# ÉTUDE ET SIMULATION DU PHÉNOMÈNE D'ATTENTE DANS L'AUTOROUTE (ZONE DE PÉAGE)

Houda Mehri, Djemel Taoufik

# ETUDE ET SIMULATION DU PHENOMENE D'ATTENTE DANS L'AUTOROUTE (ZONE DE PEAGE)

H. Mehri[1] , Djemel Taoufik[2]

*1.2 Unité de recherche en gestion industrielle et aide à la décision (GIAD), route de L'Aérodrome Km 4.5 BP 1088, Sfax, 3018*

*mehri_houda@yahoo.fr*

**RÉSUMÉ.** Des tests d'ajustements sur les intervalles de temps entre les arrivées et les durées de Service d'une étude de cas ont abouti au modèle M/ $\Gamma(\alpha,\beta)$/c. Il n'existe pas de formules analytiques pour calculer les mesures de performance d un tel modèle. Nous généralisons la formule de Pollazeck-Khitchinne pour établir des formules approximatives de ces mesures et nous présentons un simulateur pour calculer les mesures de performance des modèles de file A/B/c où A,B appartiennent à l'ensemble des distributions {Déterministe, Exponentielle, Erlang, Gamma}.Nous vérifions la théorie selon laquelle le type d'organisation de la file (une file unique pour tous les serveurs ou multiple files avec une file devant chaque serveur) n'influence pas les mesures de performance du système d'attente routier.

.

**MOTS-CLÉS:** Files d'attente, analyse statistique, simulation multi agent, distribution exponentielle, distribution Gama.

## 1. Introduction

La Théorie des files d'attente est une technique de la Recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions. Des résultats et formulations théoriques sont bien établis pour les modèles de files d'attente avec arrivées poissonnières et durées de services exponentielles (M/M/c) .Mais pas pour tous les systèmes tels que ceux avec arrivées poissonnières et durées de services non exponentielles M/G/c dont l étude analytique est très complexe.

Nous proposons dans ce travail une généralisation de la formule de Pollazeck-Kitchinne pour établir les mesures de performances du modèle M/G/c. Notre application numérique est basée sur une étude de cas d'un système de péage de l'autoroute dont les tests statistiques sur les arrivées et les durées de service ont montré que leurs distributions étaient respectivement poissonnières et Gamma; donc un modèle M/$\Gamma(\alpha,\beta)$/c.

Nous présentons un simulateur multi agent permettant d'implémenter tout système d'attente A/B/c où A, B appartiennent à l'ensemble des distributions {Déterministe, Exponentielle, Erlang, Gamma}.Ce simulateur est utilisé pour vérifier l'hypothèse selon laquelle dans un système de péage , le type d'organisation de la file d'attente (file unique pour tout les serveurs ou files multiples, une par serveur) n'influence pas les mesures de performances.

Le reste de travail est organisé comme suit. La section 2 présente brièvement les files d'attente routier; une étude de cas est faite à la section 3 suivie par la généralisation de la formule de Pollaczeck-khitchinne aux mesures de performances des modèles M/G/c à la section 4; Le simulateur est présenté à la section 5. La section 6 calcul et interprète les résultats et la section 7 conclut le travail.

## 2. Les files d'attente

Une file d'attente est constituée des clients qui demandent un service à un ou plusieurs serveurs et d'une salle d'attente. Le taux des clients qui arrivent et le taux de service par unité de temps sont respectivement notés $\lambda$ et $\mu$ .Un modèle de file d'attente est complètement décrit selon la notation de Kendall-lee par A/B/C/Disc/N/P où: A et B représentent les lois des processus des arrivées et des durées de services. Par convention, M signifie exponentielle, D déterministe, $\Gamma(\alpha,\beta)$ Gamma de paramètres $\alpha$ et $\beta$, et G une loi générale (quelconque). C'est le nombre de serveurs, Disc la discipline de service, N la capacité du système et P la taille de la population source. Lorsque les trois derniers paramètres facultatifs sont omis ils sont considérés FCFS où FCFS veut dire premier Arrivé premier servi (First Come, First served ). Les mesures de performances d'un modèle de file d'attentes sont : Le temps moyen de séjour d'un client dans le système (W), le temps d'attente moyen d'un client(Wq ), le temps de service moyen(Ws ), le nombre moyen de clients dans le système(L), le nombre moyen de clients dans la file d'attente(Lq ), le nombre moyen de clients en service(Ls ), le taux d'utilisation des serveurs ou intensité du trafic $\rho = \lambda / c .\mu$ (où c est le nombre de serveurs), Les probabilités d'équilibre noté Pn (probabilité d'avoir n client dans le système) et la probabilité d'attente $\Pi_\omega$ (probabilité qu'un client qui arrive attende avant d'être servi). Dans les autoroutes, deux grandes écoles se partagent le type d'organisation des files d'attente :(ii) type1, une unique file d'attente pour servir tous les guichets ; ce qui permet d'empêcher les clients de former eux même les files d'attente. (ii) type 2 chaque guichet a sa propre file d'attente laissant le client joindre la plus courte file.



