Modèles aléatoires

Bertrand Cloez,
UMR Mistea

Plan

Objectif

Arbre de Galton-Watson
- Le modèle
- Son comportement
- Deux applications

Passage au temps continu : processus de naissance et mort

Renormalisation : équations différentielles ordinaires

Et encore plus... ?

Plan

Objectif

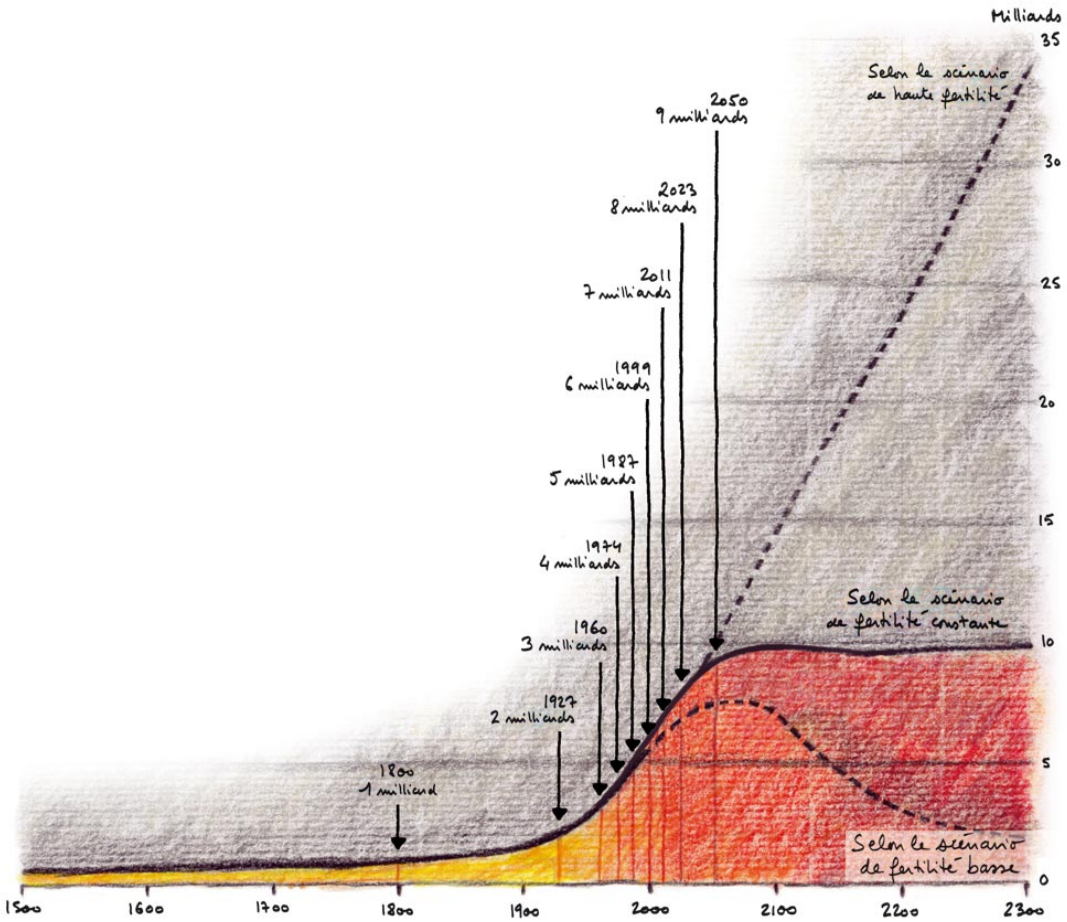
Arbre de Galton-Watson
- Le modèle
- Son comportement
- Deux applications

Passage au temps continu : processus de naissance et mort

Renormalisation : équations différentielles ordinaires

Et encore plus... ?

Objectifs



- Modéliser l'évolution démographique d'une espèce

Objectifs

- Les problèmes scientifiques liés à l'écologie sont extrêmement complexes.

Objectifs

- Les problèmes scientifiques liés à l'écologie sont extrêmement complexes.
- Il faut des modèles mathématiques qui :
  - simplifie un phénomène pour le mettre en équation
  - associe des quantités calculables (temps d'extinction, abondance,. . .)
  - permet de simuler une évolution future plausible
  - est compatible avec les statistiques

Objectifs

- Les problèmes scientifiques liés à l'écologie sont extrêmement complexes.
- Il faut des modèles mathématiques qui :
  - simplifie un phénomène pour le mettre en équation
  - associe des quantités calculables (temps d'extinction, abondance,. . .)
  - permet de simuler une évolution future plausible
  - est compatible avec les statistiques
- Ils sont pour la plupart issues de
  - Modèles aléatoires
  - Modèles déterministes
  - Statistiques
  - Méthodes numériques

Objectifs

- Les problèmes scientifiques liés à l'écologie sont extrêmement complexes.
- Il faut des modèles mathématiques qui :
  - simplifie un phénomène pour le mettre en équation
  - associe des quantités calculables (temps d'extinction, abondance,. . .)
  - permet de simuler une évolution future plausible
  - est compatible avec les statistiques
- Ils sont pour la plupart issues de
  - Modèles aléatoires
  - Modèles déterministes
  - Statistiques
  - Méthodes numériques

Plan

Objectif

Arbre de Galton-Watson
- Le modèle
- Son comportement
- Deux applications

Passage au temps continu : processus de naissance et mort

Renormalisation : équations différentielles ordinaires

Et encore plus... ?

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

- On construit la suite aléatoire X_n qui compte le nombre d'individus à la génération n comme suit

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

- On construit la suite aléatoire X_n qui compte le nombre d'individus à la génération n comme suit
  - $X_0 = 1$

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

- On construit la suite aléatoire X_n qui compte le nombre d'individus à la génération n comme suit
  - $X_0 = 1$
  - $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} E_{k,n}$, ou $E_{k,n}$ est le nombre d'enfant du $k$ième individu à la $n$ème génération

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

- On construit la suite aléatoire X_n qui compte le nombre d'individus à la génération n comme suit
  - $X_0 = 1$
  - $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} E_{k,n}$, ou $E_{k,n}$ est le nombre d'enfant du $k$ième individu à la $n$ème génération
  - Les variables aléatoires $E_{k,n}$ vérifient
    - Ils sont indépendants. Le nombre d'individus d'une personne n'influe pas sur une autre (ni les nombres d'enfants passés et futures).
    - Ils ont la même loi, celle induite par p ; c'est à dire

$$\mathbb{P}(E_{k,n} = i) = p(i).$$

Arbre de Galton-Watson

- On se fixe une loi de reproduction $p = (p(i))_{i \in \mathbb{N}}$; c'est à dire que la probabilité qu'un individu ait i enfants est $p(i)$, quelque soit $i = 0, 1, \ldots$.
- On a $1 \geq p(i) \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_i p(i) = p(0) + p(1) + \cdots = 1$$

- On construit la suite aléatoire X_n qui compte le nombre d'individus à la génération n comme suit
  - $X_0 = 1$
  - $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} E_{k,n}$, ou $E_{k,n}$ est le nombre d'enfant du $k$ième individu à la $n$ème génération
  - Les variables aléatoires $E_{k,n}$ vérifient
    - Ils sont indépendants. Le nombre d'individus d'une personne n'influe pas sur une autre (ni les nombres d'enfants passés et futures).
    - Ils ont la même loi, celle induite par p ; c'est à dire

$$\mathbb{P}(E_{k,n} = i) = p(i).$$

  - Si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = 0$.

