



**HAL**  
open science

## Sur l'effet des stocks tampons dans une fabrication en ligne.1ere partie

P. Coillard, Jean-Marie Proth

► **To cite this version:**

P. Coillard, Jean-Marie Proth. Sur l'effet des stocks tampons dans une fabrication en ligne.1ere partie. RR-0199, INRIA. 1983. inria-00076359

**HAL Id: inria-00076359**

**<https://inria.hal.science/inria-00076359>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

## Rapports de Recherche

N° 199

### **SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS DANS UNE FABRICATION EN LIGNE**

Première Partie

Pierre COILLARD  
Jean-Marie PROTH

Avril 1983

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS

DANS UNE FABRICATION EN LIGNE

Pierre COILLARD\* et Jean-Marie PROTH\*\*

Première Partie

RESUME

Ce papier est consacré à l'étude d'un système de deux machines fonctionnant en ligne et séparées par un stock tampon. Chaque machine est susceptible de tomber en panne. Nous donnons le taux de production en fonction du niveau maximal du stock tampon. Une application est proposée. Les logiciels sont fournis.

ABSTRACT

This paper is devoted to a system composed of two machines through which material must pass. Each machine is subject to failure and a storage buffer is located between these machines. We give the production rate in term of the maximal level of the storage buffer. We give an example and the software.

\* Houillères du Bassin de Lorraine, Service Informatique,  
57800 - FREYMING-MERLEBACH, FRANCE.

\*\* INRIA, B.P. 105, 78150 LE CHESNAY, FRANCE.



Nous nous intéressons à l'effet des stocks tampons sur le taux de production d'un ensemble de machines travaillant en ligne. Nous savons que le taux de production est une fonction non décroissante du maximum d'un stock tampon quelconque. Nous analysons ce phénomène dans les pages qui suivent.

Les machines considérées sont susceptibles de tomber en panne. La suite des états d'une machine donnée obéit à un processus de Markov lorsque cette machine évolue librement. Cette hypothèse peut sembler restrictive. En fait, l'expérience montre qu'elle fournit un modèle satisfaisant.

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème et, en particulier, [1], [2], [3], [4] et [5] (voir en fin de seconde partie). Le lecteur observera, cependant, que les solutions analytiques complètes n'ont jamais été proposées sous les hypothèses que nous faisons ici. En outre et à notre connaissance, le cas de trois machines identiques fonctionnant en continu n'a jamais été abordé analytiquement.

Le volume des résultats exige une présentation en deux parties.

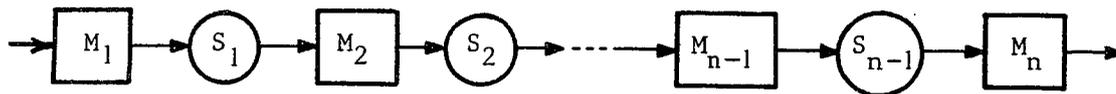
La première s'attache au cas de deux machines, séparées par un stock tampon. Les solutions analytiques sont fournies dans tous les cas ainsi que quelques exemples numériques et une application.

La seconde s'intéresse au cas de trois machines identiques. Là-encore, la solution analytique est donnée. La longueur des calculs montre, cependant, que la résolution du problème à quatre machines ou plus, si elle est théoriquement possible, n'est pas raisonnablement envisageable.

Nous donnerons, en conclusion, quelques suggestions pour une approche simplifiée du phénomène.

A - PROBLEME ET NOTATIONS

Nous nous intéressons à l'effet des bornes supérieures des stocks tampons séparant un ensemble de machines fonctionnant en série (voir figure 1).



$M_i, i=1, \dots, n$  : machines

$S_i, i=1, \dots, n-1$  : stocks tampons

Figure 1

Lorsqu'une machine  $M_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) fonctionne à l'instant  $t$ , la probabilité pour qu'elle tombe en panne sur  $[t, t+dt]$  est égale à  $p_i dt$ .

De même, lorsque  $M_i$  est en panne à l'instant  $t$ , la probabilité qu'elle soit réparée sur l'intervalle de temps  $[t, t+dt]$  est  $r_i dt$ .

Notons que nos hypothèses simplifient considérablement le problème : les probabilités de passage d'un état à un autre ne dépendent que de l'état observé (processus markovien). Cette hypothèse, évidemment peu réaliste, a cependant le mérite de permettre l'obtention de résultats analytique qui reflètent, en moyenne, le phénomène étudié.

Dans la suite,  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) représente le débit de la machine  $M_i$ , c'est-à-dire sa production par unité de temps.

Nous supposerons que ce débit n'est pas réglable. Nous ferons, cependant, une exception dans deux cas particuliers dont nous reparlerons plus loin.

La borne supérieure du stock tampon qui sépare les machines  $M_i$  et  $M_{i+1}$  pour  $i=1, 2, \dots, n-1$  est notée  $h_i$  ( $h_i \geq 0$ ) et la borne inférieure est 0.

Nous supposons que la matière première qui alimente  $M_1$  est toujours disponible et que les besoins en produits finis sont illimités.

Notons que la matière transformée est supposée continue.

Enfin, la probabilité d'observer plus d'un changement d'état sur l'ensemble des machines durant une période élémentaire  $[t, t+dt]$  est un infiniment petit d'ordre 2 en  $dt$  et nous la négligerons.

Nous rappelons d'abord les résultats détaillés dans le cas de deux machines différentes, séparées par un stock tampon. Nous donnerons une application de ce résultat pour la détermination de la position d'un stock tampon unique dans une fabrication de type "flow shop". Puis, nous développerons l'étude de trois machines identiques, travaillant en ligne et séparées par deux stocks tampons.

#### B- CAS DE DEUX MACHINES

Les probabilités de passage sont alors données par le tableau suivant :

Etat à l'instant $t$ \ Etat à l'instant $t+dt$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	$1-(r_1+r_2)dt$	$r_2 dt$	$r_1 dt$	0
(0,1)	$p_2 dt$	$1-(r_1+p_2)dt$	0	$r_1 dt$
(1,0)	$p_1 dt$	0	$1-(p_1+r_2)dt$	$r_2 dt$
(1,1)	0	$p_1 dt$	$p_2 dt$	$1-(p_1+p_2)dt$

Tableau 1

Nous désignons par  $F_{ij}(x,t)$  la probabilité que le niveau du stock tampon appartienne à  $]0,x]$  et que l'état du système soit  $(i,j)$  à l'instant  $t$  (avec  $x \in ]0,h_1[$ ).

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent :

$$F_{00}[x,t+dt] = \{1-(r_1+r_2)dt\}\{F_{00}[x,t]\} + p_1F_{10}[x,t]dt + p_2F_{01}[x,t]dt$$

$$F_{01}[x,t+dt] = \{1-(r_1+p_2)dt\}\{F_{01}[x+c_2dt,t] - F_{01}[c_2dt,t]\}$$

$$+ p_1F_{11}[x,t]dt + r_2F_{00}[x,t]dt$$

$$F_{10}[x,t+dt] = \{1-(p_1+r_2)dt\}\{F_{10}[x-c_1dt,t] + F_{10}[c_1dt,t]\}$$

$$+ p_2F_{11}[x,t]dt + r_1F_{00}[x,t]dt$$

$$F_{11}[x,t+dt] = \{1-(p_1+p_2)dt\}\{F_{11}[x+(c_2-c_1)dt,t]\}$$

$$- \frac{c_2-c_1}{|c_2-c_1|} F_{11}[|c_2-c_1|dt,t] + r_1F_{01}[x,t]dt + r_2F_{10}[x,t]dt$$

Ces relations nous conduisent aux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F_{00}}{\partial t}[x,t] = -(r_1+r_2)F_{00}[x,t] + p_1F_{10}[x,t] + p_2F_{01}[x,t]$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial t}[x,t] = -(r_1+p_2)F_{01}[x,t] + p_1F_{11}[x,t] + r_2F_{00}[x,t] \\ + c_2 \left\{ \frac{\partial F_{01}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{01}}{\partial x}[0^+,t] \right\}$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x}[x,t] = -(p_1+r_2)F_{10}[x,t] + r_1F_{00}[x,t] + p_2F_{11}[x,t] \\ - c_1 \left\{ \frac{\partial F_{10}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{10}}{\partial x}[0^+,t] \right\}$$

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x}[x,t] = -(p_1+p_2)F_{11}[x,t] + r_1F_{01}[x,t] + r_2F_{10}[x,t] \\ + (c_2-c_1) \left\{ \frac{\partial F_{11}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{11}}{\partial x}[0^+,t] \right\}$$

Nous supposons que notre système admet un régime permanent et nous nous intéressons uniquement à ce type de fonctionnement.

Alors, les relations ci-dessus deviennent (en remplaçant systématiquement  $F_{ij}[x,t]$  par  $F_{ij}[x]$  car ces fonctions ne dépendent plus du temps) :

$$[r_1+r_2]F_{00}(x) - p_1F_{10}(x) - p_2F_{01}(x) = 0 \quad (1.1)$$

$$[r_1+p_2]F_{01}(x) - p_1F_{11}(x) - r_2F_{00}(x) = c_2 \left[ \frac{dF_{01}}{dx}(x) - \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \right] \quad (1.2)$$

$$[p_1+r_2]F_{10}(x) - r_1F_{00}(x) - p_2F_{11}(x) = -c_1 \left[ \frac{dF_{10}}{dx}(x) - \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \right] \quad (1.3)$$

$$[p_1+p_2]F_{11}(x) - r_1F_{01}(x) - r_2F_{10}(x) = [c_2 - c_1] \left[ \frac{dF_{11}}{dx}(x) - \frac{dF_{11}}{dx}(0^+) \right] \quad (1.4)$$

Les fonctions de répartition cherchées sont solutions de ce système différentiel. Les solutions sont ensuite utilisées pour formuler les probabilités aux bornes du stock tampon. Enfin, des conditions permettront de fixer les constantes d'intégration. Pour simplifier l'exposé, nous traiterons d'abord le cas où  $c_1, c_2, p_1, p_2, r_1$  et  $r_2$  sont tous différents de zéro : ce sera le cas général. Nous envisagerons ensuite tous les cas particuliers.

