Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2

Paul Louis George, Houman Borouchaki

RESEARCH REPORT

N° 7964

Mars 2012

Project-Team Gamma3

ISSN 0249-6399   ISRN INRIA/RR--7964--FR+ENG

Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2

Paul Louis George*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 7964 — version 2‡ — version initiale Mars 2012 — version révisée Mai 2012 — 44 pages

Résumé : Ce rapport fait suite au papier [6] qui a montré comment valider un élément fini triangulaire de Lagrange de degré 2. Ici, on regarde le cas d'un élément fini de Lagrange quadrilatéral de degré 2 à 8 ou 9 nœuds. Néanmoins on revient également sur le cas du quadrilatére de degré 1. Quelques surprises sont mises en évidence sur ces différents éléments. On discute aussi de ce que pourrait être une définition abstraite de la notion de qualité pour de tels éléments.

Mots-clés : Quadrilatère Q1. Quadrilatère à 4 nœuds. Quadrilatère Q2. Quadrilatère à 8 nœuds. Quadrilatère à 9 nœuds. Éléments Finis Q1 et Q2. Courbe de Bézier. Quadrilatère de Bézier.

* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

‡ Cette deuxième version apporte des précisions sur la façon de construitre le quadrilatère réduit et détaille complétement le calcul des coefficients de ce dernier.

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Lagrange quadrilateral of degree 1 and 2

Abstract: Following [6] related to Lagrange triangles of degree 2, we consider the case of a Lagrange quad finite element of degree 2. By the way, we also return to the quad of degree 1. A couple of surprising things appears. We also discuss the notion of a quality of such elements.

Key-words: Q1 quad. 4-node quad. Q2 quad. 8-node quad. 9-node quad. Q1 mesh. Q2 mesh. Q1 finite element. Q2 finite element. Bézier curve. Bézier quad.

Table des matières

1 Introduction

Dans ce papiers[1] on regarde le cas des quadrilatéres[2] de degré 1 et 2. Pour le degré 1, on a le quadrilatére de Lagrange à 4 nœuds, ses sommets. Pour le degré 2, il existe deux élements finis, le quadrilatére de Lagrange à 9 nœuds, ses sommets, ses nœuds "milieux" d'arête et un nœud "central" et l'élément à 8 nœuds, dit "incomplet" dont les nœuds sont ses sommets et ses nœuds "milieux" d'arête seulement.

Notre but est de trouver les conditions de validité de ces différents éléments finis, le cadre de l'étude est le cas plan (avec, toutefois, quelques remarques sur le cas surfacique). En complément, on discute aussi de ce que pourrait être une définition abstraite de la notion de qualité pour de tels éléments.

2 Courbe de Bézier de degré 2

Les points de contrôle introduits dans la suite sont dans $\mathbb{R}^2$, cas plan, ou dans $\mathbb{R}^3$, cas d'une surface gauche.

[1]Ce travail rentre dans le cadre du ILab INRIA-Distène.

[2]On utilise souvent le terme *quadrangle* pour désigner un quadrilatére. Ce terme est inexact bien que tout le monde le comprenne.

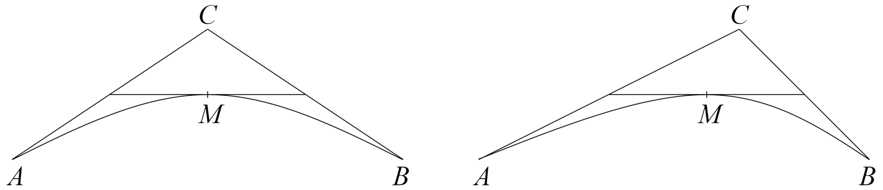

FIG. 1 – *La courbe AB avec ses trois points de contrôle A, B et C et son milieu M. Deux positions de C, pour A et B fixés, donnent deux courbes différentes.*

2.1 La courbe

On se donne trois points de contrôle, P_0, P_1 et P_2 et un paramètre t variant dans $[0,1]$. On définit le segment courbe Γ par la fonction γ suivante :

$$\gamma(t) \;=\; (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2\,,\;\; t \in [0,1]\,. \tag{1}$$

Cette courbe passe par P_0 et P_2. Le point $\gamma(\frac{1}{2})$ est appelé *milieu* de la courbe.

En vue de la construction des éléments finis P2, on va utiliser ces courbes pour définir les arêtes des éléments. Soit maintenant AB un segment et C un point quelconque pour l'instant. On définit une arête comme le lieu des points $P(t)$, $t \in [0,1]$ correspondant à la courbe Γ et la fonction γ ci-dessus dans laquelle on fixe $P_0 = A$, $P_1 = C$ et $P_2 = B$. Donc

$$P(t) \;=\; (1-t)^2 A + 2t(1-t)C + t^2 B\,,\;\; t \in [0,1]\,, \tag{2}$$

le milieu, correspondant par définition à $t = \frac{1}{2}$, vaut

$$M \;=\; P(\frac{1}{2}) \;=\; \frac{A+B+2C}{4}\,, \tag{3}$$

le point M est donc le milieu des milieux respectifs de AC et de BC. Inversement, on a

$$C \;=\; \frac{4M-A-B}{2}\,. \tag{4}$$

Dès lors que C n'est pas aligné avec A et B, l'arête est courbe, en cas contraire l'arête reste droite et on impose que $C = M$ ce qui revient à dire que le nœud milieu est bien le milieu de l'arête[3].