Arbre de Galton-Watson

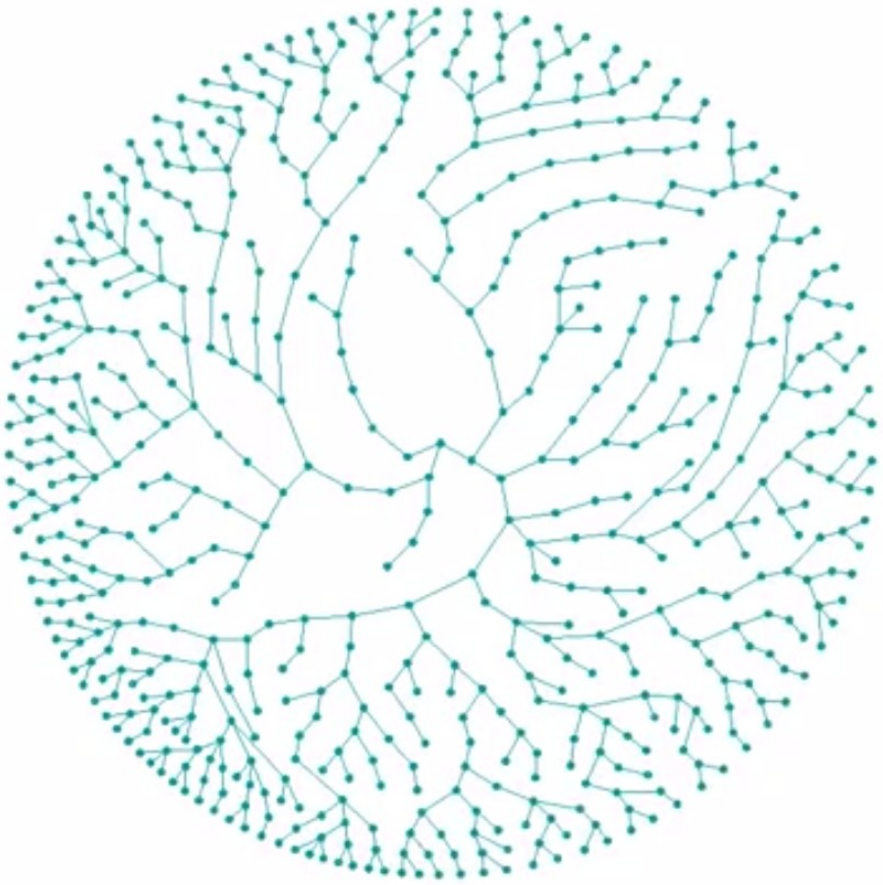
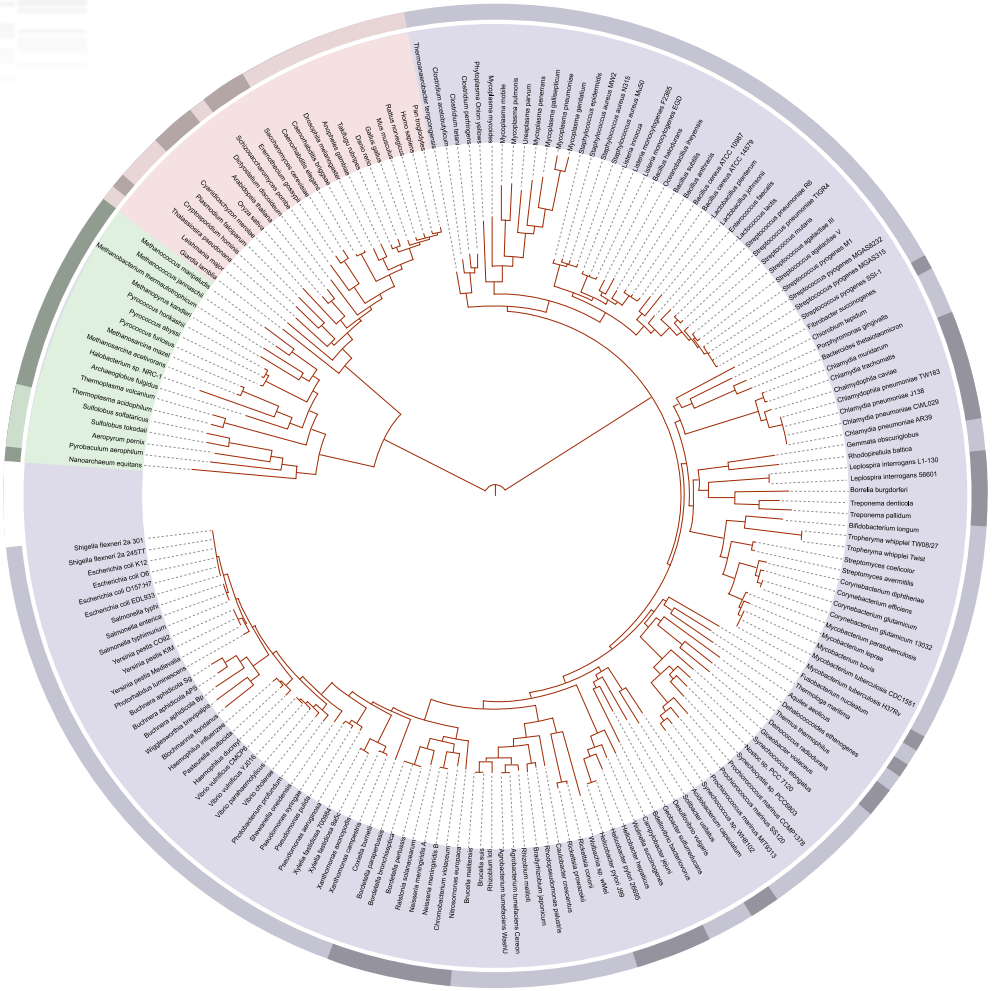


Figure : Arbre de Galton-Watson

- Lancer les videos de Nils Berglund.

Arbre phylogénétique


Thermosaccharolyticum kopriensis
Clostridium acetobutylicum
Clostridium botei
Clostridium perfringens
Phytoplasma Onion yellows
Mycoplasma mycoides
Mycoplasma gallisepticum
Mycoplasma pulmonis
Ureaplasma parvum
Mycoplasma penetrans
Mycoplasma pneumoniae
Mycoplasma genitalium
Staphylococcus epidermidis
Staphylococcus aureus MW2
Staphylococcus aureus N315
Staphylococcus aureus Mu50
Listeria monocytogenes
Listeria monocytogenes EGD
Listeria monocytogenes EGD-e
Bacillus halodurans
Oceanobacillus iheyensis
Bacillus subtilis
Bacillus anthracis
Bacillus cereus ATCC 10987
Bacillus cereus ATCC 14579
Lactobacillus plantarum
Lactococcus lactis
Enterococcus faecalis
Streptococcus pneumoniae R6
Streptococcus pneumoniae TIGR4
Streptococcus mutans
Streptococcus agalactiae III
Streptococcus agalactiae V
Streptococcus pyogenes M1
Streptococcus pyogenes MGAS8232
Streptococcus pyogenes MGAS315
Streptococcus pyogenes SSI-1
Streptococcus thermophilus
Finegoldia magna
Clostridium tetani
Porphyromonas gingivalis
Bacteroides thetaiotaomicron
Bartonella muridarum
Chlamydia trachomatis
Chlamydophila caviae
Chlamydophila pneumoniae TW183
Chlamydia pneumoniae J138
Chlamydia pneumoniae CWL029
Chlamydia pneumoniae AR39
Chlamydia pneumoniae
Gemmata obscuriglobus
Rhodopirellula baltica
Leptospira interrogans L1-130
Leptospira interrogans 56601
Borrelia burgdorferi
Treponema denticola
Treponema pallidum
Bifidobacterium longum
Tropheryma whipplei TW08/27
Tropheryma whipplei Twist
Streptomyces coelicolor
Streptomyces avermitilis
Corynebacterium diphtheriae
Corynebacterium efficiens
Corynebacterium glutamicum
Mycobacterium glutamicum 13032
Mycobacterium paratuberculosis
Mycobacterium ferrae
Mycobacterium kansasii
Mycobacterium tuberculosis CDC1551
Mycobacterium tuberculosis H37Rv
Frankia alni
Acinetobacter baylyi
Aeromonas salmonicida
Alteromonas macleodii
Alteromonas sp. SN2
Alteromonas haloplanktis
Alteromonas sp. SN9
Alteromonas sp. SN10
Alteromonas sp. SN11
Alteromonas sp. SN12
Alteromonas sp. SN13
Alteromonas sp. SN14
Alteromonas sp. SN15
Alteromonas sp. SN16
Alteromonas sp. SN17
Alteromonas sp. SN18
Alteromonas sp. SN19
Alteromonas sp. SN20
Alteromonas sp. SN21
Alteromonas sp.

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

- Dans ce cas,

$$X_{n+1} = qX_n, \quad X_n = q^n X_0$$

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

- Dans ce cas,

$$X_{n+1} = qX_n, \quad X_n = q^n X_0$$

- On a alors 3 cas

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

- Dans ce cas,

$$X_{n+1} = qX_n, \quad X_n = q^n X_0$$

- On a alors 3 cas
  - $q < 1 \Rightarrow X_n \to 0$: extinction.

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

- Dans ce cas,

$$X_{n+1} = qX_n, \quad X_n = q^n X_0$$

- On a alors 3 cas
  - $q < 1 \Rightarrow X_n \to 0$: extinction.
  - $q = 1 \Rightarrow X_n = X_0$: population constante

Arbre de Galton-Watson

- Introduit par Francis Galton en 1873 en vue d'étudier la statistique des patronymes en Angleterre (wikipedia).
- Le nombre d'enfants est déterministe si

$$\forall k, n, \quad E_{k,n} = q$$

ou encore

$$p(q) = 1, \quad p(i) = 0 \text{ si } i \neq q.$$

- Dans ce cas,

$$X_{n+1} = qX_n, \quad X_n = q^n X_0$$

- On a alors 3 cas
  - $q < 1 \Rightarrow X_n \to 0$: extinction.
  - $q = 1 \Rightarrow X_n = X_0$: population constante
  - $q > 1 \Rightarrow X_n \to \infty$: explosion de la population.

Cas déterministe (suite géométrique)

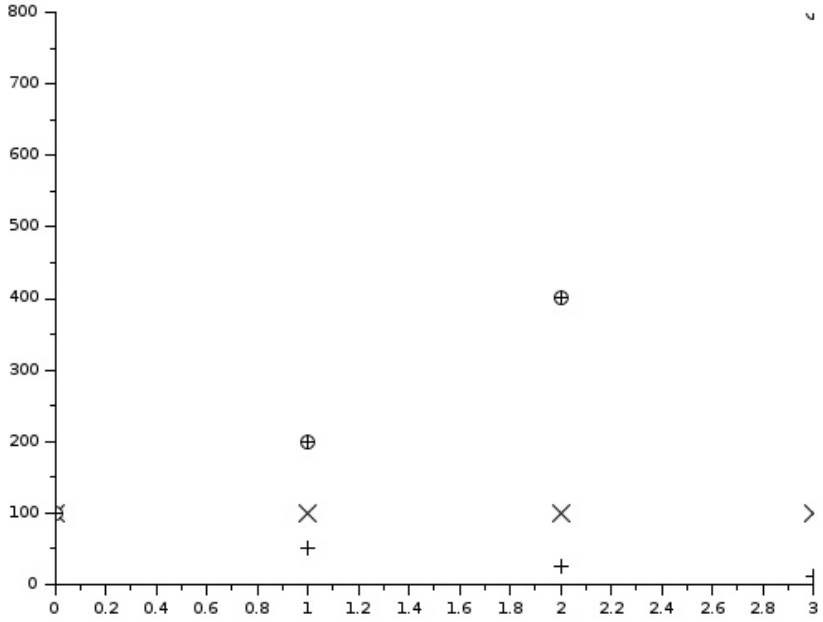


Figure : Population initiale =100, $q = 1/2, 1, 2$

Arbre de Galton-Watson : comportement moyen

- On rappelle que l'espérance, la moyenne d'un variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X = k)$$

Arbre de Galton-Watson : comportement moyen

- On rappelle que l'espérance, la moyenne d'un variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$$

- On note m le nombre moyen d'enfants ; c'est-à-dire

$$m = \sum_{i} ip(i) = p(1) + 2p(2) + 3p(3)...$$

Arbre de Galton-Watson : comportement moyen

- On rappelle que l'espérance, la moyenne d'un variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$$

- On note m le nombre moyen d'enfants ; c'est-à-dire

$$m = \sum_{i} ip(i) = p(1) + 2p(2) + 3p(3)...$$

- On peut montrer que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = m\mathbb{E}[X_n], \quad \mathbb{E}[X_n] = m^n\mathbb{E}[X_0].$$

Arbre de Galton-Watson : comportement moyen

- On rappelle que l'espérance, la moyenne d'un variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$$

- On note m le nombre moyen d'enfants ; c'est-à-dire

$$m = \sum_i ip(i) = p(1) + 2p(2) + 3p(3)...$$

- On peut montrer que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = m\mathbb{E}[X_n], \quad \mathbb{E}[X_n] = m^n\mathbb{E}[X_0].$$

- Donc
  - $m < 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to 0$.
  - $m = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$.
  - $m > 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to \infty$.
- Attention, cela ne dit (presque) rien sur X_n...