## 3. Etude de cas

Pendant une période de deux semaines, nous avons effectué une collecte des données à l'autoroute Tunis-Msaken sur les arrivées des clients et Les durées des services. Le hall d'entrée de voitures où se trouvaient trois guichets (serveurs) étaient notre cadre d'étude. Les tests d'ajustement statistiques ont montré que par seconde, les arrivées étaient poissonnières de paramètre $\lambda = 0.015$ et les durées de service Gamma de paramètres $\alpha = 2.42$ et $\beta = 77.17$.

Contrairement aux modèles multiserveurs avec des arrivées poissonnières et des durées de services exponentielles M/M/c, ceux avec des distributions quelconques sont plus complexes à analyser. Aucun résultat théorique exact sur le calcul des mesures de performance des modèles M/G/c n'a été formellement établi et prouvé. Ivo Adan n'a proposé une approximation que de la durée moyenne d'attente pour ces modèles M/G/c. Les seules bonnes formulations théoriques rencontrées traitent des modèles n'admettant pas d'attente, à savoir le modèle $M/G/c/G_D/c/\infty$ avec perte de clients et le modèle $M/G/\infty$ avec un nombre infini de serveurs.

## 4. Approximation des mesures de performance des modèles M/G/c

D'après la formule de la valeur moyenne de Pollaczek-khintchinne, un nouveau client qui arrive doit attendre qu'un client en service complète son service et que tous les clients présents dans la file se servent avant d'être servi à son tour. Le temps d'attente moyen est alors définie par:

$$W_q = \rho E(R) + L_q E(B) \qquad [1]$$

Où R est le temps de service résiduel d'un client en service, B le temps de service et $\rho = \lambda/\mu$ la probabilité de trouver un client en service.

En accord avec Ivo Adan [1], nous supposons que le temps nécessaire pour vider la file d'attente avec c serveurs est c fois plus petit qu'avec un serveur, on obtient alors:

$$Wq = 1/c\ (\Pi_w E(R) + L_q E(B)) \qquad [2]$$

Où cette fois la probabilité qu'un client attende avant d'être servi est notée $\Pi_w$ (La valeur De $\Pi_w$ du modèle M/M/c peut être utilisée comme une approximation de $\Pi_w$ du modèle M/G/c).R est le temps de service résiduel et B le temps moyen de service.

D'après le théorème de Little $Lq = \lambda Wq$.

Comme $E(B) = 1/\mu$ nous avons :

$$W q \approx \Pi_w E(R) / c(1-\rho) \text{ avec } \rho = \lambda / c\mu \qquad [3]$$

## 5. Calcul des mesures de performances

### Calcul de L, $L_q$ ,et $L_s$

Nous utilisons deux tableaux d'entiers Lq et Ls. Un pas de simulation correspond à 100 ms (1/10secondes). Au $i^{ieme}$ pas on affecte à Lq [i] ( respectivement Ls [i] ) le nombre de clients dans la file d'attente Qsize (respectivement nombre de clients en service Ssize).

A la fin de la simulation nous avons:

$$L_q = \sum_{i=1}^{Tp} Lq(i) \,/\, T_p \quad ; \qquad L_s = \sum_{i=1}^{Tp} Ls(i) \,/\, T_p \ ; \quad L = L_q + L_s$$

où $T_p$ est le nombre total de pas de simulation. Si T est la durée de la simulation,

$T_p = 10 * T$

### Calcul de W, $W_q$ et $W_s$

Nous utilisons également deux tableaux d'entiers Wq et Ws correspondant respectivement aux temps d'attente et de service des clients dans le système.