Notons pour finir que la Relation (2), exprimée cette fois en fonction des nœuds A, B et M, tels que définis ci-dessus, s'écrit :

$$P(t) \;=\; (1-t)(1-2t)A + 4t(1-t)M + t(2t-1)B\,,\;\; t \in [0,1]\,, \tag{5}$$

où on retrouve les polynômes de Lagrange de degré 2 des éléments finis (ici en une dimension). Par ailleurs, en fonction maintenant des points de contrôle, cette même expression s'écrit :

$$P(u,v) \;=\; u^2 A + 2uvC + v^2 B\,, \tag{6}$$

avec $u + v = 1$, $u \in [0,1]$ qui est la forme de Bernstein (ou de Bézier) bien connue. Pour simplifier l'écriture, on a gardé la même notation pour P, *i.e,* $P(t)$ ou $P(u,v)$. De façon formelle, $P(u,v)$ s'écrit aussi comme :

$$P(u,v) \;=\; \sum_{i+j=2} B^2_{i,j}(u,v)\, P_{i,j}\,, \tag{7}$$

avec $P_{20} = A$, $P_{11} = C$ et $P_{02} = B$.

[3]Ceci n'est pas strictement nécessaire, on pourrait, a priori, définir comme nœud "milieu" interne de l'arête tout point $P(\alpha) = (1-\alpha)A + \alpha B$ avec néanmoins la limitation $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$. Cette limitation vient du lien entre M et C qui n'a de sens que si M et C sont compris entre A et B. Sortir de cet intervalle conduirait à une boucle car C sort de AB. Néanmoins, mettre le nœud exactement au milieu rend le traitement élément fini en P2 (droit) cohérent avec l'élément P1 sous-jacent et identique au cas courbe, voir plus bas.

2.2 La tangente

La tangente de Γ est définie par

$$\gamma^{'}(t) \;=\; -2(1-t)P_0 + (2-4t)P_1 + 2tP_2\,, t \in [0,1]\,. \tag{8}$$

En $t=0$, $\gamma^{'}(t) \;=\; 2\,\overrightarrow{P_0P_1}$, en $t=1$, $\gamma^{'}(t) \;=\; 2\,\overrightarrow{P_1P_2}$ et en $t=\frac{1}{2}$, $\gamma^{'}(t) \;=\; \overrightarrow{P_0P_2}$. Autrement dit, la courbe part de P_0 tangente à $\overrightarrow{P_0P_1}$, est parallèle au segment P_0P_2 au point $\gamma(\frac{1}{2})$ et arrive en P_2 tangente à $\overrightarrow{P_1P_2}$. Un résultat connu est que cette tangente est elle-même une forme de Bézier. En effet, on peut écrire $\gamma^{'}(t)$ comme :

$$\gamma^{'}(t) \;=\; 2\,\left[(1-t)\,\overrightarrow{P_0P_1} \;+\; t\,\overrightarrow{P_1P_2}\right]\,, \tag{9}$$

ainsi on trouve la forme de Bézier de degré un dont les "points" de contrôle sont les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$. On peut l'écrire également comme

$$\gamma^{'}(u(t),v(t)) \;=\; -\,2\,\left[u\,\overrightarrow{P_0P_1} \;+\; v\,\overrightarrow{P_1P_2}\right]\,,$$

avec $u=1-t$ et $u+v=1$. Notons ainsi que $\gamma^{'}(u,v) \;=\; -\,\gamma^{'}(t)$.

Ceci permet de trouver simplement la tangente en tout point $\gamma(t)$ de la courbe Γ par une construction géométrique évidente. Appliqué à l'arête AB de points de contrôle A, B et C, on voit que la tangente en A est portée par le vecteur $\overrightarrow{AC}$, la tangente en B est portée par le vecteur $\overrightarrow{CB}$ et que la tangente en M, le milieu, est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3 Carreau de Bézier

Le polynôme de Bernstein de degré n s'exprime comme :

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}\,,$$

où $u \in [0,1]$. Le carreau de degré $n \times n$, étant donné les points de contrôle P_{ij}, s'écrit simplement :

$$\sigma(u,v) \;=\; \sum_{i=0,n}\sum_{j=0,n} B_i^n(u)B_j^n(v)\,P_{i,j}\,. \tag{10}$$

3.1 Carreau de degré 1x1

Ce quadrilère est défini à partir de 4 points de contrôle, ses sommets, notés P_{ij}. Il s'exprime via le produit tensoriel ci-dessus avec les polynômes de Bernstein de degré 1 :

$$\sigma(u,v) \;=\; \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\,P_{i,j}\,. \tag{11}$$

3.2 Carreau de degré 2x2

Ce quadrilère est défini à partir de 9 points de contrôle, notés P_{ij}. Ces points sont organisés comme le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_{02} & P_{12} & P_{22} \\ P_{01} & P_{11} & P_{21} \\ P_{00} & P_{10} & P_{20}\,. \end{array}$$

Le carreau est de degré 2 dans chaque direction et s'exprime donc via le produit des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$\sigma(u,v) \;=\; \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\,P_{i,j}\,. \tag{12}$$

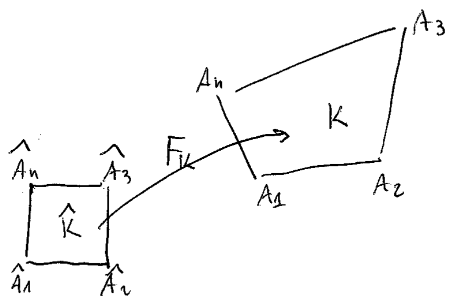

FIG. 2 – *L'élément de référence $\hat{K}$ et ses nœuds $\hat{A}_i$, la transformation F_K et l'élément courant K et ses nœuds A_i.*

Pour $v = 0$, on trouve :

$$\sigma(u, 0) = \sum_{i=0,2} B_i^2(u)\, P_{i0}\,,$$

donc une courbe de Bézier comme définie ci-dessus (avec une subtilité de notation liée à la variation de u et aux indices).