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.
- Et tout ça quelque soit le nombre d'individus initial !

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.
- Et tout ça quelque soit le nombre d'individus initial !

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.
- Et tout ça quelque soit le nombre d'individus initial !
- De même si $p(0) = 0$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.
- Et tout ça quelque soit le nombre d'individus initial !
- De même si $p(0) = 0$ alors
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) = 0.$$

  Si on a au minimum un enfant, on ne peut pas s'éteindre.

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

- Si $p(0) > 0$ alors il y a extinction avec une probabilité positive ; c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) > 0$$

- en particulier si $p(0) > 0$ et $m > 1$ alors il est possible que $X_n \to 0$ (avec une proba non nulle) alors que $\mathbb{E}[X_n] \to +\infty$.
- Et tout ça quelque soit le nombre d'individus initial !
- De même si $p(0) = 0$ alors
$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \text{ tq } X_n = 0) = 0.$$
Si on a au minimum un enfant, on ne peut pas s'éteindre.
- Peut-on en dire plus ?

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\mathsf{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\mathsf{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

- Si $m > 1$ alors la population survit avec probabilité positive.

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\mathsf{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

- Si $m > 1$ alors la population survit avec probabilité positive. Si elle survit alors il existe un nombre aléatoire $M > 0$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{m^n} = M.$$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\text{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

- Si $m > 1$ alors la population survit avec probabilité positive. Si elle survit alors il existe un nombre aléatoire $M > 0$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{m^n} = M.$$

- Si $m = 1$ alors on a deux possibilités :
  - Si $p(1) = 1$ alors $X_n = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\text{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

- Si $m > 1$ alors la population survit avec probabilité positive. Si elle survit alors il existe un nombre aléatoire $M > 0$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{m^n} = M.$$

- Si $m = 1$ alors on a deux possibilités :
  - Si $p(1) = 1$ alors $X_n = 1$ pour tout $n \geq 0$.
  - Si $p(1) \neq 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

On a

- Si $m < 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1.

$$C\ X_n m^n \leq \mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(T_{\text{Ext}} > n) \leq X_0 m^n$$

- Si $m > 1$ alors la population survit avec probabilité positive. Si elle survit alors il existe un nombre aléatoire $M > 0$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{m^n} = M.$$

- Si $m = 1$ alors on a deux possibilités :
  - Si $p(1) = 1$ alors $X_n = 1$ pour tout $n \geq 0$.
  - Si $p(1) \neq 1$ alors il y a extinction de la population avec probabilité 1 mais

$$\mathbb{E}[T_{\text{Ext}}] = \infty.$$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

Soit

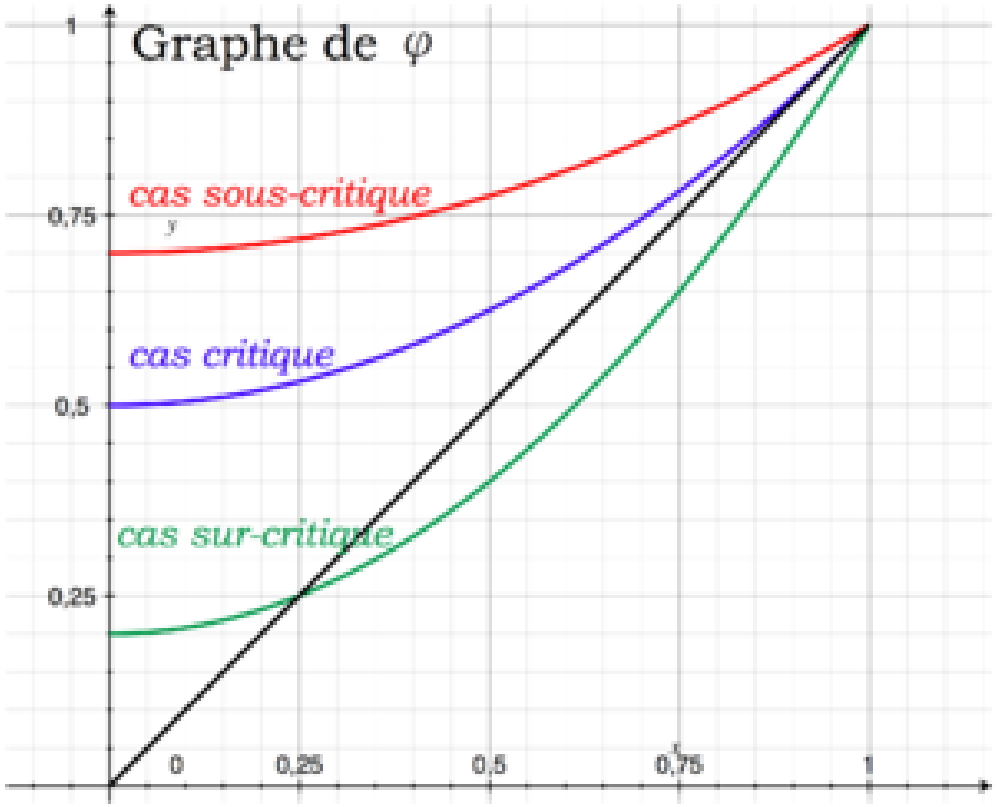
$$\varphi(s) = \sum_i s^i p(i).$$

Arbre de Galton-Watson : comportement réel

Soit

$$\varphi(s) = \sum_i s^i p(i).$$

La probabilité d'extinction est la plus petite solution de $\varphi(s) = s$.



Deux applications

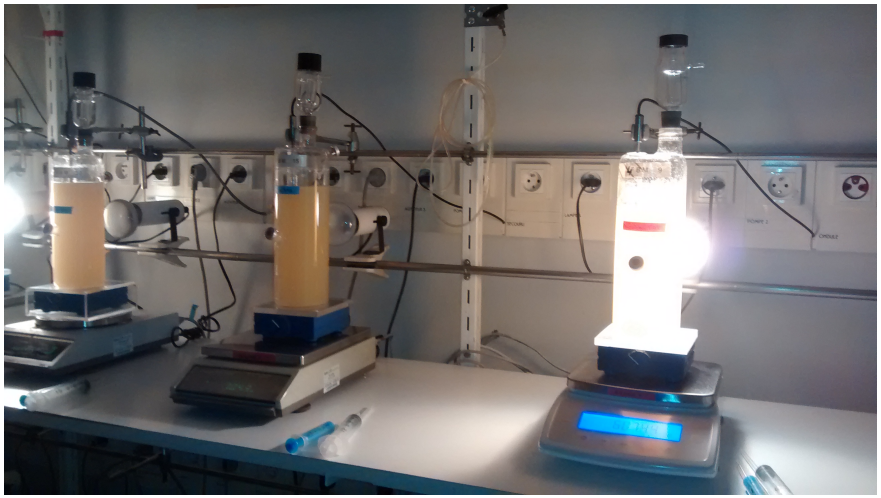


Figure : Cas $m > 1$

Figure : Cas $m < 1$

Application 1 : temps de latence pour les levures

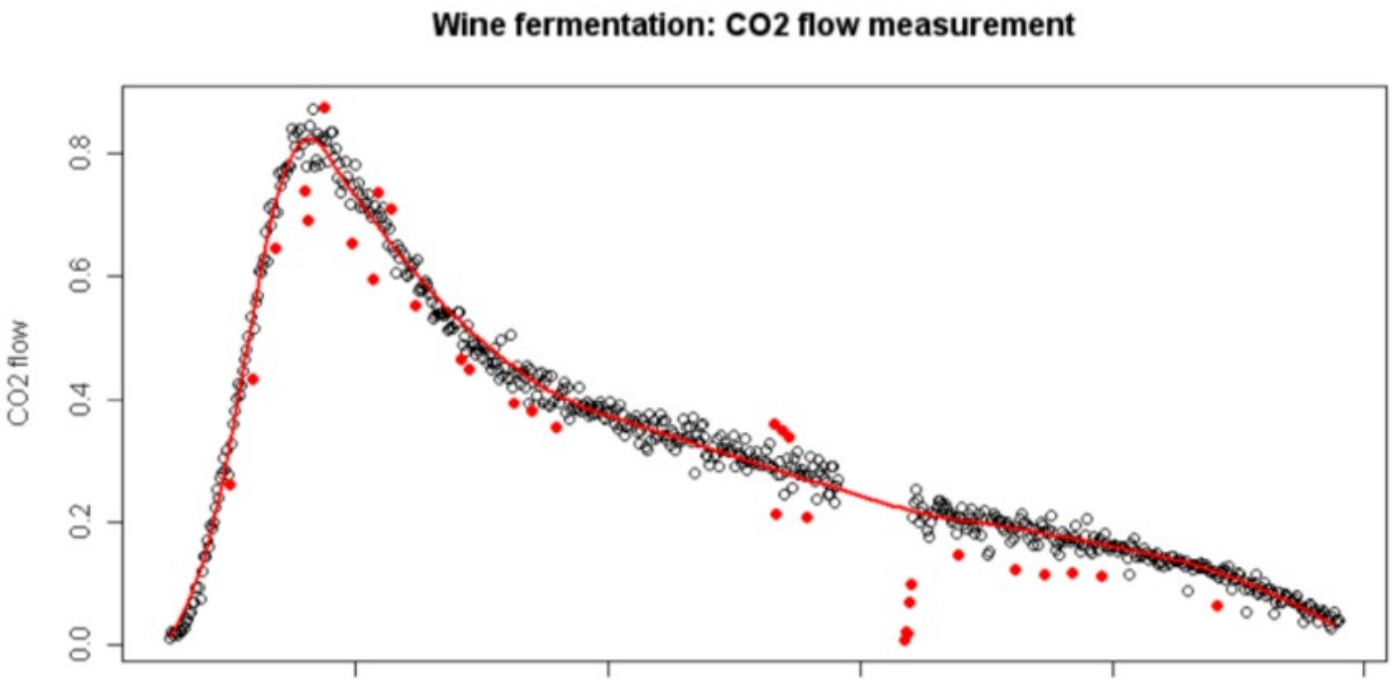


Figure : Les levures ont l'air de croître de façon déterministe mais ...

