INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Restauration d'images biologiques 3D en microscopie confocale par Transformée en Ondelettes Complexes

Gemma Pons Bernad — Laure Blanc-Féraud — Josiane Zerubia

N° 5507

Février 2005

Thème COG

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--5507--FR

Restauration d'images biologiques 3D en microscopie confocale par Transformée en Ondelettes Complexes

Gemma Pons Bernad , Laure Blanc-Féraud , Josiane Zerubia

Thème COG — Systèmes cognitifs
Projet Ariana

Rapport de recherche n° 5507 — Février 2005 — 72 pages

Résumé : La microscopie confocale est une méthode puissante pour l'imagerie 3D de spécimens biologiques. Néanmoins, les images acquises sont dégradées non seulement par du flou dû à la lumière provenant de zones non focalisées du spécimen, mais aussi par un bruit de Poisson dû à la détection. Plusieurs algorithmes de déconvolution ont été proposés pour réduire ces dégradations. Un des plus utilisés est l'algorithme itératif de Richardson-Lucy, qui calcule un maximum de vraisemblance adapté à une statistique poissonienne. Mais cet algorithme tend à amplifier le bruit. Une solution consiste alors à introduire une contrainte de régularisation (par exemple, fondée sur la Variation Totale). Ici, nous nous concentrons sur des méthodes fondées sur l'analyse par ondelettes, en particulier sur des méthodes de débruitage via la transformée en ondelettes, qui semblent être plus appropriées à la microscopie en fluorescence 3D. Nous développons dans ce rapport un algorithme de Transformation en Ondelettes Complexes 3D introduit par N. Kingsbury. Celui-ci permet une décomposition invariante par translation et rotation et une sélectivité directionnelle des coefficients en ondelettes. Nous montrons sur des images synthétiques et sur des images réelles les résultats de cet algorithme de débruitage. Ce dernier est ensuite inséré dans le processus de déconvolution.

Mots-clés : microscopie confocale, traitement d'images 3D, restauration, débruitage, déconvolution, transformée en ondelettes discrètes 3D, transformée en ondelettes complexes 3D.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

A restoration method for confocal microscopy using 3D Complex Wavelet Transform

Abstract: Confocal laser scanning microscopy is a powerful technique for 3D imaging of biological specimens. However the acquired images are degraded by blur from out-of-focus light and Poisson noise. Several deconvolution algorithms have been proposed to reduce these degradations, including the Richardson-Lucy iterative algorithm, which computes a maximum likelihood estimation adapted to Poisson statistics. Nevertheless, this algorithm tends to amplify noise. Other solutions exist which combine Richardson-Lucy algorithm and regularization (for example with a Total Variation constraint). In this report, we will concentrate on methods based on wavelet analysis, in particular on wavelet denoising methods, which turn out to be very effective in application to 3D confocal images. To obtain a translation and rotation invariant decomposition algorithm, we have developped the 3D Complex Wavelet Transform introduced by Nick Kingsbury. These wavelets allow moreover a directional selectivity of the wavelet coefficients. We show on simulated and real images the denoising results. This algorithm is then used for the deconvolution purpose.

Key-words: confocal microscopy, 3D image processing, restoration,denoising, deconvolution, 3D Discrete Wavelet Transform, 3D Complex Wavelet Transform.

Table des matières

1 Introduction **7**
- 1.1 Microscopie confocale et nécessité de la déconvolution 7
- 1.2 Position du problème 10

2 Etat de l'art **13**

3 Transformée en ondelettes complexes (CWT) **17**
- 3.1 Transformée en ondelettes complexes (CWT) 17
  - 3.1.1 Transformée en ondelettes complexes 1D 17
  - 3.1.2 Transformée en ondelettes complexes 2D 20
  - 3.1.3 Extension des ondelettes complexes en 3D 24
- 3.2 Construction de la transformée en ondelettes complexes 29
  - 3.2.1 Invariance par translation 29
  - 3.2.2 Sélectivité directionnelle 39

4 Restauration **45**
- 4.1 Débruitage 45
  - 4.1.1 Algorithme de débruitage par seuillage 46
  - 4.1.2 Évaluation des résultats : critères de qualité 47
  - 4.1.3 Comparaison de la transformée CWT et DWT 48
- 4.2 Déconvolution 53
  - 4.2.1 Réponse impulsionnelle (PSF) 57
  - 4.2.2 Évaluation d'images restaurées 58

5 Conclusion et Perspectives **67**

Bibliographie **72**

Remerciements

Ce travail a été initialisé dans l'Action de Recherche Collaborative (ARC) DeMiTri [1] en 2004 et finalisé dans le cadre du programme P2R Franco-Israélien en 2005. Les auteurs remercient Christophe Zimmer, Pascal Roux et Jean-Christophe Olivo-Marin de l'Institut Pasteur (Paris) ainsi que Zvi Kam de l'Institut Weizman (Israel) pour leur collaboration ; Nick Kingsbury de l'Université de Cambridge pour la fourniture du code 3D-CWT (*Complex Wavelet Transform*) en Matlab et les discussions stimulantes ; André Jalobeanu pour sa disponibilité et pour la fourniture de son code COWPATH2 en C ; Nicolas Dey pour son aide précieuse et la fourniture du code RL-VT ; Stéphane Noselli, Fanny Pignolé et Luis Almeida de l'Institut Signalisation, Biologie du développement et Cancer (UMR 6543 CNRS / Université de Nice-Sophia Antipolis) pour la fourniture d'images réelles dont une est présentée dans la figure 4.13.

[1] *http ://www-sop.inria.fr/ariana/demitri.html* pour plus de détails

Chapitre 1

Introduction

Dans ce rapport, nous présentons une méthode de déconvolution d'images biologiques 3D prises par un microscope confocal, utilisant la Transformée en Ondelettes Complexes (CWT) tridimensionnelle. La technique de balayage du microscope confocal a permis d'améliorer nettement la qualité des images par rapport aux microscopes classiques, en particulier pour l'imagerie 3D. Cependant les images sont encore floues et bruitées. Des études sur la déconvolution des images confocales montrent l'avantage d'utiliser une méthode de débruitage fondée sur les ondelettes [4] par rapport aux algorithmes itératifs. La restauration de l'image est bien faite, tout en évitant l'apparition d'artefacts dus au bruit pendant le procédé de déconvolution. En effet, la transformée en ondelettes possède de bonnes propriétés, comme la localisation spatiale et la décomposition multi-échelle. Dans ce rapport, nous proposons d'utiliser la Transformée en Ondelettes Complexes 3D pour analyser les images du microscope confocal pour ses propriétés d'invariance par translation et rotation, et de sélectivité directionnelle. L'algorithme a été développé, en particulier, pour des applications biologiques d'imagerie fluorescente par coupes optiques en contraste de phase.

1.1 Microscopie confocale et nécessité de la déconvolution

À cause des limitations du système optique, l'image d'un point n'est pas un point, mais une tache d'Airy, qui définira la résolution du microscope. Notons que dans un microscope conventionnel, l'image d'un point en dehors du plan de focalisation est aussi présente dans le plan de détection (plan image), bien que floue. De ce fait,

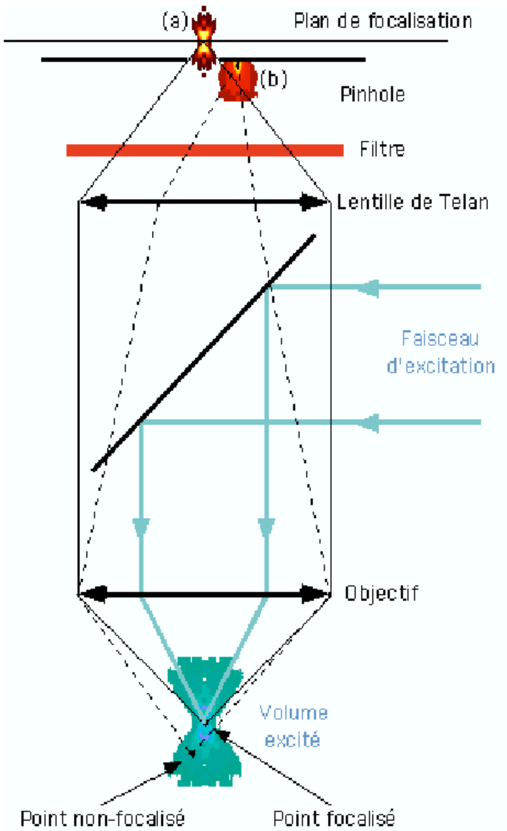


FIG. 1.1 – Focalisation dans un microscope confocal.

l'image d'un plan, si elle contient bien l'image du plan observé, est aussi dégradée par les informations des autres plans. Les observations en trois dimensions étant difficiles, il est impératif de restaurer les images avant toute analyse.

Pour pallier les défauts du microscope conventionnel, on peut utiliser un montage confocal (voir la figure 1.1). L'illumination est alors faite par un faisceau laser focalisé dans le plan d'observation et qui balaye celui-ci. L'excitation n'est plus globale, mais quasi-ponctuelle.

D'autre part, la détection se fait au travers d'un sténopé (*pinhole* en anglais) en position confocale par rapport au spot d'excitation, c'est-à-dire que le système de détection ne voit que la zone de focalisation du faisceau d'excitation. L'objectif du sténopé est de limiter la lumière provenant des plans défocalisés qui parasitent le plan focal. Ce montage permet de rejeter une très grande partie de la lumière qui provient des plans autres que le plan de focalisation : la résolution en profondeur du microscope confocal est donc meilleure que celle du microscope conventionnel. Le signal est détecté à l'aide d'un photomultiplicateur, et l'image est donc formée point par point par balayage de l'objet.

Si l'image est bien meilleure en termes de résolution, on peut cependant noter trois défauts inhérents à ce système :
- L'acquisition est souvent plus lente, à cause de la nécessité de balayer le spécimen pour former une image.
- Le rapport signal sur bruit est généralement plus faible que pour un microscope classique.
- L'illumination par un faisceau laser focalisé engendre des intensités locales très grandes qui peuvent endommager le spécimen.

Ce système avait été proposé par Marvin Minsky dès les années 50. Il a cependant fallu attendre les progrès des sources (laser) et des détecteurs (sensibilité, rapidité), ainsi que des moyens de reconstruction (ordinateur) pour que la microscopie confocale prenne vraiment son essor dans les années 90.

Le microscope confocal est principalement utilisé en fluorescence, mais on trouve aussi des microscopes confocaux en réflexion.

Par construction, le microscope confocal est un instrument fait pour prendre des images en deux dimensions. Par déplacement du plan focal à travers le spécimen, il est cependant possible d'acquérir une pile d'images 2D permettant de former une image en trois dimensions (voir figure 1.2). On peut effectuer ce balayage axial soit en déplaçant l'objet via une platine motorisée, soit en déplaçant l'objectif par rapport au spécimen, généralement à l'aide d'un élément piézo-électrique. La figure 1.3 montre la technique des coupes sériées (*optical sectioning*).

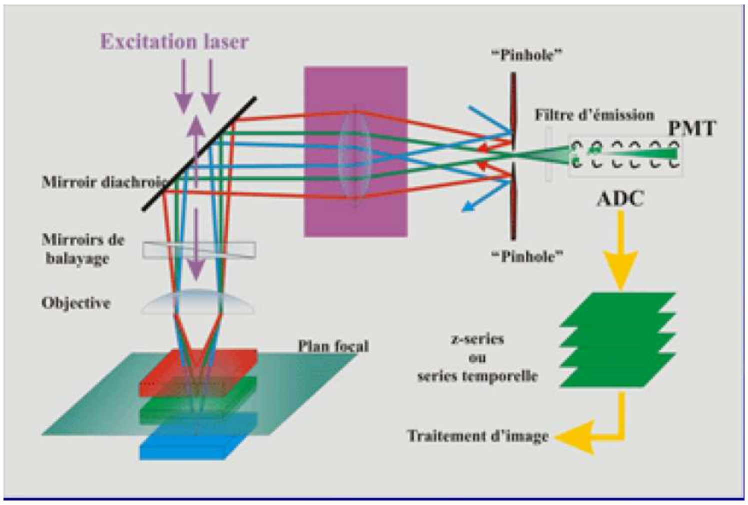


FIG. 1.2 – Montage à balayage laser.

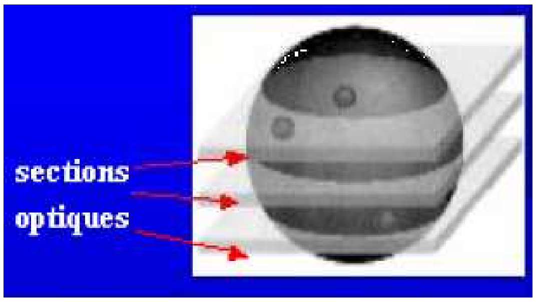


FIG. 1.3 – Principe des coupes sériées optiques.

1.2 Position du problème

Dans le contexte de la recherche à l'Institut Pasteur et à l'Institut Weizmann, il est essentiel de pouvoir acquérir l'image en temps réel et sur différentes longueurs d'onde des objets biologiques en mouvement rapide pour observer des bactéries, des virus ou des parasites responsables de maladies (figure 1.4). Pour être en mesure de réaliser ce type d'imagerie à la cadence nécessaire pour suivre des mouvements très rapides, tout en conservant une sensibilité suffisante, la meilleure solution consiste actuellement à réaliser l'imagerie tridimensionnelle de l'échantillon en microscopie à coupes optiques. Cependant, pour obtenir une image tridimensionnelle exacte à

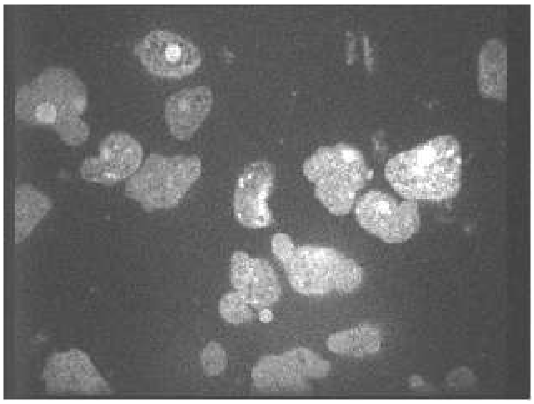


FIG. 1.4 – Image en fluorescence d'un parasite.

partir des coupes optiques, il est nécessaire de déconvoluer ensuite la pile d'images obtenues de façon à éliminer la fluorescence non spécifique à chaque plan et à réduire le bruit.

Les deux difficultés principales de l'imagerie confocale en fluorescence sont les suivantes : le nombre de photons est limité et il existe une manque de précision sur la formation de l'image dans les expériences biologiques. Quand on essaie de focaliser de la lumière à l'intérieur d'un spécimen complexe, on ne peut géneralement obtenir qu'une connaissance approximative de la réponse impusionnelle du système (appelée PSF pour *Point Spread Function* en anglais), qui est l'information cruciale dont on a besoin pour la déconvolution.

Dans ce rapport, nous étudions une nouvelle transformée en ondelettes introduite initialement par Nick Kingsbury. Nous l'adaptons à la déconvolution d'images biologiques issues de la microscopie confocale 3D. L'originalité de ce travail réside dans le fait d'introduire des ondelettes complexes tridimensionnelles, contrairement aux ondelettes réelles tridimensionnelles classiquement utilisées. Nous verrons les avantages de cette décomposition en ondelettes complexes. Nous verrons également que les méthodes de déconvolution fondées sur l'analyse des ondelettes semblent être appropriées à la microscopie 3D en fluorescence.

Dans la première partie de ce rapport, nous rappelons les principaux algorithmes de déconvolution qui sont employés pour la microscopie confocale 3D en fluorescence. Puis, nous introduisons la transformée en ondelettes complexes 1D, 2D et 3D, en insistant sur l'interprétation complexe de la transformée des arbres. Ensuite, nous nous proposons d'étudier les avantages de la transformée en ondelettes complexes par rapport à la transformée en ondelettes réelles. Puis, nous présentons des simulations mettant en oeuvre cette nouvelle technique de débruitage. Enfin, des résultats sur des images biologiques réelles sont présentés. Finalement, nous concluons sur les perspectives qu'offre la modélisation proposée.

Chapitre 2

Etat de l'art

Nous présentons dans ce chapitre les principaux algorithmes de déconvolution qui sont employés pour la microscopie confocale 3D en fluorescence.

Parmi eux, un des plus utilisés est l'algorithme de Richardson-Lucy [21, 29] : c'est un algorithme EM (*Expectation Maximization*) qui calcule l'estimation de maximum de vraisemblance (EM-MLE). Il est employé avec différentes contraintes de régularisation. La contrainte la plus connue est celle de Tikhonov-Miller (ICTM) [40, 41], utilisée dans l'algorithme de Conchello [3]. Ces algorithmes supposent la PSF ou une approximation de la PSF connue. Pour la déconvolution aveugle en microscopie fluorescente 3D, le lecteur intéressé pourra se référer à [24, 25]. Dans ces articles, les auteurs emploient un algorithme EM (Richardson-Lucy) avec une PSF inconnue.

Un des derniers algorithmes publiés est celui proposé par Dey et al. [5], qui combine l'algorithme de Richardson-Lucy avec une contrainte de régularisation fondée sur la Variation Totale, introduite par Rudin, Osher et Fatemi [30], dont l'effet de lissage permet d'éviter les oscillations d'intensité tout en préservant les bords des objets. Néanmoins, il existe quelques limitations dues principalement à la régularisation par Variation Totale : pour les objets géométriques, les coins sont arrondis, et de petits détails, comme la texture, sont perdus.

Une des voies pour réduire la perte de texture est d'utiliser comme méthode de déconvolution une régularisation dans le domaine des ondelettes. Des travaux dans cette direction ont déjà été menés par Jacques Boutet de Monvel [4] pour la déconvolution des images biologiques confocales 3D et offrent des résultats prometteurs.

L'application d'algorithmes itératifs pour la déconvolution d'images réelles 3D mène souvent à l'apparition d'artefacts pour plusieurs raisons : présence du bruit pendant la déconvolution, l'utilisation d'une PSF légèrement fausse, distorsions associées à l'échantillonnage du signal, etc. Cependant, tous ces artefacts apparaissent sous plusieurs formes aux différents niveaux de résolution de l'image. En particulier, les détails fins d'une image sont plus sensibles au bruit, aux approximations de la PSF et au sous-échantillonnage que les détails plus importants. Il devrait donc être avantageux de traiter les différentes échelles séparément dans le processus de restauration. Cela peut être fait par une analyse en ondelettes, fournissant des caractéristiques comme la localisation spatiale et la décomposition multi-échelle [23].

Des algorithmes efficaces fondés sur la transformée en ondelettes discrètes (appelée DWT pour *Discrete Wavelet Transform* en anglais) ont été conçus ces dernières années pour la restauration des signaux flous et bruités (travaux réalisés par Donoho et Johnstone [7, 8] et par Stark et Bijaoui [36]). L'utilisation de cette transformée a été plus répandue dans les cas 1D et 2D, par exemple dans l'analyse des spectres avec les travaux de Fligge et Solanski [11], la restauration des images astronomiques par Starck et Bijaoui [36], ou l'application aux images médicales par Strömberg [38]. Il est tout à fait clair que ces méthodes peuvent s'appliquer à la microscopie 3D et, plus généralement, en tant qu'outils de base dans l'analyse des structures biologiques complexes contenant des détails à des échelles différentes [4].

Les travaux en 3D de Boutet de Monvel [4] ont été réalisés en utilisant une décomposition en ondelettes réelles (DWT). Nous proposons la Transformée en Ondelettes Complexes (CWT pour *Complex Wavelet Transform* en anglais) tridimensionnelles. Nous avons étendu au 3D et à l'imagerie biologique une méthode de déconvolution initialement dédiée à l'imagerie satellitaire (logiciel COWPATH de Jalobeanu et al. [14], travaux effectués au sein du projet Ariana).

