



HAL
open science

Diagramme de phase d'une énergie de type contours actifs d'ordre supérieur : le cas d'une barre longue.

Aymen El Ghou, Ian Jermyn, Josiane Zerubia

► **To cite this version:**

Aymen El Ghou, Ian Jermyn, Josiane Zerubia. Diagramme de phase d'une énergie de type contours actifs d'ordre supérieur : le cas d'une barre longue.. RFIA, Jan 2008, Amiens, France. inria-00319575

HAL Id: inria-00319575

<https://hal.inria.fr/inria-00319575>

Submitted on 8 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diagramme de phase d'une énergie de type contours actifs d'ordre supérieur : le cas d'une barre longue

Phase diagram of a higher-order active contour energy : the case of a long bar

A. El Ghouli, I. H. Jermyn, J. Zerubia

ARIANA - Equipe-Projet commune INRIA/CNRS/UNSA

2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

{Aymen.El_Ghouli, Ian.Jermyn, Josiane.Zerubia}@sophia.inria.fr

Résumé

Dans cet article, nous présentons l'analyse de stabilité du modèle des "contours actifs d'ordre supérieur" (CAOS), pour l'extraction des réseaux routiers présents dans des images de télédétection. Le modèle énergétique des CAOS à minimiser présente des comportements différents en fonction des valeurs des paramètres du modèle. Il s'est avéré que deux structures géométriques sont favorisées par ce modèle : des structures linéiques et circulaires. Nous nous intéressons ici à la détermination du diagramme de phase, qui définit les gammes de valeurs des paramètres du modèle des CAOS, permettant d'obtenir des structures linéiques.

Mots Clef

Contours actifs d'ordre supérieur, a priori géométrique, diagramme de phase, forme, télédétection.

Abstract

In this paper, we present a stability analysis of a "higher-order active contour" (HOAC) model for road network extraction from remotely sensed images. The HOAC energy presents several different behaviours depending on the model parameter values. Two types of geometric structure are favoured, namely line networks and circles. In this work, we derive the phase diagram giving the parameter ranges of the HOAC model that allow stable linear structures.

Keywords

Higher-order active contours, geometric prior, phase diagram, shape, remote sensing.

1 Introduction

En analyse d'images, ce ne sont pas les images elles-mêmes qui nous intéressent mais plutôt la scène réelle représentée par ces images. En général, une image peut être vue comme un ensemble de régions correspondant à des entités, par exemple, des forêts, des zones urbaines, ou des

routes en télédétection ; le cerveau, le coeur, ou les vaisseaux sanguins en imagerie médicale, etc. Le problème est souvent d'identifier la région dans le domaine de l'image qui contient une entité particulière. Cela se fait à travers une estimation fondée sur une distribution de probabilité a posteriori $P(R|I, K)$ pour la région, étant données l'image I et les connaissances a priori K que l'on a sur l'entité d'intérêt et sa relation avec l'image (telles que sa forme géométrique, sa texture et sa radiométrie). L'estimée du Maximum A Posteriori (MAP) fournit la région qui maximise la probabilité a posteriori. Le théorème de Bayes permet de décomposer cette probabilité a posteriori en fonction de la vraisemblance (attache aux données), $P(I|R, K)$, et de la probabilité a priori $P(R|K)$. Cette dernière incorpore nos connaissances a priori sur les propriétés géométriques de la région R . Le problème peut également s'exprimer en termes d'énergies (*i.e.* $-Ln(P)$). Le problème de maximisation de la probabilité devient alors un problème de minimisation d'une énergie totale s'écrivant comme la somme d'une énergie "image" décrivant le lien entre la région R et les données I , et d'une énergie a priori E_g décrivant les propriétés géométriques de la région R , *i.e.* sa forme.

Cet article analyse les propriétés d'une énergie a priori pour les régions. Cette énergie a été utilisée pour l'extraction de réseaux routiers dans des images de télédétection, *cf.* [26], mais également pour l'extraction des houppiers, *cf.* [13]. Un houppier désigne l'ensemble des parties aériennes d'un arbre, à l'exception de la base du tronc (le fût). Le houppier désigne donc les branches, les rameaux et le feuillage d'un arbre. Les seules différences entre les modèles a priori pour ces deux applications sont les valeurs de quelques paramètres réels. Pour certaines gammes de valeurs, les minima de l'énergie prennent la forme d'un réseau, avec des barres allongées qui se joignent à des jonctions (cet a priori est bien adapté pour les réseaux routiers) ; pour d'autres valeurs, les minima sont des régions composées d'un ensemble de cercles stables avec à peu près le même rayon (cet a priori est bien adapté pour les houppiers). Le problème est de déterminer les gammes de valeurs des paramètres qui produisent ces deux types de com-

portement, c'est à dire, des réseaux stables ou des cercles stables. Le cas d'un cercle a été étudié par Horvath *et al.* [13, 14]. Le résultat était un diagramme de phase, qui dit, pour des valeurs données des paramètres, si un cercle stable existe, et qui donne son rayon, son énergie, la perturbation la moins stable, etc. Cet article fait le même type d'analyse pour le cas d'une barre très longue, vue comme l'approximation d'un segment d'un réseau linéique. Pour des valeurs données des paramètres, l'analyse permet de dire si une barre stable existe, et quelle est sa largeur, son énergie, et quelles sont les perturbations les moins stables. En conséquence, on peut choisir les valeurs des paramètres pour obtenir le comportement souhaité. On présente dans cette étude les résultats sous forme d'un diagramme de phase, et des expériences qui montrent la cohérence entre l'analyse théorique et le comportement numérique. Mais avant de présenter cette analyse, il faut répondre à la question : pourquoi analyser cette énergie ?

1.1 Motivation

Nous nous intéressons à la problématique de l'extraction de certaines entités dans les images de télédétection, mais les mêmes considérations s'appliquent aussi à d'autres types d'entités et d'images. La plupart du temps, la complexité des images implique que, pour résoudre le problème automatiquement, il faut incorporer dans l'énergie a priori le maximum de connaissance possible sur la forme de la région correspondant à l'entité d'intérêt. En même temps, les techniques standards pour l'incorporation d'une telle connaissance ne sont pas bien adaptées aux entités d'intérêt dans les images de télédétection. En particulier, les régions recherchées ont souvent une topologie très variable et inconnue a priori. Par exemple, la région qui correspond aux houppiers dans une image a plusieurs composantes connexes (une composante pour chaque houppier), alors que la région correspondant à un réseau routier pourrait avoir plusieurs boucles. Par contre, la plupart des techniques pour la modélisation d'une connaissance a priori sur la forme utilise une "région de référence" à laquelle la région recherchée est comparée pour calculer une énergie a priori. Par nécessité, cette technique limite la topologie de la région trouvée à la topologie de la région de référence. On a donc deux types d'énergies : celles qui permettent une topologie libre mais qui ne contiennent qu'une connaissance a priori triviale sur la forme, et celles qui contiennent une connaissance a priori forte sur la forme, mais qui contraignent la topologie.