Application 1 : temps de latence pour les levures

- $X_n \approx Mm^n$ avec M aléatoire $\Rightarrow X_n \approx m^{n+N_0}$ avec N_0 aléatoire

Application 1 : temps de latence pour les levures

- $X_n \approx Mm^n$ avec M aléatoire $\Rightarrow X_n \approx m^{n+N_0}$ avec N_0 aléatoire

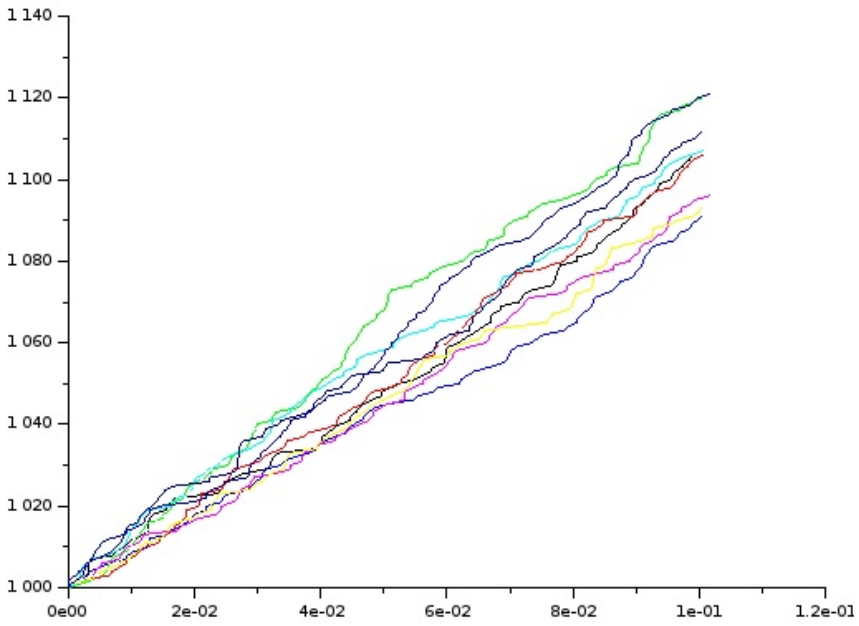


Figure : Temps court

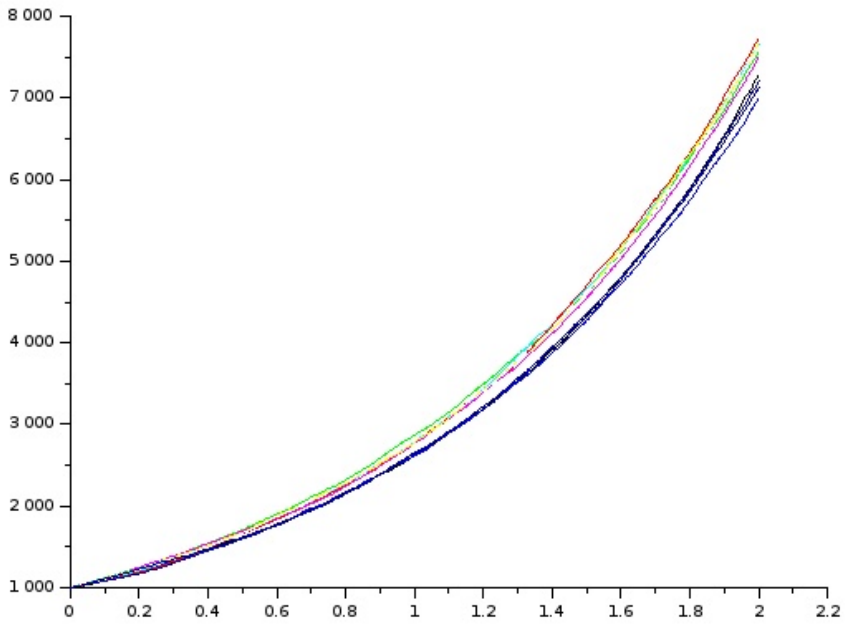


Figure : Temps long

Application 1 : temps de latence pour les levures

- $X_n \approx Mm^n$ avec M aléatoire $\Rightarrow X_n \approx m^{n+N_0}$ avec N_0 aléatoire

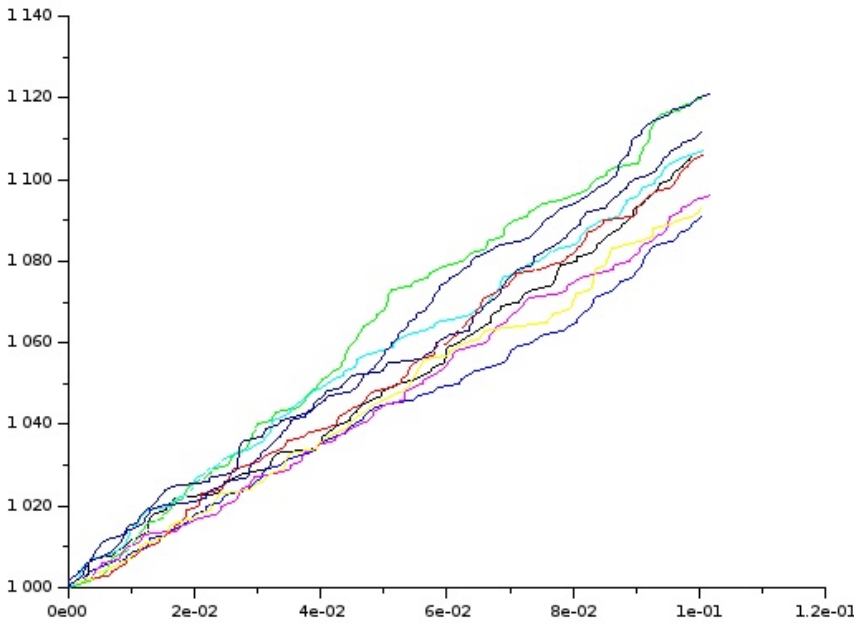


Figure : Temps court

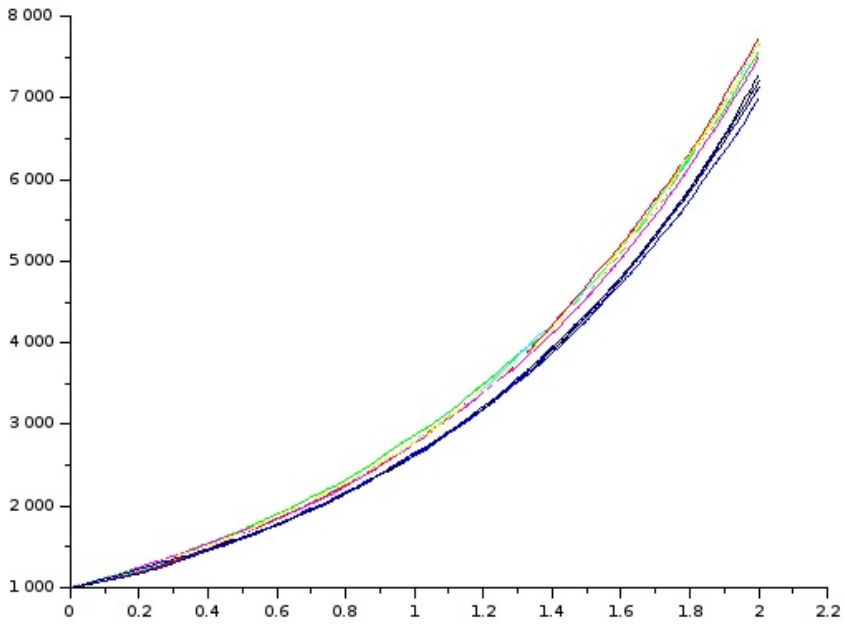


Figure : Temps long

- Discussions en cours avec Sylvie Dequin, David Ferreira et Virginie Galeote.

Application 2 : extinction des baleines noires dans l'atlantique nord

- *Declining survival probability threatens the North atlantic right whale*, H. Caswell, M. Fujiwara et S. Brault.

Application 2 : extinction des baleines noires dans l'atlantique nord

- *Declining survival probability threatens the North atlantic right whale*, H. Caswell, M. Fujiwara et S. Brault.
- Evolution du nombres de baleines femelles :
  - $X_0 = 150$ en 1994
  - Nombre moyen de nouvelles baleines/baleines et /an :$m = 0.976$

Application 2 : extinction des baleines noires dans l'atlantique nord

- Si $m < 1$ alors $\mathbb{P}(X_n > 0) \leq X_0 m^n$

Application 2 : extinction des baleines noires dans l'atlantique nord

- Si $m < 1$ alors $\mathbb{P}(X_n > 0) \leq X_0 m^n$
- On alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 0) = 0,99 &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n > 0) = 0,01 \\ &\Leftrightarrow X_0 m^n \geq 0,01 \\ &\Leftrightarrow 150 \times (0.976)^n \geq 0.01 \\ &\Leftrightarrow n \geq 396\end{aligned}$$

- C'est à dire qu'en $1994 + 396 = 2390$, il y a plus de 99% de chances qu'il n'y ait plus de baleines !