La méthode COWPATH repose sur une déconvolution sans régularisation dans l'espace des fréquences, suivie d'un seuillage des coefficients de la transformée en paquets d'ondelettes de cette image afin d'éliminer une grande partie du bruit deconvolué. Ceci est inspiré de l'approche initialement proposée par Kalifa et Mallat [15, 16] pour la déconvolution d'image. Les deux principales difficultés de cette méthode sont la non-invariance par translation due à la transformée en ondelettes réelles (décimées) et l'estimation des seuils optimaux dans les sous-bandes. Dans la méthode COWPATH, Jalobeanu et al. ont proposé d'utiliser une transformée en ondelettes complexes (et non réelles), introduite par N. Kingsbury [18, 19], qui a deux avantages : garantir l'invariance par translation de la décomposition, et donc du résultat du seuillage, et offrir une meilleure directionnalité des coefficients d'ondelettes. Contrairement à la décomposition dyadique avec des ondelettes réelles qui privilégie les directions horizontale et verticale, la décomposition avec des ondelettes complexes est capable de séparer un plus grand nombre de directions car elle divise le plan de fréquence en plusieurs sous-bandes.

Chapitre 3

Transformée en ondelettes complexes (CWT)

3.1 Transformée en ondelettes complexes (CWT)

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme de décomposition d'images par la transformée en ondelettes complexes tridimensionnelle. Nous proposons d'utiliser les ondelettes complexes introduites par Kingsbury dans [17, 18] qui ont la propriété d'être pratiquement invariantes par translation. Nous introduisons la transformée en ondelettes complexes unidimensionnelle telle qu'elle a été définie par N. Kingsbury, puis le cas bidimensionnel est étudié. Ensuite, nous présentons l'extension de cette transformée au cas tridimensionnel. La construction de la transformée en ondelettes complexes est finalement explicitée en détails pour le cas 1D.

3.1.1 Transformée en ondelettes complexes 1D

Kingsbury a introduit dans [17] et [18] une transformée en ondelettes complexes qui permet une reconstruction exacte du signal. Cette propriété est essentielle si nous voulons developper un algorithme de seuillage des coefficients après déconvolution comme celui proposé par Kalifa et Mallat [16]. Cette transformée a la propriété d'être pratiquement *invariante par translation*. En remarquant que l'invariance par translation peut être obtenue avec une transformée biorthogonale réelle en doublant l'échantillonnage à chaque échelle, Kingsbury propose d'obtenir une transformée pratiquement invariante par translation en doublant l'échantillonnage au premier niveau, puis en utilisant des filtres différents et des sous-échantillonnages différents dans deux arbres de décomposition. Les coefficients à chaque échelle sont combinés pour former des coefficients complexes.

L'invariance par translation est parfaite au premier niveau puisque tous les coefficients ont été conservés. Les coefficients pairs et impairs forment deux arbres différents, et on note (a_A, d_A) et (a_B, d_B) les signaux d'approximation et les détails pour les deux arbres A et B. L'invariance par translation est ensuite approchée aux niveaux inférieurs par la combinaison de filtres pairs et impairs (cf. paragraphe 3.2). L'algorithme décrit la transformation, il est illustré sur la figure 3.1.

Algorithme 3.1.1 (Transformée en ondelettes complexes 1D).

- *Au niveau 1, les deux arbres sont décalés d'un échantillon. L'un est formé des coefficients pairs, l'autre des impairs :*
  h^o : filtre passe bas de longueur impaire
  g^o : filtre passe haut de longueur impaire

$$\begin{array}{ll} (a_A^1)_n = (a^0 \star h^o)_{2n} & (d_A^1)_n = (a^0 \star g^o)_{2n} \\ (a_B^1)_n = (a^0 \star h^o)_{2n+1} & (d_B^1)_n = (a^0 \star g^o)_{2n+1} \end{array} \tag{3.1}$$

- *Au niveau $j > 1$, la différence entre les arbres doit être d'un demi-échantillon. Ceci est rendu possible en utilisant des filtres de longueurs différentes, i.e. des filtres de longueur paire h^e, g^e pour un arbre et des filtres de longueur impaire h^o, g^o pour l'autre arbre :*
  h^e : filtre passe bas de longueur paire
  g^e : filtre passe haut de longueur paire

$$\begin{array}{ll} (a_A^{j+1})_n = (a_A^j \star h^e)_{2n} & (d_A^{j+1})_n = (a_A^j \star g^e)_{2n} \\ (a_B^{j+1})_n = (a_B^j \star h^o)_{2n+1} & (d_B^{j+1})_n = (a_B^j \star g^o)_{2n+1} \end{array} \tag{3.2}$$

Les filtres (impairs) sont les mêmes dans les deux arbres pour $j = 1$ et différents pour $j > 1$. Ainsi, dans l'un des deux arbres (ici l'arbre A), les filtres sont différents entre le premier et le second niveau.

En pratique, nous utilisons des filtres presque symétriques de longueur (13,19) pour h^o et $\tilde{h}^o$, décrits dans [18]. Ces filtres correspondent à une décomposition biorthogonale. h^o est le filtre de décomposition et $\tilde{h}^o$ est le filtre dual utilisé à la synthèse. Les filtres pairs h^e et $\tilde{h}^e$ sont construits de manière à approcher au mieux (au sens de l'erreur quadratique) les filtres impairs. Ils ont aussi la propriété de reconstruction exacte.

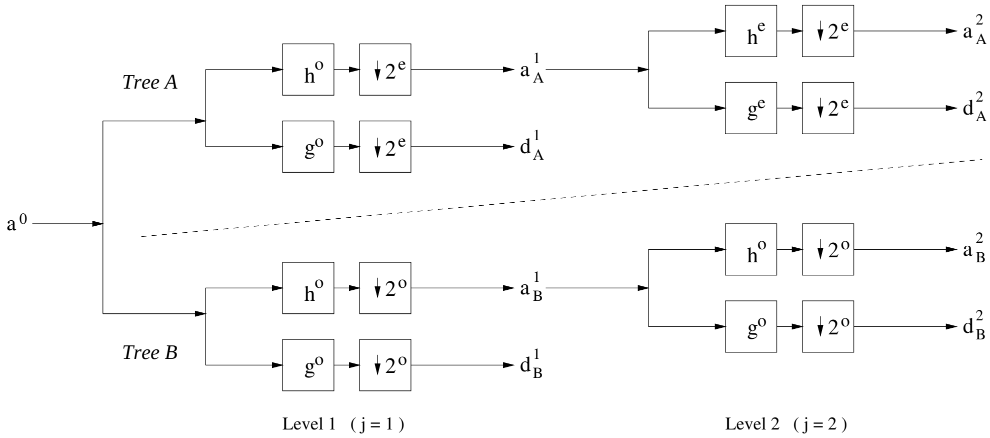


FIG. 3.1 – Décomposition en banc de filtres duaux pour la transformée en ondelettes complexes 1D

Pour l'arbre B, les filtres sont les mêmes à tous les niveaux. La fonction est alors décomposée sur une base biorthogonale.

Les détails d_A et d_B peuvent être interprétés comme la partie réelle et la partie imaginaire d'un signal complexe $z = d_A + i\, d_B$. La propriété importante de cette transformée est que l'amplitude de la réponse à un échelon est pratiquement invariante à une translation de l'échelon, alors que la phase varie rapidement [19]. Ainsi il sera possible de seuiller l'amplitude des coefficients $|z|$ avec beaucoup moins d'artéfacts qu'en seuillant les coefficients d'une transformée réelle. Il faut noter que la transformée n'est pas, en réalité, une transformée complexe dans le sens où elle ne correspond pas à une fonction d'ondelette complexe.

La reconstruction est effectuée indépendamment dans les deux arbres, en utilisant les filtres duaux, et les résultats sont moyennés pour obtenir a^0. Ceci est illustré sur la figure 3.2.

Algorithme 3.1.2 (Transformée en ondelettes complexes 1D inverse).

– *A chaque échelle* $j > 0$ *:*

$$\begin{aligned}(a_A^j)_n &= (\breve{a}_A^{j+1} \star \tilde{h}^e)_n + (\breve{d}_A^{j+1} \star \tilde{g}^e)_n \\ (a_B^j)_n &= (\hat{a}_B^{j+1} \star \tilde{h}^o)_n + (\hat{d}_B^{j+1} \star \tilde{g}^o)_n\end{aligned} \tag{3.3}$$

– *Pour $j = 0$, les arbres sont moyennés :*

$$a_n^0 = \frac{1}{2}\Big((\check{a}_A^1 \star \tilde{h}^o)_n + (\check{d}_A^1 \star \tilde{g}^o)_n + (\hat{a}_B^1 \star \tilde{h}^o)_n + (\hat{d}_B^1 \star \tilde{g}^o)_n\Big)$$

$$\text{où} \quad \check{x}_n = \begin{cases} x_p & si \quad n = 2p \\ 0 & si \quad n = 2p+1 \end{cases} \quad , \quad \hat{x}_n = \begin{cases} x_p & si \quad n = 2p+1 \\ 0 & si \quad n = 2p \end{cases} \tag{3.4}$$

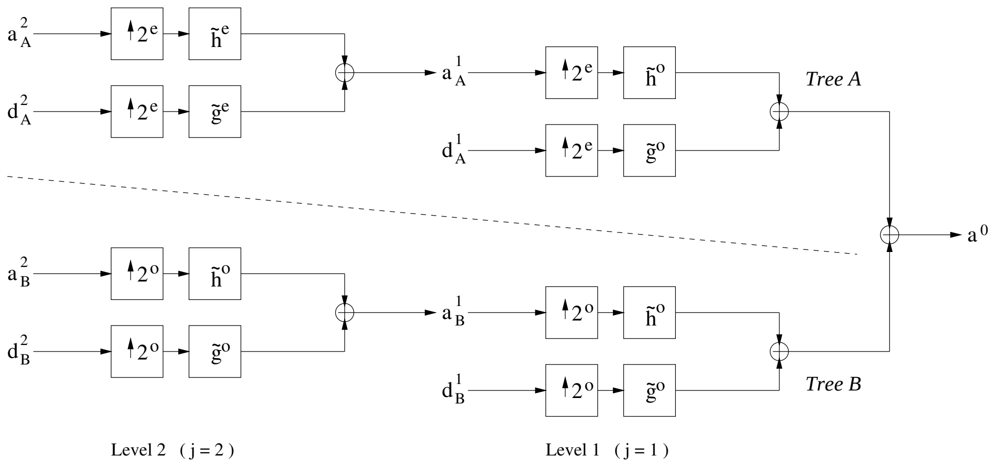


FIG. 3.2 – Bancs de filtres des arbres duaux de la transformée en ondelettes complexes inverse 1D

3.1.2 Transformée en ondelettes complexes 2D

Les bancs de filtres de la transformée en ondelettes complexes 2D

En utilisant des bancs de filtres séparables, la transformée 1D peut être étendue à des signaux bidimensionnels. Kingsbury [18] a montré qu'une telle transformée restait efficace du point de vue du temps de calcul, et que l'on obtenait de meilleures propriétés de directionalité qu'avec l'équivalent réel malgré la séparabilité. La propriété de reconstruction exacte est conservée, ainsi que la presque invariance par translation ce qui permet de mettre en oeuvre des méthodes de seuillage des coefficients de manière efficace.

Comme en 1D, l'invariance par translation est exacte au niveau 1 et obtenue par non décimation. En réordonnant les coefficients pairs et impairs (selon les lignes et les colonnes), nous avons alors 4 arbres A,B,C,D (voir la figure 3.3) [19]. L'invariance par translation est ensuite approchée aux niveaux inférieurs à 1.

Les approximations et les détails des 4 arbres sont notés respectivement (a_A, d_A), (a_B, d_B), (a_C, d_C) et (a_D, d_D). L'algorithme suivant décrit comment la transformée est obtenue sur les 4 arbres. Il est illustré sur la figure 3.4.

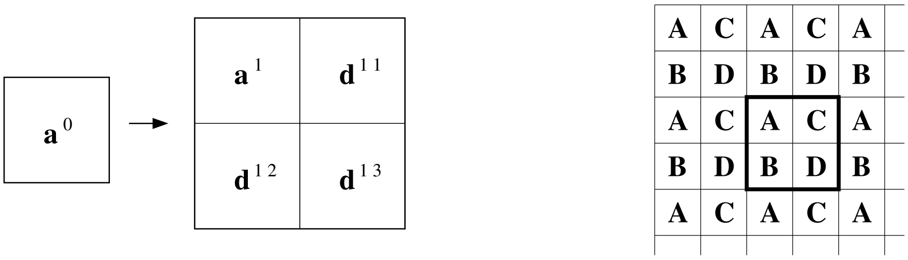


FIG. 3.3 – Premier niveau de la transformée complexe bidimensionnelle. Gauche : transformée non décimée (redondance 4 :1), droite : entrelacement des coefficients correspondant aux 4 arbres (A, B, C, D) dans la transformée non décimée.

Algorithme 3.1.3 (Transformée en ondelettes complexe 2D).

- *Au niveau 1, il y a un échantillon de décalage entre les 4 arbres. Calculer une transformée en ondelettes non décimée avec h^o et g^o, puis séparer les coefficients pairs et impairs (indices o et e) pour extraire les arbres (voir la figure 3.3) :*

Arbre T	**A**	**B**	**C**	**D**
$(a_T^1)_n$	$(a^0 \star h^o h^o)_{e,e}$	$(a^0 \star h^o h^o)_{e,o}$	$(a^0 \star h^o h^o)_{o,e}$	$(a^0 \star h^o h^o)_{o,o}$
$(d_T^{1,1})_n$	$(a^0 \star g^o h^o)_{e,e}$	$(a^0 \star g^o h^o)_{e,o}$	$(a^0 \star g^o h^o)_{o,e}$	$(a^0 \star g^o h^o)_{o,o}$
$(d_T^{1,2})_n$	$(a^0 \star h^o g^o)_{e,e}$	$(a^0 \star h^o g^o)_{e,o}$	$(a^0 \star h^o g^o)_{o,e}$	$(a^0 \star h^o g^o)_{o,o}$
$(d_T^{1,3})_n$	$(a^0 \star g^o g^o)_{e,e}$	$(a^0 \star g^o g^o)_{e,o}$	$(a^0 \star g^o g^o)_{o,e}$	$(a^0 \star g^o g^o)_{o,o}$

- *Au niveau $j > 1$, il doit y avoir un demi-échantillon de décalage entre les arbres. Ceci n'est possible qu'en utilisant des filtres de longueurs différentes pour chaque arbre, i.e. il faut des filtres pairs h^e, g^e pour un arbre et des filtres* *impairs* h^o, g^o *pour l'autre :*

Arbre T	**A**	**B**	**C**	**D**
$(a_T^{j+1})_n$	$(a_A^j \star h^e h^e)_{e,e}$	$(a_B^j \star h^e h^o)_{e,o}$	$(a_C^j \star h^o h^e)_{o,e}$	$(a_D^j \star h^o h^o)_{o,o}$
$(d_T^{j+1,1})_n$	$(a_A^j \star g^e h^e)_{e,e}$	$(a_B^j \star g^e h^o)_{e,o}$	$(a_C^j \star g^o h^e)_{o,e}$	$(a_D^j \star g^o h^o)_{o,o}$
$(d_T^{j+1,2})_n$	$(a_A^j \star h^e g^e)_{e,e}$	$(a_B^j \star h^e g^o)_{e,o}$	$(a_C^j \star h^o g^e)_{o,e}$	$(a_D^j \star h^o g^o)_{o,o}$
$(d_T^{j+1,3})_n$	$(a_A^j \star g^e g^e)_{e,e}$	$(a_B^j \star g^e g^o)_{e,o}$	$(a_C^j \star g^o g^e)_{o,e}$	$(a_D^j \star g^o g^o)_{o,o}$

Interprétation complexe de la transformée quad-arbre

La sortie de chaque filtre est décimée, puis on garde les échantillons pairs qui correspondent à la partie réelle du signal complexe, et les échantillons impairs qui correspondent à la partie imaginaire. À la sortie du premier niveau de décomposition, on a le même nombre d'échantillons que ceux du signal d'entrée, on introduit donc une redondance de 4 :1. Une explication plus détaillée à ce sujet se trouve dans le paragraphe 3.2.1.

La façon la plus efficace de réaliser les paires de filtres conjugués est de maintenir les opérateurs imaginaires séparés, i_1 et i_2, selon les lignes et colonnes. On obtient un vecteur complexe de quatre éléments : $\{a, b, c, d\} = a + bi_1 + ci_2 + di_1 i_2$. Pour convertir chacun des vecteurs (de quatre éléments) en paire de vecteurs complexes il faut considérer $i_1 = i_2 = i$ dans un cas, et $i_1 = i_2 = -i$ dans l'autre. Ce qui correspond à $(a - d) + i(b + c)$ et $(a + d) + i(-b + c)$.

Ainsi, pour chaque sous-bande, les détails d_A, d_B, d_C, d_D peuvent être interprétés comme la partie réelle et la partie imaginaire de deux signaux complexes z_+ et z_- :

$$\begin{aligned} z_+^{j,k} &= (d_A^{j\,k} - d_D^{j\,k}) + i\,(d_B^{j\,k} + d_C^{j\,k}) \\ z_-^{j,k} &= (d_A^{j\,k} + d_D^{j\,k}) + i\,(d_B^{j\,k} - d_C^{j\,k}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les détails des 3 sous-bandes correspondant à hg, gh et gg donnent 6 sous-bandes complexes, au lieu de trois dans le cas réel.

Comme dans le cas 1D, l'amplitude de la réponse à un échelon est invariante à une translation de l'entrée, et la phase varie linéairement. Ainsi, seuiller l'amplitude $|z_\pm|$ à une échelle donnée produit moins d'artefacts que le seuillage des coefficients en ondelettes réelles.

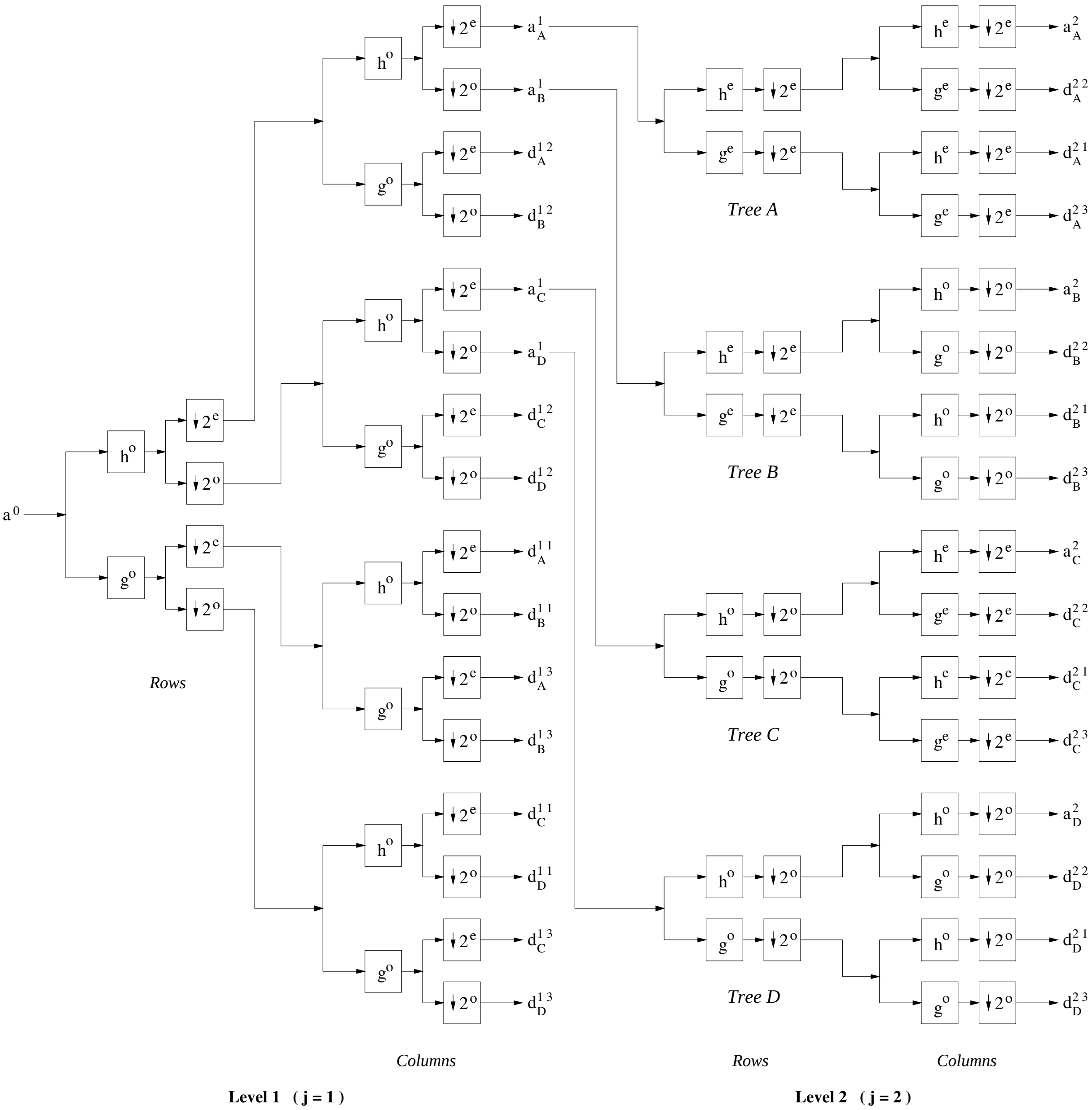


FIG. 3.4 – Banc de filtres du quad-arbre pour la transformée en ondelettes complexe bidimensionnelle

Transformée en ondelettes complexes inverse 2D

La reconstruction est effectuée dans chacun des arbres indépendamment, en utilisant les filtres duaux, et les résultats des 4 arbres sont moyennés pour obtenir a^0. Ceci est illustré dans la figure 3.5.