Pour éviter ce dilemme, Rochery *et al.* [25, 26] ont introduit une nouvelle génération de contours actifs, appelés "contours actifs d'ordre supérieur" (CAOS). Les contours actifs, introduits par Kass *et al.* [16], sont une des méthodes les plus utilisées pour la représentation et la modélisation des régions. Une région est représentée par son bord, qui, dans le cas d'une seule composante connexe, est un plongement γ du cercle S^1 dans \mathbb{R}^2 . Plus précisément, c'est une classe d'équivalence de plongements, parce que le plonge-

ment γ représente la même forme que le plongement $\gamma\epsilon$, où ϵ est un difféomorphisme de S^1 . L'énergie utilisée par Kass *et al.* [16] était une combinaison linéaire de la longueur du bord et de l'intégrale de la courbure carrée. Ces deux termes sont deux des termes les plus simples qui sont invariants à l'action du groupe euclidien. Un autre terme est l'aire interne, utilisé initialement par Cohen [6]. Plusieurs développements ont suivi : les contours actifs "géométriques" et "géodésiques" [2, 3, 17, 20, 27] et les contours actifs incorporant une information "région" sur l'image [1, 4, 15, 21–23], mais tous ont, comme énergie a priori, des intégrales simples sur le contour de quantités différentielles. Cela veut dire que les énergies ne décrivent que des propriétés locales du contour ; la forme globale n'est pas contrainte.

Pour contraindre la forme globale, des dépendances locales entre les points du contour ne suffisent pas ; il faut des dépendances de longue portée. Une façon pour introduire de telles dépendances est d'utiliser une région de référence [5, 7–9, 11, 12, 18, 19, 24, 28], qui agit comme une variable cachée, liant implicitement des points éloignés du contour. Cependant, comme l'on a vu, ce type de méthodes n'est pas très bien adapté aux entités qui ont une topologie libre et/ou qui ne s'expriment pas comme des variations autour d'une forme moyenne.

Par contre, et par définition, un modèle CAOS introduit explicitement des dépendances de longue portée dans l'énergie, qui s'exprime donc en ajoutant aux énergies classiques avec des intégrales simples, des intégrales multiples sur le contour. Les cas les plus simples sont les énergies "quadratiques", qui contiennent des termes avec des intégrales doubles. Une des formes d'énergie quadratique est celle utilisée par Rochery *et al.* [25, 26] :

$$E_g(\gamma) = \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} \iint dt dt' \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t') \Phi(R(t, t')/d), \quad (1)$$

où λ_C , α_C et β_C sont les paramètres du modèle relatifs, respectivement, à la longueur du contour $L(\gamma)$, à l'aire de la région interne du contour $A(\gamma)$ et au terme quadratique. $\dot{\gamma}(t)$ et $\dot{\gamma}(t')$ sont les vecteurs tangents au contour en deux points $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$. La fonction Φ définit le degré d'interaction entre deux points $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ distants de $R(t, t') = |\gamma(t) - \gamma(t')|$, et d contrôle la portée de l'interaction. Dans cet article, la fonction d'interaction Φ est donnée par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x) & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2, \end{cases} \quad (2)$$

comme défini par Rochery *et al.* [25, 26]. La figure (1) montre l'allure de Φ en fonction de la distance par unité de longueur entre deux points du contour.

L'interaction de longue portée permet d'incorporer une connaissance a priori forte sur la forme de la région recherchée, sans contraindre sa topologie. Les CAOS résolvent

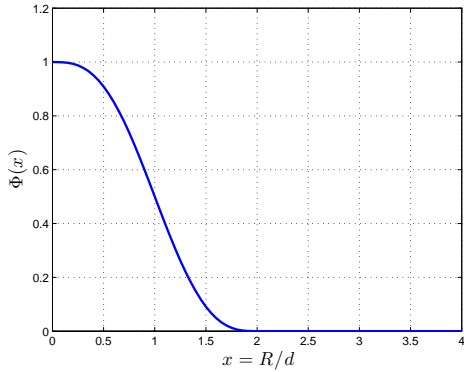


FIG. 1 – Allure de la fonction d'interaction Φ .

alors le problème de la combinaison d'une connaissance a priori forte sur la forme et d'une topologie libre, et ils sont donc bien adaptés au type d'entités rencontrées dans les images de télédétection qui exigent ce type de modèles.

1.2 Problématique

Ceci dit, il n'est pas toujours facile de savoir quel type de région est modélisé par une telle énergie, c'est à dire, quels sont les minima locaux de l'énergie. Par exemple, pour certaines gammes des paramètres, l'énergie (1) favorise les régions composées de bras allongés, avec une largeur à peu près constante, qui se joignent à des jonctions. Pour d'autres gammes de valeurs, elle favorise les régions composées d'un certain nombre de cercles ayant le même rayon.

Pour montrer plus clairement la difficulté de ce problème, la figure 2 montre les résultats de trois expériences, en faisant une descente de gradient à partir de l'énergie (1). La configuration initiale est la même dans les trois cas : un carré arrondi. Chaque ligne correspond à des valeurs différentes des paramètres et le temps s'écoule de gauche à droite. Dans la première ligne, le contour disparaît comme pour un modèle standard ($\beta_C = 0$), parce que le terme quadratique n'est pas assez fort par rapport aux autres termes. Dans la deuxième ligne, la configuration finale, et stable, consiste en un nombre de bras liés par des jonctions à leurs extrémités. Dans la troisième ligne, la configuration finale, et stable, consiste en un certain nombre de cercles.

