration des plus réussies.

Chapitre 6

Conclusions & Perspectives

La simulation des écoulements compressibles à partir d'une approche aux frontières immergées a été développée dans le cadre de ce travail afin de caractériser les écoulements internes au sein des moteurs à propergol solide en intégrant une approche multi-physiques : suivi temporel de la régression de surface et couplage fluide/structure.

Dans une volonté d'approcher les couplages multi-physiques, le solveur compressible avec une discrétisation spatiale d'ordre deux et une démarche temporelle explicite (allant d'ordre un à trois selon le schéma) a été proposée sur un mailleur octree/2^n tree avec une approche récursive assurant un raffinement/déraffinement automatique. Les premiers résultats se sont tout d'abord focalisés à valider le solveur fluide sur des configurations géométriquement fixes, l'idée étant de traiter des configurations de référence pour des écoulements compressibles. La confrontation avec des résultats théoriques (onde choc oblique) ou numériques (cas tuyère A1) de référence a mis en évidence le potentiel des méthodes aux frontières immergées.

La poursuite des travaux s'est alors intéressée à décrire des configurations, toujours avec une géométrie fixe, mais caractéristiques des écoulements de propulseur. La configuration gaz froid MICAT a été réalisée en s'attachant à décrire le développement des sources tourbillonnaires. En effet, les écoulements internes sont induits par des interactions de mécanismes physiques antagonistes rendant la simulation numérique d'autant plus complexe. En effet, l'injection pariétale offre une certaine stabilité à l'écoulement alors que les contraintes au sein de l'écoulement favorisent le développement d'un comportement turbulent. Sachant qu'une approche LES compressible avait été réalisée sur le même écoulement et qu'elle avait nécessitée d'importants moyens informatiques et des temps de calculs longs [91], l'objectif a dont été ici de décrire les mécanismes tourbillonnaires en se basant sur une configuration laminaire instationnaire dans laquelle les deux sources tourbillonnaires coexistent : les tourbillons d'obstacle et ceux issus de la rencontre entre écoulement principal et écoulement débitant ; les fréquences mises en jeu s'accordent sur des fréquences du premier mode acoustique comme attendu. La dynamique tourbillonnaire a également été mise en exergue sur une géométrie monobloc favorisant ainsi la génération de tourbillons d'angle. Les résultats sont là encore en parfaite adéquation avec ceux mis en évidence dans la littérature. En basant la formulation du solveur sur une discrétisation avec un maillage récursif 2^n tree et frontières immergées, l'idée a été de pouvoir suivre au cours du calcul la formidable variation interne mais il n'en reste pas moins vrai que le suivi de l'interface nécessite une méthode de suivi dédié ; la méthode dite de Level Set a été considérée et implémentée dans le modèle et après les premières validations d'usage, la

modélisation de l'ensemble de l'écoulement interne et le suivi de la régression de surface ont été effectués sur le moteur test dit moteur cigarette, les géométries des moteurs BATES en 2D et 3D ainsi que sur le cas MAVOT. Cette dernière correspond au cas offrant le développement de tourbillons d'angle et ce cas s'est avéré des plus intéressants. En effet, au cours de la simulation, les oscillations de pression recueillies au fond-avant sont modulées ainsi que la fréquence caractéristique au cours du temps. La simulation des écoulements couplés au suivi de la régression de la surface peut donc s'avérer des plus importantes.

Un des points critiques sur les niveaux d'oscillation est le rôle potentiel du couplage entre l'écoulement et la protection thermique. Une telle analyse est effectivement complexe à atteindre aussi bien expérimentalement que numériquement et la méthode de modélisation vise en fait à devenir un outil prédictif pour traiter de telles problématiques. Les premiers tests ont alors été réalisés dans le dernier chapitre. Les premiers résultats montrent effectivement la faisabilité de l'approche et bien qu'il s'agisse d'une première étape, l'accès au couplage fluide/structure est possible.