Plan

Objectif

Arbre de Galton-Watson
- Le modèle
- Son comportement
- Deux applications

Passage au temps continu : processus de naissance et mort

Renormalisation : équations différentielles ordinaires

Et encore plus... ?

Passage au temps continu

- On va passer à une modélisation en temps continu.

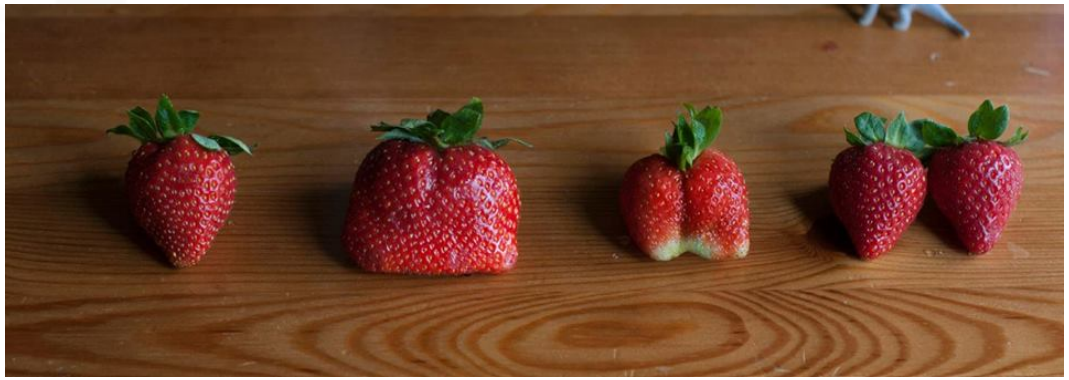
Passage au temps continu

- On va passer à une modélisation en temps continu.
- Les pas n ne vont plus désigner des générations mais des temps de plus en plus petit. On va regarder l'évolution de la population toutes les heures, minutes, secondes, micro-secondes...

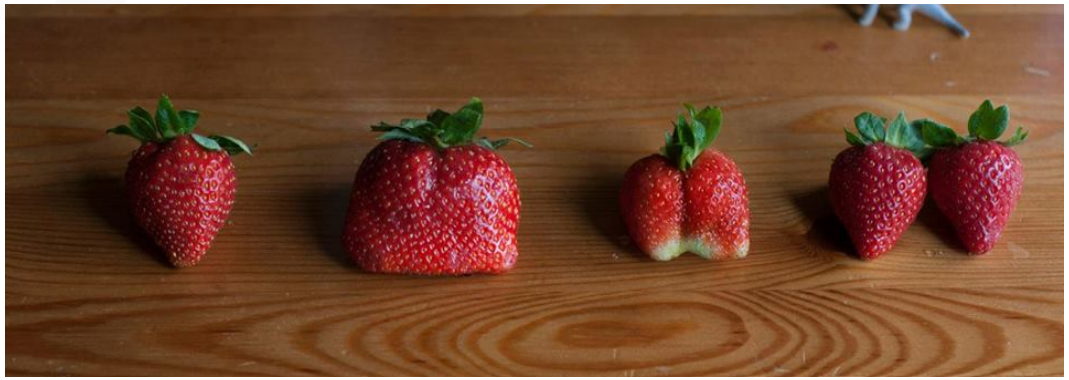
Passage au temps continu

- On va passer à une modélisation en temps continu.
- Les pas n ne vont plus désigner des générations mais des temps de plus en plus petit. On va regarder l'évolution de la population toutes les heures, minutes, secondes, micro-secondes...
- Pour faire simple, imaginons une population de cellule, qui ne peut pas mourir, mais seulement donner naissance à un enfant (par division, plus elle-même).

Passage au temps continu



Passage au temps continu



- Si q est la probabilité de division en une unité de temps alors

$$p(1) = (1 - q), \quad p(2) = q$$

- Pendant très longtemps, un individu n'a pas d'enfants donc on imagine que si l'unité de temps est assez petite alors q est très proche de 0.