Algorithme 3.1.4 (Transformée en ondelettes complexes inverse 2D).

- *Au niveau $j > 1$, chaque arbre est traité indépendamment. Les symboles ee…oe représentent l'inverse de la décimation, par exemple $\overset{ee}{x}_{n,m} = x_{p,q}$ si $n = 2p$ et $m = 2q$, 0 dans les autres cas.*

$$
\begin{aligned}
a^j_A &= (\overset{ee}{a})^{j+1}_A \star \tilde{h}^e\tilde{h}^e + (\overset{ee}{d})^{j+1,1}_A \star \tilde{g}^e\tilde{h}^e + (\overset{ee}{d})^{j+1,2}_A \star \tilde{h}^e\tilde{g}^e + (\overset{ee}{d})^{j+1,3}_A \star \tilde{g}^e\tilde{g}^e \\
a^j_B &= (\overset{eo}{a})^{j+1}_B \star \tilde{h}^e\tilde{h}^o + (\overset{eo}{d})^{j+1,1}_B \star \tilde{g}^e\tilde{h}^o + (\overset{eo}{d})^{j+1,2}_B \star \tilde{h}^e\tilde{g}^o + (\overset{eo}{d})^{j+1,3}_B \star \tilde{g}^e\tilde{g}^o \\
a^j_C &= (\overset{oe}{a})^{j+1}_C \star \tilde{h}^o\tilde{h}^e + (\overset{oe}{d})^{j+1,1}_C \star \tilde{g}^o\tilde{h}^e + (\overset{oe}{d})^{j+1,2}_C \star \tilde{h}^o\tilde{g}^e + (\overset{oe}{d})^{j+1,3}_C \star \tilde{g}^o\tilde{g}^e \\
a^j_D &= (\overset{oo}{a})^{j+1}_D \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o + (\overset{oo}{d})^{j+1,1}_D \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o + (\overset{oo}{d})^{j+1,2}_D \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o + (\overset{oo}{d})^{j+1,3}_D \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o
\end{aligned}
$$

- *Au niveau 1, les 4 arbres sont moyennés :*

$$
a^0 = \left.\begin{array}{r}
\left[(\overset{ee}{a})^1_A + (\overset{eo}{a})^1_B + (\overset{oe}{a})^1_C + (\overset{oo}{a})^1_D\right] \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o \\
+\left[(\overset{ee}{d})^{1,1}_A + (\overset{eo}{d})^{1,1}_B + (\overset{oe}{d})^{1,1}_C + (\overset{oo}{d})^{1,1}_D\right] \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o \\
+\left[(\overset{ee}{d})^{1,2}_A + (\overset{eo}{d})^{1,2}_B + (\overset{oe}{d})^{1,2}_C + (\overset{oo}{d})^{1,2}_D\right] \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o \\
+\left[(\overset{ee}{d})^{1,3}_A + (\overset{eo}{d})^{1,3}_B + (\overset{oe}{d})^{1,3}_C + (\overset{oo}{d})^{1,3}_D\right] \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o
\end{array}\right\} \times \frac{1}{4}
$$

3.1.3 Extension des ondelettes complexes en 3D

L'extension des ondelettes complexes au cas 3D est réalisée par le filtrage séparable le long des lignes, puis des colonnes et finalement en profondeur. Dans ce cas $m = 3$, m étant la dimension. La redondance exigée va être de 2^m : 1, 8 :1.

Algorithme 3.1.5 (Transformée en ondelettes complexe 3D).

- *Au niveau 1, il y a un échantillon de décalage entre les 8 arbres. Calculer une transformée en ondelettes non décimée avec h^o et g^o, puis séparer les coeffi-*

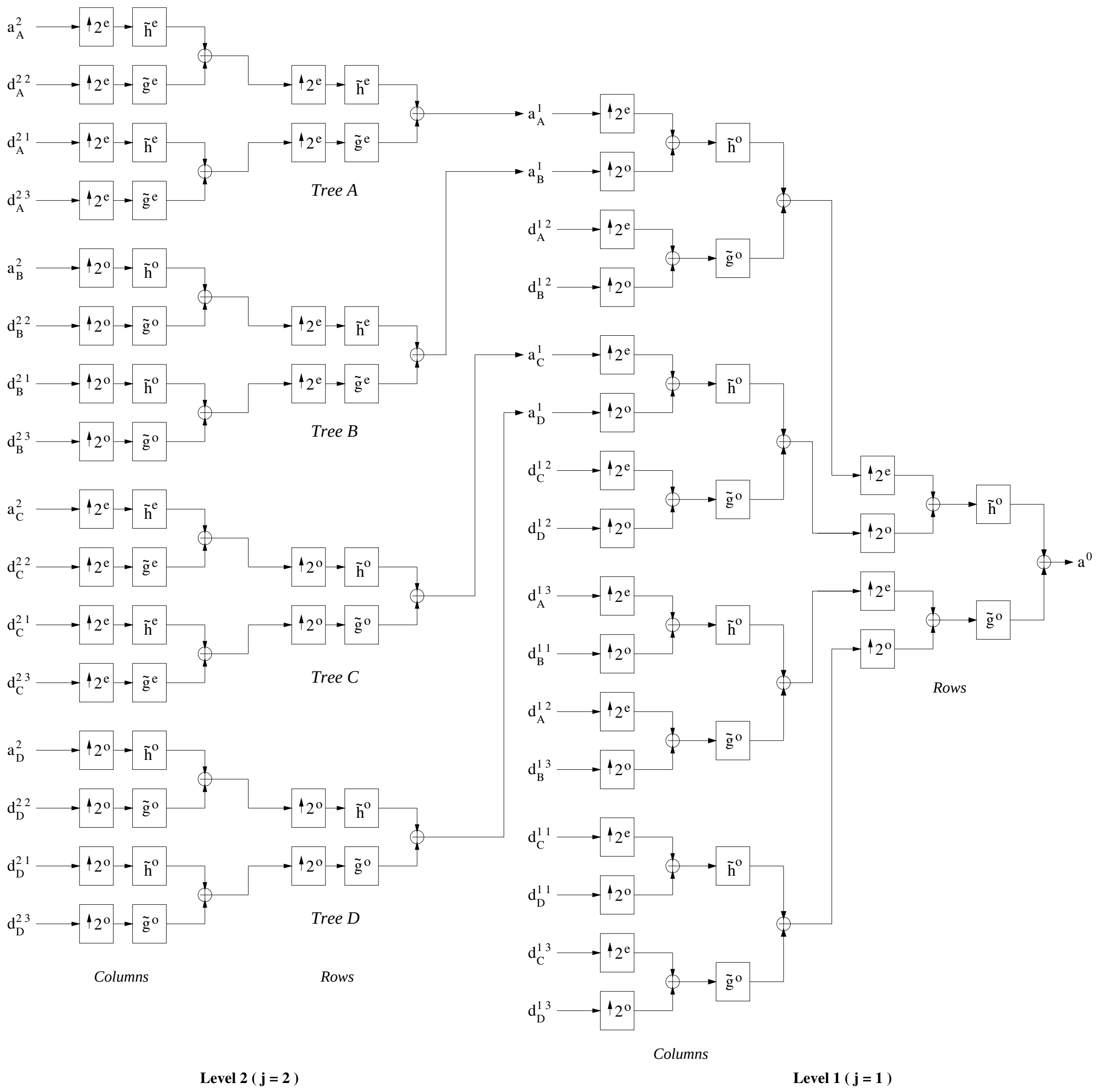


FIG. 3.5 – Banc de filtres du quad-arbre pour la transformée inverse complexe bidimensionelle

cients pairs et impairs (indices o et e) pour extraire les arbres :

Arbre T	**A**	**B**	**C**	**D**
$(a_T^1)_n$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,1})_n$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,2})_n$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,3})_n$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,4})_n$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,5})_n$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,6})_n$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{1,7})_n$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{e,e,e}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{e,e,o}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{e,o,e}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{e,o,o}$

Arbre T	**E**	**F**	**G**	**H**
$(a_T^1)_n$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star h^o h^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,1})_n$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star g^o h^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,2})_n$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star h^o g^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,3})_n$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star g^o g^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,4})_n$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star g^o h^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,5})_n$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star h^o g^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,6})_n$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star h^o h^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{1,7})_n$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{o,e,e}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{o,e,o}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{o,o,e}$	$(a^0 \star g^o g^o g^o)_{o,o,o}$

– *Au niveau $j > 1$, il doit y avoir un demi-échantillon de décalage entre les arbres. Ceci n'est possible qu'en utilisant des filtres de longueurs différentes pour chaque arbre :*

Arbre T	**A**	**B**	**C**	**D**
$(a_T^{j+1})_n$	$(a_A^j \star h^e h^e h^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star h^e h^e h^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star h^e h^o h^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star h^e h^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,1})_n$	$(a_A^j \star g^e h^e h^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star g^e h^e h^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star g^e h^o h^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star g^e h^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,2})_n$	$(a_A^j \star h^e g^e h^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star h^e g^e h^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star h^e g^o h^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star h^e g^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,3})_n$	$(a_A^j \star g^e g^e h^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star g^e g^e h^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star g^e g^o h^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star g^e g^o h^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,4})_n$	$(a_A^j \star g^e h^e g^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star g^e h^e g^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star g^e h^o g^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star g^e h^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,5})_n$	$(a_A^j \star h^e g^e g^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star h^e g^e g^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star h^e g^o g^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star h^e g^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,6})_n$	$(a_A^j \star h^e h^e g^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star h^e h^e g^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star h^e h^o g^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star h^e h^o g^o)_{e,o,o}$
$(d_T^{j+1,7})_n$	$(a_A^j \star g^e g^e g^e)_{e,e,e}$	$(a_B^j \star g^e g^e g^o)_{e,e,o}$	$(a_C^j \star g^e g^o g^e)_{e,o,e}$	$(a_D^j \star g^e g^o g^o)_{e,o,o}$

Arbre T	**E**	**F**	**G**	**H**
$(a_T^{j+1})_n$	$(a_E^j \star h^o h^e h^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star h^o h^e h^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star h^o h^o h^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star h^o h^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,1})_n$	$(a_E^j \star g^o h^e h^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star g^o h^e h^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star g^o h^o h^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star g^o h^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,2})_n$	$(a_E^j \star h^o g^e h^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star h^o g^e h^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star h^o g^o h^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star h^o g^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,3})_n$	$(a_E^j \star g^o g^e h^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star g^o g^e h^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star g^o g^o h^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star g^o g^o h^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,4})_n$	$(a_E^j \star g^o h^e g^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star g^o h^e g^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star g^o h^o g^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star g^o h^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,5})_n$	$(a_E^j \star h^o g^e g^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star h^o g^e g^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star h^o g^o g^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star h^o g^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,6})_n$	$(a_E^j \star h^o h^e g^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star h^o h^e g^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star h^o h^o g^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star h^o h^o g^o)_{o,o,o}$
$(d_T^{j+1,7})_n$	$(a_E^j \star g^o g^e g^e)_{o,e,e}$	$(a_F^j \star g^o g^e g^o)_{o,e,o}$	$(a_G^j \star g^o g^o g^e)_{o,o,e}$	$(a_H^j \star g^o g^o g^o)_{o,o,o}$

Interprétation de la transformée huit-arbre

Nous utilisons ici trois opérateurs imaginaires séparés, i_1, i_2, et i_3 selon les lignes, les colonnes et la profondeur. On obtient un vecteur complexe de 8 éléments :

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = a + bi_1 + ci_2 + di_1i_2 + ei_3 + fi_1i_3 + gi_2i_3 + hi_1i_2i_3$$

Pour convertir chacun des vecteurs en paire de vecteurs complexes, si $i_n = i$ et $-i_n = -i\ \forall n$, il faut considérer :

$$\begin{aligned}
i_1 = i_2 = i_3 &\Longrightarrow (a - d - f - g) + i(b + c + e - h)\\
i_1 = i_2 = -i_3 &\Longrightarrow (a - d + f + g) + i(b + c - e + h)\\
i_1 = i_3 = -i_2 &\Longrightarrow (a + d - f + g) + i(b - c + e + h)\\
i_2 = i_3 = -i_1 &\Longrightarrow (a + d + f - g) + i(-b + c + e + h)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque sous-bande, les détails $d_A, d_B, d_C, d_D, d_E, d_F, d_G, d_H$ peuvent être interprétés comme la partie réelle et la partie imaginaire de quatre signaux complexes z_{+1}, z_{+2}, z_{-1} et z_{-2} :

$$\begin{aligned}
z_{+1}^{j,k} &= (d_A^{j\,k} - d_D^{j\,k} - d_F^{j\,k} - d_G^{j\,k}) + i\,(d_B^{j\,k} + d_C^{j\,k} + d_E^{j\,k} - d_H^{j\,k})\\
z_{+2}^{j,k} &= (d_A^{j\,k} + d_D^{j\,k} + d_F^{j\,k} - d_G^{j\,k}) + i\,(-d_B^{j\,k} + d_C^{j\,k} + d_E^{j\,k} + d_H^{j\,k})\\
z_{-1}^{j,k} &= (d_A^{j\,k} + d_D^{j\,k} - d_F^{j\,k} + d_G^{j\,k}) + i\,(d_B^{j\,k} - d_C^{j\,k} + d_E^{j\,k} + d_H^{j\,k})\\
z_{-2}^{j,k} &= (d_A^{j\,k} - d_D^{j\,k} + d_F^{j\,k} + d_G^{j\,k}) + i\,(-d_B^{j\,k} - d_C^{j\,k} + d_E^{j\,k} - d_H^{j\,k})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc, les détails des 7 sous-bandes correspondant à hgh, ghh, hhg, ggh, hgg, ghg et ggg donnent 28 sous-bandes complexes, au lieu de 7 dans le cas réel.

Transformée en ondelettes complexes inverse 3D

La reconstruction est effectuée dans chacun des arbres indépendamment, en utilisant les filtres duaux, et les résultats des 8 arbres sont moyennés pour obtenir a^0.

Algorithme 3.1.6 (Transformée en ondelettes complexes inverse 3D).

– *Au niveau $j > 1$, chaque arbre est traité indépendamment. Les symboles ee…oe représentent l'inverse de la décimation, par exemple $\overset{ee}{x}_{n,m} = x_{p,q}$ si $n = 2p$ et $m = 2q$, 0 dans les autres cas.*

$$
\begin{aligned}
a^j_A = {} & (\overset{eee}{a})^{j+1}_A \star \tilde{h}^e\tilde{h}^e\tilde{h}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,1}_A \star \tilde{g}^e\tilde{h}^e\tilde{h}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,2}_A \star \tilde{h}^e\tilde{g}^e\tilde{h}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,3}_A \star \tilde{g}^e\tilde{g}^e\tilde{h}^e + \\
& + (\overset{eee}{d})^{j+1,4}_A \star \tilde{g}^e\tilde{h}^e\tilde{g}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,5}_A \star \tilde{h}^e\tilde{g}^e\tilde{g}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,6}_A \star \tilde{h}^e\tilde{h}^e\tilde{g}^e + (\overset{eee}{d})^{j+1,7}_A \star \tilde{g}^e\tilde{g}^e\tilde{g}^e \\
a^j_B = {} & (\overset{eeo}{a})^{j+1}_B \star \tilde{h}^e\tilde{h}^e\tilde{h}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,1}_B \star \tilde{g}^e\tilde{h}^e\tilde{h}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,2}_B \star \tilde{h}^e\tilde{g}^e\tilde{h}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,3}_B \star \tilde{g}^e\tilde{g}^e\tilde{h}^o \\
& + (\overset{eeo}{d})^{j+1,4}_B \star \tilde{g}^e\tilde{h}^e\tilde{g}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,5}_B \star \tilde{h}^e\tilde{g}^e\tilde{g}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,6}_B \star \tilde{h}^e\tilde{h}^e\tilde{g}^o + (\overset{eeo}{d})^{j+1,7}_B \star \tilde{g}^e\tilde{g}^e\tilde{g}^o \\
a^j_C = {} & (\overset{eoe}{a})^{j+1}_C \star \tilde{h}^e\tilde{h}^o\tilde{h}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,1}_C \star \tilde{g}^e\tilde{h}^o\tilde{h}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,2}_C \star \tilde{h}^e\tilde{g}^o\tilde{h}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,3}_C \star \tilde{g}^e\tilde{g}^o\tilde{h}^e \\
& + (\overset{eoe}{d})^{j+1,4}_C \star \tilde{g}^e\tilde{h}^o\tilde{g}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,5}_C \star \tilde{h}^e\tilde{g}^o\tilde{g}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,6}_C \star \tilde{h}^e\tilde{h}^o\tilde{g}^e + (\overset{eoe}{d})^{j+1,7}_C \star \tilde{g}^e\tilde{g}^o\tilde{g}^e \\
a^j_D = {} & (\overset{eoo}{a})^{j+1}_D \star \tilde{h}^e\tilde{h}^o\tilde{h}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,1}_D \star \tilde{g}^e\tilde{h}^o\tilde{h}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,2}_D \star \tilde{h}^e\tilde{g}^o\tilde{h}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,3}_D \star \tilde{g}^e\tilde{g}^o\tilde{h}^o + \\
& + (\overset{eoo}{d})^{j+1,4}_D \star \tilde{g}^e\tilde{h}^o\tilde{g}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,5}_D \star \tilde{h}^e\tilde{g}^o\tilde{g}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,6}_D \star \tilde{h}^e\tilde{h}^o\tilde{g}^o + (\overset{eoo}{d})^{j+1,7}_D \star \tilde{g}^e\tilde{g}^o\tilde{g}^o \\
a^j_E = {} & (\overset{oee}{a})^{j+1}_E \star \tilde{h}^o\tilde{h}^e\tilde{h}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,1}_E \star \tilde{g}^o\tilde{h}^e\tilde{h}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,2}_E \star \tilde{h}^o\tilde{g}^e\tilde{h}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,3}_E \star \tilde{g}^o\tilde{g}^e\tilde{h}^e + \\
& + (\overset{oee}{d})^{j+1,4}_E \star \tilde{g}^o\tilde{h}^e\tilde{g}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,5}_E \star \tilde{h}^o\tilde{g}^e\tilde{g}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,6}_E \star \tilde{h}^o\tilde{h}^e\tilde{g}^e + (\overset{oee}{d})^{j+1,7}_E \star \tilde{g}^o\tilde{g}^e\tilde{g}^e \\
a^j_F = {} & (\overset{oeo}{a})^{j+1}_F \star \tilde{h}^o\tilde{h}^e\tilde{h}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,1}_F \star \tilde{g}^o\tilde{h}^e\tilde{h}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,2}_F \star \tilde{h}^o\tilde{g}^e\tilde{h}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,3}_F \star \tilde{g}^o\tilde{g}^e\tilde{h}^o + \\
& + (\overset{oeo}{d})^{j+1,4}_F \star \tilde{g}^o\tilde{h}^e\tilde{g}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,5}_F \star \tilde{h}^o\tilde{g}^e\tilde{g}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,6}_F \star \tilde{h}^o\tilde{h}^e\tilde{g}^o + (\overset{oeo}{d})^{j+1,7}_F \star \tilde{g}^o\tilde{g}^e\tilde{g}^o \\
a^j_G = {} & (\overset{ooe}{a})^{j+1}_G \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,1}_G \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,2}_G \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,3}_G \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^e + \\
& + (\overset{ooe}{d})^{j+1,4}_G \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,5}_G \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,6}_G \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^e + (\overset{ooe}{d})^{j+1,7}_G \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^e \\
a^j_H = {} & (\overset{ooo}{a})^{j+1}_H \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,1}_H \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,2}_H \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,3}_H \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^o + \\
& + (\overset{ooo}{d})^{j+1,4}_H \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,5}_H \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,6}_H \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^o + (\overset{ooo}{d})^{j+1,7}_H \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^o
\end{aligned}
$$