Ce travail ne constitue en fait qu'une étape et il reste encore un long chemin à parcourir qui excède largement le cadre de ce travail. Des validations sur les écoulements turbulents, l'intérêt de l'introduction d'une loi de paroi, l'introduction de solveur numérique implicite ou bien encore la qualité des traitements aux frontières immergées sont autant de points qu'il convient d'améliorer. En parallèle de ces points, il est à noter que la caractérisation de la balistique interne pourrait s'avérer être encore plus prédictive avec le suivi en continu de la régression de surface tout en y ajoutant de nouveaux traitements comme par exemple l'introduction de modèle de combustion érosive.

Annexe

Annexe 1 : TRAITEMENT DES TERMES CONVECTIFS

Les matrices Jacobiennes s'écrivent, dans le cadre du modèle RANS, comme :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & 2\tilde{u}+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\omega} \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{w} & \tilde{w} & 0 & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{H}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & \tilde{H}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{v}} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \tilde{u}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & 0 \\ -q\tilde{u} & q & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ -\omega\tilde{u} & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{u} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{v}\tilde{u} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{v}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & 2\tilde{v}+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\omega} \\ -\tilde{v}\tilde{w} & 0 & \tilde{w} & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{v}\tilde{H}+\tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & \tilde{H}+\tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & \tilde{v}\frac{\partial p_t}{\rho\tilde{v}} & \tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \tilde{v}+\tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & 0 \\ -q\tilde{v} & 0 & q & 0 & 0 & v & 0 \\ -\omega\tilde{v} & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{w}\tilde{u} & \tilde{w} & 0 & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{w}\tilde{v} & 0 & \tilde{w} & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{w}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{v}} & 2\tilde{w}+\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & \frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\omega} \\ -\tilde{w}\tilde{H}+\tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}} & \tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{u}} & \tilde{w}\frac{\partial p_t}{\rho\tilde{v}} & \tilde{H}+\tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{w}} & \tilde{w}+\tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}\tilde{E}} & \tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \bar{\rho}q} & 0 \\ -q\tilde{w} & 0 & 0 & q & 0 & w & 0 \\ -\omega\tilde{w} & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & \tilde{w} \end{bmatrix}$$

Détaillons leur obtention dans le cas du modèle LES ; pour cela, les On rappelle les vecteurs suivant :

$$\tilde{Q}=\left(\bar{\rho},\bar{\rho}\tilde{u},\bar{\rho}\tilde{v},\bar{\rho}\tilde{w},\bar{\rho}\tilde{E}\right)^T \quad \tilde{Q}_v=\left(p_t,\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{T}\right)^T \quad \tilde{E}=\left(\bar{\rho}\tilde{u},\bar{\rho}\tilde{u}^2+p_t,\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v},\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w},\left(\bar{\rho}\tilde{E}+p_t\right)\tilde{u}\right)^T$$

$$\tilde{F}=\left(\bar{\rho}\tilde{v},\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v},\bar{\rho}\tilde{v}^2+p_t,\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w},\left(\bar{\rho}\tilde{E}+p_t\right)\tilde{v}\right)^T \quad \tilde{G}=\left(\bar{\rho}\tilde{w},\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w},\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w},\bar{\rho}\tilde{w}^2+p_t,\left(\bar{\rho}\tilde{E}+p_t\right)\tilde{w}\right)^T$$

On impose :

$$\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\tilde{Q}}=A,\ \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{Q}}=B \text{ et } \frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tilde{Q}}=C$$

et la pression est supposée suivre la relation des gaz parfait non réactif : $\overline{p} = \overline{\rho} R \tilde{T}$

Ainsi la pression totale s'écrit :

$$p_t = \overline{p} + \frac{2}{3}\overline{\rho} k$$

$$p_t = \frac{R}{C_p}\overline{\rho}\widetilde{H} - \frac{1}{2}\frac{R}{C_p}\overline{\rho}\tilde{u}_k\tilde{u}_k - \left(\frac{5}{3}\frac{R}{C_p} - \frac{2}{3}\right)\overline{\rho} k$$