L'intérêt applicatif de ce type d'énergies, couplé avec la difficulté de connaître le comportement pour des valeurs données des paramètres, mène à l'étude décrite dans cet article. L'objectif consiste à déterminer les gammes de valeurs des paramètres λ_C , α_C et β_C qui permettent d'avoir une région en forme de réseau minimisant l'énergie géométrique E_g , en vue de l'extraction des réseaux routiers présents dans des images de télédétection. L'analyse d'un réseau quelconque est trop difficile, mais l'on peut noter que la partie d'un bras entre deux jonctions à la forme d'une barre longue et faiblement courbée, avec une largeur à peu près constante. Cette idée mène à l'étude de la stabilité

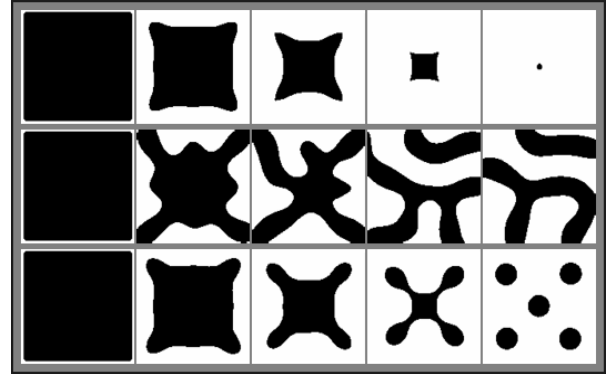


FIG. 2 – Évolution d'un contour initial (un carré arrondi aux bords) pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS donné par l'équation (1) en utilisant l'algorithme de descente du gradient.

d'une barre dans la limite où sa longueur tend vers l'infini, parce que pour cette limite, on peut négliger la contribution des extrémités, qui ne sont pas pertinentes pour un bras qui fait partie d'un réseau, et qui donc compliquent l'analyse sans raison. Une quantité critique sera l'énergie par unité de longueur de la barre, parce que c'est celle-ci qui détermine si une barre va s'allonger ou se raccourcir pour réduire son énergie. On procède alors à l'analyse de l'énergie (1). Les détails des calculs sont donnés dans [10].

2 L'énergie d'une barre longue

L'analyse de la stabilité de l'énergie géométrique du contour est fondée sur le développement de l'énergie en série de Taylor jusqu'au second ordre, au voisinage d'un contour γ_0 , qui sera, dans notre cas, une barre longue. Le développement est donné par l'équation suivante :

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) \simeq E_g(\gamma_0) + \langle \delta\gamma | \frac{\delta E_g}{\delta\gamma} \rangle_{\gamma_0} + \frac{1}{2} \langle \delta\gamma | \frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2} | \delta\gamma \rangle_{\gamma_0}, \quad (3)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une métrique définie sur l'espace des contours et $\delta\gamma$ est une variation élémentaire du contour.

Un contour γ_0 est stable (c'est à dire est un minimum local de l'énergie E_g) si et seulement si $\frac{\delta E_g}{\delta\gamma} |_{\gamma_0} = 0$, ce qui assure que γ_0 est un extremum, et $\frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2} |_{\gamma_0}$ est définie positive, ce qui assure que l'extremum est un minimum. Par la suite, ces deux conditions permettront de contraindre les valeurs des paramètres du modèle des CAOS.

2.1 Réduction du nombre de paramètres

L'énergie géométrique du contour E_g dépend de quatre paramètres : λ_C , α_C , β_C , et le paramètre d de la fonction d'interaction Φ , qui contrôle sa portée (Φ est fonction de R/d). Pour simplifier l'analyse de stabilité, on note que

$$E_g(\gamma, \lambda_C, \alpha_C, \beta_C, d) = E_g(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, 1),$$

où $\tilde{\lambda} = \lambda_C d$, $\tilde{\alpha} = \alpha_C d^2$, et $\tilde{\beta} = \beta_C d^2$. Puisque l'on peut multiplier E par une constante sans changer les propriétés de stabilité, il suffit alors d'étudier la fonctionnelle

$$\hat{E}_g(\hat{\gamma}) = L(\hat{\gamma}) + \hat{\alpha}A(\hat{\gamma}) - \frac{\hat{\beta}}{2} \iint dt dt' \dot{\hat{\gamma}}(t) \cdot \dot{\hat{\gamma}}(t') \Phi(|\hat{\gamma}(t) - \hat{\gamma}(t')|), \quad (4)$$

où $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}/\tilde{\lambda}$, $\hat{\beta} = \tilde{\beta}/\tilde{\lambda}$, et $\hat{E}_g = E_g/\tilde{\lambda}$. Les paramètres $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont sans dimension. L'analyse de stabilité du modèle géométrique des CAOS, donné par l'équation (1), est donc équivalente à celle de l'énergie \hat{E}_g donnée par l'équation (4). Celle-ci est équivalente à l'énergie E_g avec $\lambda_C = d = 1$, qui est, à son tour, équivalente à l'utilisation de d comme unité de longueur et $1/(\lambda_C d)$ comme unité d'énergie. Par la suite, ce point est implicite : par exemple, la largeur de la barre signifie la largeur divisée par d . Si nécessaire, toutes les quantités peuvent être multipliées par des puissances de d et par λ_C pour rétablir les unités standards. L'analyse de l'énergie est donc plus facile puisque le travail à faire se résume à la détermination du diagramme de phase qui représente la (ou les) région(s) du plan (α_C, β_C) satisfaisant les conditions de stabilité d'une portion d'une barre longue.

2.2 Paramétrisation

Ici, le contour γ_0 est une barre de longueur l et de largeur $w_0 \ll l$. La figure 3 montre la forme du contour d'une barre qui est orientée arbitrairement pour bien définir les propriétés géométriques du contour. On utilise, dans notre analyse de stabilité, la paramétrisation suivante du contour γ_0 :

$$\gamma_{0,\mu}(t_\mu) = \begin{cases} x_{0,\mu}(t_\mu) = \pm_\mu l t_\mu & t_\mu \in [-0.5, 0.5] \\ y_{0,\mu}(t_\mu) = \pm_\mu \frac{w_0}{2} \end{cases}, \quad (5)$$

où $\pm_\mu = 1$ si $\mu = 1$ et -1 si $\mu = 2$.

Chaque côté de la barre est paramétré séparément, en définissant deux variables t_1 et t_2 relatives aux deux cotés de la barre indexés par le paramètre μ comme le montre la figure 3. Les perturbations de chaque côté de la barre sont définies par les changements tangentiels et normaux : $\delta\gamma_\mu(t_\mu) = (\delta x_\mu(t_\mu), \delta y_\mu(t_\mu))$. L'énergie E_g est bien définie sur les classes d'équivalence mentionnées ci-dessus, c'est à dire $E_g(\gamma) = E_g(\gamma\epsilon)$. Une perturbation δx ne change pas la classe d'équivalence d'un contour, et peut être ignorée : on suppose $\delta x_\mu = 0$. On s'intéressera donc seulement aux perturbations normales au contour.