– *Au niveau 1, les 4 arbres sont moyennés :*

$$a^0 = \left.\begin{array}{l}
\quad [(\overset{eee}{a})^1_A + (\overset{eeo}{a})^1_B + (\overset{eoe}{a})^1_C + (\overset{eoo}{a})^1_D + (\overset{oee}{a})^1_E + (\overset{oeo}{a})^1_F + (\overset{ooe}{a})^1_G + (\overset{ooo}{a})^1_H] \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,1}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,1}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,1}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,1}_D + (\overset{oee}{d})^{1,1}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,1}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,1}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,1}_H] \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{h}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,2}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,2}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,2}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,2}_D + (\overset{oee}{d})^{1,2}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,2}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,2}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,2}_H] \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,3}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,3}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,3}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,3}_D + (\overset{oee}{d})^{1,3}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,3}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,3}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,3}_H] \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{h}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,4}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,4}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,4}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,4}_D + (\overset{oee}{d})^{1,4}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,4}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,4}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,4}_H] \star \tilde{g}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,5}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,5}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,5}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,5}_D + (\overset{oee}{d})^{1,5}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,5}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,5}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,5}_H] \star \tilde{h}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,6}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,6}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,6}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,6}_D + (\overset{oee}{d})^{1,6}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,6}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,6}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,6}_H] \star \tilde{h}^o\tilde{h}^o\tilde{g}^o \\
+[(\overset{eee}{d})^{1,7}_A + (\overset{eeo}{d})^{1,7}_B + (\overset{eoe}{d})^{1,7}_C + (\overset{eoo}{d})^{1,7}_D + (\overset{oee}{d})^{1,7}_E + (\overset{oeo}{d})^{1,7}_F + (\overset{ooe}{d})^{1,7}_G + (\overset{ooo}{d})^{1,7}_H] \star \tilde{g}^o\tilde{g}^o\tilde{g}^o
\end{array}\right\} \times \frac{1}{8}$$

3.2 Construction de la transformée en ondelettes complexes

3.2.1 Invariance par translation

Propriété de non invariance par translation pour la décomposition des ondelettes réelles 1D

Il n'est pas possible d'avoir la propriété d'invariance par translation pour un système à base de convolution et de sous-échantillonnage [34] : décaler le signal d'entrée ne peut pas produire une translation simple des coefficients transformés, à moins que la translation soit un multiple de chacun des facteurs de sous-échantillonnage du système. On va montrer cette affirmation en détail (cf équation 3.11). Néanmoins, il est possible d'obtenir une invariance par translation si toute l'information représentée dans la sous-bande reste dans cette sous-bande quand le signal est décalé. Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir cela est le critère de Nyquist. Généralement, la transformée en ondelettes viole le critère de Nyquist, après translation l'information bouge d'une sous-bande à l'autre. On définit ci-dessous la propriété d'invariance par translation à partir de deux approches différentes.

Invariance par translation : sous-échantillonnage

Nous supposons que $f(x)$ est un signal unidimensionnel convolué avec un noyau $h(x)$. La sortie de la convolution est sous-échantillonnée de manière à ce que le sous-échantillonnage n'affecte pas la représentation, c'est-à-dire qu'on est capable d'obtenir (interpoler) toute la convolution de sortie à partir des échantillons conservés.

Nous allons dériver une forme alternative du théorème de sous-échantillonnage qui décrit de façon explicite un ensemble de fonctions analytiques d'interpolation que l'on peut utiliser pour faire l'opération de translation. On va utiliser une fonction continue $f(x)$, mais les résultats peuvent facilement s'étendre à des signaux échantillonnés discrets. On considère que la période du signal est 2π. Un ensemble N des coefficients transformés, $y[n]$, sont calculés par convolution avec un noyau $h(x)$ et la sortie est uniformément échantillonnée avec un pas d'échantillonnage de $\triangle_x = \frac{2\pi}{N}$:

$$y[n] = \int_0^{2\pi} dx h(n \triangle_x - x) f(x), \qquad n \in 0, 1, ..., N-1. \tag{3.7}$$

La figure 3.7 illustre cette équation. Dans ce système d'équations, les fonctions de projection correspondent à un ensemble de copies décalées du noyau :

$$\{h(n \triangle_x - x) | n = 0, 1, ..., N-1\}$$

La transformation de l'équation 3.7 est invariante par translation s'il existe un ensemble de fonctions d'interpolation, $b_n(x_0)$, qui peuvent s'utiliser pour calculer le signal avec une version décalée arbitrairement du noyau $h(x)$ comme une combinaison linéaire pondérée de $y[n]$:

$$\int_0^{2\pi} dx h(x_0 - x) f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) y[n] \tag{3.8}$$

où x_0 est la distance de translation arbitraire. La proposition suivante décrit la condition pour laquelle la transformation est invariante par translation et donne une expression analytique pour les fonctions d'interpolation.

Proposition 1. *L'équation 3.7 définit une transformation invariante par translation s'il existe un ensemble des fonctions d'interpolation, $b_n(x_0)$, qui satisfont l'équation suivante*

$$\begin{pmatrix} e^{jx_0k_0} \\ e^{jx_0k_1} \\ \vdots \\ e^{jx_0k_{M-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{j\Delta_x k_0} & \dots & e^{j(N-1)\Delta_x k_0} \\ 1 & e^{j\Delta_x k_1} & \dots & e^{j(N-1)\Delta_x k_1} \\ & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{j\Delta_x k_{M-1}} & \dots & e^{j(N-1)\Delta_x k_{M-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0(x_0) \\ b_1(x_0) \\ \vdots \\ b_{N-1}(x_0) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

pour tout x_0,
où $k_0, k_1, ..., k_{M-1}$ est l'ensemble des fréquences pour lequel H(k), la série de Fourier de h(x), est différente de zéro.

Preuve : On commence par la définition de la translation donnée par l'équation 3.8 :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx h(x_0 - x) f(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) y[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) \int_0^{2\pi} dx h(n \triangle_x - x) f(x) \\ &= \int_0^{2\pi} dx f(x) \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) h(n \triangle_x - x). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ceci est nécessaire pour tout $f(x)$,

$$h(x_0 - x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) h(n \triangle_x - x) \tag{3.11}$$

Par conséquent, on peut écrire le noyau décalé arbitrairement $h(x - x_0)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $h(x - n\triangle_x)$ qui se situent aux intervalles d'espace d'échantillonnage, $\triangle_x$.

Comme on a supposé que $f(x)$ est périodique, on suppose aussi que $h(x)$ est périodique. Soit $H(k)$ la série (complexe) de Fourier de $h(x)$,

$$H(k) = \int_0^{2\pi} dx h(x) e^{-jkx} \tag{3.12}$$

Alors, si l'on change le signe de x et l'on calcule les séries de Fourier des deux cotés de l'équation 3.11, on obtient :

$$H(k) e^{jkx_0} = H(k) \sum_{n=0}^{N-1} b_n(x_0) e^{jkn\Delta_x}, \qquad \text{pour tout } x_0, k. \tag{3.13}$$

Ce système d'équations représente l'ensemble des contraintes linéaires pour les fonctions d'interpolation $b_n(x_0)$, qui décrivent les translations de phase nécessaires de chaque composante de Fourier de $h(x)$ pour décaler complètement la fonction. Si cette équation a une solution, alors la représentation est invariante par translation.

Manifestement, l'équation 3.13 impose une contrainte sur les fonctions d'interpolation seulement pour les fréquences k où $H(k)$ est différent de zéro. Si $H(k)$ est différent de zéro pour un ensemble fini de fréquences (ou si $f(x)$ et $h(x)$ sont des signaux discrets), cette contrainte peut être écrite en employant la notation matricielle. Si $k_0, k_1, ..., k_{M-1}$ est l'ensemble des fréquences (positives ou négatives) pour lesquelles $H(k)$ est différent de zéro. L'équation 3.13 peut être écrite comme l'équation 3.9 donnée par la proposition. Si la matrice de l'équation est inversible, on peut résoudre les fonctions d'interpolation $b_n(x_0)$, et la représentation est invariante par translation.■

Le rapport entre la contrainte de l'équation 3.9 et le critère de Nyquist est clair. L'inversion de la matrice exige un minimum d'échantillons, N, pour obtenir l'invariance par translation. Plus précisément, le nombre d'échantillons doit être supérieur ou égal au nombre de composantes de Fourier de la fonction $h(x)$ différent de zéro ($N \geq M$). Par exemple, on va considérer le premier niveau de décomposition de la transformée discrète des ondelettes. Supposons que le signal de départ ait une longueur (période) de N échantillons, par conséquent la bande haute fréquence dessinée va voir $N/2$ échantillons. Les noyaux doivent satisfaire la contrainte de reconstruction suivante :

$$|H(k)|^2 + |H(k + \frac{N}{2})|^2 = 2, \qquad \text{pour tout } k. \tag{3.14}$$

Puisque les noyaux ne sont typiquement pas des fonctions idéales (de sinc), ils contiennent des composantes de fréquences différentes de zéro, correspondant à plus que $N/2$ fréquences, alors la matrice de l'équation 3.9 n'est pas inversible.

Invariance par translation : préservation de la puissance des coefficients des ondelettes

Le module au carré de la réponse, dans une transformation avec recouvrement, dépend de la position du signal : une translation du signal de départ a généralement comme conséquence une redistribution du contenu de la puissance parmi les diverses sous-bandes de fréquences, même s'il n'y a eu aucun changement du spectre de la fréquence d'entrée.

La contrainte de l'invariance par translation est équivalente à dire que le carré des coefficients transformés doit être préservé quand le signal est décalé en position. Nous montrons ceci dans la proposition suivante :

Proposition 2. *Étant donné un ensemble des coefficients transformés calculés à partir de l'équation 3.7, la transformation est invariante par translation si et seulement si la puissance des coefficients,* $\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2$*, est invariante aux décalages du signal d'entrée* $f(x)$*, pour n'importe quel choix de ce signal d'entrée.*

Preuve : Nous montrons ce résultat en considérant la transformée discrète de Fourier (TDF), $Y(k)$, de la sortie du diagramme du schéma de la figure 3.7. On peut écrire

$$y[n] = (f(x) * h(x)) \sum_n \delta(x - n2\pi/N) \tag{3.15}$$

et la TDF est égale à

$$Y[k] = (F[k]H[k]) * \sum_l \delta(k + lN) \tag{3.16}$$

avec $l = -2\pi n$

$$Y(k) = \sum_l H(k + lN)F(k + lN), \tag{3.17}$$

où $F(k)$ est la série de Fourier du signal d'entrée, $H(k)$ est la série de Fourier du noyau de convolution, et l'indice l parcourt tout l'ensemble des entiers. La somme correspond à la répétition du spectre dû à l'échantillonnage.

On considère que la transformation est invariante par translation. Alors, en utilisant le théorème de Parseval, nous écrivons la puissance du signal de sortie en termes de sa TDF :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} |Y(k)|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |\sum_{l} H(k+lN)F(k+lN)|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l} |H(k+lN)F(k+lN)|^2 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l \neq m} H(k+lN)F(k+lN)H^*(k+mN)F^*(k+mN).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où l'opérateur $()^*$ est la conjugaison complexe, et les indices l et m parcourent tous les entiers. Puisque l'on a supposé l'invariance par translation (c'est-à-dire, sans recouvrement), le deuxième terme est nul. L'expression restante est invariante aux décalages du signal d'entrée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l} |H(k+lN)|^2 |F(k+lN)|^2 \tag{3.19}$$

C'est-à-dire, le remplacement de $F(k)$ par $e^{jkx_0}F(k)$ pour tout x_0 ne changera pas le côté droit de l'expression dans l'équation 3.19 : la puissance de la réponse est invariante par translation.

Le contraire est aussi vrai. Si l'on considère que le système n'est pas invariant par translation, alors les échantillons produisent du recouvrement. Un signal sinusoïdal d'entrée, à une fréquence qui est recouverte, apparaîtra dans le deuxième terme de l'équation 3.18 (par exemple, il existera un k, l et m pour lesquels le produit du deuxième terme de l'équation 3.18 sera différent de zéro). Si le signal d'entrée est décalé, ce deuxième terme différent de zéro sera modulé par un facteur de phase.■

Invariance par Translation pour Ondelettes Complexes 1D

Nous allons décrire le comportement de la décomposition des ondelettes DT CWT (*Dual-Tree Complex Wavelet Transform* en anglais) par rapport à la propriété d'invariance par translation. Cette étude a été faite par Kingsbury dans [20] dont on a extrait en particulier les figures de ce paragraphe. Tout d'abord, la transformation en arbre dual a été optimisée pour être invariante par translation, c'est-à-dire que si l'on ne conserve qu'une sous-bande de détails ou d'approximation à une échelle donnée, en enlevant toutes les autres sous-bandes, un décalage de l'image de départ ne produira qu'un décalage de l'image reconstruite, sans distorsion.

Ensuite, cette transformée est construite de manière à conserver constante l'énergie dans une sous-bande quand l'entrée est translatée. Les coefficients ne sont pas invariants par translation, ils sont translatés d'une fraction de pixels quand l'entrée est translatée d'un nombre entier de pixels, mais leur amplitude n'oscille pas autour de zéro comme les coefficients en ondelettes réelles. Ainsi, lorsque les coefficients sont seuillés, il y a moins d'artéfacts.

On va considérer ce qui se passe quand on garde seulement les coefficients d'un seul type (ondelette ou fonction d'échelle) provenant d'un niveau de l'arbre dual. Par exemple, supposons que l'on garde le coefficient d'ondelette du niveau 3 x_{001a} et x_{001b}, et que l'on mette tous les autres à zéro (cf figure 3.9). Si le signal y, reconstruit seulement à partir de ces coefficients, n'a pas de recouvrement alors on peut conclure que la transformation est invariante par translation à ce niveau.

La figure 3.8 montre l'analyse simplifiée et la reconstruction de l'arbre dual quand les coefficients de seulement un type et un niveau sont maintenus. Toutes les décimations et interpolations sont mises à la sortie de tous les filtres d'analyse et à l'entrée des filtres de reconstruction, respectivement. Le facteur total de décimation/interpolation est $M = 2^m$. Par exemple si les seuls coefficients que l'on garde de la figure (cf figure 3.9) sont x_{001a} et x_{001b}, et le facteur de décimation est $M = 8$, la fonction de transfert de x à x_{001a} est $A(z) = H_{0a}(z)H_{00a}(z^2)H_{001a}(z^4)$. La fonction de transfert de x à x_{001b} s'obtient de la même façon $B(z) = H_{0b}(z)H_{00b}(z^2)H_{001b}(z^4)$; et de même pour les fonctions inverses $C(z)$ et $D(z)$.

Supposons un signal $U(z)$ qui est d'abord décimé par un facteur M et ensuite interpolé par le même facteur. Le résultat que l'on obtient est $\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} U(W^k z)$, où $W = e^{\frac{j2\pi}{M}}$. En appliquant ce résultat à la figure 3.8, on a :

$$Y(z) = Y_a(z) + Y_b(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(W^k z)[A(W^k z)C(z) + B(W^k z)D(z)] \qquad (3.20)$$

Les termes de recouvrement correspondent à la somme pour des valeurs $k \neq 0$, car seulement le terme $X(z)$ (quand $k = 0$ et $W^k = 1$) correspond à une réponse linéaire invariante par translation. Pour obtenir l'invariance par translation, les termes de recouvrement doivent être négligeables, ainsi devons nous concevoir $A(W^k z)C(z)$ et $B(W^k z)D(z)$ afin qu'ils soient très petits ou qu'ils s'annulent quand $k \neq 0$. W^k présente un décalage de fréquence égal à $\frac{kf_s}{M}$ aux filtres A et B (f_s est la fréquence d'échantillonnage), ainsi pour de grandes valeurs de k, les filtres décalés ou non décalés ont un chevauchement de passe-bande négligeable. Mais à de petites valeurs de k, ceci devient pratiquement impossible du fait de la conception des filtres, lesquels ont un petit support et la propriété d'avoir de larges valeurs à la bande de transition. Dans ce cas (k petit), il va être nécessaire d'annuler les termes quand les deux arbres sont combinés. On va voir que les stratégies exigées sont différentes suivant que les filtres sont passe-bas ou passe-bande.

Filtres passe-bas

On va d'abord considérer les filtres passe-bas. Au niveau m de l'arbre dual, la bande des filtres passe-bas va de $-f_s/2M$ à $f_s/2M$. Les termes W^k de l'équation 3.20 décalent les bandes en multiple de f_s/M. Les filtres $A(z)$ et $C(z)$ ont des fréquences similaires car ils sont presque orthogonaux par construction, et ils ont une bande de transition significative. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir de petites valeurs de $A(W^{\pm 1} z)C(z)$ pour toutes les fréquences $z = e^{j\theta}$. La figure 3.10a montre le recouvrement entre la bande de transition de $A(W^{\pm 1} z)$ avec le filtre de reconstruction $C(z)$. Néanmoins le recouvrement sera presque négligeable avec $A(W^{\pm 2} z)C(z)$. En conséquence, pour k pair il n'y a pas de problème et pour k impair on cherche à construire $B(W^k z)D(z)$ pour qu'il s'annule avec $A(W^k z)C(z)$. Comme les filtres $B(z)$ et $D(z)$ sont des filtres décalés de $\pi/2$ (décalés de la moitié de l'échantillon) de $A(z)$ et $C(z)$, on a :

$$B(z) = z^{\pm M/2} A(z)$$

et

$$D(z) = z^{\mp M/2} C(z)$$

On obtient l'annulation avec la condition suivante :

$$B(W^k z)D(z) = (-1)^k A(W^k z)C(z)$$

pour k pair, le produit des sous-bandes ($B(W^k z)$ avec $D(z)$ et $A(W^k z)$ avec $C(z)$) est presque zéro et pour k impair, en écrivant $B(W^k z)$ en fonction de $A(W^k z)$

et $D(z)$ en fonction de $C(z)$, on a

$$z^{\pm M/2} z^{\mp M/2} A(W^k z) C(z) = -A(W^k z) C(z)$$

qui donne aussi zéro pour le terme de recouvrement de l'équation 3.10c.

Filtres passe-bande

Dans cette partie, on va considérer les filtres passe-bande. On remarque sur la figure 3.10b que la bande de fréquences négatives (de $-f_s/2M$ à $-f_s/M$) du filtre passe-bande C se superpose avec les bandes des fréquences positives de $A(W^{-1}z)$ et $A(W^{-2}z)$. De même, la bande des fréquences positives de C se superpose avec les bandes des fréquences négatives de A pour $k = +1$ et $k = +2$. Les filtres D et B ont un comportement similaire.