4 Élément fini quadrilatéral de degré 1, le Q1 à 4 nœuds

Les notations sont les notations classiques des éléments finis. On note $\hat{K}$ l'élément de référence, K l'élément courant, F_K la transformation permettant de passer de $\hat{K}$ à K, p_i le polynôme de base numéro i et A_i le nœud i de K. $\hat{x}$ et $\hat{y}$ désignent les coordonnées d'un point dans $\hat{K}$, x, et y les coordonnées d'un point courant. Les nœuds de $\hat{K}$ ou $[0,1] \times [0,1]$, à savoir les 4 sommets, sont les suivants :

– (0. , 0.) , (1. , 0.) , (1. , 1.) , (0. , 1.)

Un élément est décrit par la liste de ses nœuds (ou sommets, dans ce cas précis) .

4.1 Condition de validité

Les quatre polynômes de base, du point de vue élément fini et du point de vue de la transformation géométrique, sont (en variables $\hat{x}$ et $\hat{y}$) :

– $p_1 = (1-\hat{x})(1-\hat{y})$,
– $p_2 = \hat{x}(1-\hat{y})$,
– $p_3 = \hat{x}\hat{y}$,
– $p_4 = (1-\hat{x})\hat{y}$.

La transformation F_K permettant de passer de $\hat{K}$ à K est $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i$, on a ainsi $M = F_K(\hat{M})$. Cette transformation est de degré 2 (incomplet). On vérifie immédiatement que cette expression n'est autre que la Relation (11).

Rappelons qu'un élément de surface $dxdy$ utilisé dans les calculs d'intégrales s'écrit $dxdy = \mathcal{J}(F_K)d\hat{x}d\hat{y}$ où $\mathcal{J}$ est le jacobien de F_K.

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, est définie à partir des dérivées des polynômes de base. Pour mémoire, au point[4] x, y, la matrice des dérivées des polynômes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -(1-y) & (1-y) & y & -y \\ -(1-x) & -x & x & (1-x) \end{bmatrix}.$$

[4]en omettant le symbole $\hat{}$.

La matrice jacobienne s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i \\ \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i \end{bmatrix},$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du nœud courant A_i et $\hat{A}$ est le nœud d'évaluation. En ce nœud d'évaluation, le jacobien qui est le déterminant de cette matrice est un polynôme de degré 2 incomplet, il s'écrit comme le produit mixte $< \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) >$. Il représente donc, au facteur 6 près, le volume du tétraèdre formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ rapportés en un point, ici avec, $\overrightarrow{u} =^t (0,0,1)$, $\overrightarrow{v} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ et $\overrightarrow{w} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ avec $\hat{A}$ le nœud d'évaluation et A_i les nœuds de l'élément considéré. Ce jacobien mesure donc la surface signée (au facteur 2) de la face (du triangle) définie par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Regardons, à titre d'exercice, ce jacobien vu par le nœud $\hat{A}_1$ donc pour le couple $\hat{x} = 0, \hat{y} = 0$, la matrice ci-dessus vaut :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donc

$$\overrightarrow{v} = -A_1 + A_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = -A_1 + A_4\,,$$

par suite

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = < \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}) >, \tag{13}$$

qui mesure (deux fois) la surface signée du triangle $A_1A_2A_4$, sous-triangle formé par le sommet A_1 et ses sommets adjacents. Des formules identiques valent pour les 3 autres jacobiens associés aux autres sommets. Notons que la positivité de ces quatre quantités traduit la convexité de l'élément.

En (x, y) arbitraire, on a :

$$\overrightarrow{v} = (1-y)\,\overrightarrow{A_1A_2} - y\,\overrightarrow{A_3A_4}$$

$$\overrightarrow{w} = (1-x)\,\overrightarrow{A_1A_4} + x\,\overrightarrow{A_2A_3}$$

et, par suite :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = < \overrightarrow{u} \,.\, \Big[((1-y)\overrightarrow{A_1A_2} - y\,\overrightarrow{A_3A_4}) \wedge ((1-x)\,\overrightarrow{A_1A_4} + x\,\overrightarrow{A_2A_3})\Big] >,$$

la question étant de savoir quelles sont les conditions à satisfaire pour que, pour tout couple, cette quantité soit strictement positive.

On peut, en premier, noter que :

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_i p_i(\hat{x}, \hat{y})\mathcal{J}(\hat{A}_i)\,,$$

c'est-à-dire que le jacobien s'écrit exactement comme F_K en remplacant les sommets A_i par les jacobiens $\mathcal{J}(\hat{A}_i)$. Comme les fonctions de forme sont compriese entre 0 et 1, on déduit immédiatement une condition nécessaire de validité, les jacobiens aux sommets doivent être strictement positifs (c'est la convexité de l'élément). On va vérifier que cette condition est également suffisante.

Il est trivial de voir que le minimum de $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})$ est atteint sur le bord de K. Comme les arêtes sont droites, ce minimum correspond à un sommet. Donc $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) \geq \min_i \mathcal{J}(\hat{A}_i)$. Ceci permet de conclure, la condition nécessaire et suffisante de validité est que les 4 jacobiens "sommets" soient strictement positifs. Autrement dit, tout quadrilatère convexe est valide et réciproquement[5].

[5] Ce qui n'est pas vraiment surprenant.