2.3 Énergie

Le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie E_g est donné par l'équation (3). L'opérateur du second ordre $\delta^2 E_g / \delta^2 \gamma$ pourrait être simplifié si l'on pourrait trouver une base qui le rende diagonal. Ceci est possible à cause de la symétrie d'un cercle. Chaque terme de l'énergie E_g est soit une intégrale simple d'une dérivée de

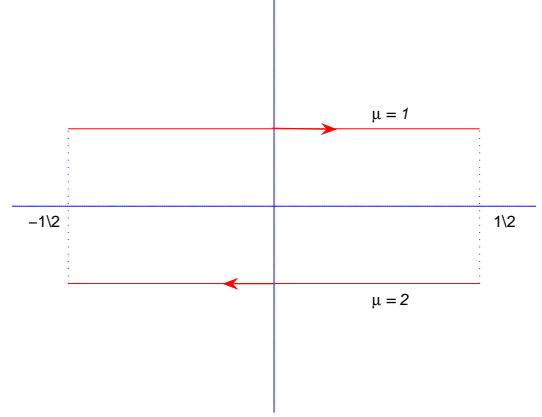


FIG. 3 – Paramétrisation d'une barre.

γ , soit une double intégrale d'une fonction de $s - s'$, où s est l'abscisse curvilinéaire pour le cercle. Ceci signifie que l'opérateur $\delta^2 E_g / \delta^2 \gamma$ est une fonction de $s - s'$ uniquement, mais pas de $s + s'$. Il est donc diagonal dans la base de Fourier de l'espace tangent au point γ_0 de l'espace des contours. En conséquence, il est plus simple d'exprimer les perturbations en termes des coefficients de Fourier : $\delta y_\mu(t_\mu) = \sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} e^{ik_\mu t_\mu}$ avec a_{μ,k_μ} la composante de Fourier de fréquence k_μ relative au côté μ de la barre. On définit la longueur d'onde spatiale $\lambda_\mu = \frac{l}{m_\mu}$ où $m_\mu \in \mathbb{Z}$. La fréquence devient donc $k_\mu = \frac{2\pi}{\lambda_\mu} = \frac{2\pi m_\mu}{l}$.

Le contour perturbé γ est défini alors en fonction de la barre comme

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(t_\mu) &= \gamma_{0,\mu}(t_\mu) + \delta\gamma_\mu(t_\mu) \\ &= \begin{cases} x_\mu(t_\mu) = \pm_\mu l t_\mu \\ y_\mu(t_\mu) = \pm_\mu \frac{w_0}{2} + \sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} e^{ik_\mu t_\mu} \end{cases}, \end{aligned} \quad (6)$$

et le développement de l'énergie en série de Taylor au voisinage de γ_0 jusqu'à l'ordre 2, donné par l'équation (3), s'exprime en fonction des coefficients de Fourier comme

$$\begin{aligned} E_g(\gamma) &= E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) \\ &\simeq E_g(\gamma_0) + \sum_{\mu} \sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} \frac{\delta E_g}{\delta a_{\mu,k_\mu}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \sum_{k_\mu,k_\nu} a_{\mu,k_\mu} a_{\nu,k_\nu} \frac{\delta^2 E_g}{\delta a_{\mu,k_\mu} \delta a_{\nu,k_\nu}}. \end{aligned} \quad (7)$$

On verra explicitement que la matrice $\delta^2 E_g / \delta a_{\mu,k_\mu} \delta a_{\nu,k_\nu}$ est diagonalisée dans la base de Fourier et que le vecteur $\frac{\delta E_g}{\delta a_{\mu,k_\mu}}$ vaut zéro, sauf pour $k_\mu = 0$.

La longueur et l'aire du contour sont données jusqu'à

l'ordre 2 en termes de coefficients de Fourier par

$$L(\gamma) = \sum_{\mu} \int_{\square\gamma_{\mu}} |\dot{\gamma}_{\mu}(t_{\mu})| dt_{\mu} \simeq l \left\{ 2 + \frac{1}{2} \sum_k k^2 (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \right\}; \quad (8)$$

$$A(\gamma) = \int_{\square\gamma_1} l(y_1(t_1) - y_2(-t_1)) dt_1 = l[w_0 + (a_{1,0} - a_{2,0})]. \quad (9)$$

En calculant le terme quadratique, et en définissant les quantités G_{ij} (voir annexe A), l'énergie géométrique par unité de longueur $E_g(\gamma)/l$ du contour γ , dans la limite où la longueur de la barre l tend vers l'infini, est

$$\begin{aligned} \frac{E_g(\gamma)}{l} &= 2 + \underbrace{\alpha_C w_0 - \beta_C G_{00}(w_0)}_{e_0} \\ &+ [a_{1,0} - a_{2,0}] \underbrace{[\alpha_C - \beta_C G_{10}(w_0)]}_{e_1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k [|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2] \underbrace{[k^2 + \beta_C G_{20}(w_0, k)]}_{e_{20}} \\ &+ (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \underbrace{\beta_C G_{21}(w_0, k)}_{e_{21}} \\ &= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{2} \sum_k a_k^{\dagger} e_2 a_k, \quad (10) \end{aligned}$$

où $a_k = (a_{1,k}^*, a_{2,k})$, \dagger indique le conjugué hermitien, et $*$ indique le conjugué complexe; $e_0(w_0)$ est l'énergie par unité de longueur d'une barre de largeur w_0 et de longueur infinie; $e_1(w_0)$ est la dérivée de $e_0(w_0)$ par rapport à w_0 et

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{20} & e_{21} \\ e_{21} & e_{20} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Les quantités $e_{20}(w_0, k)$ et $e_{21}(w_0, k)$ correspondent respectivement aux termes de second ordre de l'énergie par unité de longueur de chaque côté de la barre et entre les deux côtés. Notons que, quand $l \rightarrow \infty$, la somme dans l'équation (10) devient une intégrale sur k . Nous gardons la somme (*i.e.* l grand mais pas infini) parce que, de toutes façons, la vérification de la positivité de e_2 demandera une discrétisation du domaine Fourier.

3 Stabilité d'une barre longue

L'équation (10) donne le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie géométrique par unité de longueur du contour γ au voisinage d'une barre de largeur w_0 et de longueur l , quand l tend vers l'infini. Notre objectif est de déterminer la largeur qui minimise cette énergie, donc le w_0 qui annule l'énergie du premier ordre, $e_1(w_0)$, et qui est tel que la matrice $e_2(k, w_0)$ soit définie positive pour tout k .