Des arbres aux courbes

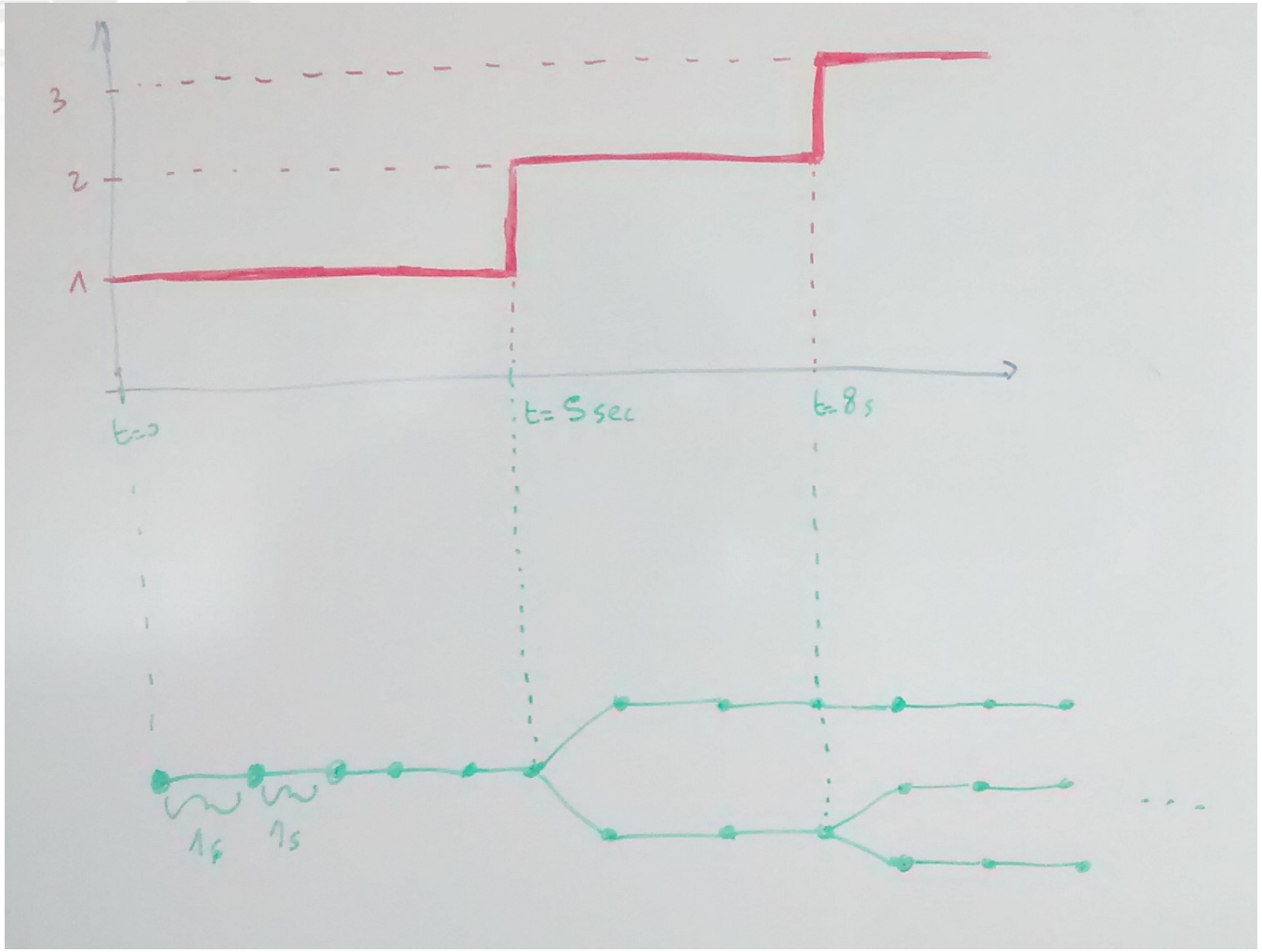


Figure : Arbre de Galton-Watson

Des arbres aux courbes

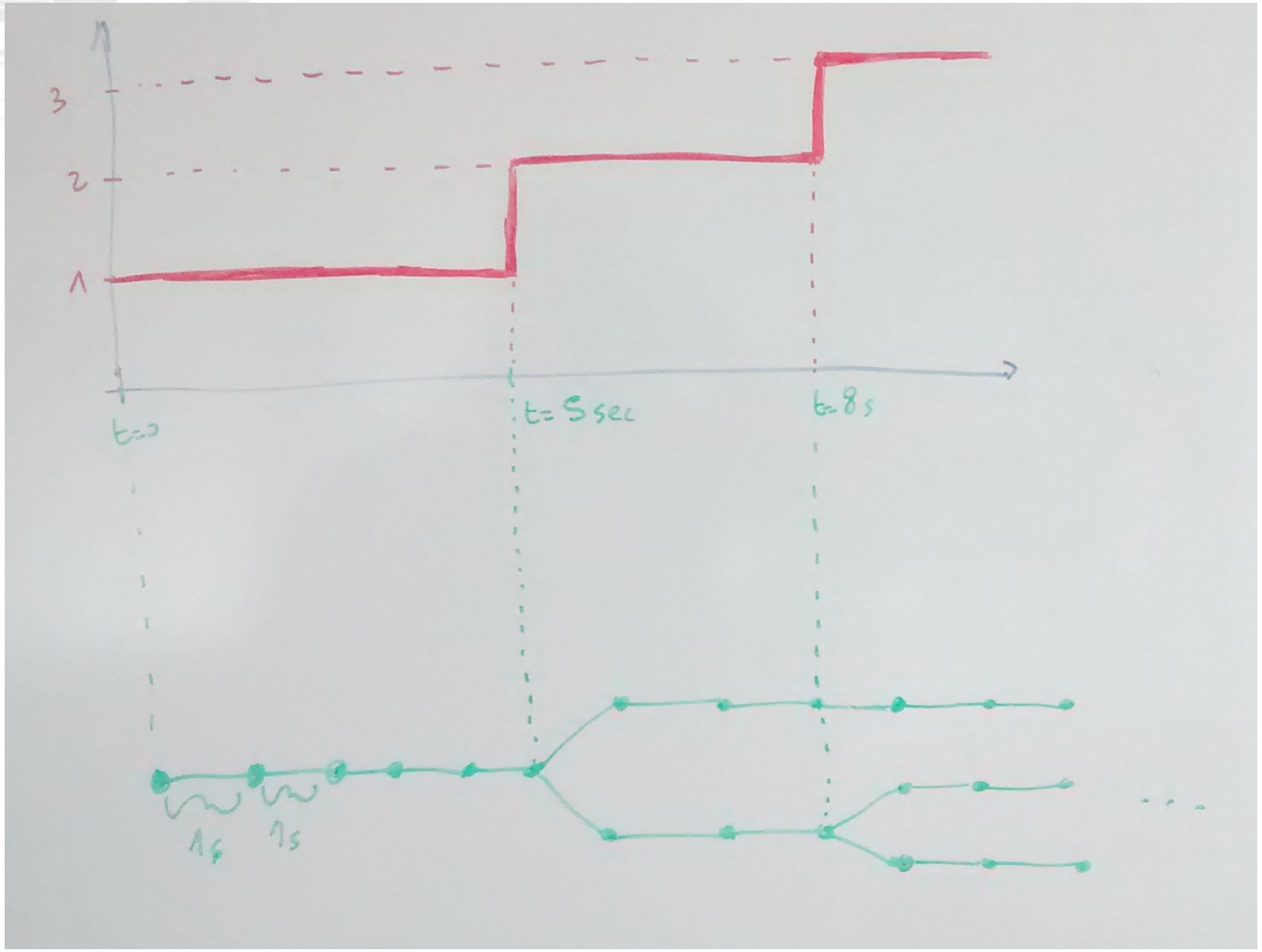


Figure : Arbre de Galton-Watson

- Il suffit de comprendre les temps où arrivent les enfants

Les temps de naissance

- Soit τ le temps de naissance d'un premier enfant.

Les temps de naissance

- Soit τ le temps de naissance d'un premier enfant.
- On a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \underbrace{(1-q) \times \cdots \times (1-q)}_{n-1 \text{ pas de division}} = (1-q)^{n-1}.$$

Les temps de naissance

- Soit τ le temps de naissance d'un premier enfant.
- On a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \underbrace{(1-q) \times \cdots \times (1-q)}_{n-1 \text{ pas de division}} = (1-q)^{n-1}.$$

- les paramètres p et n dépendent de l'unité choisie. Mais on a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = (1-q)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-q)}$$

Les temps de naissance

- Soit τ le temps de naissance d'un premier enfant.
- On a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \underbrace{(1-q) \times \cdots \times (1-q)}_{n-1 \text{ pas de division}} = (1-q)^{n-1}.$$

- les paramètres p et n dépendent de l'unité choisie. Mais on a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = (1-q)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-q)}$$

- On pose donc

$$\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}.$$

ou t représente le temps et λ la proba d'avoir un enfant dans un petit intervalle de temps.

Les temps de naissance

- Soit τ le temps de naissance d'un premier enfant.
- On a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \underbrace{(1-q) \times \cdots \times (1-q)}_{n-1 \text{ pas de division}} = (1-q)^{n-1}.$$

- les paramètres p et n dépendent de l'unité choisie. Mais on a

$$\mathbb{P}(\tau > n) = (1-q)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-q)}$$

- On pose donc

$$\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}.$$

ou t représente le temps et λ la proba d'avoir un enfant dans un petit intervalle de temps. On dit que τ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Les temps de naissance

- Si $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}.$$

On attend en moyenne $1/\lambda$ pour la naissance d'un enfant par une personne.

Les temps de naissance

- Si $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}.$$

  On attend en moyenne $1/\lambda$ pour la naissance d'un enfant par une personne.
- Le résultat précédent est logique : $+\lambda$ est grand, plus j'ai de chances d'avoir un enfant dans un petit intervalle de temps, $-$ j'attends pour l'avoir.

Les temps de naissance

- Si $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}.$$

  On attend en moyenne $1/\lambda$ pour la naissance d'un enfant par une personne.
- Le résultat précédent est logique : $+\lambda$ est grand, plus j'ai de chances d'avoir un enfant dans un petit intervalle de temps, $-$ j'attends pour l'avoir.
- Si on attend maintenant la naissance d'un enfant alors qu'il y a K personnes dans la population alors on peut montrer que

Les temps de naissance

- Si $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}.$$

  On attend en moyenne $1/\lambda$ pour la naissance d'un enfant par une personne.
- Le résultat précédent est logique : $+\lambda$ est grand, plus j'ai de chances d'avoir un enfant dans un petit intervalle de temps, $-$ j'attends pour l'avoir.
- Si on attend maintenant la naissance d'un enfant alors qu'il y a K personnes dans la population alors on peut montrer que

$$\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-K\lambda t}$$

  pour tout $t \geq 0$ et donc

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{K\lambda}.$$

Évolution du processus

- Pour résumer, on a montré que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'individus passait de 1 à 2 après un temps moyen $1/\lambda$ puis de 2 à 3 après un temps moyen de $1/2\lambda$ etc...

Évolution du processus

- Pour résumer, on a montré que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'individus passait de 1 à 2 après un temps moyen $1/\lambda$ puis de 2 à 3 après un temps moyen de $1/2\lambda$ etc...C'est à dire que si il y a n individus, on passe à $n+1$ individus après une variable exponentielle de paramètre λn.

Évolution du processus

- Pour résumer, on a montré que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'individus passait de 1 à 2 après un temps moyen $1/\lambda$ puis de 2 à 3 après un temps moyen de $1/2\lambda$ etc...C'est à dire que si il y a n individus, on passe à $n+1$ individus après une variable exponentielle de paramètre λn.
- On dit ici que le taux de naissance est

$$b(n) = \lambda n$$

Évolution du processus

- Pour résumer, on a montré que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'individus passait de 1 à 2 après un temps moyen $1/\lambda$ puis de 2 à 3 après un temps moyen de $1/2\lambda$ etc...C'est à dire que si il y a n individus, on passe à $n+1$ individus après une variable exponentielle de paramètre λn.
- On dit ici que le taux de naissance est

$$b(n) = \lambda n$$

et que le taux de mort est

$$d(n) = 0.$$

- En effet, on a supposé que les cellules ne pouvaient pas mourir.

Évolution du processus

- Pour résumer, on a montré que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'individus passait de 1 à 2 après un temps moyen $1/\lambda$ puis de 2 à 3 après un temps moyen de $1/2\lambda$ etc...C'est à dire que si il y a n individus, on passe à $n+1$ individus après une variable exponentielle de paramètre λn.
- On dit ici que le taux de naissance est

$$b(n) = \lambda n$$

et que le taux de mort est

$$d(n) = 0.$$

- En effet, on a supposé que les cellules ne pouvaient pas mourir.Si on autorise les morts, on aura des taux de la forme

$$b(n) = \lambda n$$

$$d(n) = \beta n.$$

Ici β représente la (mal)chance qu'un individu meurt dans un petit intervalle de temps.

Processus de naissance et mort généraux

- Ici on remarque que b et d sont linéaires

$$b(n) = \lambda n, \quad d(n) = \beta n.$$

Processus de naissance et mort généraux

- Ici on remarque que b et d sont linéaires

$$b(n) = \lambda n, \quad d(n) = \beta n.$$

- Cette propriété découle directement du fait que l'on a supposé l'indépendance entre les individus.

Processus de naissance et mort généraux

- Ici on remarque que b et d sont linéaires

$$b(n) = \lambda n, \quad d(n) = \beta n.$$

- Cette propriété découle directement du fait que l'on a supposé l'indépendance entre les individus. On peut donc avoir envie de les supposer non-linéaire pour ajouter de la dépendance.

Processus de naissance et mort généraux

- Ici on remarque que b et d sont linéaires

$$b(n) = \lambda n, \quad d(n) = \beta n.$$

- Cette propriété découle directement du fait que l'on a supposé l'indépendance entre les individus. On peut donc avoir envie de les supposer non-linéaire pour ajouter de la dépendance.
- Par exemple

$$b(n) = bn, \quad d(n) = dn + cn(n-1).$$

On a ajouter un terme $cn(n-1)$ qui représente qu'un des n individus rencontre un des $(n-1)$ autres, et le tue en moyenne tous les $1/c$ unités de temps.