De la même manière, écrivons la relation permettant de calculer l'enthalpie :

$$\widetilde{H} = C_p\tilde{T} + \frac{1}{2}\tilde{u}_k\tilde{u}_k + \frac{5}{3}k$$

$$\text{Avec} \quad \widetilde{H} - \frac{\tilde{c}^2}{\gamma - 1} = \frac{q^2}{2} \text{ avec } \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2\right) - \frac{k}{\gamma - 1}\left(\frac{5}{3} - \gamma\right)$$

Sachant que l'on a les relations suivantes :

$$C_p - C_v = R$$

$$\tilde{c} = \sqrt{\gamma \widetilde{R}\tilde{T}} \quad \text{où} \quad \widetilde{R} = R + \frac{2}{3}\frac{k}{\tilde{T}}$$

La matrice Jacobienne A est définie comme:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}} \\ \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t\right)}{\partial \overline{\rho}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t\right)}{\partial \overline{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t\right)}{\partial \overline{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t\right)}{\partial \overline{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}^2 + p_t\right)}{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}} \\ \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial \overline{\rho}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial \overline{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial \overline{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial \overline{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}} \\ \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial \overline{\rho}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial \overline{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial \overline{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial \overline{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial \overline{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}} \\ \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{u}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{v}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\tilde{w}} & \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\tilde{u}}{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}} \end{bmatrix}$$

Pour la construction de la matrice jacobienne, on remarque que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\widetilde{Q}\right)_i}{\partial\left(\widetilde{Q}\right)_j} = 0 \quad si \quad i \neq j \\ \dfrac{\partial\left(\widetilde{Q}\right)_i}{\partial\left(\widetilde{Q}\right)_j} = 1 \quad si \quad i = j \end{cases}$$

De plus, on souligne les transformations nécessaires pour obtenir totalement la matrice Jacobienne. En fait, on a :

$$\overline{\rho}\widetilde{u}^2 = \frac{\left(\overline{\rho}\widetilde{u}\right)^2}{\overline{\rho}} \qquad \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v} = \frac{\left(\overline{\rho}\widetilde{u}\right)\left(\overline{\rho}\widetilde{v}\right)}{\overline{\rho}} \qquad \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{w} = \frac{\left(\overline{\rho}\widetilde{u}\right)\left(\overline{\rho}\widetilde{w}\right)}{\overline{\rho}}$$

$$\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u} = \frac{\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\right)\left(\overline{\rho}\widetilde{u}\right)}{\overline{\rho}} \qquad p_t = (\gamma - 1)\overline{\rho}\widetilde{E} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{\left(\overline{\rho}\widetilde{u}_k\right)^2}{\overline{\rho}} + \left(\frac{5}{3} - \gamma\right)\overline{\rho}k$$

$$\overline{\rho}\widetilde{H} = \overline{\rho}\widetilde{E} + p_t$$

En outre, ces transformations sont appliquées pour rendre les procédures de calcul plus aisées :

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\widetilde{u}}{\partial\overline{\rho}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}} + \frac{\partial\left(p_t\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}} + \frac{\partial\left(p_t\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\widetilde{u}}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}} + \frac{\partial\left(p_t\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}} + \frac{\partial\left(p_t\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\widetilde{u}}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}} + \frac{\partial\left(p_t\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}} + \frac{\partial\left(p_t\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\widetilde{u}}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}} + \frac{\partial\left(p_t\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}} + \frac{\partial\left(p_t\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E} + p_t\right)\widetilde{u}}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}} + \frac{\partial\left(p_t\widetilde{u}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}} = \frac{\partial\left(\overline{\rho}\widetilde{E}\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}} + \frac{\partial\left(p_t\cdot\dfrac{\overline{\rho}\widetilde{u}}{\overline{\rho}}\right)}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}}$$