Une autre manière d'établir ce résultat est d'étudier directement la fonction $\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y})$. Pour ce faire, on écrit :

$$\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y}) = < \overrightarrow{u} \,.\, \Big[((1-y)\overrightarrow{A_1A_2} - y\,\overrightarrow{A_3A_4}) \wedge ((1-x)\,\overrightarrow{A_1A_4} + x\,\overrightarrow{A_2A_3})\Big] >$$

en le réordonnant sous la forme

$$\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y}) = < \overrightarrow{u} \,.\, \Big[xy(\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\wedge\overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_3A_4}\wedge\overrightarrow{A_2A_3})$$

$$+\,x(-\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_2A_3}) \,+\, y(-\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_3A_4}\wedge\overrightarrow{A_1A_4}) \,+\, \overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_4}\Big] >,$$

soit encore

$$\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y}) = < \overrightarrow{u} \,.\, \Big[xy(\mathcal{J}(\hat{A}_1) - \mathcal{J}(\hat{A}_2) + \mathcal{J}(\hat{A}_3) - \mathcal{J}(\hat{A}_4)) \,+\, x(\mathcal{J}(\hat{A}_2) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)) \,+\, y(\mathcal{J}(\hat{A}_4) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)) \,+\, \mathcal{J}(\hat{A}_1)\Big] > .$$

Comme $\mathcal{J}(\hat{A}_1) - \mathcal{J}(\hat{A}_2) + \mathcal{J}(\hat{A}_3) - \mathcal{J}(\hat{A}_4) = 0$, il reste

$$\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y}) = < \overrightarrow{u} \,.\, \Big[x(\mathcal{J}(\hat{A}_2) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)) \,+\, y(\mathcal{J}(\hat{A}_4) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)) \,+\, \mathcal{J}(\hat{A}_1)\Big] > .$$

La dérivée en x vaut simplement $\mathcal{J}(\hat{A}_2) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)$, la dérivé en y vaut $\mathcal{J}(\hat{A}_4) - \mathcal{J}(\hat{A}_1)$, quantitées qui sont non nulles sauf dans le cas d'un carré ou d'un rectangle, cas où la dérivée seconde est nulle. Par suite, les extrema sont atteints aux bords. Comme $\mathcal{J}(\hat{x},\hat{y})$ est linéaire sur chaque bord, les extrema sont atteints en des sommets donc pour deux des couples $(0,0),(1,0),(1,1)$ et $(0,1)$, soit, pour le minimum, l'un des $\mathcal{J}(\hat{A}_i)$. Par conséquent, tout quadrilatère convexe est valide et réciproquement.

4.2 Sur la transformation inverse

Soit P un point quelconque du plan de coordonnées x et y et soit $[A_1A_2A_3A_4]$ un quadrilatère $Q1$. On désigne par x_i et y_i les coordonnées de A_i. On note ce quadrilatère, K, sous la forme habituelle (écrite ici en u et v) :

$$K = \{M(u,v) = (1-u)(1-v)A_1 + u(1-v)A_2 + uvA_3 + (1-u)vA_4\,, u\in[0,1]\,, v\in[0,1]\}\,.$$

Ceci s'écrit également :

$$K = \{M(u,v) = uv(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) + u(A_2 - A_1) + v(A_4 - A_1) + A_1\,, u\in[0,1]\,, v\in[0,1]\}\,.$$

Connaissant P, on cherche u et v.

On réécrit la relation ci-dessus comme :

$$P = uvA_{2413} + uA_{12} + vA_{14} + A_1\,.$$

De fait, cette relation s'écrit aussi sous la forme :

$$\overrightarrow{A_1P} = uv\overrightarrow{A_{2413}} + u\overrightarrow{A_{12}} + v\overrightarrow{A_{14}}\,.$$

Notons que

$$\overrightarrow{A_{2413}} = 2(\frac{A_1+A_3}{2} - \frac{A_2+A_4}{2})\,,$$

autrement dit, ce vecteur est construit sur les milieux des diagonales de l'élément. Par suite, on trouve deux cas.

Cas d'un parallélélogramme. Dans ce cas, les diagonales se coupent en leurs milieux et on a $\overrightarrow{A_{2431}} = \overrightarrow{0}$ et le système se réduit à :

$$\overrightarrow{A_1P} = u\overrightarrow{A_{12}} + v\overrightarrow{A_{14}}\,.$$

Par suite, La solution est immédiate :

$$\begin{cases} u = \dfrac{|\overrightarrow{A_1P} \quad \overrightarrow{A_{14}}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \quad \overrightarrow{A_{14}}|} \\ v = \dfrac{|\overrightarrow{A_{12}} \quad \overrightarrow{A_1P}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \quad \overrightarrow{A_{14}}|} \end{cases} \tag{14}$$

où $|\overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{b}|$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs. Si on note S_{ijk} la surface (signée) du triangle de sommets correspondant à ces indices, alors, on a :

$$\begin{cases} u = \dfrac{S_{1p4}}{S_{124}} \\ v = \dfrac{S_{12p}}{S_{124}} \end{cases}.$$

Cas général. On part de la forme générale :

$$\overrightarrow{A_1P} = uv\overrightarrow{A_{2413}} + u\overrightarrow{A_{12}} + v\overrightarrow{A_{14}}\,.$$

Par suite, on obtient :

$$\overrightarrow{A_1P} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} = u\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} + v\overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}\,,$$

qui est un système linéaire en u et v dont la solution est :

$$\begin{cases} u = \dfrac{|\overrightarrow{A_1P} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|} \\ v = \dfrac{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_1P} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|} \end{cases} \tag{15}$$

où $|\overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{b}|$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs.

À titre d'exercice, on va vérifier que si P est l'un des A_i on trouve pour u et v les valeurs attendues.