Processus de naissance et mort généraux

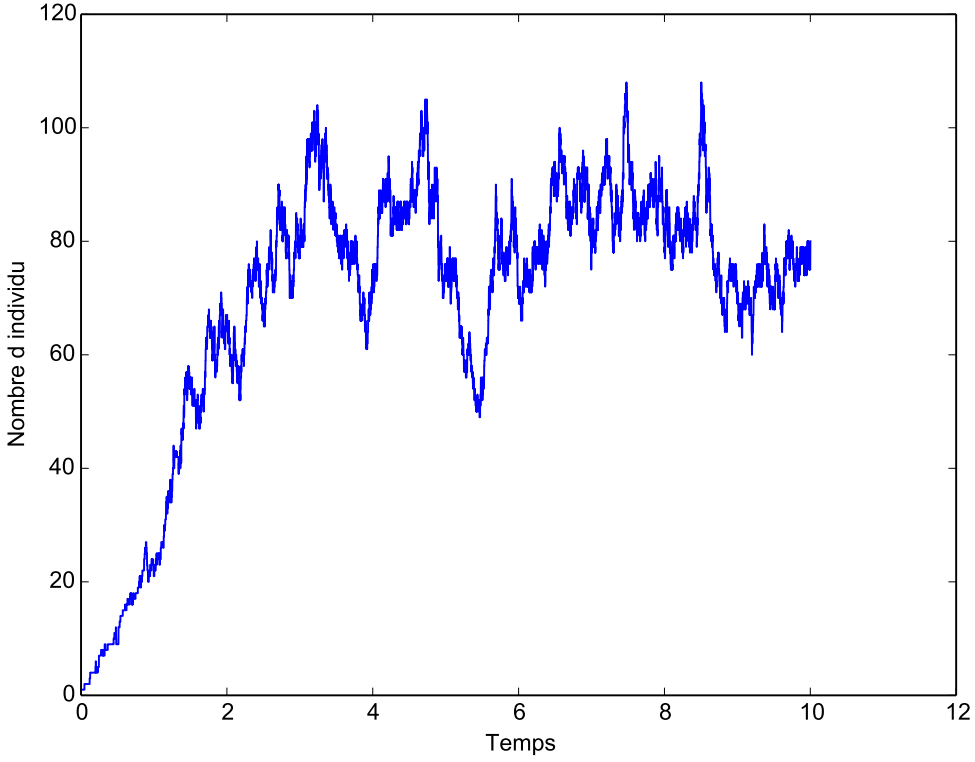


Figure : $b(n) = 5n, \quad d(n) = n + 0.05n(n-1)$

Processus de naissance et mort généraux

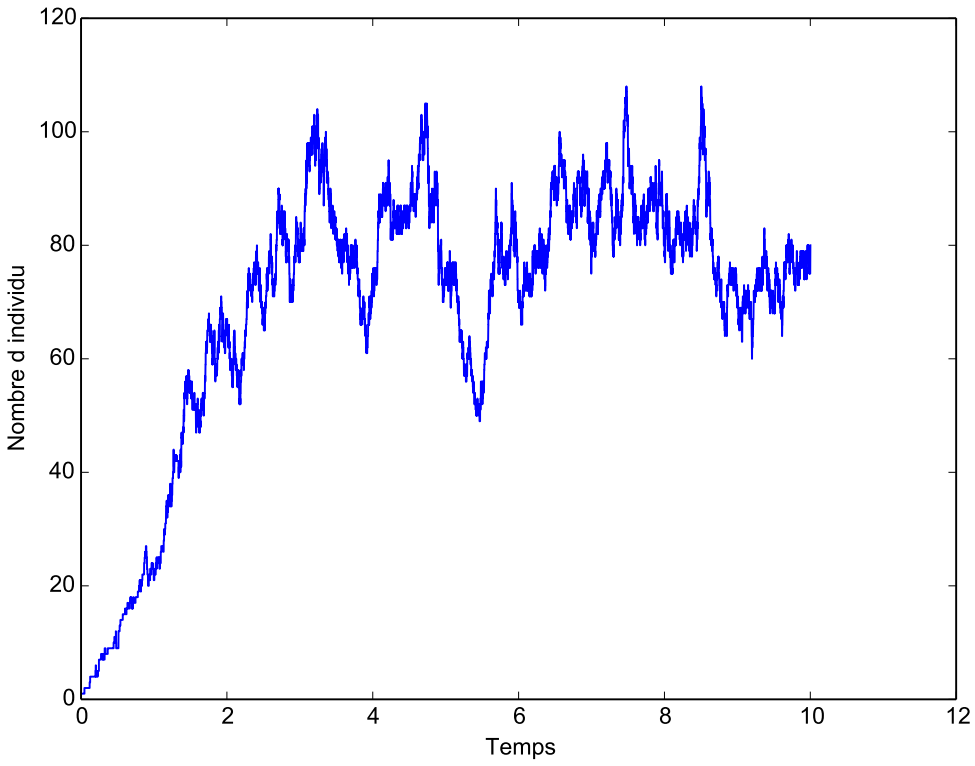


Figure : $b(n) = 5n, \quad d(n) = n + 0.05n(n-1)$

- Pour ce choix de paramètres, on peut montrer que la population s'éteint. Que celà prend beaucoup de temps et qu'elle reste autour de 80 individus pendant longtemps.

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...
- Les modèles non-linéaires généraux sont compliqués.

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...
- Les modèles non-linéaires généraux sont compliqués.
- Il faut (souvent) les simplifier pour les étudier !

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...
- Les modèles non-linéaires généraux sont compliqués.
- Il faut (souvent) les simplifier pour les étudier !
- On va prendre des populations de plus en plus grandes, dans des intervalles de plus en plus en grand.

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...
- Les modèles non-linéaires généraux sont compliqués.
- Il faut (souvent) les simplifier pour les étudier !
- On va prendre des populations de plus en plus grandes, dans des intervalles de plus en plus en grand.
- On se fixe b et d et une taille typique K.

Le modèle densité-dépendant

- Les modèles non-linéaires peuvent prendre en compte la prédation, l'immigration, la dépendance en ressources...
- Ils peuvent être plus généraux, en dimension supérieur...
- Les modèles non-linéaires généraux sont compliqués.
- Il faut (souvent) les simplifier pour les étudier !
- On va prendre des populations de plus en plus grandes, dans des intervalles de plus en plus en grand.
- On se fixe b et d et une taille typique K.
- On prend le processus de naissance et mort de taille typique

$$b_K(n) = Kb(n/K), \ d_K(n) = Kd(n/K)$$

- On considère $Y^K(t) = X^K(t)/K$, où X^K est le processus de naissances et morts de taux b_K, d_K