## 1. - CAS GENERAL : PARAMETRES TOUS NON NULS

### 1.1. - Etude des fonctions de répartition

La présence de  $c_2 - c_1$  dans (1.4), nous conduit à envisager deux cas :

#### 1.1.1. - $c_1 \neq c_2$

En remarquant que  $F_{00}(0^+) = F_{01}(0^+) = F_{10}(0^+) = F_{11}(0^+) = 0$ , les relations (1.1) à (1.4) conduisent à :

$$F_{00}(x) = (p_1 F_{10}(x) + p_2 F_{01}(x)) / (r_1 + r_2) \quad (2.1)$$

$$F_{11}(x) = (c_1 F_{10}(x) - c_2 F_{01}(x)) / (c_2 - c_1) \quad (2.2)$$

$$\frac{dF_{10}}{dx}(x) = AF_{10}(x) + BF_{01}(x) + \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \quad (2.3)$$

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = EF_{10}(x) + DF_{01}(x) + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \quad (2.4)$$

avec :

$$A = \frac{p_2}{c_2 - c_1} - \frac{r_2(r_1 + r_2 + p_1)}{c_1(r_1 + r_2)} \quad B = \frac{p_2}{c_1} \left[ \frac{r_1}{r_1 + r_2} - \frac{c_2}{c_2 - c_1} \right]$$

$$E = -\frac{p_1}{c_2} \left[ \frac{r_2}{r_1 + r_2} + \frac{c_1}{c_2 - c_1} \right] \quad D = \frac{p_1}{c_2 - c_1} + \frac{r_1(r_1 + r_2 + p_2)}{c_2(r_1 + r_2)}$$

Le système différentiel "sans second membre" déduit de (2.3) et (2.4) conduit à rechercher les valeurs propres de la matrice :

$$[M] = \begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix}$$

qui sont racines de :

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - EB = 0 \quad (3)$$

Pour cela, nous avons à considérer :

$$\Delta = (A+D)^2 - 4(AD-EB) = (A-D)^2 + 4EB$$

Un calcul simple montre que :

$$EB = \frac{(c_2 r_2 + c_1 r_1)^2 p_1 p_2}{c_1 c_2 (c_2 - c_1)^2 (r_1 + r_2)^2} \geq 0$$

si bien que  $\Delta$  est toujours positif ou nul et (3) admet toujours des racines réelles.

De plus :

$$AD-EB = \frac{[r_1+r_2+p_1+p_2][c_1r_1(r_2+p_2)-c_2r_2(r_1+p_1)]}{c_1c_2(c_2-c_1)(r_1+r_2)} \quad (4)$$

s'annule pour :

$$c_1 \frac{r_1}{r_1+p_1} = c_2 \frac{r_2}{r_2+p_2}$$

Cette relation exprime que les taux de production des deux machines sont égaux. D'où les deux cas que nous introduisons maintenant.

1.1.1.1. - Les deux machines ont même taux de production

Alors (3) a une racine nulle et nous sommes conduits à la solution générale :

$$F_{01}(x) = K \{ \exp [(A+D)x] - 1 \} - S \frac{E}{A+D} x \quad (5.1)$$

$$F_{10}(x) = \frac{B}{D} K \{ \exp [(A+D)x] - 1 \} + S \frac{D}{A+D} x \quad (5.2)$$

où  $K \in \mathbb{R}$  et  $S \in \mathbb{R}$ .

Ces relations ont été établies en tenant compte du fait que les machines ont même taux de production. Nous verrons plus loin comment déterminer K et S. Il est facile de montrer que  $D \neq 0$  lorsque les taux de production sont égaux. D'autre part, nous pouvons montrer que  $A+D \neq 0$  sous nos hypothèses. Les relations (5.1) et (5.2) sont à compléter par (2.1) et (2.2).

1.1.1.2. - Les deux machines ont des taux de production différents

Des calculs simples montrent que, pour que (3) ait une racine double, il faut que :

$$p_2 = 0 \text{ lorsque } c_1 > c_2$$

et  $p_1 = 0 \text{ lorsque } c_2 > c_1$

Ces éventualités sont comprises dans l'étude des cas particuliers que nous présentons plus loin.

Nous nous limitons au cas où l'équation caractéristique n'admet pas de racine double.

Nous désignons les racines de cette équation par  $k_1$  et  $k_2$  et nous supposons que  $k_2 > k_1$ .

La solution du système constitué par (2.3) et (2.4) est obtenue de manière classique. Les calculs sont laissés aux soins du lecteur qui obtiendra :

$$F_{10}(x) = K [\exp(k_1 x) - 1] + S [\exp(k_2 x) - 1] \quad (6.1)$$

et :

$$F_{01}(x) = \frac{k_1 - A}{B} K [\exp(k_1 x) - 1] + \frac{k_2 - A}{B} S [\exp(k_2 x) - 1] \quad (6.2)$$

avec  $K \in \mathbb{R}$  et  $S \in \mathbb{R}$ .

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

Nous verrons plus loin comment lever l'indétermination sur  $S$  et  $K$ .

$$1.1.2. \quad c_1 = c_2 = c$$

La relation (2.1) reste vraie et (1.4) se réécrit :

$$F_{11}(x) = \frac{1}{p_1 + p_2} [r_1 F_{01}(x) + r_2 F_{10}(x)] \quad (7.1)$$

En utilisant (2.1) et (7.1), les relations (1.2) et (1.3) nous conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{dF_{10}}{dx}(x) - \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) &= \frac{dF_{01}}{dx}(x) - \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \\ &= \frac{p_1 + p_2 + r_1 + r_2}{c(r_1 + r_2)(p_1 + p_2)} [-r_2 p_1 F_{10}(x) + r_1 p_2 F_{01}(x)] \quad (7.2) \end{aligned}$$

Les deux premiers membres de cette relation donnent :

$$F_{10}(x) = F_{01}(x) + S x, \quad S \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

et nous obtenons, en considérant les deux derniers membres de (7.2) :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = U(r_1 p_2 - r_2 p_1) F_{01}(x) - S U r_2 p_1 x + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \quad (8.2)$$

avec :

$$U = \frac{p_1 + p_2 + r_1 + r_2}{c(r_1 + r_2)(p_1 + p_2)}$$

Deux cas sont alors à envisager :

1.1.2.1.  $- \underline{r_1 p_2 - r_2 p_1} \neq 0$

Nous sommes dans le cas où les deux machines ont des taux de production différents.

La solution de (8.2) s'écrit alors :

$$F_{01}(x) = K \{ \exp[U(r_1 p_2 - r_2 p_1)x] - 1 \} + S \frac{r_2 p_1}{r_1 p_2 - r_2 p_1} x \quad (9.1)$$

et (8.1) conduit à :

$$F_{10}(x) = K \{ \exp[U(r_1 p_2 - r_2 p_1)x] - 1 \} + S \frac{r_1 p_2}{r_1 p_2 - r_2 p_1} x \quad (9.2)$$

avec :

$$K \in \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$$

et :

$$U = \frac{p_1 + p_2 + r_1 + r_2}{c(r_1 + r_2)(p_1 + p_2)} \quad (9.3)$$

Bien entendu, la relation (2.1) reste vraie, de même que (7.1).

$$1.1.2.2. - \underline{r_1 p_2 - r_2 p_1 = 0}$$

Nous sommes alors dans le cas où les débits et les taux de production des machines sont identiques.

Dans ce cas, (8.2) se réduit à :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = -S U r_2 p_1 x + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

et :

$$F_{01}(x) = -\frac{1}{2} S U r_2 p_1 x^2 + K x \quad (9.4)$$

et, compte tenu de (8.1) :

$$F_{10}(x) = -\frac{1}{2} S U r_2 p_1 x^2 + (K+S)x \quad (9.5)$$

où U est donné par (9.3),  $K \in \mathbb{R}$  et  $S \in \mathbb{R}$ .

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (7.1).

Les fonctions de répartition sont maintenant connues dans tous les cas de figure. Il nous reste à calculer les probabilités aux bornes 0 et  $h_1$  du stock tampon.

## 1.2. - Probabilités aux bornes du stock tampon

Aux bornes du stock tampon, nous avons à distinguer l'état réel des machines de l'état observé.

Si, par exemple, le stock tampon est nul et l'état réel du système constitué par les deux machines est (0,1) -i.e. première machine en panne et seconde machine en état de fonctionner- alors l'état observé du système est (0,0) : la seconde machine ne pouvant être approvisionnée est en attente.