3.1 Analyse de e_0

La minimisation de l'énergie E_g revient à minimiser le terme constant de l'équation (10), $e_0(w_0)$. La figure 4 montre les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ en fonction de la largeur de la barre w_0 , pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C . Les figures 4(d), 4(e) et 4(f) montrent que, pour les valeurs des paramètres choisies, l'énergie $e_0(w_0)$ n'admet pas de minimum global. La courbe de $e_0(w_0)$ donnée par les figures 4(d) et 4(e) possède un point d'inflexion : pour la figure 4(d) le point d'inflexion admet une dérivée nulle, donc le terme du premier ordre de l'équation (10), $e_1(w_0)$, est nul, alors que celui de la figure 4(e) admet une dérivée quelconque. La figure 4(f) montre que, pour une valeur négative du paramètre α_C , l'énergie par unité de longueur $e_0(w_0)$ n'admet pas de minimum global puisqu'elle tend vers $-\infty$ pour les grandes valeurs de w_0 , et donc la valeur du paramètre α_C doit être strictement positive [10].

Pour les valeurs des paramètres du modèle des CAOS relatives aux figures 4(a), 4(b) et 4(c), l'énergie $e_0(w_0)$ admet deux extrema : un minimum et un maximum. Le terme de second ordre de l'équation (10), la matrice hessienne e_2 , permet de discerner ses deux extrema : si e_2 est définie positive, alors cet extremum correspond à un minimum et si e_2 est définie négative, alors il s'agit d'un maximum.

Les paramètres du modèle des CAOS relatifs à la figure 4(c) donnent un minimum positif de l'énergie géométrique par unité de longueur d'une barre longue. Ceci signifie qu'une barre longue se raccourcit pendant une descente de gradient, jusqu'au point que l'approximation d'une barre longue ne soit plus valide. Comme la barre devient plus courte, les contributions des deux extrémités deviennent plus importantes par rapport à la contribution de la partie droite, et les deux extrémités commencent à interagir. À ce point, la barre pourrait soit former un cercle stable, soit disparaître.

Dans le cas de la figure 4(a), le minimum d'énergie d'une portion d'une barre longue est négatif. Une barre longue peut donc diminuer son énergie en s'allongeant. Si, en même temps, un cercle avec un diamètre similaire à la largeur de la barre est instable, les extrémités de la barre peuvent développer un nombre de bosses qui deviendront des bras, produisant ainsi un réseau.

3.2 Analyse de e_1

La première condition de stabilité d'une barre longue (*i.e.* le terme de premier ordre $e_1(w_0)$ est nul) permet d'avoir une contrainte sur les paramètres du modèle des CAOS, qui assure l'extremalité de l'énergie géométrique du contour. On a donc la contrainte suivante :

$$\beta_C(\alpha_C, w_0) = \frac{\alpha_C}{G_{10}(w_0)}. \quad (12)$$

L'équation (12) montre que, pour w_0 fixé, la courbe représentative de la fonction $\beta_C(\alpha_C)$ est une droite de gradient $\frac{1}{G_{10}(w_0)}$. Ceci implique que, pour α_C positif, les ensembles de valeurs (α_C, β_C) qui assurent un extremum

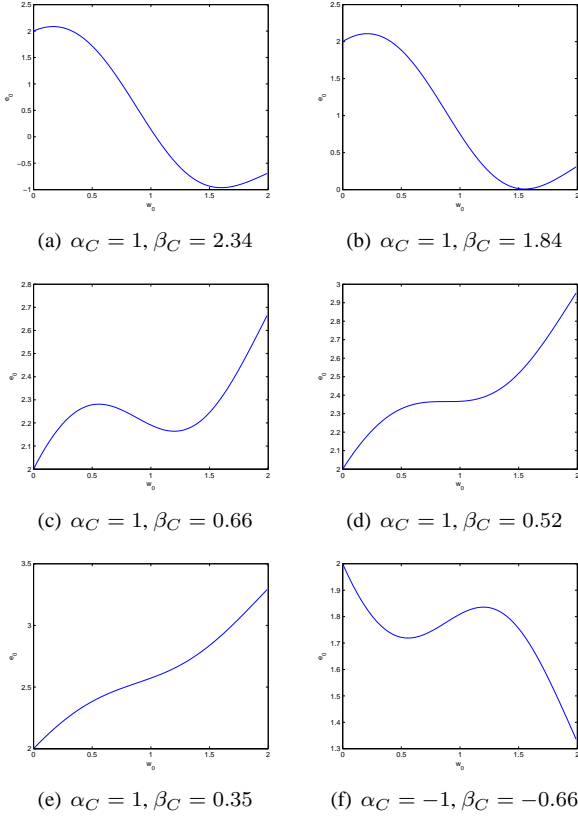


FIG. 4 – Les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C .

pour chaque largeur w_0 sont disjoints. Pour le choix de Φ fait par Rochery *et al.* [25, 26], la fonction $G_{10} \neq 0$ uniquement pour $w_0 \in (0, 2)$, et elle est positive dans cet intervalle.

La figure 5 montre les variations de w_0 en fonction du paramètre β_C pour α_C constant. Cette courbe admet un point particulier (β_C^I, w_0^I) , qui correspond à un point d'inflexion dans e_0 . Pour $\beta_C < \beta_C^I$, l'énergie $e_0(w_0)$ n'admet pas d'extremum. Le minimum ne peut pas être situé au dessous de la valeur $w_0 = w_0^I$ puisque la courbe continue correspond au minimum alors que celle en pointillé correspond au maximum.