Exemple : $b(n) = 5n, \quad d(n) = n + 0.05n(n-1)$

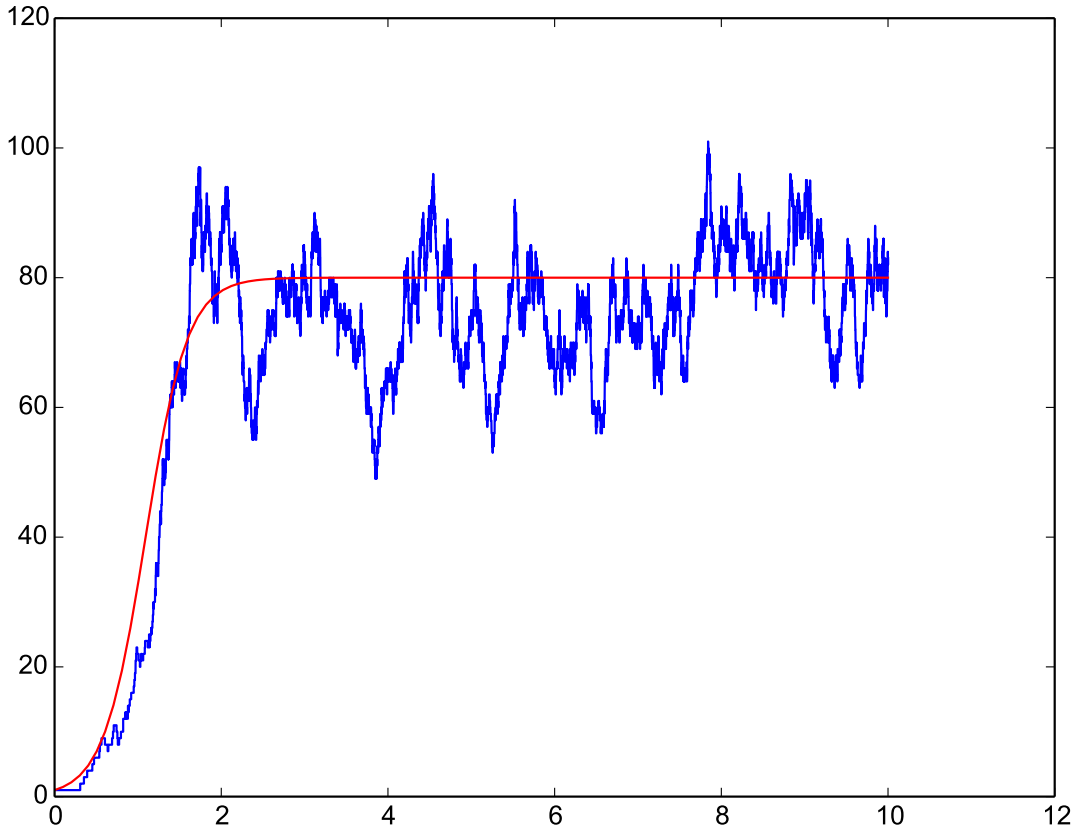


Figure : K=1

Exemple : $b(n) = 5n, \quad d(n) = n + 0.05n(n-1)$

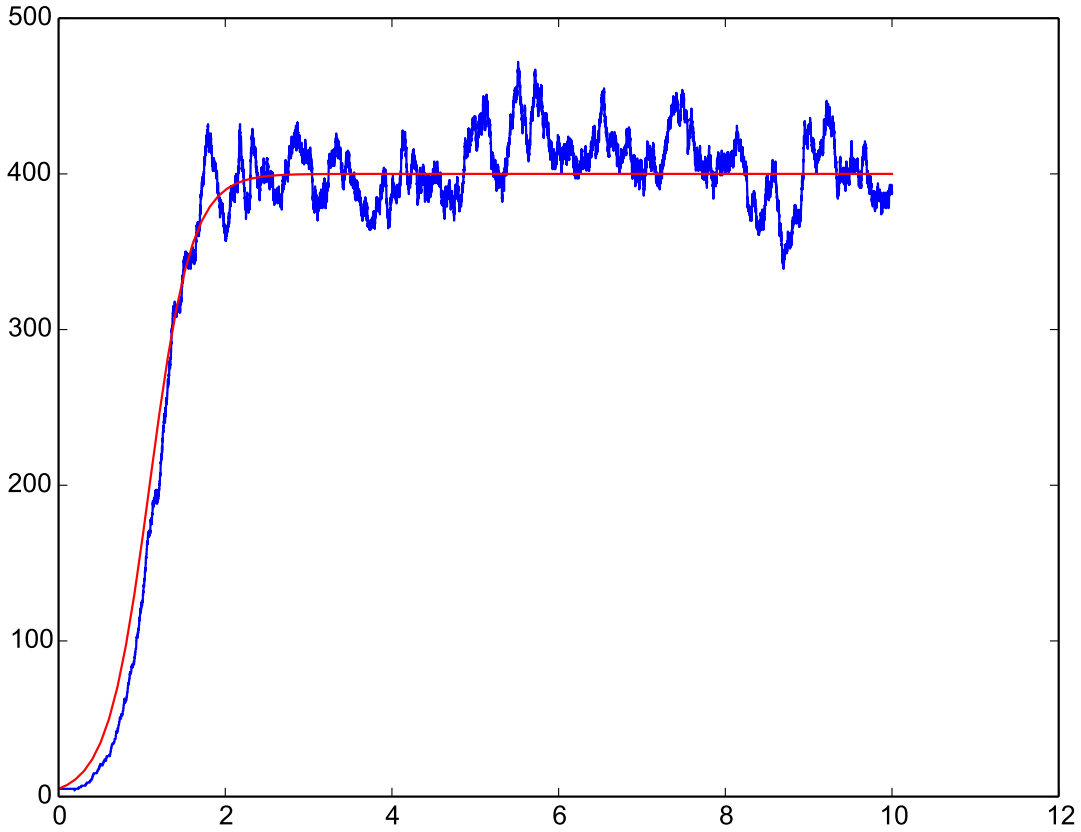


Figure : K=5

Exemple : $b(n) = 5n, \quad d(n) = n + 0.05n(n-1)$

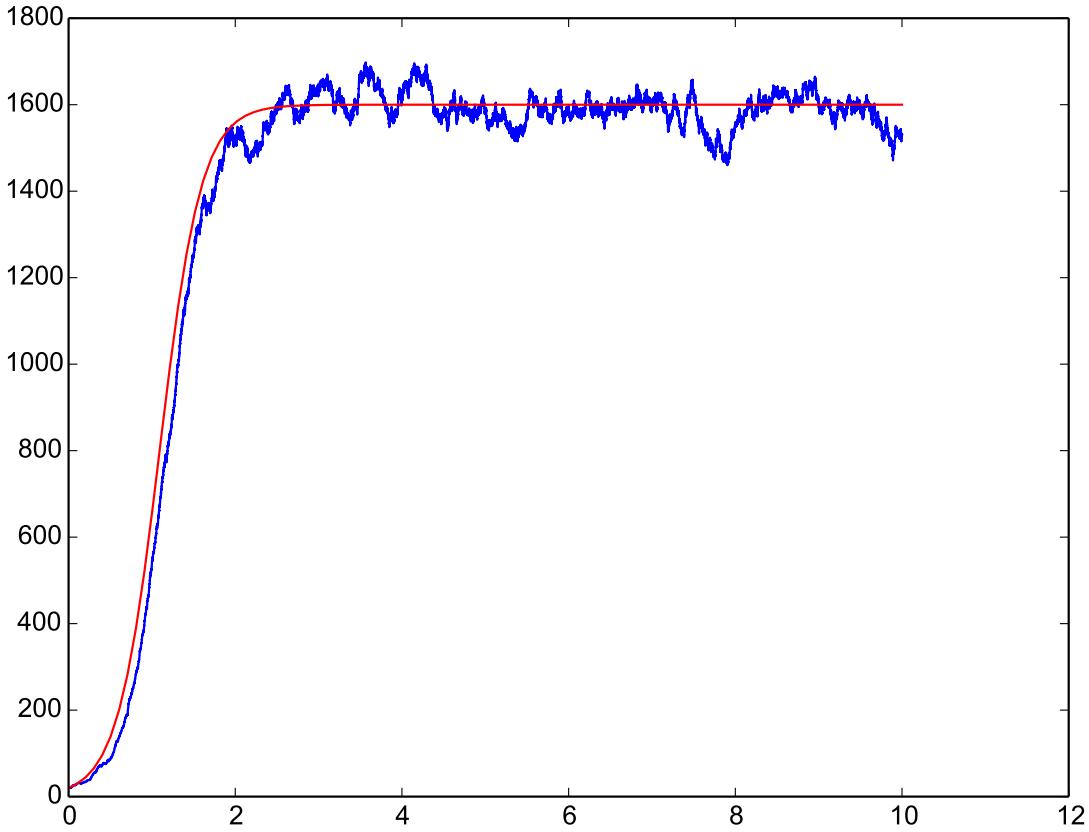


Figure : K=20

Le modèle densité-dépendant

- On a grossièrement

$$\partial_t E[Y_t^K] \approx \mathbb{E}[b(Y_t^K) - d(Y_t^K)]$$

et

$$\mathrm{Var}(Y_t^K) \leq \frac{C(t)}{K}$$

Le modèle densité-dépendant

- On a grossièrement

$$\partial_t E[Y_t^K] \approx \mathbb{E}[b(Y_t^K) - d(Y_t^K)]$$

et

$$\mathrm{Var}(Y_t^K) \leq \frac{C(t)}{K}$$

- Donc Y^K converge vers la solution de l'équation

$$\dot{y} = b(y) - d(y)$$

Exemples

- Pour Galton-Watson, les taux sont $b(n) = b \times n$ et $d(n) = d \times n$ et donc l'edo est

$$\dot{y} = (b - d)y \;\Rightarrow\; y(t) = y(0)e^{(b-d)t}$$

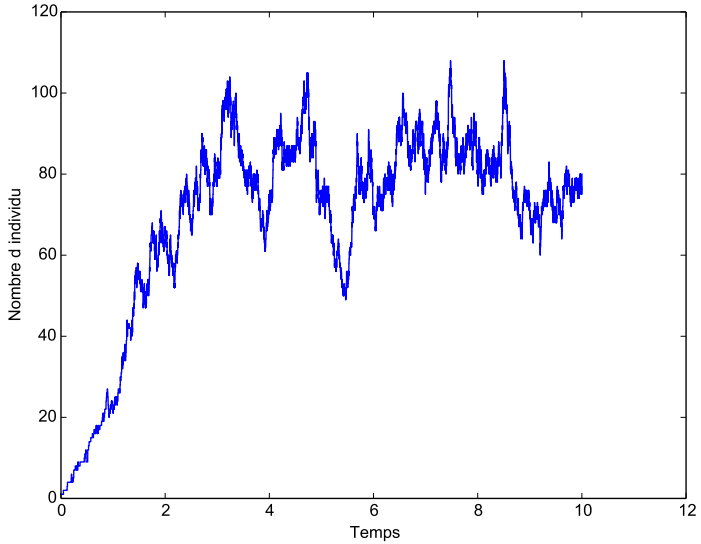
Exemples

- Pour Galton-Watson, les taux sont $b(n) = b \times n$ et $d(n) = d \times n$ et donc l'edo est

$$\dot{y} = (b-d)y \;\Rightarrow\; y(t) = y(0)e^{(b-d)t}$$

- Pour le modèle logistique on retrouve

$$\dot{y} = (b-d)y - cy^2 = cy\left(\frac{(b-d)}{c} - y\right) = (b-d)y\left(1 - \frac{c}{(b-a)}y\right)$$



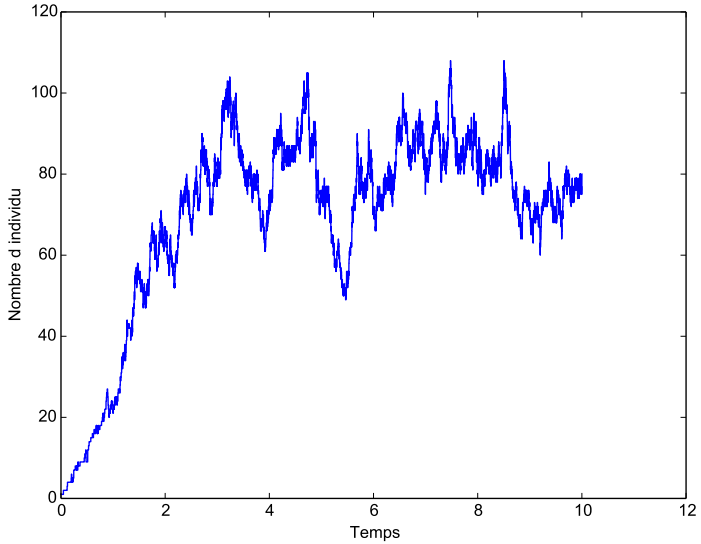
Exemples

- Pour Galton-Watson, les taux sont $b(n) = b \times n$ et $d(n) = d \times n$ et donc l'edo est

$$\dot{y} = (b-d)y \;\Rightarrow\; y(t) = y(0)e^{(b-d)t}$$

- Pour le modèle logistique on retrouve

$$\dot{y} = (b-d)y - cy^2 = cy\left(\frac{(b-d)}{c} - y\right) = (b-d)y\left(1 - \frac{c}{(b-a)}y\right)$$



Encore plus de type de modèles, de complexités...

- Modèle déterministe :
  - modèle EDO : $\dot{y} = \lambda y$.
  - modèle EDP :

$$\partial_t y(t,x) = \partial_x(\lambda x y(t,x)) + \varepsilon \Delta y.$$

- Modèle aléatoire :
  - modèle discret : Galton-Watson, naissance et mort non-linéaire..
  - modèle EDS : $dy_t = \lambda y dt + \varepsilon dB_t$.
  - modèle IBM (individus-centrés)
  - EDPS...