Supposons maintenant que  $c_2 > c_1$ , que le niveau du stock tampon soit nul et que les deux machines soient en état de fonctionner. Alors, tant que l'état réel du système reste (1,1), l'état observé passerait instantanément et alternativement de (1,0) à (1,1). Cette situation n'est pas réaliste. Nous admettrons que, dans ce cas, le débit de  $c_2$  est ramené à  $c_1$  et que les deux machines continuent à fonctionner jusqu'à la prochaine panne. Nous trouvons une situation analogue lorsque  $c_1 > c_2$  et que le niveau du stock est égal à  $h_1$  : alors le débit de la première machine est ramené à  $c_2$  tant que les deux machines continuent à fonctionner.

Le tableau 2 donne les différentes situations possibles lorsque le niveau du stock tampon est égal à l'une de ses bornes.

Stock tampon	Débits	Etat réel	Etat observé	Débit machine amont	Débit machine aval
0	quelconques et $\neq 0$	(0,0)	(0,0)	0	0
0	quelconques et $\neq 0$	(0,1)	(0,0)	0	0
0	quelconques et $\neq 0$	(1,0)	Etat instable de probabilité nulle		
0	$c_1 > c_2$	(1,1)	Etat instable de probabilité nulle		
0	$c_2 \geq c_1$	(1,1)	(1,1)	$c_1$	$c_1$
$h_1$	quelconques et $\neq 0$	(0,0)	(0,0)	0	0
$h_1$	quelconques et $\neq 0$	(0,1)	Etat instable de probabilité nulle		
$h_1$	quelconques et $\neq 0$	(1,0)	(0,0)	0	0
$h_1$	$c_1 \geq c_2$	(1,1)	(1,1)	$c_2$	$c_2$
$h_1$	$c_1 < c_2$	(1,)	Etat instable de probabilité nulle.		

Tableau 2

Nous noterons :

$m_{i,j}^{k,\ell}(t)$  la probabilité qu'à l'instant  $t$  l'état réel soit  $(i,j)$ , l'état observé  $(k,\ell)$  et le niveau du stock tampon 0

$M_{i,j}^{k,\ell}(t)$  la probabilité qu'à l'instant  $t$  l'état réel soit  $(i,j)$ , l'état observé  $(k,\ell)$  et le niveau du stock tampon  $h_1$ .

En régime permanent, ces probabilités seront respectivement notées  $m_{i,j}^{k,\ell}$  et  $M_{i,j}^{k,\ell}$ .

Nous distinguons les cas  $c_1 \neq c_2$  et  $c_1 = c_2 = c$ .

1.2.1. -  $c_1 \neq c_2$

1.2.1.1. -  $c_1 > c_2$

En régime non stationnaire, les équations qui conduisent aux probabilités aux bornes du stock tampon s'écrivent alors :

$$m_{00}^{00}(t+dt) = m_{00}^{00}(t) [1-(r_1+r_2)dt]$$

$$m_{01}^{00}(t+dt) = m_{01}^{00}(t) [1-r_1 dt] + m_{00}^{00}(t) r_2 dt + c_2 \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+, t) dt$$

$$M_{00}^{00}(t+dt) = M_{00}^{00}(t) [1-(r_1+r_2)dt]$$

$$M_{10}^{00}(t+dt) = M_{10}^{00}(t) [1-r_2 dt] + M_{00}^{00}(t) r_1 dt + c_1 \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-, t) dt + M_{11}^{11}(t) p_2 dt$$

$$M_{11}^{11}(t+dt) = M_{11}^{11}(t) [1-(p_1+p_2)dt] + r_2 M_{10}^{00}(t) dt + (c_1 - c_2) \frac{\partial F_{11}}{\partial x}(h_1^-, t) dt$$

Equations qui conduisent à :

$$\frac{dm_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2) m_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dm_{01}^{00}}{dt}(t) = -r_1 m_{01}^{00}(t) + r_2 m_{00}^{00}(t) + c_2 \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+, t)$$

$$\frac{dM_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2) M_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{10}^{00}}{dt}(t) = -r_2 M_{10}^{00}(t) + r_1 M_{00}^{00}(t) + c_1 \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-, t) + p_2 M_{11}^{11}(t)$$

$$\frac{dM_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2) M_{11}^{11}(t) + r_2 M_{10}^{00}(t) + (c_1-c_2) \frac{\partial F_{11}}{\partial x}(h_1^-, t)$$

En régime permanent, ces relations nous conduisent à :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

$$0 = -r_2 M_{10}^{00} + p_2 M_{11}^{11} + c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-)$$

$$0 = +r_2 M_{10}^{00} - (p_1+p_2) M_{11}^{11} + (c_1-c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-)$$

et toutes les probabilités ne figurant pas dans ces relations sont nulles.

Finalement :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{1}{p_1} \left[ c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) + (c_1-c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-) \right]$$

$$M_{10}^{00} = \frac{1}{r_2} \left[ 2 c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) + (c_1-c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-) \right]$$

Et, en tenant compte de (2.2) :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} \cdot \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

(10.1)

$$M_{11}^{11} = \frac{c_2}{p_1} \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) \quad (10.2)$$

$$M_{10}^{00} = \frac{1}{r_2} \left[ c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) + c_2 \frac{p_2}{p_1} \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) \right] \quad (10.3)$$

et :

$$m_{00}^{00} = m_{10}^{10} = m_{11}^{11} = M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = 0 \quad (10.4)$$

1.2.1.2. -  $c_1 < c_2$  -

En procédant comme ci-dessus, nous sommes conduits aux équations :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \quad (11.1)$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \quad (11.2)$$

$$m_{01}^{00} = \frac{1}{r_1} \left[ \frac{p_1 c_1}{p_2} \cdot \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) + c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \right] \quad (11.3)$$

et :

$$M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = M_{11}^{11} = m_{00}^{00} = m_{10}^{10} = 0 \quad (11.4)$$

1.2.2. -  $c_1 = c_2 = c$  -

Les équations s'écrivent, en régime non stationnaire :

$$m_{00}^{00}(t+dt) = m_{00}^{00}(t) [1 - (r_1+r_2)dt]$$

$$m_{01}^{00}(t+dt) = m_{01}^{00}(t) [1 - r_1 dt] + m_{00}^{00}(t) r_2 dt + c \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+, t) dt + m_{11}^{11}(t) p_1 dt$$

$$m_{11}^{11}(t+dt) = m_{11}^{11}(t) [1 - (p_1+p_2)dt] + r_1 m_{01}^{00}(t) dt$$

$$M_{00}^{00}(t+dt) = M_{00}^{00}(t) [1 - (r_1+r_2)dt]$$

$$M_{10}^{00}(t+dt) = M_{10}^{00}(t) [1-r_2 dt] + M_{00}^{00}(t) \cdot r_1 dt + c \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-, t) dt + M_{11}^{11}(t) p_2 dt$$

$$M_{11}^{11}(t+dt) = M_{11}^{11}(t) [1-(p_1+p_2)dt] + r_2 M_{10}^{00}(t) dt$$

$$M_{01}^{01}(t) = m_{10}^{10}(t) = 0$$

Ces relations conduisent à :

$$\frac{dm_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2) m_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dm_{01}^{00}}{dt}(t) = -r_1 m_{01}^{00}(t) + r_2 m_{00}^{00}(t) + p_1 m_{11}^{11}(t) + c \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+, t)$$

$$\frac{dm_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2) m_{11}^{11}(t) + r_1 m_{01}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2) M_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{10}^{00}}{dt}(t) = -r_2 M_{10}^{00}(t) + r_1 M_{00}^{00}(t) + p_2 M_{11}^{11}(t) + c \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-, t)$$

$$\frac{dM_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2) M_{11}^{11}(t) + r_2 M_{10}^{00}(t)$$

soit, en régime permanent :

$$m_{00}^{00} = M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = m_{10}^{10} = 0$$

$$-r_1 m_{01}^{00} + p_1 m_{11}^{11} + c \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = 0$$

$$-(p_1+p_2) m_{11}^{11} + r_1 m_{01}^{00} = 0$$

$$-r_2 M_{10}^{00} + p_2 M_{11}^{11} + c \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = 0$$

$$-(p_1+p_2) M_{11}^{11} + r_2 M_{10}^{00} = 0$$

et nous sommes conduits à la solution :

$$m_{11}^{11} = \frac{c}{p_2} \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \quad (12.1)$$

$$m_{01}^{00} = c \frac{p_1 + p_2}{r_1 p_2} \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \quad (12.2)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c}{p_1} \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \quad (12.3)$$

$$M_{10}^{00} = c \frac{p_1 + p_2}{r_2 p_1} \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \quad (12.4)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles.

### 1.3. - Recherche des constantes d'intégration

Les résultats précédents dépendent de deux constantes d'intégration. Deux conditions doivent donc être réalisées.

#### 1.3.1. - Somme des probabilités

Cette relation sera utilisée dans tous les cas de figure. Elle s'obtient en écrivant que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$F_{00}(h_1^-) + F_{01}(h_1^-) + F_{10}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-) + m_{00}^{00} + m_{01}^{00} + m_{11}^{11} + M_{00}^{00} + M_{10}^{00} + M_{11}^{11} = 1 \quad (13)$$

On se souviendra que  $m_{11}^{11}$  ou  $M_{11}^{11}$  peuvent correspondre à des états instables, donc être nulles (cf. tableau 2).

#### 1.3.2. - Stabilité au voisinage des bornes du stock

Nous sommes conduits à envisager trois cas.