- Pour $P = A_1$, $u = v = 0$ de manière évidente.
- Pour $P = A_2$, $u = 1$ et $v = 0$ de manière évidente.
- Pour $P = A_4$, $u = 0$ et $v = 1$ de manière évidente.
- Pour $P = A_3$, il faut regarder de plus près. On a, pour u,

$$u = \frac{|\overrightarrow{A_1P} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}\,,$$

on ouvre $\overrightarrow{A_1P}$ en A_2, il vient

$$u = \frac{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}| + |\overrightarrow{A_{23}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}{|\overrightarrow{A_{12}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}|}\,,$$

on montre alors que $|\overrightarrow{A_{23}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}| = 0$. Comme $\overrightarrow{A_{2413}} = \overrightarrow{A_{23}} + \overrightarrow{A_{41}}$, on a :

$$|\overrightarrow{A_{23}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}| = |\overrightarrow{A_{23}} \wedge (\overrightarrow{A_{23}} + \overrightarrow{A_{41}}) \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge (\overrightarrow{A_{23}} + \overrightarrow{A_{41}})|$$

$$|\overrightarrow{A_{23}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{2413}}| = |\overrightarrow{A_{23}} \wedge \overrightarrow{A_{41}} \quad \overrightarrow{A_{14}} \wedge \overrightarrow{A_{23}}| = \overrightarrow{0}\,,$$

donc $u = 1$. Le même mécanisme permet de vérifier également que $v = 1$.

Application à la localisation. On dispose d'un maillage composé de quadrilatères Q1 et d'un point P interne à ce maillage, on souhaite déterminer l'élément le contenant. Nous proposons trois méthodes basées sur le même principe. On suppose que P est dans un élément K, on vérifie si cela est vrai et, sinon, on passe dans le voisin adéquat de K (via un coté de K séparant P de K) et on itère le procédé. La décision est obtenue

- soit en calculant u et v. Si u et v sont dans $[0,1]$, alors $P \in K$, si , par exemple, $u > 1$, on passe dans le voisin par l'arête A_2A_3, etc.
- soit en découpant l'élément examiné en 2 triangles. Ici on choisit l'une des diagonales et l'analyse est standard.
- soit en découpant l'élément examiné en 4 triangles. Ici on construit les triangles virtuels issus de P vers les 4 arêtes et l'analyse est triviale.

Notons, pour finir, une dernière méthode (en particulier utilisable dans le cas des hexaèdres) basée sur une dichotomie. En premier, on vérifie que le point est interne à l'élément K, pour ce faire il suffit de vérifier les surfaces (signées) des triangles formés par les 4 arêtes et le point P. Lorsque le point est interne, on fixe $u = \frac{1}{2}$ et on considère les intersections de cette ligne avec les bords $v = 0$ et $v = 1$, soient A et B ces deux points, on calcule la surface du triangle APB, si elle est positive, on regarde l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ que l'on coupe avec la ligne $u = \frac{3}{4}$. Le même calcul indique si P est "à droite" ou "à gauche" de ce u particulier et on continue tant que. Quand la surface est nulle, on a trouvé la valeur de u. On applique alors la même méthode pour trouver v.

5 Élément fini quadrilatéral de degré 2, le Q2 à 9 nœuds

Les notations sont les notations classiques des éléments finis. On note $\hat{K}$ l'élément de référence, K l'élément courant, F_K la transformation permettant de passer de $\hat{K}$ à K, p_i le polynôme de base numéro i et A_i le nœud i de K. $\hat{x}$ et $\hat{y}$ désignent les coordonnées d'un point dans $\hat{K}$, x, et y les coordonnées d'un point courant. Dans ce cas, il est commode de définir $\hat{K}$ comme $[-1,1] \times [-1,1]$ et les nœuds, à savoir les 4 sommets, les nœuds d'arête et le nœud central, sont les suivants :

- (-1., -1.) , (1. , -1.) , (1. , 1.) , (-1. , 1.)
- (0., -1.) , (0. , 1.) , (0. , 1.) , (-1. , 0.)
- (0., 0.).

Un élément est décrit par la liste de ses nœuds.

5.1 Élément isoparamétrique

Les neuf polynômes de base, du point de vue élément fini et du point de vue de la transformation géométrique sont (en variables $\hat{x}$ et $\hat{y}$) :

- $p_1 = \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1-\hat{y})$,
- $p_2 = -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1-\hat{y})$,
- $p_3 = \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1+\hat{x})(1+\hat{y})$,
- $p_4 = -\frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1+\hat{y})$,
- $p_5 = -\frac{1}{2}(1+\hat{x})(1-\hat{x})\hat{y}(1-\hat{y})$,
- $p_6 = \frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$,
- $p_7 = \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})\hat{y}(1+\hat{y})$,
- $p_8 = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$,
- $p_9 = (1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})$.

La transformation F_K, de degré 4 incomplet, permettant de passer de $\hat{K}$ à K est $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i$, on a ainsi $M = F_K(\hat{M})$. On vérifie immédiatement que la restriction de F_K à une arête définit cette arête comme une courbe de Bézier telle qu'introduite ci-dessus, sous la forme de la Relation (5). Par exemple, la variable $\hat{x} \in [-1,1]$ et $\hat{y} = -1$ décrit la première arête et deux changements de variable (une translation de 1 et une dilatation de $\frac{1}{2}$) permettent de se ramener au même intervalle de variation pour $\hat{x}$ et de vérifier le résultat.