Recherche des gradients dans la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial p_t}{\partial\overline{\rho}} = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\left(\widetilde{u}_k\right)^2 - \left(\frac{5}{3} - \gamma\right)q^2$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}} = -(\gamma - 1)\widetilde{u},\ \frac{\partial p_t}{\partial\overline{\rho}\widetilde{v}} = -(\gamma - 1)\widetilde{v},\ \frac{\partial p_t}{\partial\overline{\rho}\widetilde{w}} = -(\gamma - 1)\widetilde{w}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}} = \gamma - 1$$

Enfin, le résultat différentiel est présenté comme suivant :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{u}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & (3-\gamma)\tilde{u} & -(\gamma-1)\tilde{v} & -(\gamma-1)\tilde{w} & (\gamma-1) \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{w} & \tilde{w} & 0 & \tilde{u} & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{H}+\tilde{u}\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & \tilde{H}-(\gamma-1)\tilde{u}^2 & -(\gamma-1)\tilde{u}\tilde{v} & -(\gamma-1)\tilde{u}\tilde{w} & \gamma\tilde{u} \end{bmatrix}$$

De manière similaire pour matrice B et C.

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{v}\tilde{u} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 & 0 \\ -\tilde{v}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & -(\gamma-1)\tilde{u} & (3-\gamma)\tilde{v} & -(\gamma-1)\tilde{w} & (\gamma-1) \\ -\tilde{v}\tilde{w} & 0 & \tilde{w} & \tilde{v} & 0 \\ -\tilde{v}\tilde{H}+\tilde{v}\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & -(\gamma-1)\tilde{v}\tilde{u} & \tilde{H}-(\gamma-1)\tilde{v}^2 & -(\gamma-1)\tilde{v}\tilde{w} & \gamma\tilde{v} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{w}\tilde{u} & \tilde{w} & 0 & \tilde{u} & 0 \\ -\tilde{w}\tilde{v} & 0 & \tilde{w} & \tilde{v} & 0 \\ -\tilde{w}^2+\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & -(\gamma-1)\tilde{u} & -(\gamma-1)\tilde{v} & (3-\gamma)\tilde{w} & (\gamma-1) \\ -\tilde{w}\tilde{H}+\tilde{w}\frac{\partial p_t}{\partial \rho} & -(\gamma-1)\tilde{w}\tilde{u} & -(\gamma-1)\tilde{w}\tilde{v} & \tilde{H}-(\gamma-1)\tilde{w}^2 & \gamma\tilde{w} \end{bmatrix}$$