##### 1.3.2.1. - $c_1 < c_2$

Dans ce cas et en tenant compte des états réels stables aux bornes du stock :

$$c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = (c_2 - c_1) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-)$$

$$c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) = c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) + (c_2 - c_1) \frac{dF_{11}}{dx}(0^+)$$

La seconde relation est toujours vérifiée (cf. 2.2) et c'est la première qui nous donnera la relation manquante. Compte-tenu de (2.2), elle devient :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) = 0 \tag{14}$$

1.3.2.2. -  $c_1 = c_2 = c$

Toujours en tenant compte des états réels stables aux bornes :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \tag{15}$$

$$\frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) = \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \tag{16}$$

Nous verrons que (15) et (16) constituent une condition unique (conséquence des formes des fonctions de répartition dans ce cas).

1.3.2.3. -  $c_1 > c_2$

Toujours en tenant compte des états réels du système qui sont stables aux bornes :

$$(c_1 - c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-) + c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-)$$

et :

$$c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = (c_1 - c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(0^+).$$

C'est la seconde relation qui nous permettra de lever l'indétermination (la première est toujours vérifiée). Compte tenu de (2.2), elle se réécrit :

$$\frac{dF_{10}}{dx}(0^+) = 0 \quad (17)$$

#### 1.4. - Taux de production du système

Nous sommes conduits à envisager les cas suivants :

$$1.4.1. - c_1 \neq c_2 -$$

$$1.4.1.1. - c_1 r_1 / (r_1 + p_1) = c_2 r_2 / (r_2 + p_2)$$

Alors les fonctions de répartition sont données par (5.1) et (5.2), complétées par (2.1) et (2.2). Les probabilités aux bornes exigent de distinguer  $c_1 > c_2$  de  $c_2 > c_1$ .

$$1.4.1.1.1. - c_1 > c_2 -$$

Alors la condition (17) est vraie et compte tenu de (5.2) :

$$\frac{B}{D} K(A+D) + S \frac{D}{A+D} = 0$$

Les expressions (5.1) et (5.2) se réécrivent :

$$F_{01}(x) = -S \frac{D^2}{B(A+D)^2} \{ \exp[(A+D)x] - 1 \} - S \frac{E}{A+D} x \quad (18.1)$$

$$F_{10}(x) = -S \frac{D}{(A+D)^2} \{ \exp[(A+D)x] - 1 \} + s \frac{D}{A+D} x \quad (18.2)$$

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

Les expressions (10.1), (10.2) et (10.3) deviennent :

$$m_{01}^{00} = -S \frac{c_2}{r_1(A+D)} \left( \frac{D^2}{B} + E \right) \quad (18.3)$$

$$M_{11}^{11} = -S \frac{c_2}{p_1(A+D)} \left\{ \frac{D^2}{B} \exp[(A+D)h_1] + E \right\} \quad (18.4)$$

$$M_{10}^{00} = -S \frac{c_2 p_2}{r_2 p_1(A+D)} \left\{ \frac{D^2}{B} \exp[(A+D)h_1] + E \right\} \quad (18.5)$$

Les probabilités aux bornes qui ne figurent pas ici sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13) compte tenu de (18.1) à (18.5).

Le taux de production s'écrit finalement :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-) + M_{11}^{11}]c_2 \quad (19)$$

1.4.1.1.2. -  $c_1 \leq c_2$  -

Nous appliquons alors la condition (14) qui s'écrit ici :

$$K(A+D) \exp[(A+D)h_1] - S \frac{E}{A+D} = 0$$

soit :

$$K = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1]$$

Les expressions (5.1) et (5.2) se réécrivent :

$$F_{01}(x) = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1] \{ \exp[(A+D)x] - 1 \} - S \frac{E}{A+D} x \quad (20.1)$$

$$F_{10}(x) = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1] \{ \exp[(A+D)x] - 1 \} + S \frac{D}{A+D} x \quad (20.2)$$

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

En outre, les relations (11.1), (11.2) et (11.3) se réécrivent :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} S \quad (20.3)$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} \cdot \frac{1}{A+D} S\{A \exp[-(A+D)h_1] + D\} \quad (20.4)$$

$$m_{01}^{00} = \frac{c_1 p_1}{p_2 r_1} \frac{1}{A+D} S\{A \exp[-(A+D)h_1] + D\} \quad (20.5)$$

Les probabilités non mentionnées sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13).

Le taux de production du système s'écrit :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1) + F_{11}(h_1)] c_2 + m_{11}^{11} c_1$$

$$1.4.1.2. - \underline{c_1 r_1 / (r_1 + p_1) \neq c_2 r_2 / (r_2 + p_2)}$$

Nous sommes dans le cas où les taux de production des machines sont différents : les fonctions de répartition sont données par (6.1), (6.2), (2.1) et (2.2). Les probabilités aux bornes et les conditions utilisées pour lever les indéterminations nous conduisent à envisager deux cas.

$$1.4.1.2.1. - \underline{c_1 \geq c_2}$$

Alors la condition (17) doit être vérifiée et, compte tenu de (6.1) :

$$K k_1 + S k_2 = 0$$

soit :

$$K = - \frac{k_2}{k_1} S \quad (21)$$

( $k_1 \neq 0$ . En effet, les deux racines sont différentes de zéro lorsque les taux de production sont différents).

Les expressions (6.1) et (6.2) se réécrivent, en utilisant (21) :

$$F_{10}(x) = -\frac{k_2}{k_1} S[\exp(k_1 x) - 1] + S[\exp(k_2 x) - 1] \quad (22.1)$$

$$F_{01}(x) = -\frac{k_2(k_1 - A)}{Bk_1} S[\exp(k_1 x) - 1] + \frac{k_2 - A}{B} S[\exp(k_2 x) - 1] \quad (22.2)$$

Bien entendu, (2.1) et (2.2) restent vraies.

Les expressions de probabilités aux bornes, données par (10.1) à (10.4), se réécrivent alors :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2 k_2}{r_1 B} S(k_2 - k_1) \quad (22.3)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c_2 k_2}{p_1 B} S[(k_2 - A)\exp(k_2 h_1) - (k_1 - A)\exp(k_1 h_1)] \quad (22.4)$$

$$M_{10}^{00} = \frac{k_2}{r_2} S[\exp(k_2 h_1) \left( c_1 + \frac{c_2 p_2 (k_2 - A)}{B p_1} \right) - \exp(k_1 h_1) \left( c_1 + \frac{c_2 p_2 (k_1 - A)}{B p_1} \right)] \quad (22.5)$$

Les probabilités non mentionnées sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13) et :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-) + M_{11}^{11}] c_2 \quad (23)$$

1.4.1.2.2. -  $c_1 \leq c_2$  -

Alors la condition (14) doit être vérifiée. Compte tenu de (6.2), elle conduit à :

$$K = -\frac{k_2(k_2 - A)}{k_1(k_1 - A)} S \exp[(k_2 - k_1)h_1] \quad (24)$$

(il est facile, mais long, de montrer que  $k_1 \neq 0$  et  $k_1 \neq A$  sous nos hypothèses).

Les expressions (6.1) et (6.2) se réécrivent, en utilisant (24) :

$$F_{10}(x) = - \frac{k_2(k_2-A)}{k_1(k_1-A)} S \exp[(k_2-k_1)h_1] \cdot [\exp(k_1x)-1] + S[\exp(k_2x)-1] \quad (25.1)$$

$$F_{01}(x) = - \frac{k_2(k_2-A)}{Bk_1} S \exp[(k_2-k_1)h_1] \cdot [\exp(k_1x)-1] + \frac{k_2-A}{B} S[\exp(k_2x)-1] \quad (25.2)$$

Les probabilités aux bornes, données par (11.1) à (11.4), se réécrivent alors :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} k_2 S \exp(k_2 h_1) \frac{k_2-k_1}{A-k_1} \quad (25.3)$$

$$m_{11}^{11} = S \frac{c_1 k_2}{p_2(A-k_1)} \{ [k_2-A] \exp[(k_2-k_1)h_1] + A-k_1 \} \quad (25.4)$$

$$m_{01}^{00} = S \frac{k_2}{r_1} \{ \exp[(k_2-k_1)h_1] [k_2-A] \left[ \frac{p_1 c_1}{p_2(A-k_1)} - \frac{c_2}{B} \right] + \frac{p_1 c_1}{p_2} + \frac{c_2(k_2-A)}{B} \} \quad (25.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante S s'obtient en appliquant (13).

Le taux de production est donné par :

$$Z_{h_1} = [F_{11}(h_1) + F_{01}(h_1)] c_2 + m_{11}^{11} c_1$$

1.4.2. -  $c_1 = c_2 = c$

Nous sommes conduits à étudier deux cas :

1.4.2.1. -  $r_1 p_2 \neq r_2 p_1$  (productivités différentes)

Les fonctions de répartition sont données par (9.1) et (9.2), complétées par (2.1) et (7.1).

Ecrivons la condition (15) à l'aide de (9.1) et (9.2) :

$$K U (r_1 p_2 - r_2 p_1) + S \frac{r_2 p_1}{r_1 p_2 - r_2 p_1} = K U (r_1 p_2 - r_2 p_1) + S \frac{r_1 p_2}{r_1 p_2 - r_2 p_1}$$

Cela entraîne  $S = 0$ .

Nous vérifions que (16) est vraie pour  $S = 0$ .