Pour discriminer les fréquences positives des négatives, nous avons besoin de filtres *complexes*. Le prototype du filtre complexe va être $P(z)$ et $Q(z)$ (pour l'analyse et la reconstruction, respectivement), et chacun va avoir seulement une bande de $f_s/2M$ à f_s/M avec un gain négligeable pour toutes les fréquences négatives. On peut écrire les filtres réels d'analyse, $A(z)$ et $B(z)$, et de synthèse, $C(z)$ et $D(z)$, en fonction des filtres complexes :

$$\begin{aligned} A(z) &= P(z) + P^*(z) \\ B(z) &= -j[P(z) - P^*(z)] \\ C(z) &= Q(z) + Q^*(z) \\ D(z) &= j[Q(z) - Q^*(z)] \end{aligned} \tag{3.21}$$

le conjugué d'un filtre produit simplement le même passe-bande mais dans les fréquences négatives. Par conséquent, P et Q sont des filtres correspondant aux passe-bandes supérieurs de A et de C, tandis que P^* et Q^* correspondent aux passe-bandes inférieurs.

Le plus important problème de recouvrement mis en évidence est entre les bandes de fréquences opposées $Q^*(z)P(W^k z)$ pour $k = -1, -2$ et $Q(z)P^*(W^k z)$ pour $k = 1, 2$. Si on réécrit le terme que l'on veut annuler à partir des filtres complexes, on a pour tout k :

$$\begin{aligned} A(W^kz)C(z)+B(W^kz)D(z) &= [P(W^kz)+P^*(W^kz)][Q(z)+Q^*(z)]+ \\ &\quad +(-j)[P(W^kz)-P^*(W^kz)]j[Q(z)-Q^*(z)] \\ &= 2P(W^kz)Q(z)+2P^*(W^kz)Q^*(z) \\ &\quad +P(W^kz)Q^*(z)+P^*(W^kz)Q(z) \\ &\quad -P(W^kz)Q^*(z)-P^*(W^kz)Q(z) \\ &= 2P(W^kz)Q(z)+2P^*(W^kz)Q^*(z) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi donc, on a réussi à enlever le chevauchement entre bandes de fréquences opposées. Maintenant, selon les résultats de l'équation 3.22, nous devons penser à des filtres tels que le filtre complexe $Q(z)$ (qui a seulement des fréquences positives) ne recouvre pas les versions décalées de $P(z)$. Cela est assez facile à obtenir grâce au fait que les bandes de fréquences sont seulement de $f_s/2M$ et que les décalages sont des multiples de f_s/M. Par exemple, un filtre satisfaisant cette condition serait un filtre qui contient des fréquences entre la bande de passage et de transition de $f_s/3M$ à $4f_s/3M$. Le même raisonnement est valable mais pour les filtres conjugués (figure 3.10d).

Grâce à des propriétés des filtres complexes, on peut écrire les équations 3.21 de la forme :

$$\begin{aligned} A(z) &= 2\Re[P(z)] \\ B(z) &= 2\Im[P(z)] \\ C(z) &= 2\Re[Q(z)] \\ D(z) &= -2\Im[Q(z)] \end{aligned} \tag{3.23}$$

On remarque donc que l'on peut voir l'arbre a (resp. b) comme la partie réelle (resp. imaginaire) des réponses complexes (P pour l'analyse et Q pour la reconstruction) qui ont des fréquences soit toutes positives, soit toutes négative. L'utilisation des filtres complexes, $A(W^kz)+jB(W^kz)$ pour l'analyse et $C(z)-jD(z)$ pour la reconstruction permet d'obtenir l'invariance par translation pour les coefficients des ondelettes 1D.

3.2.2 Sélectivité directionnelle

Une propriété importante des transformées complexes est la capacité à séparer un plus grand nombre de directions que les ondelettes réelles. Pour chaque pixel de l'image de détails, en 3D, les 8 coefficients correspondant aux 8 arbres en parallèle sont convertis en 4 nombres complexes. A chaque échelle, nous avons 7 sous-bandes de détails pour chaque arbre, ce qui nous donne 28 sous-bandes complexes.

La séparation directionnelle est possible en utilisant des filtres dont la réponse impulsionnelle supprime la plupart des fréquences négatives. Pour un signal bidimensionnel réel, la moitié du spectre est nécessaire pour représenter le signal puisque le spectre est symétrique par rapport à la fréquence (0,0). Le problème avec des ondelettes séparables réelles est que la base des vecteurs a une réponse impulsionnelle symétrique par rapport aux deux axes, ce qui interdit la séparation des fréquences positives et négatives. C'est pourquoi les ondelettes réelles ne représentent pas correctement les diagonales : les sous-bandes diagonales représentent en même temps les fréquences positives et négatives, et mélangent donc les orientations $+45^o$ et -45^o.

Avec une transformée complexe, les filtres ont des réponses asymétriques. Ainsi, les filtres complexes conjugués sont aussi utilisés dans le banc de filtres parce que leur réponse est symétrique par rapport aux filtres d'origine (si un filtre sélectionne les fréquences positives, son conjugué sélectionnera les fréquences négatives). Ainsi, nous obtenons une orientation des réponses impusionnelles et nous avons donc une sélectivité forte entre les différentes sous-bandes.

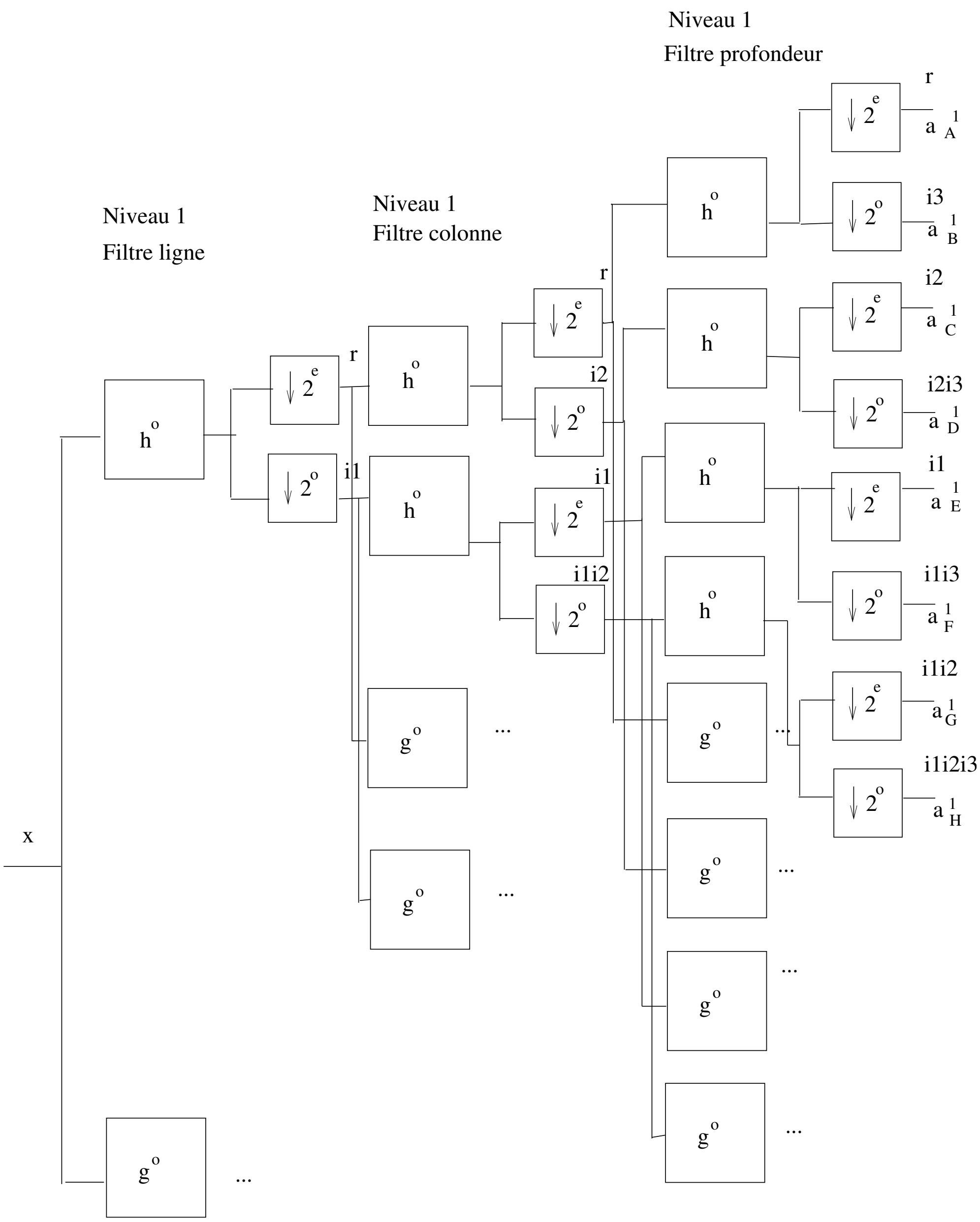


FIG. 3.6 – Banc de filtres huit-arbre pour la transformée en ondelettes complexes 3D.

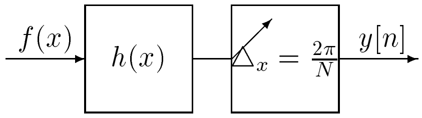


FIG. 3.7 – Filtrage et sous-échantillonnage du signal $f(x)$.

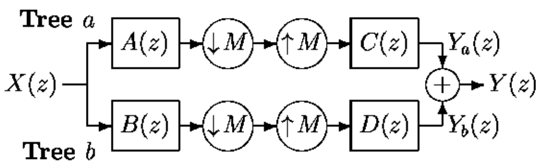


FIG. 3.8 – Arbre dual en gardant seulement des coefficients d'ondelette ou d'échelle pour un niveau m ($M = 2^m$).

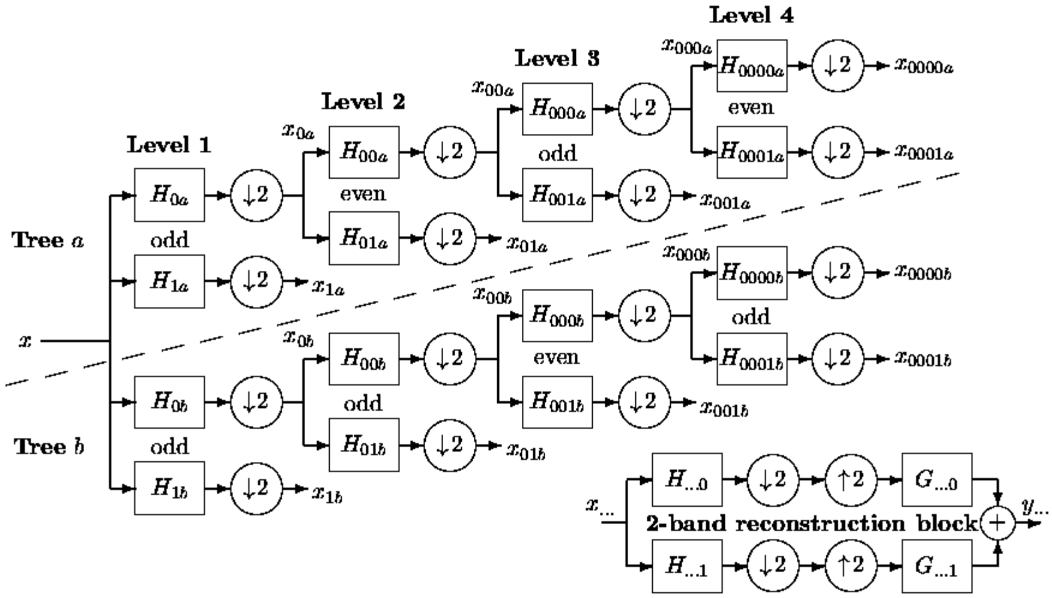


FIG. 3.9 – Arbre dual de la transformée en ondelettes complexe (DT CWT), qui comporte deux arbres des filtres réels, a et b, qui produisent des parties réelles et imaginaires des coefficients complexes. La longueur des filtres biorthogonaux impair et pair est choisie afin d'obtenir les signaux correctement retardés.

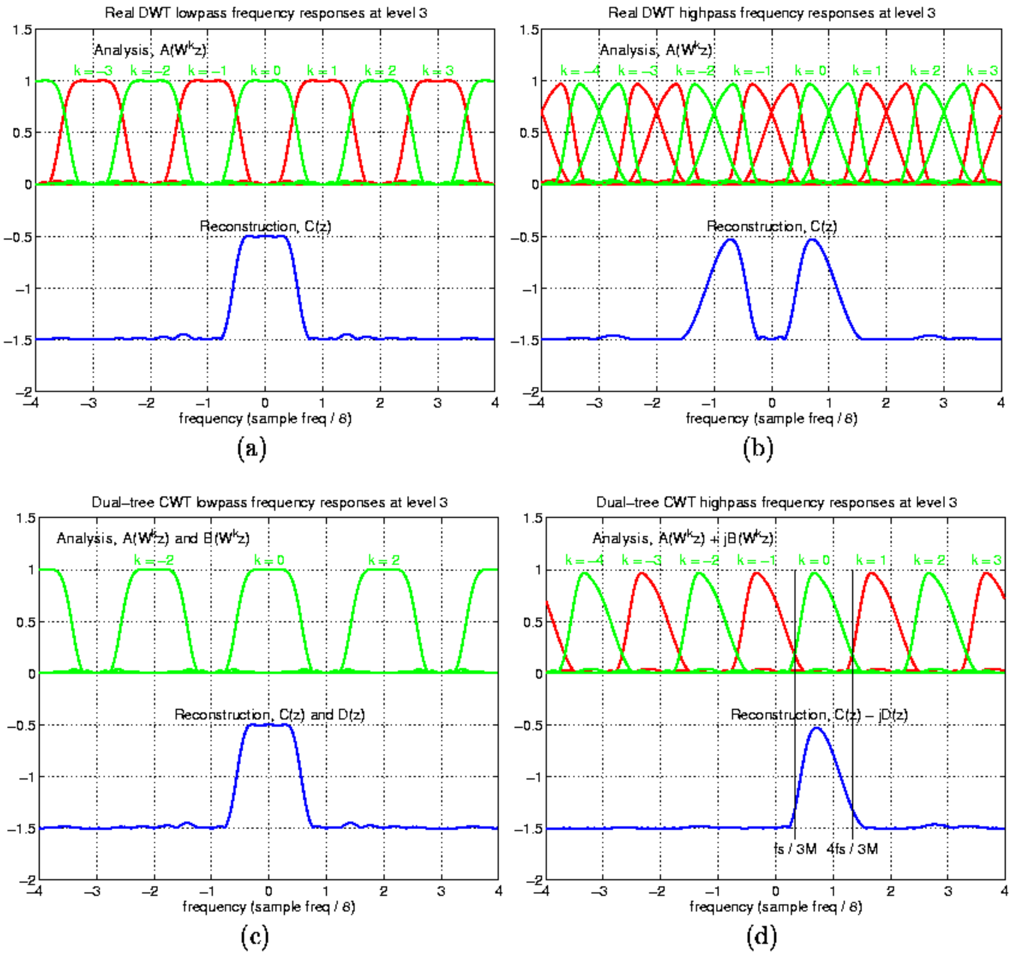


FIG. 3.10 – Réponses en fréquence des filtres d'analyse et de reconstruction au niveau 3, montrant les termes de recouvrement. Les images (a) et (b) montrent les réponses des filtres passe-bas et passe-bande dans l'arbre des ondelettes réelles, alors que (c) et (d) montrent les réponses équivalentes de l'arbre dual et démontrent le chevauchement réduit des filtres de reconstruction avec des fréquences décalés pour les filtres d'analyse (image extraite de [19]).

Chapitre 4

Restauration

4.1 Débruitage

Dans cette partie, nous proposons un algorithme de débruitage d'images biologiques confocales 3D [28]. L'algorithme consiste en une décomposition en ondelettes complexes (CWT) 3D, suivie d'un seuillage des coefficients complexes. Un seuillage (doux, dur ou Oracle) est appliqué avant la transformée CWT inverse. Cet algorithme est comparé avec un algorithme fondé sur le même modèle de débruitage, mais utilisant une décomposition en ondelettes réelles (DWT) 3D.

L'objectif est de débruiter une image biologique tridimensionnelle observée, Y, affectée par un bruit additif n. Ce modèle de bruit est donné par l'équation suivante :

$$Y = X + n \tag{4.1}$$

où X est l'image originale.

Bien qu'une hypothèse d'un bruit de Poisson soit plus adaptée aux images confocales, nous faisons ici l'hypothèse d'un bruit additif blanc et gaussien, indépendant des données. En effet, il a été montré dans les travaux de N. Dey et al. [6] que ces deux hypothèses fournissent des résultats de qualité presque équivalentes lors de la déconvolution avec régularisation par la Variation Totale.

Lors de la transformée en ondelettes complexes, le signal est concentré dans peu de coefficients de valeurs importantes, alors que le bruit est distribué avec la même variance sur tous les coefficients. Il est alors possible de restaurer l'image initiale par seuillage des coefficients [8].

Estimation du niveau du bruit

Lors de la réalisation du seuillage, il faudra estimer la valeur de la variance du bruit présent pour chaque zone fréquentielle couverte par les différentes ondelettes. Celle-ci peut être calculée de façon explicite [14]. Néanmoins, il est plus simple, du point de vue de l'implantation, de recalculer directement la variance de la façon suivante : on crée tout d'abord une image B avec un bruit blanc gaussien de variance σ^2 ; puis, cette image est décomposée dans la base d'ondelettes complexes ; nous pouvons alors calculer la variance du bruit pour chaque zone fréquentielle σ_k^2. Nous avons vérifié que la fluctuation numérique est négligeable avec des réalisations différentes de bruit.

4.1.1 Algorithme de débruitage par seuillage

Il existe différents opérateurs de seuillage présentés par Donoho et Johnstone [8]. Un seuillage doux permet notamment d'obtenir une image restaurée plus régulière que par l'utilisation d'un seuillage dur.

Les différents types de seuillage définies par Jalobeanu [14] dans le cas complexe sont les suivantes :

$$\theta_T^s(x) = \begin{cases} x(1 - T/|x|) & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \qquad \theta_T^h(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\theta_T^o(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\left(1 + \sqrt{1 - |T/x|^2}\right) & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \tag{4.3}$$

où $\theta_T^s(x)$ est la fonction de seuillage doux, $\theta_T^h(x)$ est la fonction de seuillage dur, et $\theta_T^o(x)$ est la fonction de seuillage Oracle [14].

Nous pouvons jouer sur les valeurs des seuils T, selon la quantité d'information voulue par rapport au taux de bruit. Le seuillage des coefficients des images à restaurer est un seuillage à choisir parmi les trois exposés ci-dessus, avec un seuil pour chaque sous-bande $T_k = \alpha\sigma_k$, égal à l'écart type du bruit dans la sous-bande k multiplié par un facteur α indépendant de l'image. Dans une étude sur la déconvolution d'images satellitaires par transformée en paquets d'ondelettes, Kalifa [15] trouve un facteur optimal (pour la maximisation du SNR de l'image restaurée) de $\alpha = 1.6$.

Cette valeur peut être augmentée afin de restaurer les images avec moins de détails et moins de bruit, mais aussi diminuée afin de reconstruire toutes les structures tout en acceptant un certain niveau de bruit. On peut considérer α comme un paramètre. Nous utiliserons la valeur 1.6 pour les résultats numériques de cette étude.

4.1.2 Évaluation des résultats : critères de qualité

Critères automatiques

Il est nécessaire d'utiliser un critère numérique permettant une évaluation de la qualité des résultats. Cela permet d'envisager une comparaison, voire une classification des différentes techniques.

La recherche de critères de qualité automatiques a donné lieu à plusieurs travaux dont une partie est résumée dans la thèse d'Olivès [27]. On peut également citer Tran-Minh [39] en matière de comparaison de méthodes de déconvolution.

Le critère le plus connu est, sans doute, le rapport signal sur bruit ou SNR (*Signal to Noise Ratio* en anglais). C'est un critère global, défini sur l'image entière ou sur une sous-image. Dans le cadre de la restauration, il s'écrit de la manière suivante :

$$SNR(\widehat{X}, X) = 10 \log \frac{||X||^2}{||\widehat{X} - X||^2} \tag{4.4}$$

où X est l'image que l'on cherche à atteindre, et $\widehat{X}$ est un estimateur de X. C'est le rapport de la variance du signal sur la variance de l'erreur de reconstruction. Maximiser le SNR revient à minimiser l'erreur quadratique de reconstruction.