3.3 Analyse de e_2

La condition de stabilité de second ordre d'une barre longue consiste à déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne, e_2 . Il faut qu'elles soient strictement positives pour que l'extremum de l'énergie, s'il existe, soit un minimum. Les valeurs propres de e_2 sont $\lambda_{\pm} = e_{20} \pm e_{21}$ de vecteurs propres respectifs $v_{\pm} = (1, \pm 1)$. L'équation (10) peut donc être réécrite en fonction des valeurs

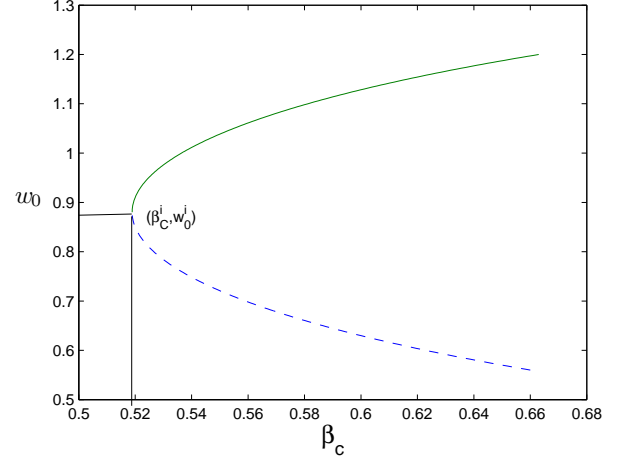


FIG. 5 – Représentation graphique des positions des extrema de l'énergie $e_0(w_0)$ en fonction du paramètre β_C pour $\alpha_C = 1$. La courbe continue correspond au minimum et celle en pointillé correspond au maximum de l'énergie.

propres :

$$\frac{E_g(\gamma)}{l} = e_0 + e_1(a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{4} \sum_k \lambda_+ |a_k^+|^2 + \lambda_- |a_k^-|^2, \quad (13)$$

avec $a_k^{\pm} = a_{1,k} \pm a_{2,k}^*$. Ces deux vecteurs propres représentent deux types de perturbations : l'une où la barre devient courbée périodiquement, comme un serpent, sans changer beaucoup sa largeur, et l'autre où la largeur de la barre change périodiquement le long de la barre. Il est évident que le premier type de perturbation coûte moins en terme d'énergie, surtout pour les basses fréquences, parce que dans ce cas, la barre "serpent" ressemble localement une barre droite.

En remplaçant e_{20} et e_{21} par les expressions données dans l'équation (10), l'expression de λ_{\pm} devient alors

$$\lambda_{\pm}(\alpha_C, \beta_C, w_0, k) = k^2 + \beta_C G_{\pm}(w_0, k), \quad (14)$$

avec $G_{\pm}(w_0, k) = G_{20}(w_0, k) \pm G_{21}(w_0, k)$. En remplaçant β_C par son expression donnée par la première contrainte de stabilité (12), on a

$$\lambda_{\pm}(\alpha_C, w_0, k) = k^2 + \frac{\alpha_C}{G_{10}(w_0)} G_{\pm}(w_0, k). \quad (15)$$

La condition de stabilité de second ordre d'une portion d'une barre de longueur infinie devient

$$k^2 + \frac{\alpha_C}{G_{10}(w_0)} G_{\pm}(w_0, k) > 0, \forall k, \quad (16)$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha_C G_{\pm}(w_0, k) > -k^2 G_{10}(w_0), \forall k, \quad (17)$$

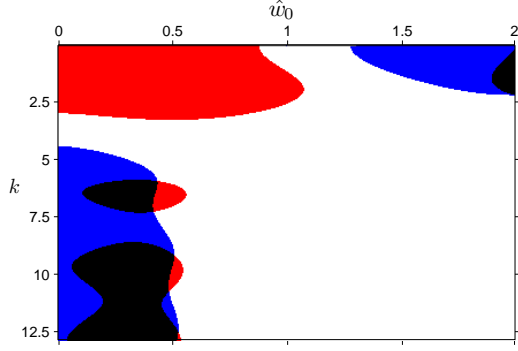


FIG. 6 – Représentation des quatre régions possibles relatives au changement de signe des fonctions G_+ et G_- .

puisque $G_{10}(w_0) > 0, \forall w_0 \in (0, 2)$. Cette inégalité donne une borne inférieure pour α_C dans le cas où $G_{\pm}(w_0, k) > 0$, donc cette borne sera toujours négative. Or α_C est nécessairement positif, donc, la borne inférieure pour α_C est toujours 0.

La figure 6 montre les différentes régions du plan (w_0, k) relatives aux changements de signe de G_{\pm} . Les régions colorées en blanc, rouge, bleu et noir correspondent respectivement à $G_+(w_0, k) > 0$ et $G_-(w_0, k) > 0$, $G_+(w_0, k) > 0$ et $G_-(w_0, k) < 0$, $G_+(w_0, k) < 0$ et $G_-(w_0, k) > 0$, et $G_+(w_0, k) < 0$ et $G_-(w_0, k) < 0$.

Les limites du paramètre α_C sont données par la figure 7. Pour qu’une portion d’une barre longue de largeur $w_0 \in (0, 2)$ soit stable, le paramètre α_C doit être borné par une limite inférieure (la courbe rouge) qui est nulle et par une limite supérieure (la courbe bleue). Les trois droites verticales représentent les points de singularité (les zéros) des fonctions $G_{\pm}(w_0, k)$ avec $k \in K$, K étant l’ensemble des fréquences qui contribuent à la détermination des limites du paramètre α_C . Pour les valeurs de $w_0 \in (0, 0.8802)$, où $\alpha_C^{min} = \alpha_C^{max} = 0$, il n’existe pas de barre stable. Si $w_0 \in (0.8802, 1.03) \cup (1.33, 2)$ alors une portion d’une barre longue de largeur w_0 est stable si α_C est situé au dessous de la courbe bleue. Pour la gamme des valeurs de $w_0 \in (1.03, 1.33)$, une barre de largeur w_0 est stable quelque soit la valeur du paramètre $\alpha_C > 0$ (la borne supérieure de α_C est infinie).

L’objectif de cette analyse de stabilité est de déterminer la région du plan (α_C, β_C) permettant d’avoir une portion stable d’une barre de largeur w_0 . Par analogie avec un système physique, on l’appelle “diagramme de phase”. Les conditions de stabilité de premier et second ordres d’une barre longue, étudiées précédemment, permettent de déterminer le diagramme de phase du modèle de la barre. L’équation (12) montre que, pour chaque valeur de la largeur w_0 , la courbe représentative de la fonction $\beta_C(\alpha_C, w_0)$ est une droite de pente $\frac{1}{G_{10}(w_0)}$, et puisque α_C est borné, alors l’ensemble des points (α_C, β_C) donnant une barre stable de largeur w_0 est un segment de droite.