Les fonctions de répartition se réduisent donc à :

$$F_{01}(x) = K \{ \exp[U(r_1 p_2 - r_2 p_1)x] - 1 \} \quad (27.1)$$

où  $U$  est donné par (9.3).

$$F_{10}(x) = F_{01}(x) \quad (27.2)$$

$$F_{11}(x) = \frac{r_1 + r_2}{p_1 + p_2} F_{01}(x) \quad (27.3)$$

$$F_{00}(x) = \frac{p_1 + p_2}{r_1 + r_2} F_{01}(x) \quad (27.4)$$

Compte tenu de ces relations et en utilisant (12.1) à (12.4), les probabilités aux bornes s'écrivent :

$$m_{11}^{11} = K \frac{c}{p_2} U(r_1 p_2 - r_2 p_1) \quad (27.5)$$

$$m_{01}^{00} = K c \frac{p_1 + p_2}{r_1 p_2} U(r_1 p_2 - r_2 p_1) \quad (27.6)$$

$$M_{11}^{11} = K \frac{c}{p_1} U(r_1 p_2 - r_2 p_1) \exp[U(r_1 p_2 - r_2 p_1)h_1] \quad (27.7)$$

$$M_{10}^{00} = K c \frac{p_1 + p_2}{r_2 p_1} U(r_1 p_2 - r_2 p_1) \exp[U(r_1 p_2 - r_2 p_1)h_1] \quad (27.8)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante  $K$  s'obtient alors en appliquant (13).

Finalement, le taux de production est donné par :

$$Z_{h_1} = [F_{11}(h_1) + F_{01}(h_1) + m_{11}^{11} + M_{11}^{11}]c \quad (28)$$

1.4.2.2. -  $r_1 p_2 = r_2 p_1$  (même productivité)

Les fonctions de répartition sont données par (9.4), (9.5), (2.1) et (7.1).

Ecrivons la condition (15) en utilisant (9.4) et (9.5) :

$$K + S = K$$

Donc  $S = 0$  et, sous cette condition, (16) est vérifiée.

Les fonctions de répartition s'écrivent alors :

$$F_{01}(x) = F_{10}(x) = K x \quad (29.1)$$

$$F_{11}(x) = \frac{r_1 + r_2}{p_1 + p_2} K x \quad (29.2)$$

$$F_{00}(x) = \frac{p_1 + p_2}{r_1 + r_2} K x \quad (29.3)$$

Les probabilités aux bornes, données par (12.1) à (12.4), deviennent :

$$m_{11}^{11} = \frac{c}{p_2} K \quad (29.4)$$

$$m_{01}^{00} = c \frac{p_1 + p_2}{r_1 p_2} K \quad (29.5)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c}{p_1} K \quad (29.6)$$

$$M_{10}^{00} = c \frac{p_1 + p_2}{r_2 p_1} K \quad (29.7)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante  $K$  s'obtient en appliquant (13).

Le taux de production est donné par (28).

Cas particulier : les deux machines sont identiques

Posons  $r_1 = r_2 = r$ ,  $p_1 = p_2 = p$  et  $c_1 = c_2 = c$ .

Alors (13) donne :

$$K = \frac{1}{\frac{(r+p)^2}{rp} h_1 + 2c \frac{r+2p}{pr}}$$

et :

$$Z_{h_1} = \frac{r(r+p) h_1 + 2c r}{(r+p)^2 h_1 + 2c (r+2p)}$$

Nous voyons que :

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c \frac{r}{r+p} :$$

c'est le taux de production des machines

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} z_{h_1} = c \frac{r}{r+2p}$$

(en effet,  $2p$  et  $r$  sont respectivement les taux de panne et de réparation du système des deux machines identiques sans stock tampon).

2. - CAS PARTICULIERS

Nous donnons brièvement les résultats obtenus dans les cas particuliers. Certains sont évidents.

2.1. -  $c_1 = 0$  et/ou  $c_2 = 0$

En régime permanent, le taux de production du système est nul.

Si  $c_1 > c_2 = 0$ , le stock reste au maximum en régime permanent.

Si  $0 = c_1 < c_2$ , le stock reste à son minimum en régime permanent.

Si  $0 = c_1 = c_2$ , le stock reste à son niveau initial.

2.2. -  $r_1 = 0$  et/ou  $r_2 = 0$

Le taux de production est nul en régime permanent : l'une des machines au moins est et reste en panne.

2.3. -  $p_1 = 0$  et/ou  $p_2 = 0$  (les autres paramètres sont différents de zéro).

Nous envisageons trois cas :

2.3.1. -  $p_1 = 0$  et  $p_2 \neq 0$

La machine amont ne tombe jamais en panne.

2.3.1.1. - Si  $c_1 \geq c_2$

Alors deux probabilités seulement ne sont pas nulles :

$$M_{11}^{11} = \frac{r_2}{p_2 + r_2} \quad (30.1)$$

et :

$$M_{10}^{00} = \frac{p_2}{p_2 + r_2} \quad (30.2)$$

Le taux de production s'écrit :

$$Z_{h_1} = \frac{r_2}{r_2 + p_2} c_2 \quad (31)$$

C'est le taux de production de la seconde machine. Il ne dépend pas du niveau maximum du stock.

2.3.1.2 -  $c_1 < c_2$

Nous envisageons plusieurs éventualités.

2.3.1.2.1. -  $c_1 = c_2 r_2 / (r_2 + p_2)$

C'est le cas où les deux machines ont des taux de production égaux. Nous obtenons :

$$F_{10}(x) = W x, W \in \mathbb{R} \quad (32.1)$$

$$F_{01}(x) = F_{00}(x) = 0 \quad (32.2)$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_1}{c_2 - c_1} x \quad (32.3)$$

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} W \quad (32.4)$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} W \quad (32.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante  $W$  s'obtient en utilisant (13) :

$$W \left\{ \frac{c_2}{c_2 - c_1} h_1 + \frac{c_1}{r_2} + \frac{c_1}{p_2} \right\} = 1 \quad (33)$$

et :

$$Z_{h_1} = c_1 \frac{c_2 r_2 p_2 h_1 + c_1 (c_2 - c_1) r_2}{c_2 r_2 p_2 h_1 + c_1 (c_2 - c_1) (r_2 + p_2)} \quad (34)$$

Nous observons que :

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_1$$

c'est le taux de production commun aux deux machines.

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0^+} Z_{h_1} = c_1 \frac{r_2}{r_2 + p_2}$$

c'est le taux de production de la seconde machine lorsque  $h_1 = 0$  (le débit de la seconde machine est alors ramené au débit le plus faible).

#### 2.3.1.2.2. - $c_1 \neq c_2 r_2 / (r_2 + p_2)$

Les taux de production des deux machines sont différents. Nous obtenons :

$$F_{10}(x) = W[\exp(Ax) - 1], \quad W \in \mathbb{R} \quad (35.1)$$

$$F_{01}(x) = F_{00}(x) = 0 \quad (35.2)$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_1}{c_2 - c_1} [\exp(Ax) - 1] \quad (35.3)$$

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} W A \exp(Ah_1) \quad (35.4)$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} W A \quad (35.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. K est encore donné par la relation (13) et :

$$Z_{h_1} = \frac{p_2 r_2 c_2 c_1 [\exp(Ah_1) - 1] + r_2 c_1^2 (c_2 - c_1) A}{c_2 p_2 r_2 [\exp(Ah_1) - 1] + p_2 c_1 (c_2 - c_1) A \exp(Ah_1) + r_2 c_1 (c_2 - c_1) A} \quad (36)$$

Si le taux de production de la première machine est supérieur au taux de production de la seconde, alors  $A > 0$  et :

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_2 \frac{r_2}{r_2 + p_2} \quad (\text{taux de production de la machine aval})$$

Dans le cas contraire,  $A < 0$  et :

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_1 \quad (\text{taux de production de la machine amont})$$

2.3.2. -  $p_1 \neq 0$  et  $p_2 = 0$  (les autres paramètres sont non nuls)

C'est le cas où la machine aval ne tombe jamais en panne.

2.3.2.1. - Si  $c_1 \leq c_2$

Alors deux probabilités seulement ne sont pas nulles :

$$m_{11}^{11} = \frac{r_2}{p_2 + r_2} \quad (37.1)$$

$$m_{01}^{00} = \frac{p_2}{p_2 + r_2} \quad (37.2)$$

Le taux de production s'écrit :

$$Z_{h_1} = c_1 \frac{r_1}{r_1 + p_1} \quad (38)$$

2.3.2.2. - Si  $c_1 > c_2$

Nous envisageons plusieurs éventualités.

2.3.2.2.1. -  $c_2 = c_1 r_1 / (r_1 + p_1)$

Les taux de production des deux machines sont alors égaux. Nous obtenons :

$$F_{01}(x) = W x \quad (W \in \mathbb{R}) \quad (39.1)$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_2}{c_1 - c_2} x \quad (39.2)$$

$$F_{10}(x) = F_{00}(x) = 0 \quad (39.3)$$

$$M_{11} = \frac{c_2}{p_1} W \quad (39.4)$$

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} W \quad (39.5).$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles.  $W$  est donné par la condition (13) et :

$$Z_{h_1} = c_2 \frac{h_1 c_1 r_1 p_1 + c_2 r_1 (c_1 - c_2)}{h_1 c_1 r_1 p_1 + c_2 (r_1 + p_1) (c_1 - c_2)} \quad (40)$$

Nous vérifions que :

$$\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_2$$

et :

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0^+} Z_{h_1} = c_2 \frac{r_1}{r_1 + p_1}$$

2.3.2.2.2. -  $c_2 \neq c_1 r_1 / (r_1 + p_1)$

Alors :

$$F_{01}(x) = W[\exp(Dx) - 1] \quad (40.1)$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_2}{c_1 - c_2} [\exp(Dx) - 1] \quad (40.2)$$

$$F_{10}(x) = F_{00}(x) = 0 \quad (40.3)$$

$$M_{11}^{11} = W \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1) \quad (40.4)$$

$$m_{01}^{00} = W \frac{c_2}{r_1} D \quad (40.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. W est obtenu en écrivant que (13) est vraie. De plus :

$$Z_{h_1} = c_2 \frac{[\exp(Dh_1) - 1] \frac{c_1}{c_1 - c_2} + \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1)}{[\exp(Dh_1) - 1] - \frac{c_1}{c_1 - c_2} + \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1) + \frac{c_2}{r_1} D} \quad (41)$$

Il est aisé de vérifier que :

- si  $D > 0$ ,  $\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_2$

Dans ce cas, la première machine a un taux de production supérieur à celui de la seconde.