Références Bibliographiques

[1] S. Ballereau, F. Godfroy, S. Gallier, O. Orlandi, J. Thepenier, E. Robert, and N. Cesco, “Evaluation method of thrust oscillations in large SRM - Application to segmented SRM’s,” *Computers&Fluids*, Jul. 2011.
[2] R. Nunes, “Interactions fluide-structure sur les mécanismes d’instabilité tourbillonaires en cavité confinée,” PhD thesis, Ecole nationale supérieure de mécanique et d’aérotechnique, Poitiers, 2007.
[3] R. Fiedler, X. Jiao, A. Namazifard, A. Haselbacher, F. Najjar, and I. Parsons, “Coupled fluid-structure 3-D solid rocket motor simulations,” *AIAA Journal*, Jul. 2001.
[4] V. T. Luu, “Modélisation numérique multiphysiques couplés : application à un projectile en écoulement supersonique,” PhD thesis, Ecole nationale supérieure de mécanique et d’aérotechnique, Poitiers, 2012.
[5] Y. Kim and C. S. Peskin, “3-D Parachute simulation by the immersed boundary method,” *Computers&Fluids*, vol. 38, no. 6, pp. 1080–1090, Jun. 2009.
[6] P. De Palma, M. D. de Tullio, G. Pascazio, and M. Napolitano, “An immersed-boundary method for compressible viscous flows,” *Computers&Fluids*, vol. 35, no. 7, pp. 693–702, août 2006.
[7] Y. Gorsse, A. Iollo, H. Telib, and L. Weynans, “A simple second order cartesian scheme for compressible Euler flows,” Oct. 2011.
[8] R. M. R. Ghias, “A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows,” *Journal of Computational Physics*, no. 1, pp. 528–553.
[9] C. Merlin, “Immersed Boundaries in Large Eddy Simulation of Compressible Flows,” *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 90, no. 1, pp. 29–68, Jan. 2013.
[10] N. Lupoglazoff and F. Vuillot, “Numerical simulation of vortex shedding phenomenon in 2D test case solid rocket motors,” 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhbition, Reno, NV, 1992.
[11] J.-F. Guery, *Numerical Modeling of Internal Flow Aerodynamics. Part 1: Steady State Computations*. Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center, 2004.
[12] J.-F. Guery, *Numerical Modeling of Internal Flow Aerodynamics. Part 2: Unsteady Flows*. Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center, 2003.
[13] U. Piomelli, “High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model,” *Physics of fluids. A, Fluid dynamics*, vol. 5, no. 6, pp. 1484–1490.
[14] J. Smagorinsky, “General circulation experiments with the primitive equations,” *Monthly Weather Review*, vol. 91, no. 3, pp. 99–164, Mar. 1963.
[15] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten, “On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 12, 1994.
[16] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot, “A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 7, p. 1760, Jul. 1991.
[17] C. Meneveau, T. S. Lund, and W. H. Cabot, “A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 319, pp. 353–385, 1996.
[18] M. Pino Martín, U. Piomelli, and G. V. Candler, “Subgrid-Scale Models for Compressible Large-Eddy Simulations,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 13, pp. 361–376, 2000.
[19] B. E. Launder and D. B. Spalding, “The numerical computation of turbulent flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 269–289, Mar. 1974.
[20] J. G. Marvin and T. J. Coakley, “Turbulence modeling for hypersonic flows,” *NASA STI/Recon Technical Report N*, vol. 89, p. 26181, Jun. 1989.
[21] D. C. Wilcox, *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, Calif: DCW Industries, 2010.

[22] O. Reynolds, “On the extent and action of the heating surface of steam boilers,” *International Journal of Heat and Mass Transfer - INT J HEAT MASS TRANSFER*, vol. 3, no. 2, pp. 163–166, 1961.
[23] A. N. Kolmogorov, “Equations of turbulent motion of an incompressible fluid,” *Imperial College.Department of Mechanical Engineering*, 1968.
[24] W. P. Jones and B. E. Launder, “The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 15, no. 2, pp. 301–314, février 1972.
[25] W. P. Jones and B. E. Launder, “The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 16, no. 6, pp. 1119–1130, juin 1973.
[26] B. E. Launder and B. I. Sharma, “Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc,” *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 1, no. 2, pp. 131–137, Nov. 1974.
[27] B. E. Launder and D. B. Spalding, *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1972.
[28] D. C. Wilcox, “Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models,” *AIAA Journal*, vol. 26, no. 11, pp. 1299–1310, Nov. 1988.
[29] Z. J. Wang, R. F. CPhen, N. Hariharan, and A. J. Przekwas, “A 2ntree based automated viscous cartesian grid methodology for feature capturing,” *AIAA 99-3300*, 1999.
[30] M. Sun and K. Takayama, “Conservative Smoothing on an Adaptive Quadrilateral Grid,” *Journal of Computational Physics*, vol. 150, no. 1, pp. 143–180, Mar. 1999.
[31] U. Piomelli, “Wall-layer models for large-eddy simulations,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 44, no. 6, pp. 437–446, août 2008.
[32] P. Moin and J. Kim, “Numerical investigation of turbulent channel flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 118, pp. 341–377, 1982.
[33] G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, and P. Durbin, “Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 204, no. 1, pp. 265–291, Mar. 2005.
[34] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, 2nd ed. Butterworth-Heinemann, 2007.
[35] P. L. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 43, no. 2, pp. 357–372, 1981.
[36] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer, “On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,” *SIAM Review*, vol. 25, no. 1, pp. 35–61, Jan. 1983.
[37] S. Gottlieb and C.-W. Shu, “Total variation diminishing Runge-Kutta schemes,” *Math. Comput.*, vol. 67, no. 221, pp. 73–85, 1998.
[38] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Har/Cdr. Elsevier Science, 2001.
[39] C. S. Peskin, “Flow patterns around heart valves: A numerical method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 10, no. 2, pp. 252–271, Oct. 1972.
[40] H. Luo, R. Mittal, X. Zheng, S. A. Bielamowicz, R. J. Walsh, and J. K. Hahn, “An immersed-boundary method for flow-structure interaction in biological systems with application to phonation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227, no. 22, pp. 9303–9332, Nov. 2008.
[41] G. Iaccarino, G. Kalitzin, and C. J. Elkins, *Numerical and Experimental Investigation of the Turbulent Flow in a Ribbed Serpentine Passage.* Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center, 2003.