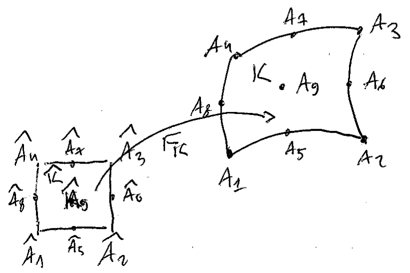

FIG. 3 – *L'élément de référence $\hat{K}$ et ses 9 nœuds $\hat{A}_i$, la transformation F_K et l'élément courant K et ses 9 nœuds A_i.*

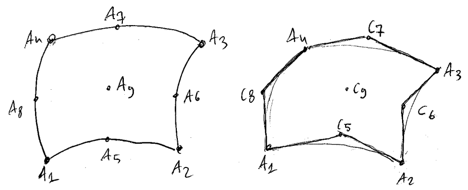

FIG. 4 – *L'élément décrit par ses nœuds, à gauche, et vu par ses points de contrôle, à droite.*

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, est définie à partir des dérivées des polynômes de base. Pour mémoire, au point[6] $(x,\, y)$, la matrice des dérivées des polynômes s'écrit

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{ccccccccc} (1-2x)y(1-y) & -y(1-y)(1+2x) & y(1+y)(1+2x) & (2x-1)y(1+y) & 4xy(1-y) & 2(1+2x)(1-y)(1+y) & -4xy(1+y) & 2(1-y)(1+y)(2x-1) & -8x(1-y)(1+y) \\ x(1-x)(1-2y) & x(1+x)(2y-1) & x(1+x)(1+2y) & -x(1-x)(1+2y) & 2(1-x)(1+x)(2y-1) & -4xy(1+x) & 2(1-x)(1+x)(1+2y) & 4xy(1-x) & -8y(1-x)(1+x) \end{array}\right].$$

La matrice jacobienne s'écrit

$$\left[\begin{array}{cc} \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i \\ \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i \end{array}\right],$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du nœud courant A_i et $\hat{A}$ est le nœud d'évaluation. En ce nœud d'évaluation, le jacobien qui est le déterminant de cette matrice, est un polynôme de degré 6 incomplet qui s'écrit comme le produit mixte $< \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) >$. Il représente donc, au facteur 6 près, le volume du tétraèdre formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ rapportés en un point, ici avec, $\overrightarrow{u} =^t (0,0,1)$, $\overrightarrow{v} = \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ et $\overrightarrow{w} = \sum \dfrac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ avec $\hat{A}$ le nœud d'évaluation et A_i les nœuds de l'élément considéré. Ce jacobien mesure donc la surface signée (au facteur 2) de la face (du triangle) définie par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Regardons le jacobien en l'image d'un sommet de $\hat{K}$, par exemple pour $(\hat{x}, \hat{y}) = (-1, -1)$. La matrice des dérivées vaut :

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{ccccccccc} -6 & -2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right],$$

donc

$$4\,\overrightarrow{v} = -6A_1 - 2A_2 + 8A_5$$

[6] en omettant le symbole $\hat{}$.

avec $A_5 = \frac{A_1+A_2+2C_5}{4}$ où C_5 est le point de contrôle de l'arête A_1A_2, autre que A_1 et A_2 qui sont aussi des points de contrôle, en fait on a $C_1 = A_1$ et $C_2 = A_2$, vue comme une arête de Bézier, il vient donc

$$4\,\overrightarrow{v} = -6A_1 - 2A_2 + 2A_1 + 2A_2 + 4C_5 = 4\overrightarrow{A_1C_5},$$

et pour $\overrightarrow{w}$, on trouve :

$$4\,\overrightarrow{w} = -6A_1 - 2A_4 + 8A_8$$

avec $A_8 = \frac{A_1+A_4+2C_8}{4}$ où C_8 est le point de contrôle de l'arête A_1A_4 vue comme une arête de Bézier, il vient :

$$4\,\overrightarrow{w} = -6A_1 - 2A_4 + 2A_1 + 2A_4 + 4C_8 = 4\overrightarrow{A_1C_8}.$$

Par suite[7] :

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = 4 < \overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >, \tag{16}$$

qui mesure (huit fois) la surface signée du triangle $A_1C_5C_8$, sous-triangle formé par le sommet A_1 et les points de contrôle des deux nœuds d'arête voisins de A_1. Il est immédiat de vérifier que l'on a des expressions analogues pour $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$, $\mathcal{J}(\hat{A}_3)$, et $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$. Ces jacobiens contrôlent l'angle entre les tangentes de part et d'autre des sommets.

Regardons ce jacobien vu par le nœud $\hat{A}_5$, donc pour le couple $\hat{x} = 0, \hat{y} = -1$, la matrice ci-dessus vaut :

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

donc :

$$4\,\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

$$4\,\overrightarrow{w} = -6A_5 - 2A_7 + 8A_9 \;=\; 8(\frac{-6A_5 - 2A_7}{8} + A_9) \;=\; 8(\frac{-3A_5 - A_7}{4} + A_9)\,,$$

soit encore :

$$\overrightarrow{w} = 2\,\overrightarrow{C_5^*A_9} \quad \text{avec} \quad C_5^* = \frac{3A_5 + A_7}{4}\,.$$

Notons que le point "virtuel" C_5^* est construit à partir de A_5 et de A_7 en face. Le jacobien fait ainsi intervenir le nœud central, le point virtuel ci-dessus et des deux extrémités de l'arête portant A_5. Ce jacobien s'exprime donc par

$$\mathcal{J}(\hat{A}_5) \;=\; 4 < \overrightarrow{u}\,.\,\left[\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{C_5^*A_9}\right] > \tag{17}$$

On peut vérifier que les 3 autres jacobiens relatifs aux autres milieux d'arête ont la même forme et on reviendra plus bas sur ces différentes quantités.

Le dernier type de jacobien relatif aux nœuds est celui correspondant au centre. Ici, $\hat{x} = 0, \hat{y} = 0$, la matrice ci-dessus vaut :

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc

$$4\,\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{A_8A_6}$$

$$4\,\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{A_5A_7}\,,$$

et on trouve

$$\mathcal{J}(\hat{A}_9) = < \overrightarrow{u}\,.\,\left[\overrightarrow{A_8A_6} \wedge \overrightarrow{A_5A_7}\right] >\,, \tag{18}$$

d'interprétation géométrique évidente.