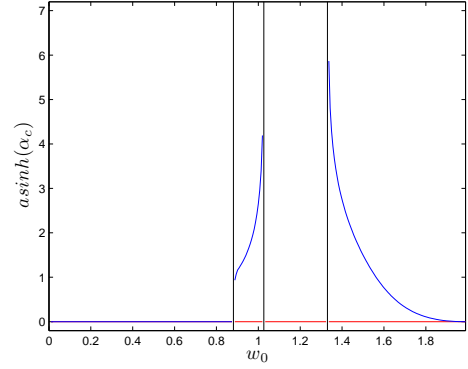


FIG. 7 – Les bornes inférieures et supérieures du paramètre α_C colorées respectivement en bleu et en rouge.

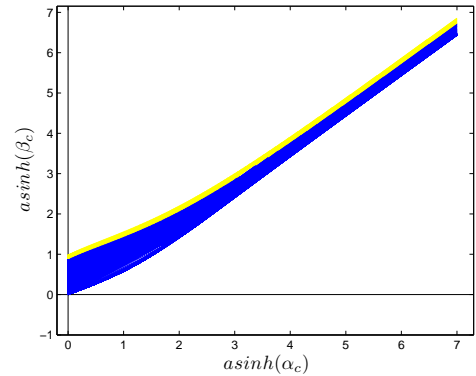


FIG. 8 – Diagramme de phase d’une portion d’une barre longue. $w_0 \in (0.8802, 2)$.

En représentant l’ensemble de toutes ces droites de gradient variable en fonction des valeurs de w_0 donnant une barre stable, c’est à dire $w_0 \in (0.8802, 2)$, on obtient le graphe donné par la figure 8. Les régions colorées de la figure 8 correspondent à l’ensemble des points (α_C, β_C) qui donnent une portion stable d’une barre longue. On a mentionné dans la partie 1.2 l’importance du signe de l’énergie du contour. Les régions représentées en bleu et en jaune dans la figure 8 donnent, respectivement, une énergie par unité de longueur positive, ou négative, d’une portion stable. Les valeurs des paramètres de la région colorée en jaune permettent donc à l’algorithme de minimisation par descente de gradient de créer, à partir d’un contour initial, un réseau de bras. Par contre, la région du diagramme de phase représentée en bleu correspond à l’ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles soit la portion d’une barre disparaît, soit un cercle stable est formé. La région du diagramme de phase représentée en blanc correspond à l’ensemble des valeurs de paramètres qui ne permettent pas d’avoir une barre stable.

	$asinh(\hat{\alpha})$	$asinh(\hat{\beta})$	\hat{w}_0	$e_0(\hat{w}_0)$
1	0.5	0.2	-	-
2	5	3	-	-
3	0.5	0.4	1.29	1.98
4	1	0.7	1.18	2.22
5	1	1.2	1.465	0.903
6	6	5.7	1.26	9.84
7	5.5	5.3	1.301	-9.28
8	5.5	5.3	1.301	-9.28
9	1	2	1.645	-3.19
10	2	4	1.76	-45.9

TAB. 1 – Valeurs des paramètres adimensionnés définis dans la partie 2.1, sélectionnées du diagramme de phase donné par la figure 8.

4 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, on présente des résultats expérimentaux de l'évolution d'une barre longue par descente de gradient en utilisant le terme de l'énergie géométrique. Dans ce travail, la barre représente un point de l'espace des contours, qui peut minimiser l'énergie géométrique pour certaines valeurs des paramètres. La figure 9 montre donc l'évolution d'une barre longue pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS donné par l'équation (1). Il faut noter que la barre n'est pas le contour initial que l'on utilise pour segmenter des images : en général on utilise un carré arrondi aux bords pour assurer la convergence de l'algorithme de descente de gradient vers une solution qui a une forme de réseau linéique, donc d'un ensemble de bras liés à leurs extrémités, dont chaque bras ou segment est modélisé par une barre longue (ce qui nous a mené à l'analyse de stabilité de la barre et ses évolutions possibles). Ces expériences ou évolutions sont faites en choisissant différents points du diagramme de phase donné par la figure 8. Réellement ce dernier montre les gammes des paramètres $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et \hat{w}_0 définis dans le paragraphe 2.1. Le tableau 1 montre un ensemble de 10 points sélectionnés de différentes régions du diagramme de phase. À partir de ses paramètres, et en fixant la valeur de la largeur de la barre w_0 si l'on choisit obtenir, on peut calculer les valeurs des paramètres du modèle des CAOS qui sont données par le tableau 2 : $\alpha_C = \hat{\alpha}\lambda_C/d^2$, $\beta_C = \hat{\beta}\lambda_C/d^2$ et $d = w_0/\hat{w}_0$.

La figure 9 montre les évolutions de la barre pour les valeurs des paramètres données par le tableau 2. Les expériences 1 et 2 montrent que, pour les valeurs des paramètres correspondantes, qui appartiennent à la région blanche inférieure du diagramme de phase, la largeur de la barre diminue jusqu'à la disparition complète et donc la barre est instable. Les expériences 3 et 4 montrent aussi que la barre disparaît si l'on choisit deux points de la région colorée en bleu permettant de donner une portion stable d'une barre avec une énergie positive ; ce qui donne une énergie de la barre $l e_0$, positive et, par la suite, la descente de gradient di-

	w_0	α_C	β_C	d
1	-	0.052	0.02	10
2	-	7.42	1	10
3	10	0.067	0.053	7.75
4	20	0.069	0.045	16.94
5	20	0.086	0.111	13.65
6	30	8.48	6.28	23.8
7	10	16.32	13.13	7.63
8	20	8.02	6.56	15.26
9	20	0.193	0.597	6.08
10	25	0.319	2.4	11.36

TAB. 2 – Valeurs des paramètres réels du modèle des CAOS utilisées pour les évolutions données par la figure 9.

minue la longueur de la barre l jusqu'à la disparition complète de celle-ci.


















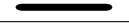







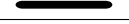











1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

FIG. 9 – Résultats expérimentaux en utilisant le terme géométrique : la première colonne montre le contour initial, et les autres colonnes montrent l'évolution de ce dernier par descente de gradient pour différentes valeurs des paramètres données par le tableau 2.

Pour les expériences 5 et 6, on a également choisi deux points la région bleue, mais cette fois-ci la descente de gradient converge vers un cercle : la barre commence à se rétrécir comme pour les deux expériences 3 et 4, sauf que ces mêmes valeurs permettent d'avoir un cercle stable (cf. Horvath *et al.* [13, 14]).

Pour les expériences 7 et 8, les valeurs des paramètres donnent une portion stable ayant une énergie négative et donc l'énergie de la barre, $l e_0$, est négative et, par la suite, la descente de gradient augmente la valeur de l et la barre s'allonge en maintenant presque la même largeur.