Critères subjectifs

L'inconvénient du SNR est qu'il traite l'image dans sa globalité. Les travaux effectués en psycho-vision par Hubel [13] montrent que le système visuel humain décompose l'image en éléments sémantiques, comme par exemple les contours, les textures, etc. Sur chacun de ces éléments, la sensibilité aux défauts éventuels est différente. Ainsi, lorsqu'un contour est perçu, l'oeil n'est pas toujours sensible au bruit qui l'affecte, en revanche, la même quantité de bruit (au sens du SNR) est nettement plus visible dans une région homogène.

Cette approche de la qualité d'image n'est cependant pas absolue. Selon l'application considérée, on sera attentif à certains types de détails de l'image et à l'évaluation de leur restauration d'un point de vue concret. Ainsi, on peut distinguer qualitativement, par exemple, quatre types de zone : les zones homogènes, les zones de contours, les zones texturées et les zones de détails.

Pour l'évaluation des résultats, nous utiliserons le SNR global et quelques appréciations subjectives de la qualité de la restauration.

4.1.3 Comparaison de la transformée CWT et DWT

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats sur des images synthétiques. Pour l'évaluation des algorithmes de débruitage, nous suivons le schéma suivant :

1. Création de l'objet. Chaque objet 3D présente des caractéristiques différentes : quelques objets sont lisses, d'autres ont des structures fines. Le fond est choisi constant. Les images synthétiques sont crées avec *The GIMP* [1].
2. Bruitage : nous rajoutons du bruit blanc gaussien.
3. Débruitage : nous appliquons soit le modèle de débruitage par la transformée en ondelettes complexes (CWT) 3D, soit la transformée en ondelettes réelles (DWT) 3D. Ensuite, un seuillage des coefficients des ondelettes est réalisé avant la CWT inverse.
4. Interprétation des résultats. L'intérêt de travailler avec des images synthétiques est que l'on connaît l'image sans bruit. La comparaison des résultats obtenus est donc facilitée.

Nous créons des images synthétiques, SMOOTH de taille $128 \times 128 \times 32$ et COMPOSITE de taille $128 \times 128 \times 64$, et nous ajoutons un bruit blanc gaussien, de différentes valeurs de variances pour chaque expérience.

Les premières figures 4.1 et 4.2 proposent une comparaison de débruitage entre CWT et DWT pour l'image SMOOTH et COMPOSITE à différentes valeurs de variances du bruit et pour trois échelles de décomposition en ondelettes ($j = 3$). Nous comparons également les résultats pour les différentes fonctions de seuillage (doux, dur ou Oracle). Pour ce faire, nous mesurons à chaque fois l'incrément de SNR en dB entre l'image restaurée par les modèles de débruitage proposés et l'image synthétique bruitée ($\Delta SNR = SNR_{final} - SNR_{initial}$).

[1] *http ://www.gimp.org*

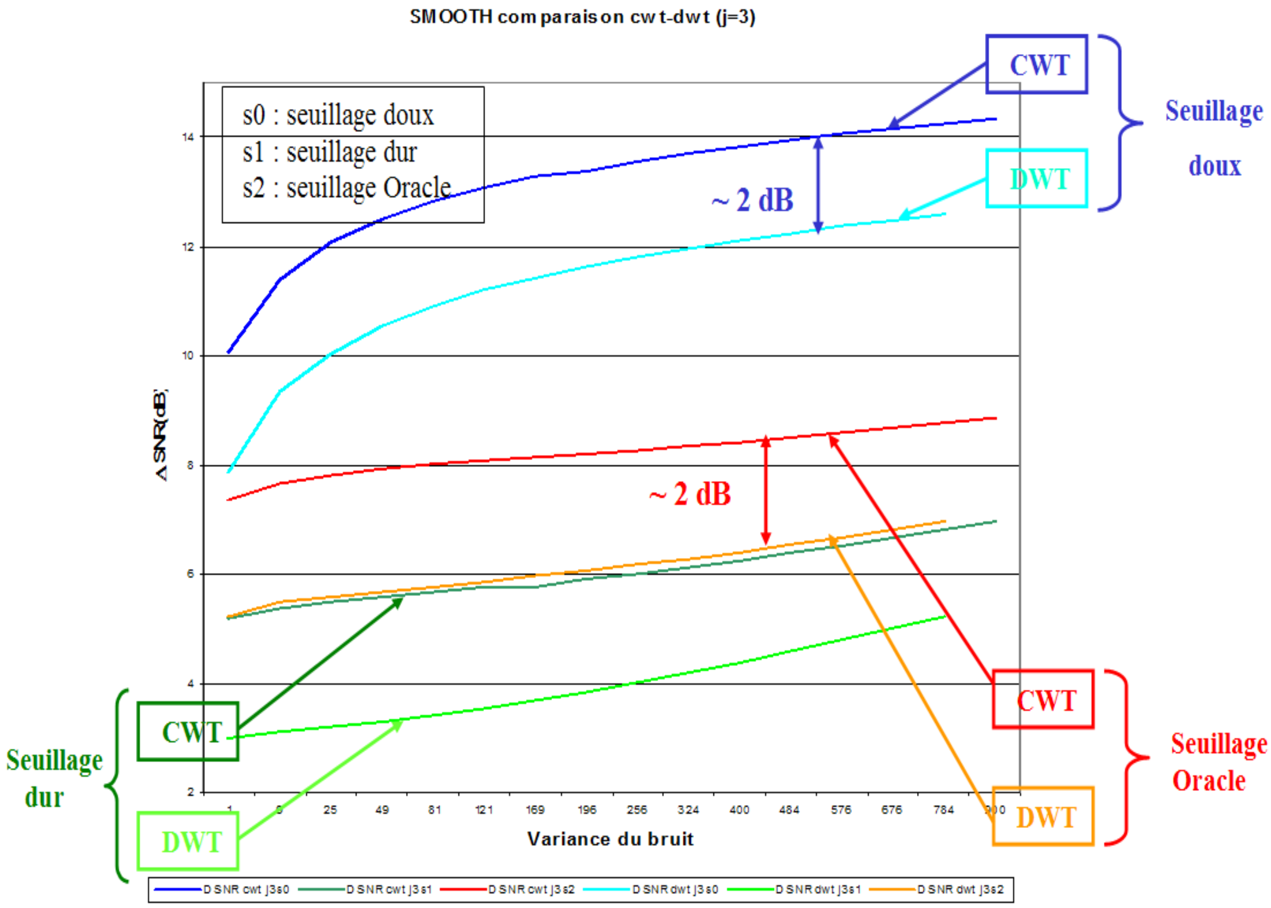


FIG. 4.1 – Débruitage de l'image SMOOTH par le modèle CWT et DWT pour les différentes fonctions de seuillage (doux, dur et Oracle) avec trois échelles de décomposition dans la transformée en ondelettes ($j = 3$).

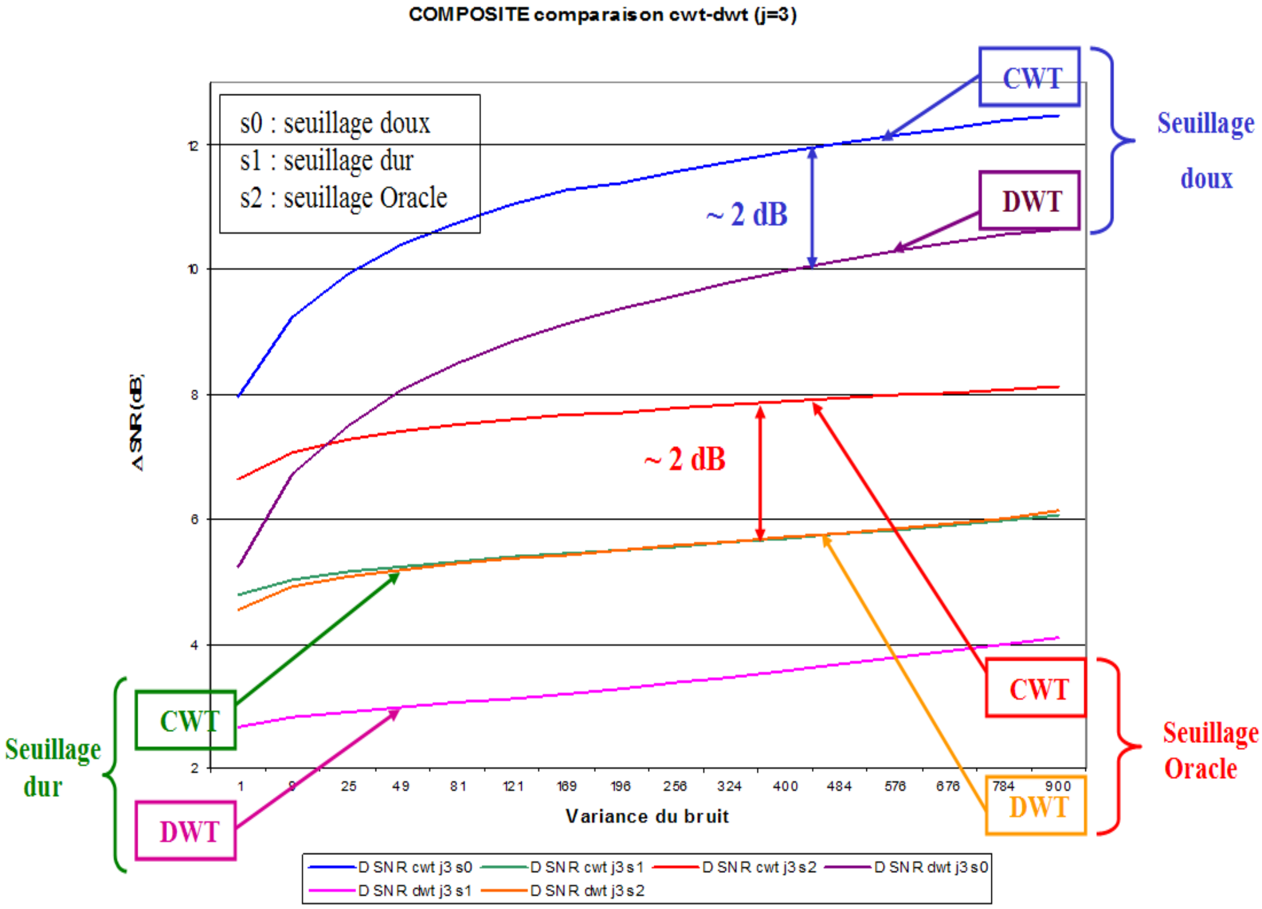


FIG. 4.2 – Débruitage de l'image COMPOSITE par le modèle CWT et DWT pour les différentes fonctions de seuillage (doux, dur et Oracle) avec trois niveaux de décomposition dans la transformée en ondelettes ($j = 3$).

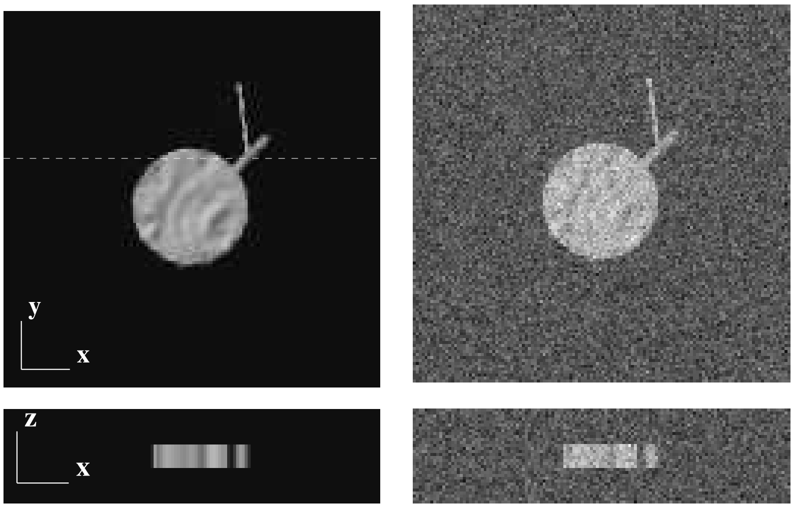
Nous pouvons remarquer, d'après les figures 4.1 et 4.2, que la méthode de débruitage par CWT est quantitativement meilleure comparée à DWT, avec un gain approximativement constant de $2dB$ pour toutes les valeurs de variance. Ce résultat correspond à la différence entre le résultat de seuillage par transformée en ondelettes réelles avec et sans décimation. Nous pouvons aussi conclure que la fonction de seuillage, qui s'adapte le mieux à ces images, est le seuillage doux. Par exemple pour l'image SMOOTH, dans le cas CWT pour $\sigma^2 = 324$, on obtient :
- $\Delta SNR = 13,7dB$ pour le seuillage doux,
- $\Delta SNR = 8,33dB$ pour le seuillage Oracle,
- $\Delta SNR = 6,12dB$ pour le seuillage dur

Le seuillage doux donne les meilleurs résultats, suivi du seuillage Oracle, et finalement le seuillage dur, qui donne significativement les plus mauvais résultats.

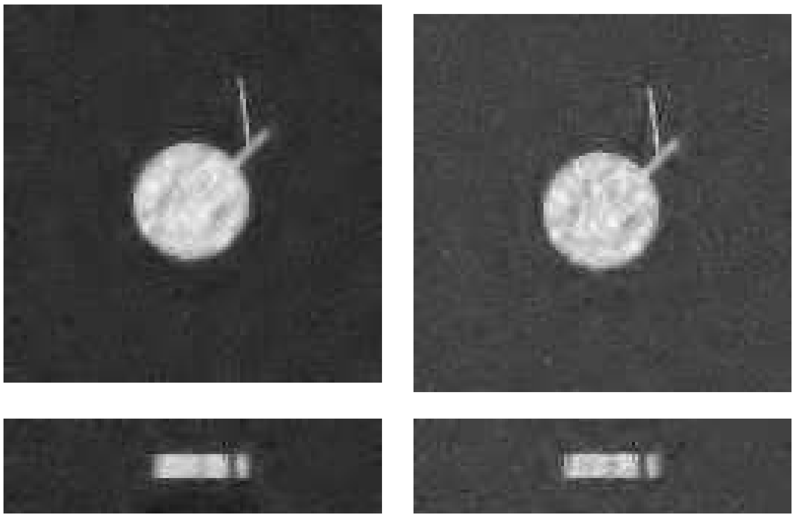
Afin de valider visuellement la qualité des algorithmes, nous allons observer les images synthétiques débruitées. La figure 4.3 (a) montre une coupe ($z = 14$) de l'image originale SMOOTH, (b) l'image bruitée de variance $\sigma^2 = 900$, les images restaurées de cette coupe (c) par CWT et (d) par DWT. Nous réalisons trois niveaux de décomposition en ondelettes et nous utilisons la fonction de seuillage doux, car nous avons vu dans le cas précédent qu'elle donne les meilleurs résultats. Nous partons d'un $SNR_{initial} = -1,20dB$. Les résultats obtenus par les deux algorithmes que nous comparons sont les suivants : l'image débruitée par CWT a un $SNR = 13,12dB$ ($\Delta SNR = 14,32dB$ par rapport au $SNR_{initial}$) tandis que l'image débruitée par DWT a un $SNR = 11,45dB$ ($\Delta SNR = 12,65dB$).

Il est à noter que, sur la figure 4.3 (d), les contours ne sont pas très bien reconstruits, il y a des oscillations significatives au niveau des contours, tandis que sur la figure (c) les contours sont plus nets. Ceci est dû à la décimation effectuée par la DWT. Comparée à une transformée en ondelettes réelles non décimée, la CWT a une redondance réduite de (8 :1) en 3D alors qu'elle est de (32 :1) pour 3 niveaux de décomposition. De plus, la CWT prend mieux en compte et donc préserve mieux les structures diagonales.

La figure 4.4 (a) montre une coupe ($z = 31$) de la séquence originale COMPOSITE, (b) l'image bruitée de variance $\sigma^2 = 900$, (c) les images restaurées de cette coupe par CWT et (d) par DWT. Nous réalisons trois échelles de décomposition en ondelettes et nous utilisons la fonction de seuillage doux. Nous partons



(a) (b)



(c) (d)

FIG. 4.3 – Débruitage d'une image texturée avec une structure fine. La première ligne représente la vue XY de l'image, et la seconde ligne représente la vue XZ (prise par la ligne pointillée de la figure (a)). **(a)** : image originale (coupe $z = 14$) ; **(b)** : image bruitée avec $\sigma^2 = 900$; **(c)** : image débruitée par CWT avec $\Delta SNR = 14,32dB$; **(d)** : image débruitée par DWT avec $\Delta SNR = 12,65dB$.

d'un $SNR_{initial} = 2,87dB$. Les résultats obtenus par les deux algorithmes pour cette image sont les suivants : l'image débruitée par CWT a un $SNR = 15,36dB$ ($\Delta SNR = 12,49dB$ par rapport au $SNR_{initial}$) tandis que l'image débruitée par DWT a un $SNR = 13,49dB$ ($\Delta SNR = 10,62dB$).

Du point de vue qualitatif, on voit que la figure 4.3 (c) est mieux débruitée, en particulier les zones homogènes sont plus lisses que sur la figure sur la figure 4.3 (d).

Nous utilisons par la suite exclusivement l'algorithme par CWT et nous observons la sensibilité de l'algorithme de débruitage par CWT (cf. figure 4.5 et 4.6) à différents niveaux de décomposition et pour différentes fonctions de seuillage. Comme dans le cas précédent, nous faisons varier la variance du bruit gaussien, et nous obtenons comme mesure de qualité l'incrément de SNR en dB pour chaque expérience réalisée.

Les résultats obtenus par les différentes fonctions de seuillage utilisées sont cohérents par rapport à nos prévisions. Nous remarquons que, pour chaque profondeur de décomposition, il y a trois groupes de courbes bien différenciés qui correspondent aux différents seuillages (doux, Oracle et dur). Pour chaque type de seuillage, les courbes sont très proches ce qui signifie que les résultats de l'algorithme pour différentes profondeurs de décomposition sont semblables. Néanmoins, les résultats sont toujours légèrement meilleurs pour $j = 3$ et, c'est donc, la valeur que l'on va prendre pour l'algorithme.

La figure 4.7 représente une image 3D de quatre billes fluorescentes de $6\,\mu$m, image acquise par microscope confocal à l'Institut Pasteur à Paris. La figure 4.7 présente aussi la restauration de ces billes. L'image originale est surtout bruitée et le débruitage par CWT améliore beaucoup la qualité de l'image.