- si  $D < 0$ ,  $\lim_{h_1 \rightarrow +\infty} Z_{h_1} = c_1 \frac{r_1}{r_1 + p_1}$

C'est le cas où la première machine a un taux de production inférieur à celui de la seconde.

2.4. -  $p_1 = p_2 = 0$

Les machines fonctionnent sans arrêt. Alors :

$$Z_{h_1} = \text{Min}(c_1, c_2).$$

### 3. - EXEMPLES NUMERIQUES

Nous donnons deux exemples d'évolution du taux de production du système en fonction du niveau maximum  $h_1$  du stock tampon.

Le premier donne l'évolution du taux de production du système en fonction du niveau maximum du stock tampon lorsque les débits des machines sont identiques ( $c_1 = c_2 = 1$ ), le taux de production de la machine aval étant supérieur à celui de la machine amont (0.4 et 0.2 respectivement). Nous voyons que, lorsque le niveau maximum du stock tampon croît, le taux de production du système tend vers 0.2. (voir figure 1)

Le second exemple traite d'un cas général : débits des machines différents et taux de production différents (1.6 et 2.66 par machine amont et machine aval respectivement). Bien entendu, le taux de production du système tend vers la plus petite de ces deux quantités. (voir figure 2)

### 4. - POSITIONNEMENT D'UN STOCK DANS UNE LIGNE DE TRANSFERT

Une chaîne de fabrication entièrement automatisée et sans stock tampon présente un grave inconvénient : la mise hors service de l'un de ses éléments l'immobilise. Avec les notations introduites en A, il est facile de calculer que, dans le cas de  $n$  machines, la probabilité de fonctionnement du système est :

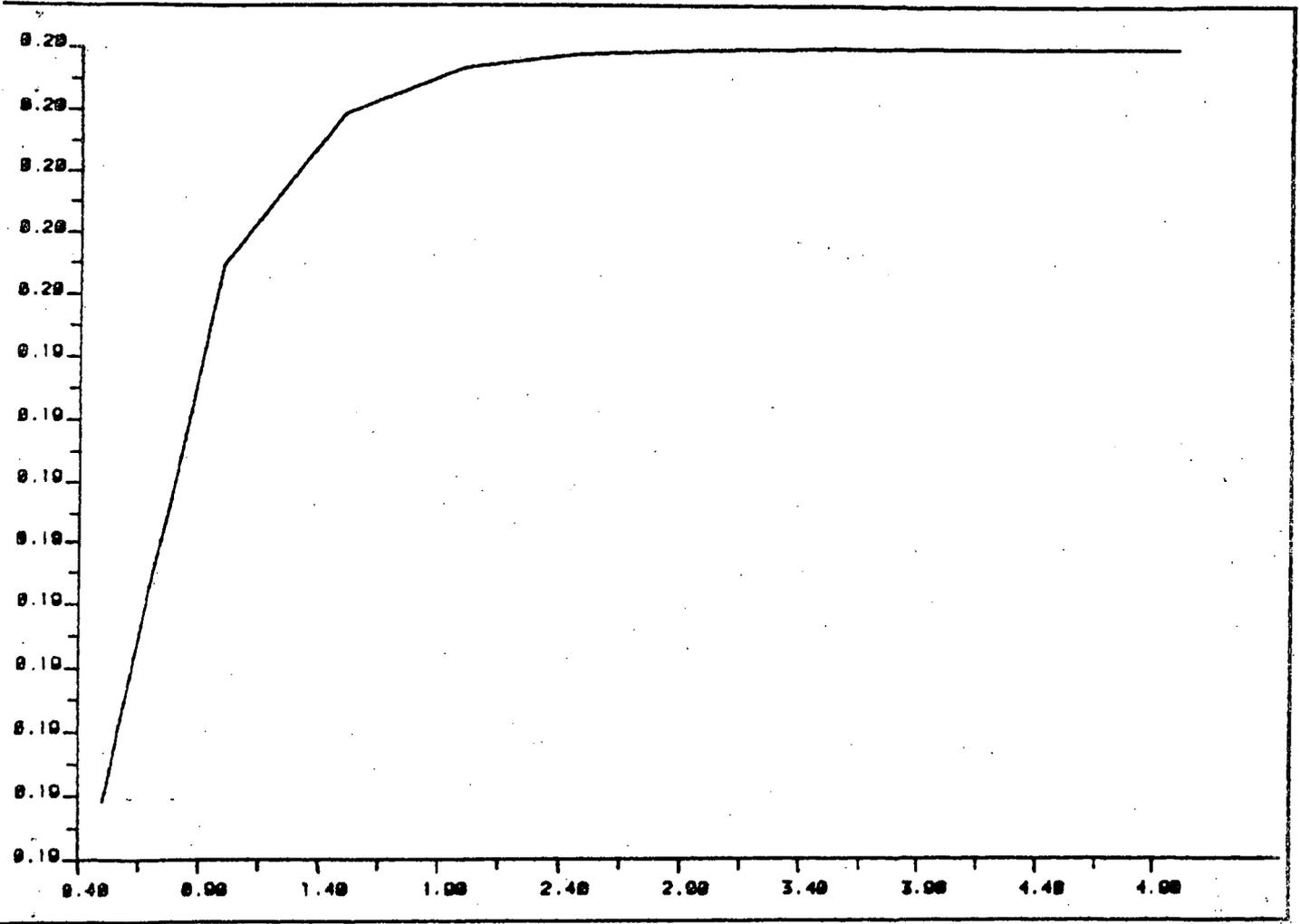
$$\theta_n = \frac{1}{n + \sum_{k=1}^n p_k/r_k}$$

Son taux de production est donc :

$$Z_0^n = \min_{k=1, \dots, n} (c_k) \times \frac{1}{n + \sum_{k=1}^n p_k/r_k}$$

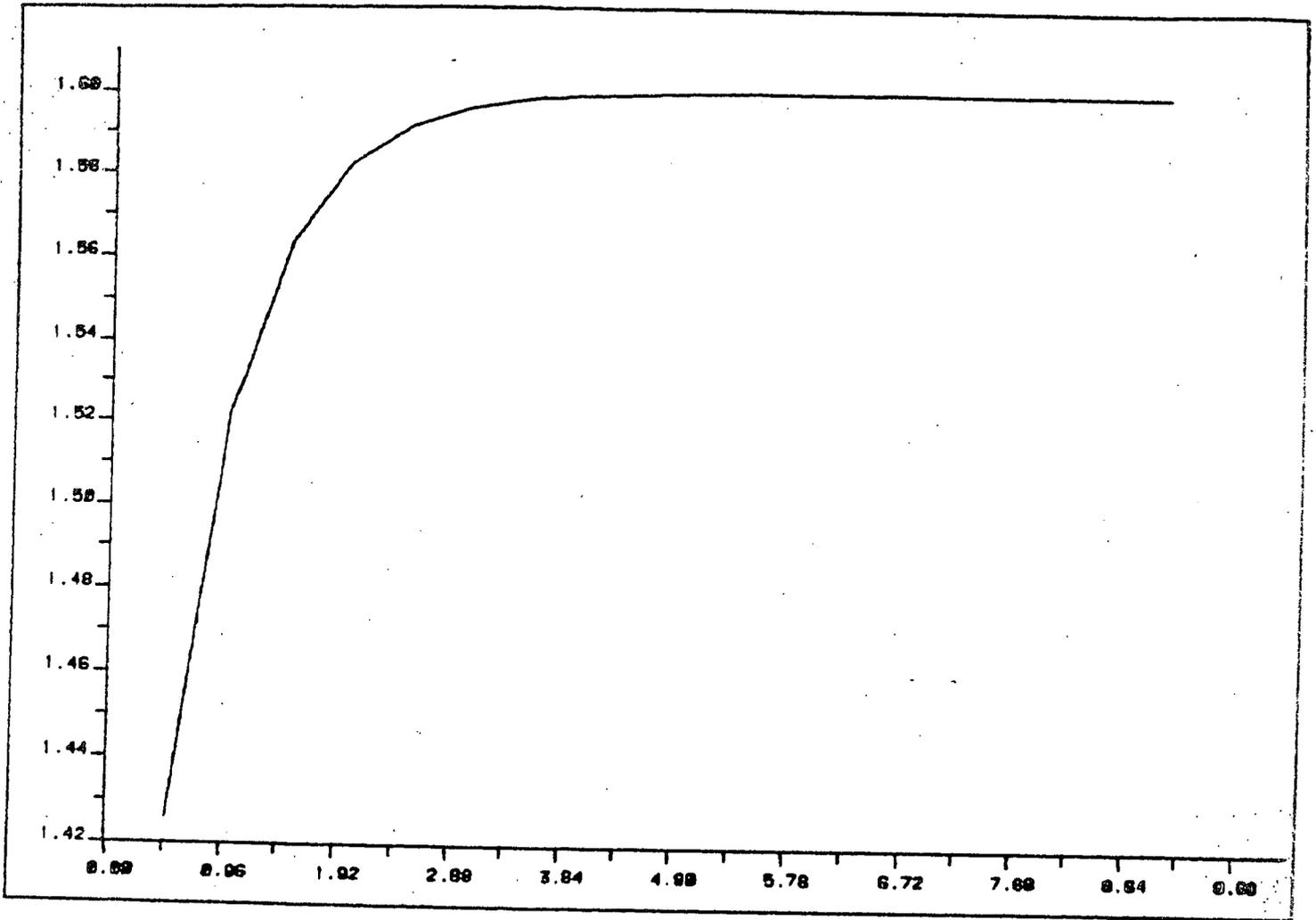
Si,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$p_k/r_k \geq \varepsilon > 0$$