Chaque agents Client possède deux variables Date (sa date de création Dc et sa date de début de service Dd) et une variable durée de service Ds. A la création du client, sa date de création est mise à jour à la date courante et l'ordinateur génère le temps avant la création du prochain client suivant la distribution des intervalles de temps entre les arrivées. Le client créé va être servi si un serveur est libre, si non il se voit attribuer une position Pos = Qsize +1 dans la file d'attente (la plus courte dans le cas à plusieurs files) qui est décrémentée au fur et à mesure qu'un serveur se libère (celui de sa file, dans le cas à plusieurs files).

Quand le $i^{iéme}$ client occupe la position1 et qu'un serveur se libère (son serveur dans le cas à plusieurs file), il rejoint le service, sa date de début de service Dd est mise à jour à la date courante et l'ordinateur génère la durée de son service Ds suivant la distribution des durées de service. Puis on met à jour:

$$Wq\ [i] = Dd - Dc\ ,\ \text{et}\ Ws[i] = Ds$$

A la fin de la simulation nous avons:

$$W_q = \sum_{i=1}^{Tp} Wq(i)\ /\ N_q \quad ;$$

$$W_s = \sum_{i=1}^{Tp} Ws(i)\ /\ N_s \ ; \qquad W = W_q + W_s$$

Où $N_s$ est le nombre total de clients servis pendant la simulation et $N_q$ le nombre total de clients ayant attendus (la somme du nombre de clients déjà servis et du nombre de clients en service).

**Calcul des probabilités d'équilibres**

Nous utilisons un tableau d'entiers P dont les 200 premières composantes sont initialisées à 0 (P[i] = 0, pour 1 < i <=200). A chaque pas de simulation, on incrémente P[j] de 1 si j = Qsize+Ssize. A la fin de la simulation nous avons:

$$P_n = P[n]\ /\ T_p$$

$T_p$ représentant le nombre de pas de simulation.

## 6.Résultats et interprétation

Pour le type 1, nous avons utilisé les approximations établies à la section 3 et simulé les probabilités d'équilibre. Pour le type 2, il n'existe pas de modèles théoriques prenant en charge tous les aspects de cette approche, les résultats ont été simulés sous les mêmes conditions initiales.



## 7.Conclusion

Dans ce travail, nous avons utilisé la formule de pollaczek-kitchinne pour proposer des formules permettant d'obtenir des approximations des mesures de performances des modèles de file d'attente M/G/c. Nous avons implémenté un simulateur multi agent qui fournit des mesures de performances des modèles A/B/c où A, B sont des distributions soit Déterministe, Exponentielle, Erlang, ou Gamma. Les applications numériques avec des données issues d'une étude de cas dans l'autoroute Tunis-Msaken nous ont permis de vérifier la théorie qui dit que dans un système bancaire, le type d'organisation de la file d'attente (file unique pour tout les serveurs ou files multiples, une par serveur) n'influence pas les mesures de performances du système.

## 8.Bibliographie

[1] IVO ADAN,«Stochastic models for Design and Planning »,University of Amsterdam 2000.

[2] IVO ADAN,, JACQUES RESING, « Queueing Theory »,2001. 188 pp.

[3] IVO.ADAN,,, W.A VAN DE WA ARSENBURG,, J.WESSELS, « Analyzing Ek/Er/c Queues»,
ACM Portal of technologie, 2004.

[4] FRANÇOIS BOUSQUET,, CHRISTOPHE LE PAGE,, JEAN-PIERRE MÜLLER,«Modélisation et simulation multi-agent»,CIRAD.

[5] ROBERT B.COOPER ,« Introduction to Queueing Theory », Elsevier North Holland, Inc,
1981,347pp.

[6] J.FERBER «Les systèmes multi-agents.Vers une intelligence collective », Paris.1999.

[7] HUYNHB. ,, PHAN D. AND NGOQ.,, PHAM D,«QueuesinBanks»,GEM2503Project.

[8] JOHN S.SADOWSKY,, WOJCIECH SZPANKOWSKIY,«MAXIMUM QUEUE LENGTH
AND WAITING TIMERE VISITED »,August 24,1996.

[9] STALLINGS,WILLIAM,« Queuing Analysis (A Practical Guide for Computer Scientists)»,2000.

[1O] ANDREA WILLIG,«A Short Introduction to Queueing Theory», Technical University Berlin, Telecommunication Ne