[42] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. M. Najjar, A. Vargas, and A. Von Loebbecke, “A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227, no. 10, pp. 4825–4852, 2008.
[43] H. Luo, H. Dai, P. J. S. A. Ferreira de Sousa, and B. Yin, “On the numerical oscillation of the direct-forcing immersed-boundary method for moving boundaries,” *Computers&Fluids*, vol. 56, pp. 61–76, Mar. 2012.
[44] H. Bandringa, “Immersed boundary methods,” *MasterΓs thesis, University of Groningen*, vol. 9700, 2010.
[45] D. K. Clarke, H. A. Hassan, and M. D. Salas, “Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids,” *AIAA Journal*, vol. 24, no. 3, pp. 353–358, Mar. 1986.
[46] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, “Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field,” *Journal of Computational Physics*, vol. 105, no. 2, pp. 354–366, Apr. 1993.
[47] E. M. Saiki and S. Biringen, “Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 123, no. 2, pp. 450–465, Feb. 1996.
[48] A. Chaudhuri, A. Hadjadj, and A. Chinnayya, “On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, no. 5, pp. 1731–1748, Mar. 2011.
[49] Y. H. Tseng and J. H. Ferziger, “A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry,” *Journal of Computational Physics*, vol. 192, no. 2, pp. 593–623, 2003.
[50] C.-K. Kim, S.-T. J. Yu, and Z.-C. Zhang, “Cavity Flows in a Scramjet Engine by the Space-Time Conservation and Solution Element Method,” *AIAA Journal*, vol. 42, no. 5, pp. 912–919, May 2004.
[51] J. Yang and E. Balaras, “An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 215, no. 1, pp. 12–40, 2006.
[52] Y. Gorsse, A. Iollo, H. Telib, and L. Weynans, “A simple second order cartesian scheme for compressible Euler flows,” *Journal of Computational Physics*, 2012.
[53] M. V. Pham F. Plourde, “Turbulent heat and mass transfer in sinusoidal wavy channels,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, no. 5, pp. 1240–1257, 2008.
[54] I. Demirdžić, Ž. Lilek, and M. Perić, “A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, no. 12, pp. 1029–1050, 1993.
[55] M. Manna, *A Three Dimensional High Resolution Upwind Finite Volume Euler Solver*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1992.
[56] D. R. Van Der Heul, C. Vuik, and P. Wesseling, “A conservative pressure-correction method for flow at all speeds,” *Computers&Fluids*, vol. 32, no. 8, pp. 1113–1132.
[57] M. L. Mason, L. E. Putnam, and R. J. Re, “The effect of throat contouring on two-dimensional converging-diverging nozzles at static conditions,” Aug. 1980.
[58] Z. H. Ge-Cheng Zha, “Calculation of transonic internal flows using an efficient high-resolution upwind scheme,” *AIAA Journal*, 2004.
[59] J. D. Anderson, *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. New York: McGraw-Hill, 1995.
[60] G. Taylor, “Fluid Flow in Regions Bounded by Porous Surfaces,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 234, no. 1199, pp. 456–475, Mar. 1956.
[61] F. Nicoud and J. R. Angilella, “Effects of uniform injection at the wall on the stability of Couette-like flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 56, no. 3, pp. 3000–3009, Sep. 1997.