Le jacobien étant un polynôme de degré 6, l'étude de sa validité en considérant la base usuelle des polynômes semble délicate. Par suite, nous allons montrer qu'en considérant une autre base de polynômes, les polynômes de Bernstein, on pourra obtenir facilement une condition suffisante de validité.

[7]Le facteur 4 vient de la surface de $\hat{K}$ qui vaut 4 (et non 1 si on avait choisi $[0,1] \times [0,1]$ comme définition).

5.2 Élément droit

Dans le cas d'un élément Q2 droit (ses arêtes sont des segments droits) avec comme nœuds les milieux des arêtes, la transformation F_K fait, ici, intervenir les 4 polynômes $Q1$. La validité est donc identique à celle d'un quadrilatère Q1. Par conséquent, traiter un élément droit comme un élément courbe impose que les nœuds milieux soient positionnés exactement aux milieux des arêtes mais les 8 jacobiens ne sont pas égaux entre eux, contrairement au cas du triangle P2 droit.

5.3 Validité d'un élément fini Q2 à 9 nœuds

Sans même se poser la question de sa qualité (notion à définir), le premier point à trancher est de s'assurer de la validité d'un quadrilatère Q2 puis de trouver des critères permettant de la caractériser. En fait, la validité est assurée dès lors que le jacobien est positif partout.

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) > 0 \text{ pour tout couple } (\hat{x}, \hat{y})$$

La question est donc d'évaluer cette quantité partout (impossible en pratique) ou de trouver où l'évaluer pour garantir la bonne propriété. On peut penser, *a priori*, qu'il suffit que les neufs jacobiens calculés ci-dessus soient positifs pour assurer la validité. En fait, on sait que c'est faux.

Pour le cas général, on considère directement l'écriture de l'élément sous la forme d'un carreau de Bézier. On a, Relation (12),

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) \, P_{i,j} \, .$$

Par suite :

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^{2'}(u) B_j^2(v) \, P_{i,j}$$

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^{2'}(v) \, P_{i,j} \, .$$

Rappelons que $B_0^2(u) = (1-u)^2$, $B_1^2(u) = 2u(1-u)$ et $B_2^2(u) = u^2$, donc, pour les dérivées, on a : $B_0^{2'}(u) = -2(1-u)$, $B_1^{2'}(u) = 2(1-2u)$ et $B_2^{2'}(u) = 2u$. On note, sans ambiguïté possible, $\overrightarrow{v} = \frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial u}$ et $\overrightarrow{w} = \frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial v}$, alors le jacobien s'exprime comme ci-dessus par le même produit mixte

$$\mathcal{J}(u, v) = < \overrightarrow{u} \, . \, (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) > ,$$

où $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont fonction du point (u, v) d'évaluation.

Équivalence des deux définitions. Ceci est évident puisque les deux systèmes de polynômes forment une base de l'espace. À titre d'exercice, on peut néanmoins le vérifier en regardant p_1, p_5 et p_9. On montre en premier l'équivalence entre les P_{ij} de Bézier et les A_i et C_i de l'élément fini :

$$\begin{array}{ccc} P_{02} & P_{12} & P_{22} \\ P_{01} & P_{11} & P_{21} \\ P_{00} & P_{10} & P_{20} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A_4 & C_7 & A_3 \\ C_8 & C_9 & C_6 \\ A_1 & C_5 & A_2 \end{array}$$

Pour p_9 c'est immédiat, il suffit de le comparer avec le produit $B_1^2(u)B_1^2(v)P_{11}$. On a $P_{11} = C_9$ et $4C_9$ donne la contribution pour A_9.

Pour p_5 il suffit de regarder les contributions de $B_1^2(u)B_1^2(v)P_{11}$ et de $B_1^2(u)B_0^2(v)P_{10}$ vis à vis de A_5, C_9 contribue comme $-A_5$ et C_5 contribue comme $2A_5$.

Pour p_1 on regarde les termes $B_1^2(u)B_1^2(v)P_{11}$, $B_1^2(u)B_0^2(v)P_{10}$ et $B_0^2(u)B_1^2(v)P_{01}$, C_5 et C_8 contribuent comme $-A_1$, $4C_9$ contribue comme A_1.

Pour retrouver exactement les p_i, il faut, par un changement de variables, exprimer les deux expressions dans le même intervalle, donc passer de $[0, 1]$ en Bézier à $[-1, 1]$ dans l'autre écriture.

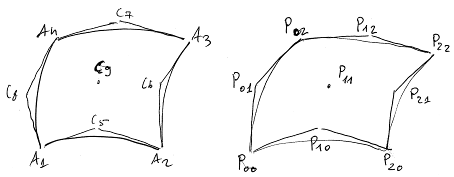

FIG. 5 – *Correspondance entre la notation élément fini et la notation Bézier.*

Quelques jacobiens particuliers. On va, en premier, vérifier que l'on retrouve les Relations (16), (17) et(18). Pour le premier sommet, $(u, v) = (0, 0)$, il vient

```
en i pour B'(u) : -2 2 0
en j pour B(v)  :  1 0 0
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{v} = -2P_{00} + 2P_{10} = 2\overrightarrow{A_1C_5}\,,$$

```
en i pour B(u)  :  1 0 0
en j pour B'(v) : -2 2 0
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{w} = -2P_{00} + 2P_{01} = 2\overrightarrow{A_1C_8}$$

et

$$\mathcal{J}(0,0) \;=\; 4 < \overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >\,,$$

qui est exactement la Relation (16).