$r1=1$   $p1=4$   $c1=1$   $r2=2$   $p2=3$   $c2=1$   
flux de production en fonction du maxi du stock tampon

FIGURE 1



$r1=4$   $p1=1$   $c1=2$   $r2=4$   $p2=2$   $c2=4$

Taux de production en fonction du maxi du stock tampon

FIGURE 2

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_0^n = 0$$

Des stocks tampons amélioreraient cette situation. Malheureusement, ils devraient être eux mêmes automatisés et coûteraient fort cher. La solution doit donc être écartée. Il est, cependant, parfois envisageable d'intercaler dans la ligne de transfert un seul stock tampon. Le problème est alors de chercher son emplacement.

Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  et supposons que ce stock soit placé entre les machines  $M_i$  et  $M_{i+1}$ .

L'ensemble  $\{M_1, \dots, M_i\}$  peut être considéré comme une machine unique  $\mathcal{M}_1$  avec :

- une probabilité  $P_1 dt$  de tomber en panne sur tout intervalle  $[t, t+dt]$  sachant qu'elle fonctionne avant l'instant  $t$  ;
- une probabilité  $R_1 dt$  d'être séparée sur tout intervalle  $[t, t+dt]$  sachant qu'elle est en panne avant l'instant  $t$ .

De même, l'ensemble  $\{M_{i+1}, \dots, M_n\}$  peut être considérée comme une machine unique  $\mathcal{M}_2$  pour laquelle  $P_2$  et  $R_2$  jouent respectivement les mêmes rôles que  $P_1$  et  $R_1$  pour  $\mathcal{M}_1$ .

On obtient, en observant qu'en régime permanent au plus une machine est en panne parmi  $\{M_1, \dots, M_i\}$  ou  $\{M_{i+1}, \dots, M_n\}$  :

$$P_1 = \sum_{k=1}^i p_k$$

$$P_2 = \sum_{k=i+1}^n p_k$$

$$R_1 = \sum_{k=1}^i p_k / \sum_{k=1}^i (p_k / r_k)$$

$$R_2 = \sum_{k=i+1}^n p_k / \sum_{k=i+1}^n (p_k / r_k)$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas de deux machines étudiées précédemment avec :

- débit instantané de  $\mathcal{K}_1 : \mathcal{E}_1 = \min_{k=1, \dots, i} c_i$

- débit instantané de  $\mathcal{K}_2 : \mathcal{E}_2 = \min_{k=i+1, \dots, n} c_i$

Nous savons calculer le débit  $Z_{h_i}$  du système en fonction du niveau maximum  $h_i$  du stock tampon (imposé par les contraintes techniques).

La position  $i_1$  cherchée est telle que :

$$Z_{h_{i_1}} = \max_{i=1, \dots, x-1} Z_{h_i}$$

Les expressions des fonctions de répartition et des densités de probabilité que nous venons de donner permettent de vérifier certaines propriétés et, en particulier, la suivante : si nous changeons le sens d'écoulement des produits dans le système, les densités de probabilité et les probabilités aux bornes sont symétriques par rapport à la valeur médiane du stock, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F_{ij}^*}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F_{ji}}{\partial x}(h_1 - x_1)$$

$$m_{ij}^{*kl} = M_{ji}^{lk}$$

$$M_{ij}^{*kl} = m_{ji}^{lk}$$

où \* permet de repérer les densités de probabilité et les probabilités après changement du sens d'écoulement.

La seconde partie de ce papier développe le cas de trois machines identiques.

C - LE LOGICIEL

1 - LE PROGRAMME PRINCIPAL.

```
1      dimension zh(200),zs(200)
2      open(1,form="formatted")
3      open(0)
4      write(0,1)
5 1    format(2x,"r1=proba. rena.:n1=proba. nanne:c1=debit-machine 1")
6      write(0,2)
7 2    format(2x,"r2=proba. rena.:n2=proba. nanne:c2=debit-machine 2")
8      write(0,3)
9 3    format(2x,"donnez r1,n1,c1,r2,n2,c2")
10     read(0,4)r1,n1,c1,r2,n2,c2
11 4    format(f7.2)
12     write(1,6)
13 6    format(20x,"machine amont")
14     write(1,5)r1,n1,c1
15 5    format(2x,"r1="f8.2,2x,"n1="f8.2,2x,"c1="f8.2//)
16     write(1,7)
17 7    format(20x,"machine aval")
18     write(1,8)r2,n2,c2
19 8    format(2x,"r2="f8.2,2x,"n2="f8.2,2x,"c2="f8.2//)
20     write(0,9)
21 9    format(2x,"donnez l'intervalle d'evolution du stock tampon")
22     read(0,4)h1,h2
23     write(0,10)
24 10   format(2x,"donnez le pas d'evolution")
25     read(0,11)d
26 11   format(f9.6)
27     u1=c1*r1/(n1+r1)
28     u2=c2*r2/(n2+r2)
29     write(1,12)u1
30     write(1,13)u2
31 12   format(2x,"taux de production machine amont=".2x,e14.7//)
32 13   format(2x,"taux de production machine aval=".2x,e14.7//)
33     i=0
34     h=h1
35 51   i=i+1
36     call twoma(c1,c2,n1,n2,r1,r2,h,z)
37     zh(i)=h
38     zs(i)=z
39     h=h+d
40     if(h.gt.h2) go to 50
41     if(i.lt.200) go to 51
42 50   write(1,100)(zh(i),zs(i),i=1,i)
43 100  format(3(2x,"h="f8.5,4x,"tn="f8.5,2x,"***"))
44     close (1)
45     stop
46     end
```