4.2 Déconvolution

Un problème important dans la restauration des images est d'évaluer quantitativement le degré de restauration réalisée avec un algorithme de déconvolution. On voudrait pouvoir mesurer le gain en résolution et la fiabilité de l'image reconstituée, par rapport à l'acquisition originale, et décider quelle est la meilleure restauration réalisable avec un algorithme donné. L'obstacle principal est que l'image dégradée est la seule information disponible, ainsi qu'une connaissance approximative de la

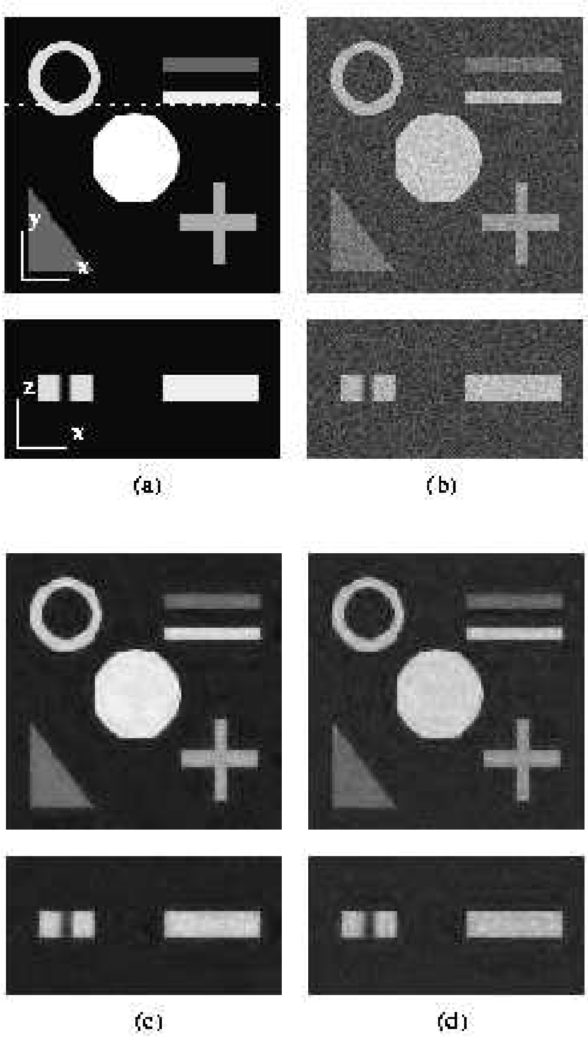


FIG. 4.4 – Débruitage d'une image synthétique composée de différents objets à différentes intensités : 255 pour le cylindre, 221 pour l'anneau, 170 pour la croix, 102 pour le triangle, 238 et 102 pour le signe égal, et 10 pour le fond. La première ligne représente la vue XY de l'image, et la seconde ligne représente la vue XZ (prise par la ligne pointillée de la figure (a)). **(a)** : image originale (coupe $z = 31$) ; **(b)** : image bruitée avec $\sigma^2 = 900$; **(c)** : image débruitée par CWT avec $\Delta SNR = 15,36dB$; **(d)** : image débruitée par DWT avec $\Delta SNR = 13,49dB$.

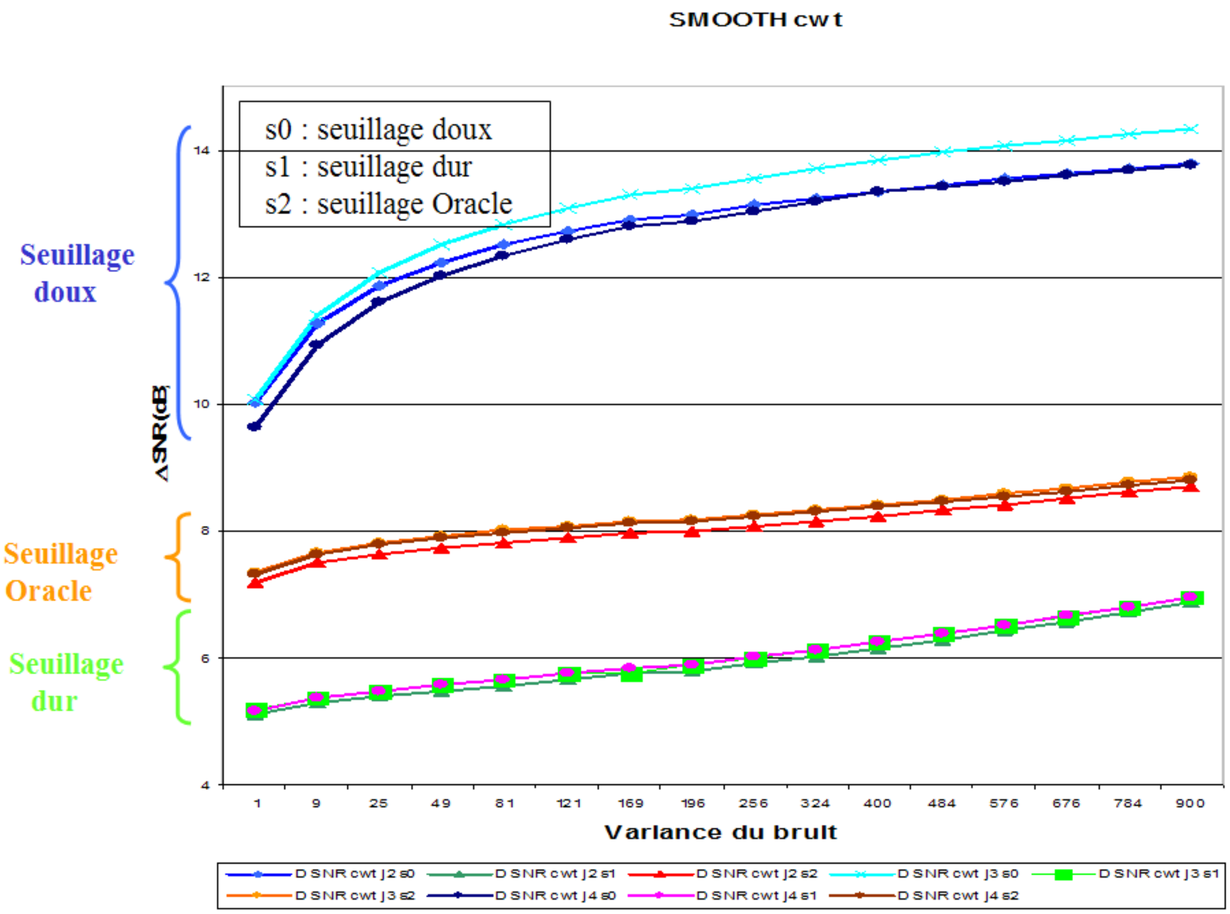


FIG. 4.5 – Débruitage de l'image SMOOTH par le modèle CWT pour les différentes fonctions de seuillage (doux, dur et Oracle) et pour les différents niveaux de décomposition dans la transformée en ondelettes ($j = 2, 3, 4$).

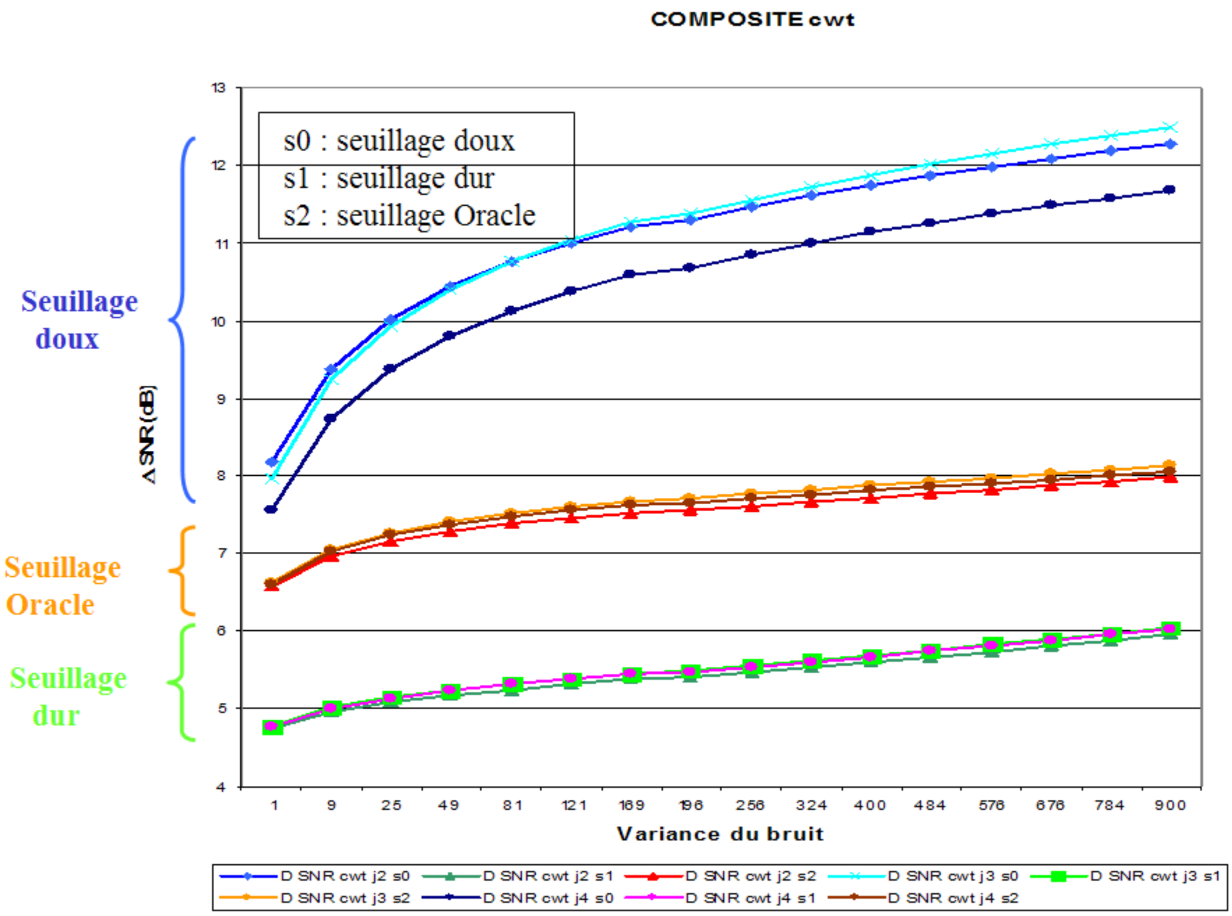
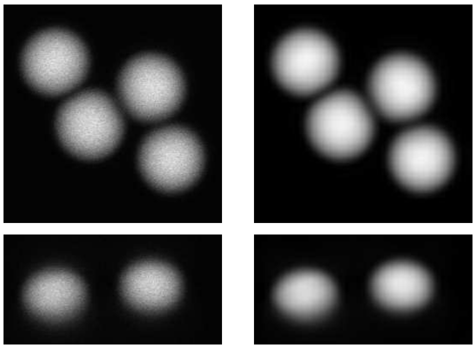


FIG. 4.6 – Débruitage de l'image COMPOSITE par le modèle CWT pour les différentes fonctions de seuillage (doux, dur et Oracle) et pour les différents niveaux de décomposition dans la transformée en ondelettes ($j = 2, 3, 4$).



(a) (b)

FIG. 4.7 – Débruitage par la CWT de quatre billes fluorescentes de $6\,\mu$m. Le volume de l'image est de 256x256x128 pixels avec une fréquence d'échantillonnage de 89 nm par pixel en XY et de 230nm par pixel en Z. Le microscope utilisé est un confocal / multi-photon Zeiss Axiovert 200M avec un objectif de 63x, $N.A. = 1.4$. L'indice de réfraction d'huile est 1.518 (23^{o}C). **(a)** : image originale ; **(b)** : débruitage par la CWT ; (@ Institut Pasteur).

formation du système de l'image via la PSF. Il n'est donc pas évident de mesurer la qualité d'une restauration proposée à moins d'avoir déjà une connaissance a priori forte de la solution, ce qui arrive rarement.

4.2.1 Réponse impulsionnelle (PSF)

Les méthodes de déconvolution en imagerie microscopique requièrent, en général, une connaissance précise de la fonction d'appareil, également appelée réponse impulsionnelle (PSF) qui caractérise le microscope dans divers contextes expérimentaux et qui définit les dégradations introduites par les différents éléments de l'ensemble système optique / échantillon. Plusieurs approches sont possibles pour obtenir cette fonction. Le modèle que nous avons utilisé [33] pour la déconvolution s'écrit de la façon suivante :

$$h(X,Y,Z) = \left| A_R(X,Y) * \hat{P}_{\lambda_{em}}(X,Y,Z) \right|^2 . \left| \hat{P}_{\lambda_{ex}}(X,Y,Z) \right|^2 \tag{4.5}$$

La longueur d'onde d'excitation est λ_{ex} (et d'émission, λ_{em}). A_R est l'ouverture circulaire qui caracterise le sténopé de rayon R. $\hat{P}_\lambda(X,Y,Z)$ est la transformée de

Fourier 2D en (X,Y) [31, 32] de la fonction de la pupille P_λ pour une longueur d'onde λ donnée par [2, 10, 12] :

$$P_\lambda(U, V,\ Z) = \Pi_\rho\left(\sqrt{U^2 + V^2}\right).e^{\frac{2i\pi}{\lambda}.W_{lpe}(U,V,Z)} \tag{4.6}$$

Le terme complexe $W_{lpe}(U, V, Z)$ est l'aberration de phase [2] dérivée de [6, 12] et ρ est la fréquence de coupure latérale. La phase W_{lpe} ne dépend que du défaut de focalisation. Ce modèle théorique de la PSF confocale ne prend pas en compte les aberrations géométriques (par exemple sphérique) de l'objectif, ni la diffraction induite par l'indice de réfraction.

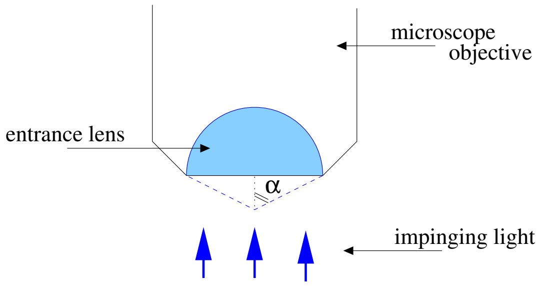


Fig. 4.8 – L'ouverture numérique $NA = n_o \sin\alpha$ est liée à la quantité de lumière qui entre dans le microscope. Il correspond au demi-angle du rayon maximum de la lumière qui pourrait entrer dans l'objectif selon la loi de Snell [2, p.40].

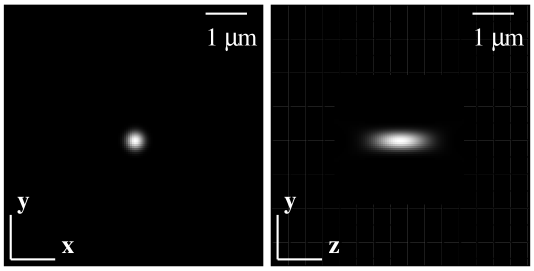
Le modèle tient compte de la taille finie du sténopé utilisé pour l'acquisition de l'image. Il est représenté ici par la distribution $A_R(X, Y)$. Nous avons représenté le modèle de PSF sur la figure 4.9.

4.2.2 Évaluation d'images restaurées

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats de déconvolution avec des images synthétiques et des images biologiques réelles. Nous proposons un algorithme de déconvolution fondé sur la CWT, appelé 3D-TOCSE 2 pour "images tridimensionnelles **T**ransformée en **O**ndelettes **C**omplexes **S**euillage". Le schéma de déconvolution 3D-TOCSE 2 est le suivant :

1. FFT de l'observation Y.

[2] "lpe" représente "length path error". C'est la différence de front des ondes du chemin entre un faisceau focalisé et un faisceau défocalisé [2, 37].



(a) (b)

FIG. 4.9 – La PSF calculée avec le modèle définit par l'équation 4.5. Nous la représentons avec le même échantillonnage dans chaque direction pour indiquer le rapport de 1 : 3 habituellement observé par un microscope confocal entre les directions (X,Y) et Z. Nous employons cette PSF pour simuler le flou des images synthétiques et pour déconvoluer les images synthétiques et réelles. Pour les calculs, nous l'employons avec les valeurs d'échantillonnage de la pile de l'image 3D considérée.

2. Déconvolution : division par l'OTF (*Optical Transfert function* en anglais) qui est la transformée de Fourier de la PSF, si l'$OTF \neq 0$, zéro sinon.
3. FFT inverse qui donne X.
4. Transformée en ondelettes complexes (CWT) 3D de X.
5. Estimation de la variance σ_k^2 du bruit déconvolué des sous-bandes.
6. Seuillage doux des coefficients des ondelettes avec un seuil $T_k = 1.6\sigma_k$ pour chaque sous-bande.
7. Transformée inverse en ondelettes complexes
8. Interprétation des résultats.

L'agorithme que l'on vient de décrire est réalisable si l'OTF n'a pas de zéros, car sinon on perd trop d'information sur l'image. Le débruitage par ondelettes ne récupère aucune des informations provenant des fréquences nulles. La question posée ici est de savoir si cet algorithme est bien adapté à la PSF du microscope confocal.

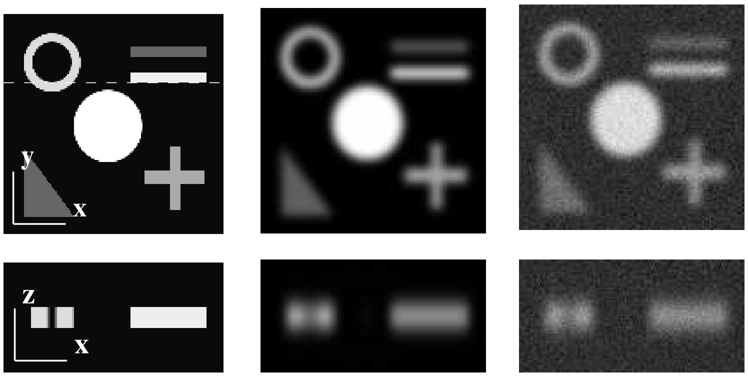
Le bruit joue un rôle très important dans la déconvolution par inversion directe du filtre. Dès qu'il y a un peu de bruit, l'image déconvoluée explose. Pour regarder l'influence du bruit on a réalisé des expériences avec des images dégradées par la

PSF, sans bruit et avec bruit. Ensuite, on a analysé les résultats de la déconvolution à différentes valeurs de ϵ, ϵ étant la valeur maximale permise du dénomitateur lorsque que l'on réalise la déconvolution :

$$FFT(X) = \begin{cases} \frac{FFT(Y)}{OTF} & \text{si } |OTF| \geq \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.7}$$

où Y est l'image observée dégradée et X est l'image que l'on cherche.

Nous nous servons des images de la figure 4.10 pour réaliser les tests de la déconvolution. La figure 4.10 (a) montre l'image synthétique originale, (b) l'image dégradée par la PSF décrite dans le paragraphe 4.2.1 et (c) l'image dégradée par la PSF et par un bruit gaussien de variance $\sigma^2 = 100$.



(a) (b) (c)

FIG. 4.10 – **(a)** : image synthétique de taille 128x128x64 et 250x250x600 nm en X, Y et Z ; **(b)** : image floue (convoluée par la PSF) ; **(c)** : image floue et bruitée avec $\sigma^2 = 100$.

Le résultat de la déconvolution de l'image floue (cf. figure 4.10 (b)) à différents ϵ est représenté par l'image 4.11 (a) pour $\epsilon = 0$ et (d) pour $\epsilon = 0.001$. Ainsi, le résultat de la déconvolution de l'image floue et bruitée (cf. figure 4.10 (c)) est représenté par l'image 4.11 (b) pour $\epsilon = 0$ et (e) pour $\epsilon = 0.001$. Si $\epsilon = 0$ on laisse passer toutes les frequences de l'OTF, et donc, sans bruit, l'image 4.11 (a) montre la bonne qualité de la déconvolution de l'image 4.10 (b), ceci est possible numériquement car les zéros de l'OTF ne sont pas sur des points de discrétisation. Par contre, ces zéros existent. L'image 4.11 (d) montre le résultat de la déconvolution de l'image non bruitée 4.10 (b) avec $\epsilon = 0.001$. Les oscillations et le flou présents sur le résultat montrent qu'il existe des zones fréquentielles où l'OTF est presque nulle ($|OTF| < 0.001$). L'image 4.11 (b) montre le résultat quand l'image à déconvoluer est aussi bruitée. Après la déconvolution, on n'obtient que du bruit car la division par l'OTF amplifie énormement le bruit. Même après le débruitage, la figure 4.11 (c) montre que l'on ne peut pas récupérer l'information de l'image. Dans le cas où $\epsilon = 0.001$ (cf. figure 4.11 (d), (e) et (f)), on crée beaucoup de discontinuités dans le domaine fréquentiel en rajoutant des zéros et on obtient beaucoup d'oscillations dans les trois axes X, Y, Z. Cet effet est plus important dans l'image 4.11 (e) car l'image est aussi dégradée par le bruit. La figure 4.11 (f) montre le résultat après le débruitage. Ce résultat n'est pas satisfaisant.

Suite à ces simulations, on remarque que l'OTF contient trop de zéros et des valeurs très proches de zéro et ainsi l'inversion directe comme méthode de déconvolution n'est pas réalisable.