Pour les expériences 9 et 10, les valeurs des paramètres sont sélectionnées dans la région blanche supérieure du diagramme de phase qui montre un autre type d'instabilité : l'énergie e_0 a un minimum, mais il existe des fréquences non nulles qui sont instables et font évoluer la barre vers d'autres formes.

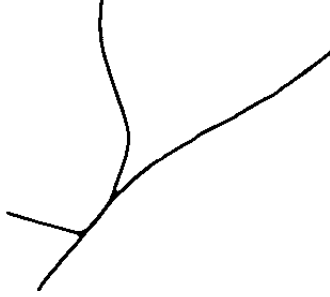


FIG. 10 – Image aérienne (©IGN) ; résultat en utilisant le modèle géométrique (1) combiné avec un modèle d’attache aux données (image fournie par Rochery *et al.* [25, 26]).

5 Conclusion

Nous avons présenté, dans cet article, une analyse détaillée de la stabilité d’une barre longue fondée sur une énergie de type CAOS. Le développement de l’énergie géométrique du contour en série de Taylor, jusqu’au second ordre, a permis de contraindre les valeurs des paramètres du modèle CAOS afin d’avoir le diagramme de phase pour l’extraction des réseaux routiers présents dans des images de télédétection (*cf.* figure 10).

6 Remerciements

Les auteurs remercient le programme INRIA-STIC Tunisie, le projet européen MUSCLE (FP6-507752) et l’équipe associée “SHAPES” INRIA-FSU pour le soutien financier partiel apporté à ce travail.

A Détails des fonctions G_{ij}

Les expressions des fonctions G_{ij} sont données par [10] :

$$G_{00}(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|x|) - \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx, \quad (18)$$

$$G_{10}(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_{20}(w_0, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \\ &+ \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) - \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|)(1 - e^{ikx}) \\ &- k^2 \Phi(|x|) e^{ikx} dx, \end{aligned} \quad (20)$$

et

$$\begin{aligned} G_{21}(w_0, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right. \\ &\left. - \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + k^2 \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{ikx} dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Références

- [1] I. BEN AYED, A. MITICHE et Z. BELHADJ : Polarimetric image segmentation via maximum-likelihood approximation and efficient multiphases level-sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(9):1493–1500, 2006.
- [2] V. CASELLES, F. CATTE, T. COLL et F. DIBOS : A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66:1–31, 1993.
- [3] V. CASELLES, R. KIMMEL et G. SAPIRO : Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1):61–79, 1997.
- [4] T.F. CHAN et L.A. VESE : Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10-2:266–277, 2001.
- [5] Y. CHEN, S. THIRUVENKADAM, H.D. TAGARE, F. HUANG, D. WILSON et E.A. GEISER : On the incorporation of shape priors into geometric active contours. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, Vancouver, Canada, juillet 2001.
- [6] L.D. COHEN : On active contours and balloons. *CV-GIP : Image Understanding*, 53:211–218, 1991.
- [7] D. CREMERS, T. KOHLBERGER et C. SCHNÖRR : Shape statistics in kernel space for variational image segmentation. *Pattern Recognition*, 36:1929–1943, 2003.
- [8] D. CREMERS, C. SCHNÖRR et J. WEICKERT : Diffusion-snakes : combining statistical shape knowledge and image information in a variational framework. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, Vancouver, Canada, juillet 2001.
- [9] D. CREMERS et S. SOATTO : A pseudo-distance for shape priors in level set segmentation. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, Nice, France, octobre 2003.
- [10] A. EL GHOUL, I. H. JERMYN et J. ZERUBIA : Phase diagram of higher order active contour energies. Rapport de recherche à paraître, INRIA, France, 2007.

- [11] A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Geometric shape priors for region-based active contours. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, Barcelone, Espagne, septembre 2003.
- [12] M. GASTAUD, M. BARLAUD et G. AUBERT : Combining shape prior and statistical features for active contour segmentation. *IEEE TCSVT special session on Audio and Video Analysis for Interactive Multimedia Services*, 14(5):726–734, mai 2004.
- [13] P. HORVATH, I.H. JERMYN, Z. KATO et J. ZERUBIA : A higher-order active contour model for tree detection. *In Proc. International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, Hong Kong, août 2006.
- [14] P. HORVATH, I.H. JERMYN, Z. KATO et J. ZERUBIA : A higher-order active contour model of a ‘gas of circles’ and its application to tree crown extraction. Rapport de recherche 6026, INRIA, France, novembre 2006. URL <http://hal.inria.fr/inria-00115631>.
- [15] S. JEHAN-BESSON, M. BARLAUD et G. AUBERT : DREAM²S : Deformable Regions driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for image and video Segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53:45–70, 2003.
- [16] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS : Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [17] S. KICHENASSAMY, A. KUMAR, P. OLVER, A. TANNENBAUM et A. YEZZI : Gradient flows and geometric active contour models. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, Boston, USA, juin 1995.
- [18] E. KLASSEN, A. SRIVASTAVA, W. MIO et S. JOSHI : Analysis of planar shapes using geodesic paths on shape spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(3):372–383, 2004.
- [19] M. E. LEVENTON, W. E. L. GRIMSON et O. FAUGERAS : Statistical shape influence in geodesic active contours. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hilton Head Island, USA, juin 2000.
- [20] R. MALLADI, J. A. SETHIAN et B. C. VEMURI : Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17:158–175, 1995.
- [21] N. PARAGIOS et R. DERICHE : Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(3):266–230, 2000.
- [22] N. PARAGIOS et R. DERICHE : Geodesic active regions : A new framework to deal with frame partition problems in computer vision. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13:249–268, 2002.
- [23] N. PARAGIOS et R. DERICHE : Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 46:223–247, 2002.
- [24] N. PARAGIOS et M. ROUSSON : Shape priors for level set representations. *In Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, Copenhagen, Danemark, mai 2002.
- [25] M. ROCHERY, I. JERMYN et J. ZERUBIA : Higher order active contours and their application to the detection of line networks in satellite imagery. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision*, Nice, France, octobre 2003.
- [26] M. ROCHERY, I.H. JERMYN et J. ZERUBIA : Higher order active contours. *International Journal of Computer Vision*, 69(1):27–42, 2006.
- [27] G. SAPIRO : *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- [28] A. SRIVASTAVA, S. JOSHI, W. MIO et X. LIU : Statistical shape analysis : Clustering, learning, and testing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(4):590–602, 2003.