[62] J. Griffond, G. Casalis, and J.-P. Pineau, “Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls,” *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 19, no. 1, pp. 69–87, Jan. 2000.
[63] G. Avalon and P. Comas, “Simulative study of the unsteady flow inside a solid rocket motor,” in *AIAA, SAE, ASME, and ASEE, 27th Joint Propulsion Conference*, 1991, vol. -1.
[64] C. Patanchon, Y. Deniges, and P. Lamarque, “Ariane 5 solid rocket motors non destructive testing,” *Non-destructive Testing*, pp. 176–180, 1992.
[65] F. Stella and F. Paglia, “Pressure oscillations in solid rocket motors: Numerical study,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 15, no. 1, pp. 53–59, Jan. 2011.
[66] R. S. Brown, R. Anderson, and L. J. Shannon, “Ignition and Combustion of Solid Rocket Propellants,” in *Advances in Chemical Engineering*, vol. Volume 7, G. R. C., John W. Hoopes and Theodore Vermeulen Thomas B. Drew, Ed. Academic Press, 1968, pp. 1–69.
[67] G. P. Sutton and O. Biblarz, *Rocket propulsion elements*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2010.
[68] G. A. Flandro, “Energy balance analysis of nonlinear combustion instability,” *Journal of Propulsion and Power*, vol. 1, no. 3, pp. 210–221, May 1985.
[69] R. Dunlap and R. S. Brown, “Exploratory experiments on acoustic oscillations driven by periodic vortex shedding,” May 2012.
[70] G. Casalis, F. Chedevergne, T. Feraille, and G. Avalon, “A new stability approach for the flow induced by wall injection,” in *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, R. Govindarajan, Ed. Springer Netherlands, 2006, pp. 97–102.
[71] J. Vetel, F. Plourde, and S. Doan-Kim, “Mixing effects between self-sustained and unstable hydrodynamic oscillations near injecting walls,” *AIAA Journal*, vol. 39, no. 8, pp. 1455–1468.
[72] J. Vetel, F. Plourde, S. Doan-Kim, and M. Prevost, “Cold Gas Simulations of the Influence of Inhibitor Shape in Combustor Combustion,” *Journal of Propulsion and Power*, vol. 21, no. 6, pp. 1098–1106, Nov. 2005.
[73] J. Vetel, F. Plourde, and S. Doan-Kim, “Dynamics of an internal flowfield driven by two hydrodynamic instabilities,” *AIAA Journal*, vol. 41, no. 3, pp. 424–435.
[74] J. Vetel, “Interaction des structures pariétales sur le développement instationnaire d’écoulements cisaillés en milieu confiné : rôle de l’injection différentielle,” PhD thesis, Ecole nationale supérieure de mécanique et d’aérotechnique, Poitiers, 2001.
[75] P. Freymuth, “On transition in a separated laminar boundary layer,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 25, no. 04, pp. 683 – 704, 1966.
[76] N. Lupoglazoff and F. Vuillot, “Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors - Numerial simulations and comparisons with firing tests,” 1996.
[77] D. E. Kooker and C. W. Nelson, “Numerical Solution of Three Solid Propellant Combustion Models During a Gun Pressure Transient,” Jan. 1977.
[78] A. Davenas, Ed., *Solid Rocket Propulsion Technology*, 1st English ed. Pergamon, 1992.
[79] J. Zhang and T. L. Jackson, “A model for erosive burning of homogeneous propellants,” *Combustion and Flame*, vol. 157, no. 2, pp. 397–407, février 2010.
[80] X. Wu, M. Kumar, and K. K. Kuo, “A comprehensive erosive-burning model for double-base propellants in strong turbulent shear flow,” *Combustion and Flame*, vol. 53, no. 1–3, pp. 49–63, Nov. 1983.
[81] M. K. King, “A modification of the composite propellant erosive burning model of lenoir and robillard,” *Combustion and Flame*, vol. 24, pp. 365–368, février 1975.
[82] Internal document, “SNPE Propulsion.” Project CPS.