2 - LE SOUS PROGRAMME Twoma.

```
1      subroutine twoma(c1,c2,n1,n2,r1,r2,h,z)
2      eps=1.e-7
3      c*****
4      c*****etude des cas particuliers
5      c*****
6      u=c1*c2
7      if(u.le.eps) go to 1
8      u=r1*r2
9      if(u.gt.eps) go to 2
10 1    z=0.
11      go to 1000
12 2    if(n1.gt.eps) go to 3
13      if(n2.gt.eps) go to 4
14  c
15  c n1=0 et n2=0
16  c
17      z=c1
18      if(c1.lt.c2) go to 1000
19      z=c2
20      go to 1000
21  c
22  c n1=0 et n2>0
23  c
24 4    u=r2*c2/(r2+n2)
25      if(c1.lt.c2) go to 5
26      z=u
27      go to 1000
28 5    r=abs(c1-u)
29      if(r.gt.eps) go to 6
30      z=c2*r2*n2*h+c1*(c2-c1)*r2
31      z=c1*z/(z+n2*c1*(c2-c1))
32      go to 1000
33 6    a=n2/(c2-c1)-r2/c1
34      r=a*h
35      z=u
36      if(r.gt.100.) go to 1000
37      z=c1
38      if(r.lt.-100.) go to 1000
39      r=exp(r)
40      z=n2*r2*c2*(r-1.)+r2*c1*(c2-c1)*a
41      z=c1*z/(z+n2*c1*(c2-c1)*a*r)
42      go to 1000
43 3    if(n2.gt.eps) go to 7
44  c
45  c n1>0 et n2=0
46  c
47      u=r1*c1/(r1+n1)
48      z=u
49      if(c1.le.c2) go to 1000
50      r=abs(c2-u)
51      if(r.gt.eps) go to 8
52      z=h*c1*r1*n1+c2*r1*(c1-c2)
53      z=c2*z/(z+c2*n1*(c1-c2))
54      go to 1000
```

```
55 8      d=n1/(c2-cl)+r1/c2
56      r=d*h
57      z=c2
58      if(r.gt.80.) go to 1000
59      z=0
60      if(r.lt.-80.) go to 1000
61      r=exp(r)
62      z=(r-1.)*c1/(c1-c2)+c2/n1*d*r
63      z=c2*z/(z+c2*d/r1)
64      go to 1000
65 c*****
66 c*****etude des cas generaux
67 c*****
68 7      r=abs(c1-c2)
69      if(r.le.eps) go to 9
70      u1=c1*r1/(r1+n1)
71      u2=c2*r2/(r2+n2)
72      t=abs(u1-u2)
73      a=n2/(c2-cl)-r2*(r1+r2+n1)/c1/(r1+r2)
74      b=n2/c1*(r1/(r1+r2)-c2/(c2-cl))
75      e=-n1/c2*(r2/(r1+r2)+c1/(c2-cl))
76      d=n1/(c2-cl)+r1*(r1+r2+n2)/c2/(r1+r2)
77 c
78 c+++++++cas ou c1 non equal a c2
79 c
80      if(t.gt.eps) go to 10
81 c
82 c//// les deux machines ont memes taux de production
83 c
84      s=(a+d)*h
85      if(cl.lt.c2) go to 11
86 c----c1>c2
87      f=s
88      z=0
89      if(f.gt.80.) go to 1000
90      s=0.
91      if(f.lt.-80.) go to 12
92      s=exp(s)
93 12      f01=d*d/(a+d)*(s-1.)+b*e*h
94      f10=d*b/(a+d)*(s-1.)-b*d*h
95      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-cl)
96      f00=(n1*f10+n2*f01)/(r1+r2)
97      x11=c2*(d*d+e*b)/r1
98      x11=c2*(d*d*s+e*b)/n1
99      x12=c2*n2*(d*d*s+e*b)/r2/n1
100     x=f01+f11+x11
101     v=f10+f00+x11+x12
102     z=x*c2/(x+v)
103     go to 1000
104 c---c1<c2
105 11     z=0
106     if(s.gt.80.) go to 1000
107     if(s.lt.-80.) go to 14
108     s=exp(-s)
109     f01=e/(a+d)*(1.-s)-e*h
110     f10=a/(a+d)*(1.-s)+d*h
111     f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-cl)
112     f00=(n1*f10+n2*f01)/(r1+r2)
113     x11=c1*(a+d)/r2
114     x11=c1*(a*s+d)/n2
115     x12=n1*x11/r1
116     go to 13
```

```

117 14   r01=e/(a+d)
118     f10=a/(a+d)
119     r11=(c1*f10-c2*r01)/(c2-c1)
120     r00=(n1*f10+n2*r01)/(r1+r2)
121     xal=0.
122     xml=c1*a/n2
123     xm2=n1/r1*xml
124 13   x=r01+f11
125     v=x+r10+f00+xal+xml+xm2
126     z=(x*c2+xml*c1)/v
127     go to 1000
128 c
129 c//// les deux machines ont des taux de production differents
130 c
131 10   d1=(a-d)*(a-d)+4.*e*b
132     d1=d1*.5
133     xk=(a+d)/2.
134     xk1=xk-d1/2.
135     xk2=xk+d1/2.
136     u=xk2*h
137     if(c1.lt.c2) go to 15
138 c---c1>c2
139     w=(xk1-xk2)*h
140     if(u.le.80.) go to 16
141     w=0.
142     if(w.lt.-80.) go to 17
143     w=exp(w)
144 17   r10=1.-xk2/xk1*w
145     r01=(xk2-a)/b-xk2*(xk1-a)*w/b/xk1
146     r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
147     r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
148     xil=0.
149     xal=c2*xk2/n1/b*(xk2-a-(xk1-a)*w)
150     s1=c1+c2*n2*(xk2-a)/b/n1
151     s2=c1+c2*n2*(xk1-a)/b/n1
152     xa2=xk2/r2*(s1-s2*w)
153     go to 19
154 16   if(u.gt.-80.) go to 20
155     r10=xk2/xk1-1.
156     r01=-a*(xk2-xk1)/b/xk1
157     r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
158     r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
159     xil=c2*xk2/r1/b*(xk2-xk1)
160     xal=0.
161     xa2=0.
162     go to 19
163 20   u=exp(u)
164     if(w.lt.-80.) go to 22
165     w=exp(w)
166     go to 23
167 22   w=0.
168 23   r10=u*(1.-(1.-xk2/xk1)/u-xk2*w/xk1)
169     r01=(xk2-a)/b-a*(xk2-xk1)/b/xk1/u
170     r01=r01-xk2*(xk1-a)/b/xk1*w
171     r01=u*r01
172     r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
173     r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
174     xil=c2*xk2/r1/b*(xk2-xk1)
175     xal=c2*xk2/n1/b*u*(xk2-a-(xk1-a)*w)

```

```

176      s=c2*n2/b/n1
177      xa2=xk2/r2*u*(c1+s*(xk2-a)-(c1+s*(xk1-a))*w)
178 19    x=r01+r11+xa1
179      v=r10+r00+x11+xa2
180      z=x*c2/(x+v)
181      go to 1000
182 c---c1<c2
183 15    w=xk1*h
184      if(w.le.80.) go to 25
185      r10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)+1.
186      r01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b+(xk2-a)/b
187      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
188      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
189      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)/r2/(a-xk1)
190      x11=0.
191      x12=0.
192      go to 26
193 25    if(u.le.80.) go to 27
194      if(w.le.-80.) go to 30
195      w=exp(w)
196      r10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*(1.-1./w)+1.
197      r01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b*(1.-1./w)+(xk2-a)/b
198      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
199      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
200      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)/r2/(a-xk1)
201      x11=c1*xk2/n2/(a-xk1)*(xk2-a)/w
202      x12=xk2/r1*(xk2-a)/w*(n1*c1/n2/(a-xk1)-c2/b)
203      go to 26
204 27    if(u.le.-80.) go to 28
205      u=exp(u)
206      if(w.le.-80.) go to 29
207      w=exp(w)
208      r10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*(1.-1./w)
209      r10=u*(r10+1.-1./u)
210      r01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b*(1.-1./w)
211      r01=u*(r01+(xk2-a)/b*(1.-1./u))
212      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
213      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
214      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)*u/r2/(a-xk1)
215      x11=(xk2-a)/w+(a-xk1)/u
216      x12=c1*xk2/n2/(a-xk1)*u*x11
217      s1=(xk2-a)*(n1*c1/n2/(a-xk1)-c2/b)/w
218      s2=(n1*c1/n2+c2*(xk2-a)/b)/u
219      x12=xk2/r1*u*(s1+s2)
220      go to 26
221 29    r10=u*xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)
222      r01=u*xk2*(xk2-a)/xk1/b
223      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
224      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r2+r1)
225      xa1=0.
226      x11=c1*xk2/n2/(a-xk1)*(xk2-a)*u
227      x12=xk2/r1*u*(xk2-a)*(n1*c1/n2/(a-xk1)-c2/b)
228      go to 26
229 28    s=(xk2-xk1)*h
230      if(s.gt.80.) go to 30
231      s=exp(s)
232      r10=xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*s-1.
233      r01=xk2*(xk2-a)/xk1/b*s-(xk2-a)/b
234      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
235      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
236      xa1=0.
237      x11=c1*xk2*(xk2-a)/n2/(a-xk1)*s+a-xk1

```

```

238      s1=s*(xk2-a)*(n1*c1/n2/(a-xk1)-c2/b)
239      s2=n1*c1/n2+c2*(xk2-a)/b
240      xi2=xk2*(s1+s2)/r1
241      go to 26
242 30    r10=xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)
243      r01=xk2*(xk2-a)/xk1/b
244      xal=0.
245      xil=c1*xk2*(xk2-a)/n2/(a-xk1)
246      xi2=xk2*(xk2-a)/r1
247      xi2=xi2*(n1*c1/n2/(a-xk1)-c2/b)
248      r11=(c1*r10-c2*r01)/(c2-c1)
249      r00=(n1*r10+n2*r01)/(r1+r2)
250 26    v=r11+r01+r10+r00+xal+xil+xi2
251      z=((r11+r01)*c2+xil*c1)/v
252      go to 1000
253 c
254 c+++++++cas c1=c2=c
255 c
256 9     c=c1
257      u1=r1*n2
258      u2=r2*n1
259      t=abs(u1-u2)
260      if(t.gt.eps) go to 31
261 c
262 c//// les deux machines ont memes taux de production
263 c
264      r01=h
265      r10=h
266      r11=(r1+r2)/(n1+n2)
267      r00=1./r11
268      r11=r11*h
269      r00=r00*h
270      xil=c/n2
271      xi2=c*(n1+n2)/r1/n2
272      xal=c/n1
273      xa2=c*(n1+n2)/r2/n1
274      go to 32
275 c
276 c//// les deux machines ont des taux de production differents
277 c
278 31    u=(n1+n2+r1+r2)/c/(r1+r2)/(n1+n2)
279      w=u*(r1*n2-r2*n1)*h
280      z=c*r2/(r2+n2)
281      if(w.gt.80.) go to 1000
282      if(w.lt.-80.) go to 33
283      w=exp(w)
284      go to 34
285 33    w=0.
286 34    r01=w-1.
287      r10=r01
288      r11=(r1+r2)/(n1+n2)*r01
289      r00=(n1+n2)/(r1+r2)*r01
290      xil=c*u*(r1*n2-r2*n1)/n2
291      xi2=c*(n1+n2)/r1/n2*u*(r1*n2-r2*n1)
292      xal=c/n1*u*(r1*n2-r2*n1)*w
293      xa2=c*(n1+n2)/r2/n1*u*(r1*n2-r2*n1)*w
294 32    z=r01+r11+xil+xal
295      z=c*z/(z+r00+r10+xi2+xa2)
296 1000  return
297      end

```

CONCLUSION.

Nous venons de fournir le taux de production en fonction du niveau maximal du stock tampon et de proposer une application.

Les logiciels fournis ont été testés soigneusement. Cependant, ils font intervenir des exponentielles dans le cas général : des erreurs de chute peuvent apparaître pour les grandes valeurs du maximum du stock tampon.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