Une nouvelle méthode de déconvolution s'impose. L'algorithme de Richardson-Lucy (RL) avec régularisation par la Variation Totale (VT) proposé par N. Dey et al.[6] peut s'intégrer après l'algorithme de débruitage par la CWT. Richardson-Lucy avec régularisation appliqué sur des images bruitées donne des résultats sur lesquels certaines informations de l'image sont perdues, du fait de la régularisation importante que l'on est obligé d'effectuer. Diminuer le bruit sur l'image initiale tout en conservant les informations pertinentes de l'image permet d'utiliser l'algorithme de Richardson-Lucy avec une régularisation dans de meilleures conditions (faible régularisation).

La figure 4.13 montre un embryon de Drosophile en train de réaliser la fermeture dorsale, processus similaire à la cicatrisation. Les résultats de la déconvolution de RL-VT après débruitage par la CWT sont présentés dans les figures 4.12 et 4.13. La variation totale minimise la somme des longueurs de lignes de niveau. Dans le cas des images synthétiques (cf. figure 4.12), les coins sont arrondis. Dans l'image réelle (cf. figure 4.13), on perd à convergence de l'information au niveau des courbes de l'image de type filaments. En effet, la régularisation par Variation Totale n'est pas adaptée à ce type d'objet.

Avant de conclure, remarquons qu'un algorithme de déconvolution avec régularisation par Variation Totale mais additif, en supposant que le bruit résiduel est gaussien, peut donner de meilleurs résultats en améliorant le compromis déconvolu-

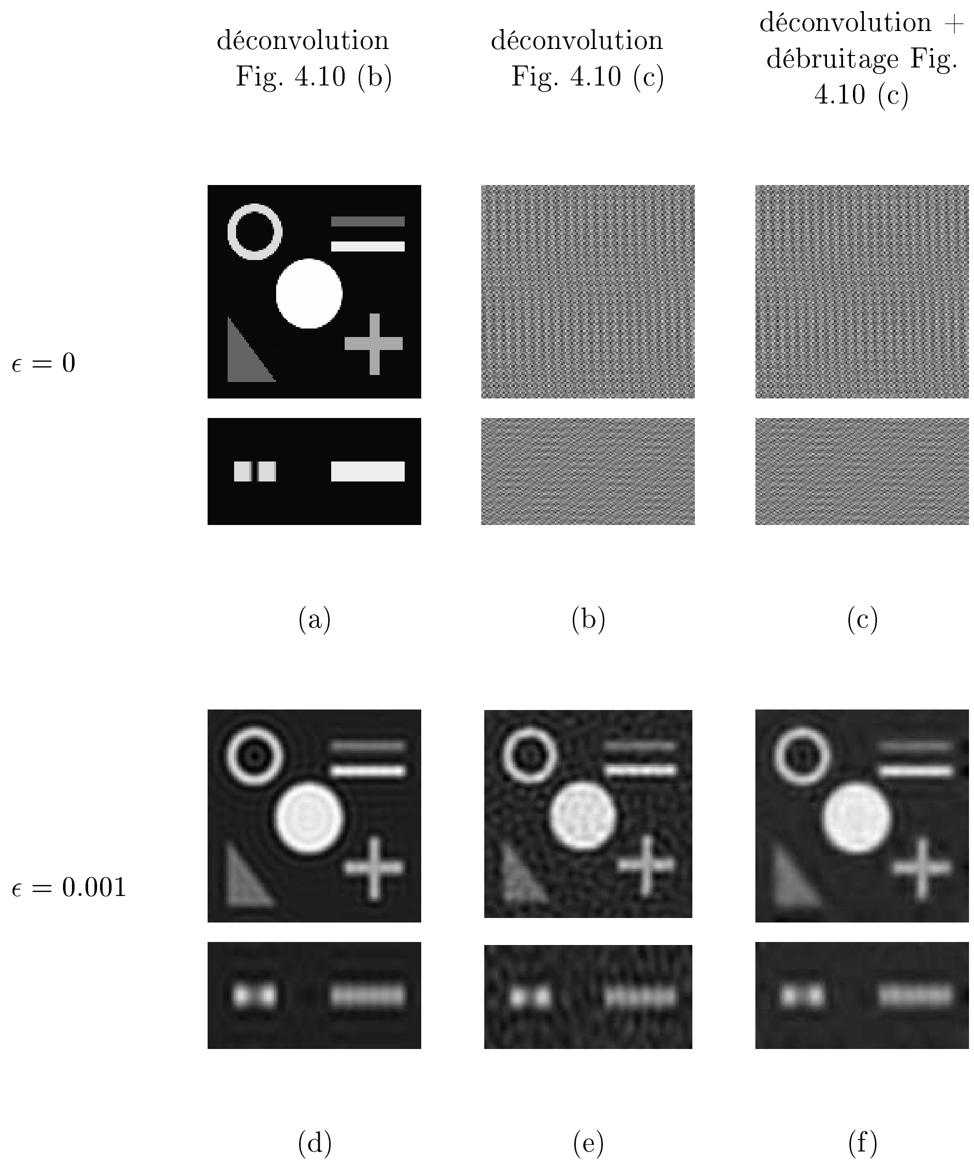


FIG. 4.11 – Déconvolution des images synthétiques dégradées. La première ligne représente les résultats pour $\epsilon = 0$ et la deuxième pour $\epsilon = 0.001$. **(a)** : déconvolution de la figure 4.10 (b) pour $\epsilon = 0$; **(b)** : déconvolution de la figure 4.10 (c) pour $\epsilon = 0$; **(c)** : déconvolution ($\epsilon = 0$) + débruitage par CWT de la figure 4.10 (c) ; **(d)** : déconvolution de la figure 4.10 (b) pour $\epsilon = 0.001$; **(e)** : déconvolution de la figure 4.10 (c) pour $\epsilon = 0.001$; **(e)** : déconvolution ($\epsilon = 0.001$) + débruitage par CWT de la figure 4.10 (c).

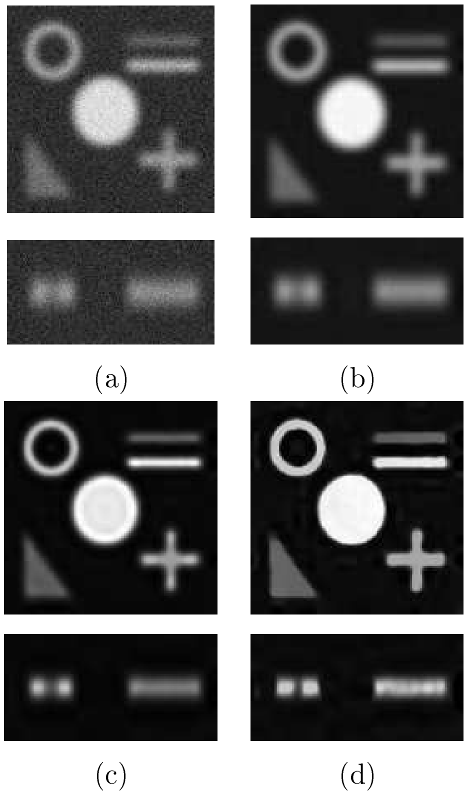


FIG. 4.12 – Débruitage par la CWT + déconvolution RL-VT des images synthétiques dégradées. **(a)** : image simulée floue et bruitée ; **(b)** : débruitage par la CWT ; **(c)** : débruitage par la CWT + RL-VT avec $\lambda = 0.002$ après 25 itérations ; **(d)** : débruitage par la CWT + RL-VT avec $\lambda = 0.002$ après 666 itérations (convergence).

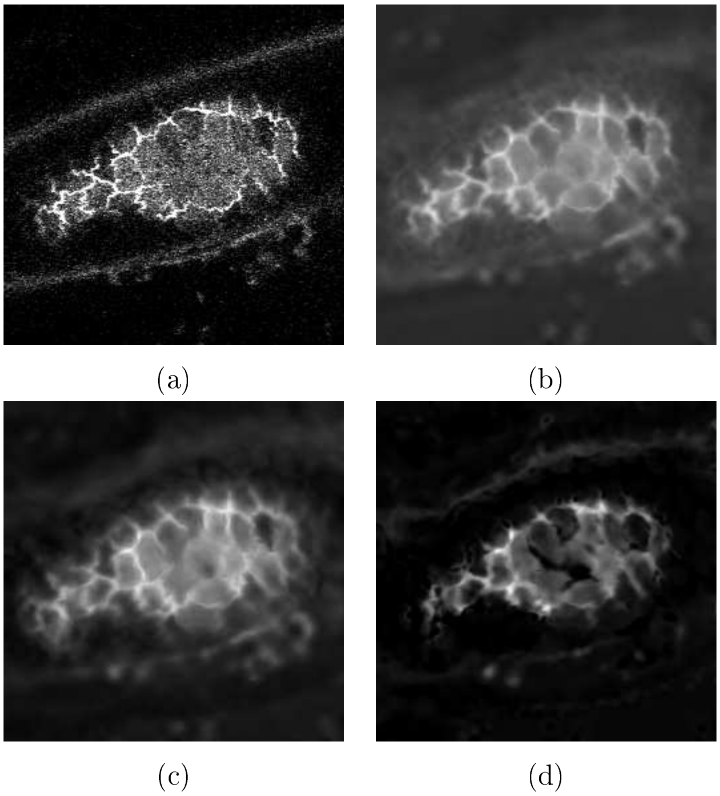


FIG. 4.13 – Débruitage par la CWT + déconvolution RL-VT d'un embryon de Drosophile en train de réaliser la fermeture dorsale. Le volume de l'image est de 256x256x30 pixels. Le microscope utilisé est un Zeiss Axiovert 200 avec un objectif de 40x, $N.A. = 1.3$. **(a)** : image originale ; **(b)** : débruitage par la CWT ; **(c)** : débruitage par la CWT + RL-VT avec $\lambda = 0.0002$ après 25 itérations ; **(d)** : débruitage par la CWT + RL-VT avec $\lambda = 0.0002$ après 1395 itérations (convergence). (© UMR 6543 CNRS/UNSA).

tion / préservation des objets présents dans l'image. Ceci sera testé dans une étude future.

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Conclusion

Dans ce rapport, nous nous sommes attachés à mettre en oeuvre de nouvelles méthodes de débruitage et de déconvolution d'images biologiques confocales tridimensionnelles.

Nous avons étudié la transformée en ondelettes complexes introduite par N. Kingsbury et ses avantages par rapport à la transformée en ondelettes réelles. Nous avons réalisé l'extension au cas tridimensionnel de cette transformée pour l'adapter au problème de l'imagerie biologique.

La partie concernant le débruitage d'images synthétiques met en evidence l'efficacité de l'algorithme de débruitage par la CWT-3D proposée. Cette méthode (CWT) a donné de très bons résultats aussi bien du point de vue du SNR que pour l'évaluation qualitative.

Nous avons proposé une méthode de déconvolution fondée sur la transformée en ondelettes complexes 3D. L'algorithme 3D-TOCSE 2 réalise d'abord une inversion directe du filtre, puis le débruitage par la CWT. Les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants, du fait des zéros de l'OTF.

Une nouvelle méthode a été présentée pour inverser l'OTF en tenant compte des zéros qu'elle contient. L'algorithme de Richardson-Lucy avec régularisation par la Variation Totale proposé par N. Dey [6] a été intégré après l'algorithme de débruitage par la CWT.

Perspectives

D'une part, il serait intéressant d'étudier le comportement du débruitage d'images biologiques déconvoluées en adaptant les filtres des ondelettes complexes aux différents échantillonnages des axes X, Y et Z. En effet, la résolution en Z est plus faible qu'en XY et il conviendrait d'en tenir compte. Ainsi, l'utilisation d'une transformée en paquets d'ondelettes (CWP) pourrait être envisagée, comme cela a été fait par A. Jalobeanu et al. dans le cas bidimensionnel [14] en imagerie satellitaire et aérienne. Cette transformée consiste à décomposer à chaque échelle les approximations, mais aussi les détails à partir de la première échelle de décomposition.

La technique proposée est construite autour d'un modèle de bruit blanc gaussien. Or, en microscopie confocale, cette propriété est une approximation, le bruit suivant une loi de Poisson. Il convient donc d'évaluer l'influence de cette approximation et de tenir compte de la statistique de Poisson si l'approximation ne peut être faite. Le modèle d'observation doit donc être modifié en conséquence pour tenir compte de cette statistique.

L'algorithme 3D-TOCSE 2 est particulièrement adapté aux OTF (transformée de Fourier de la PSF) sans zéros. Suite aux résultats, il semble adéquat de chercher une autre solution pour le type d'images traitées ici, ayant une OTF avec un nombre non nul de zéros. C'est dans ce sens qu'il faudrait construire des algorithmes hybrides. Nous envisageons, comme dans les travaux de A. Martin en astrophysique [26], de combiner une déconvolution itérative de Richardson-Lucy avec un débruitage par ondelettes complexes. Ainsi, à chaque itération, le bruit amplifié par la déconvolution serait corrigé par le seuillage des ondelettes complexes.

D'une manière plus générale, l'algorithme par ondelettes préserve des détails fins mais produit des oscillations sur les contours (ici atténuées), tandis que l'algorithme de régularisation par Variation Totale réalise un bon lissage et obtient des contours nets, mais perd des détails fins. Un certain nombre de travaux on été faits ces dernières années pour tirer avantage des deux approches (cf. [1, 9, 22, 35] et nos recherches futures se situeront dans ce contexte pour la déconvolution en imagerie biologique.

Bibliographie

[1] J. Bect, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and A. Chambolle. A l^1-unified variational framework for image restoration. In T. Pajdla et J. Matas, editor, *ECCV 2004*, volume IV of *Springer Lecture Notes in Computer Science 3034*, pages 1–13, 2004.

[2] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics.* Cambridge University Press, 7th (expanded) edition, 1999.

[3] J.-A. Conchello and Q. Yu. Parametric blind deconvolution of fluorescence microscopy images : preliminary results. In *Proceedings of the 1996 IS&T/SPIE symposium on electronic imaging : Science and technology*, pages 164–174, Avril 1996.

[4] J. Boutet de Monvel, S. Le Calvez, and M. Ulfendahl. Image Restoration for Confocal Microscopy : Improving the Limits of Deconvolution, with Application to the Visualization of the Mammalian Hearing Organ. *Biophysical Journal*, 80 :2455–2470, Mai 2001.

[5] N. Dey, L. Blanc-Féraud, C. Zimmer, Z. Kam, J.-C. Olivo-Marin, and J. Zerubia. A deconvolution method for confocal microscopy with total variation regularization. In *Proceedings of ISBI'2004*, Avril 2004.

[6] N. Dey, L. Blanc-Féraud, C. Zimmer, P. Roux, Z. Kam, J.-C. Olivo-Marin, and J. Zerubia. 3D Microscopy Deconvolution using Richardson-Lucy Algorithm with Total Variation Regularization. *Rapport de Recherche INRIA 5272*, Juillet 2004.

[7] D.L. Donoho. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 2 :101–126, 1995.

[8] D.L. Donoho and I.M.Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.

[9] S. Durand and J. Froment. Reconstruction of wavelet coefficients using total variation minimization. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 24(5) :1754–1767, 2003.

[10] A.R. FitzGerrel, E.R. Dowski, and W. T. Cathey. Defocus transfer function for circularly symmetric pupils. *Applied Optics*, 36(23) :5796–5804, Août 1997.

[11] M. Fligge and S. Solanski. Noise reduction in astronomical spectra using wavelet packets. *Astronomy Astrophys. Suppl. Ser.*, 124 :579–587, 1997.

[12] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics.* McGraw-Hill Book Company, 2nd edition, 1996.

[13] D. Hubel. *Eye, brain, and vision.* Scientific american Library, 1988.

[14] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, and J. Zerubia. Satellite image deconvolution using complex wavelet packets. *Rapport de recherche INRIA 3955*, Septembre 2000.

[15] J. Kalifa. Restauration minimax et déconvolution dans une base d'ondelettes miroirs. *Thèse de Doctorat, École Polytechnique*, Mai 1999.

[16] J. Kalifa and S. Mallat. Wavelet packet deconvolutions. *Rapport technique, CMAP, Ecole Polytechnique*, 1998.

[17] N. Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform : a new efficient tool for image restoration and enhancement. *Proc. of EUSIPCO, Rhodes, Greece*, pages 319–322, 1998.

[18] N. Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform : a new technique for shift invariance and directional filters. *8th IEEE DSP Workshop, Bryce Canyon UT, USA*, 1998.

[19] N. Kingsbury. Image processing with complex wavelets. *Phil. Trans. Royal Society London A.*, pages 2543–2560, 1999.

[20] N. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 10 :234–253(20), Mai 2001.

[21] L.B. Lucy. An iterative technique for rectification of observed distributions. *The Astronomical Journal*, 79(6) :745–765, 1974.

[22] F. Malgouyres. Minimizing the total variation under a general convex constraint for image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(12) :1450–1456, 2002.

[23] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Image Processing.* Academic Press, New York, 1999.

[24] J. Markham and J.-A. Conchello. Parametric blind deconvolution : a robust method for the simultaneous estimation of image and blur. *Jour. of Opt. Soc.of A.*, 16(10) :2377–2391, Octobre 1999.

[25] J. Markham and J.-A. Conchello. Fast maximum-likelihood image-restoration algorithms for three-dimensional fluorescence microscopy. *Jour. of Opt. Soc.of A.*, 18(5) :1062–1071, 2001.

[26] A. Martin. Restoration of astronomical images affected by a Poisson noise. *Rapport de stage, Observatoire de Nice, Département CERGA, URA CNRS 6527*, 2003.

[27] J-L. Olivès. Optimisation globale d'un système imageur à l'aide de critères de qualité visuelle. *Thèse de Doctorat, ONERA CERT, France*, September 1998.

[28] G. Pons, L. Blanc-Féraud, and Zerubia. A restoration method for confocal microscopy using complex wavelet transform. *ICASSP, Philadelphie, USA*, 2005.

[29] W. H. Richardson. Bayesian-based iterative method of image restoration. *Jour. of Opt. Soc.of A.*, 62 :55–59, 1972.

[30] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.

[31] C.J.R. Sheppard. The spatial frequency cut-off in three-dimensional imaging. *Optik*, 72(4) :131–133, 1986.

[32] C.J.R. Sheppard. The spatial frequency cut-off in three-dimensional imaging II. *Optik*, 74(3) :128–129, 1986.

[33] C.J.R. Sheppard and C.J. Cogswell. Three-Dimensional Image Formation in Confocal Microscopy. *J. of Microscopy*, 159 :179–194, Août 1990.

[34] E. Simoncelli, W. Freeman, E. Adelson, and D. Heeger. Shiftable multi-scale transforms. *MIT Media Laboratoy Vision and Modeling Technical Report 161*, Fevrier 1991.

[35] J. L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. Multiresolution support applied to image filtering and restoration. *Graphical Models and Image Processing*, 57(5) :420–431, 1995.

[36] J.L. Starck and A. Bijaoui. Filtering and deconvolution by the wavelet transform. *Signal Processing*, 35 :195–211, 1994.

[37] P.A. Stokseth. Properties of a defocused optical system. *Jour. of Opt. Soc.of A.*, 59(10) :1314–1321, Octobre 1969.

[38] J.-O. Strömberg. Wavelets and application to medical images. *Proc. SSAB' 97 : Swedish Symp. Image Anal.*, pages 110–113, 1997.

[39] F. Tran-Minh. Comparaison de méthodes de déconvolution d'images satellitaires. *Rapport de contrat INRIA/Astrium, Projet Ariana, INRIA Sophia Antipolis*, Août 2001.

[40] G.M.P. van Kempen, H.T.M. van der Voort, and L.J. van Vliet. A quantitative comparison of two restoration methods as applied to confocal microscopy. In *Proceedings of ASCI'96, 2nd Annual Conference of the Advanced School for Computing and Imaging*, pages 196–201, Juin 1996.

[41] G.M.P. van Kempen, L.J. van Vliet, P.J. Verveer, and H.T.M van der Voort. A quantitative comparison of image restoration methods for confocal microscopy. *J. of Microscopy*, 185 :354–365, Mars 1997.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399