[83] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003.
[84] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 79, pp. 12–49, 1988.
[85] J. A. Sethian, "Fast marching method and level set methods for propagating interface," University of California: Departement of Mathematics.
[86] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, and M. Kang, "A PDE-Based Fast Local Level Set Method," *Journal of Computational Physics*, vol. 155, no. 2, pp. 410–438, Nov. 1999.
[87] R. Nunes and F. Plourde, "Effect of Fluid/Structure Coupling on Unstable Mechanisms in Solid Rocket Motor," *Journal of Propulsion and Power*, vol. 27, no. 2, pp. 437–447, Mar. 2011.
[88] "EDF R&D." [Online]. Available: http://www.code-aster.org/V2/spip.php?rubrique1.
[89] C. A. Felippa and T. L. Geers, "Partitioned analysis for coupled mechanical systems," *Engineering Computations*, vol. 5, no. 2, pp. 123–133, 1988.
[90] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou, "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I: Model problem, theory and two-dimensional application," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 124, no. 1–2, pp. 79–112, Jun. 1995.
[91] F. Plourde, F. Najjar, J. Vetel, B. Wasistho, K. S. Doan, and S. Balachandar, "Numerical Simulations of Wall and Shear-Layer Instabilities in a Cold Flow Set-up," 2003.

AUTEUR : Phu Ho TRAN

TITRE DE LA THESE : ANALYSE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS INTERNES AU SEIN DES MOTEURS A PROPERGOL SOLIDE – VERS UNE PRISE EN COMPTE DES MECANISMES INSTATIONNAIRES COUPLES

RESUME :

La caractérisation et la simulation des écoulements internes au sein des moteurs à propergol solide, en considérant des mécanismes physiques fortement couplés, constituent l'objectif principal de ce mémoire de thèse. Dans cette optique, la conjonction entre fluide/régression de surface/couplage fluide structure a imposé de déployer une stratégie propre lors du développement de la modélisation numérique. En effet, le modèle intègre un traitement de frontière immergée couplé avec un suivi de frontière mobile afin de pouvoir rendre compte de la formidable variation géométrique interne subie au cours d'un tir. Côté fluide, un maillage automatique est nécessaire et la gestion de ce dernier s'appuie sur un développement récursif avec structure hiérarchisée de type 2^n tree. Une attention particulière a été portée sur le solveur lui-même avec une approche explicite en temps et un schéma numérique basé sur l'approche de Roe avec limiteur de flux au second ordre. Des cas tests ont été réalisés afin de valider le solveur et les différentes conditions aux limites introduites, notamment des conditions spécifiques développées pour les besoins de simulation. Les premiers résultats soulignent tout l'intérêt du modèle proposé et sauf erreur de notre part, pour la première fois, l'analyse des sources tourbillonnaires responsables des instabilités au sein de ces moteurs a été étudiée en intégrant les effets du changement continu de géométrie. Finalement, la faisabilité d'une interaction forte entre solveur fluide et solveur solide a été réalisée sur un modèle simplifié d'un moteur segmenté.

L'ensemble des développements permet un accès aux mécanismes couplés complexes et aux fortes interactions au sein des moteurs à propergol solide et offre de nouvelles perspectives dans la caractérisation des mécanismes fortement couplés.

Mots clés : Propulsion, Simulation numérique, Instabilité aérodynamique, Frontières mobiles, Couplage Fluide/Structure, Méthode à frontières immergées.