On vérifie maintenant la valeur en $(\frac{1}{2}, 0)$, il vient

```
en i pour B'(u) : -1 0 1
en j pour B(v)  :  1 0 0
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{v} = -P_{00} + P_{20} = \overrightarrow{A_1A_2}\,,$$

```
en i pour B(u)  :  1/4 1/2 1/4
en j pour B'(v) : -2    2   0
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(-P_{00} + P_{01} - 2P_{10} + 2P_{11} - P_{20} + P_{21}) = \frac{1}{2}(-A_1 + C_8 - 2C_5 + 2C_9 - A_2 + C_6)\,.$$

On va exprimer ce vecteur en fonction des nœuds. On a $C_5 = \frac{-A_1 - A_2 + 4A_5}{2}$ et des expressions analogues pour les autres contrôles des arêtes tandis que

$$A_9 = \frac{1}{16}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2C_5 + 2C_6 + 2C_7 + 2C_8 + 4C_9)\,.$$

Alors

$$A_9 = \frac{1}{16}(4A_5 + 4A_7 + 2C_6 + 2C_8 + 4C_9)\,.$$

On évalue C_9 en fonction des A_i seulement. Il vient, après avoir remplacé C_6 et C_8 en fonction des A_i :

$$4C_9 = 16A_9 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_5 - 4A_6 - 4A_7 - 4A_8\,,$$

On prend alors $\overrightarrow{w}$ écrit comme

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{4}(-2A_1 + 2C_8 - 4C_5 + 4C_9 - 2A_2 + 2C_6)\,,$$

et on remplace les C_k qui subsistent par les A_k, il vient

$$\overrightarrow{w} = (4A_9 - 3A_5 - A_7) = 4(A_9 - \frac{3A_5 + A_7}{4}) = 4\overrightarrow{C_5^* A_9}\,,$$

avec $C_5^* = \frac{3A_5+A_7}{4}$, on retrouve donc l'expression (17), ce qui est rassurant.

On vérifie maintenant la valeur en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il vient

```
en i pour B'(u) : -1 0 1
en j pour B(v)  : 1/4 1/2 1/4
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(-P_{00}-2P_{01}-P_{02}+P_{20}+2P_{21}+P_{22}) = \frac{1}{4}(-A_1-2C_8-A_4+A_2+2C_6+A_3) = -A_8+A_6 = \overrightarrow{A_8 A_6}\,,$$

```
en i pour B(u)  :  1/4 1/2 1/4
en j pour B'(v) :  -1   0   1
```

d'où, de manière mécanique pour les indices

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{4}(-P_{00}+P_{02}-2P_{10}+2P_{12}-P_{20}+P_{22}) = \frac{1}{4}(-A_1+A_4-2C_5+2C_7-A_2+A_3) = -A_5+A_7 = \overrightarrow{A_5 A_7}\,,$$

et on retrouve exactement le résultat de la Relation (18).

Le cas général. On poursuit par l'étude pour tout couple (u, v). On utilise la forme générique des dérivées d'une forme de Bézier de degré quelconque n, avec ici $n = 2$

$$\sigma(u,v) = \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v)\, P_{i,j}\,,$$

dont la dérivée en u est

$$\frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial u} = n \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n} B_i^{n-1}(u) B_j^n(v)\, \Delta_{i,j}^{1,0}\,,$$

avec

$$\Delta_{i,j}^{1,0} = P_{i+1,j} - P_{i,j}\,.$$

De même, pour la dérivée en v, on a

$$\frac{\partial \sigma(u,v)}{\partial v} = n \sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n-1} B_i^n(u) B_j^{n-1}(v)\, \Delta_{i,j}^{0,1}\,,$$

avec

$$\Delta_{i,j}^{0,1} = P_{i,j+1} - P_{i,j}\,.$$

Par suite, le produit vectoriel présent dans le jacobien s'écrit

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = n^2 \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} \sum_{l=0,n-1} B_i^{n-1}(u) B_j^n(v) B_k^n(u) B_l^{n-1}(v) (\Delta_{i,j}^{1,0} \wedge \Delta_{k,l}^{0,1})\,,$$

et, ici, avec $n = 2$

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = 4 \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} \sum_{l=0,1} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(u) B_l^1(v) (\Delta_{i,j}^{1,0} \wedge \Delta_{k,l}^{0,1})\,.$$

On sait que

$$B_i^1(u)B_k^2(u) = \frac{C_i^1 C_k^2}{C_{i+k}^3} B_{i+k}^3(u)\,,$$

avec $C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, les coefficients du binôme, donc,

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = 4 \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} \sum_{l=0,1} K_{ik}^{1,0} K_{jl}^{0,1} B_{i+k}^3(u) B_{j+l}^3(v) (\Delta_{i,j}^{1,0} \wedge \Delta_{k,l}^{0,1})\,,$$

avec

$$K_{ik}^{1,0} = \frac{C_i^1 C_k^2}{C_{i+k}^3} = \frac{C_k^2}{C_{i+k}^3} \quad \text{et} \quad K_{jl}^{0,1} = \frac{C_j^2 C_l^1}{C_{j+l}^3} = \frac{C_j^2}{C_{j+l}^3}\,.$$

On regroupe alors les termes pour trouver une écriture de la forme

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = 4 \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) Q_{IJ}\,,$$

ce qui revient à trouver les coefficients Q_{IJ}.

On doit donc regrouper les termes en
- $(i,k) = (0,0)$ pour $B_0^3(u)$,
- $(i,k) = (0,1)$ et $(i,k) = (1,0)$ pour $B_1^3(u)$,
- $(i,k) = (0,2)$ et $(i,k) = (1,1)$ pour $B_2^3(u)$,
- $(i,k) = (1,2)$ pour $B_3^3(u)$.

De même
- $(j,l) = (0,0)$ pour $B_0^3(v)$,
- $(j,l) = (0,1)$ et $(j,l) = (1,0)$ pour $B_1^3(v)$,
- $(j,l) = (2,0)$ et $(j,l) = (1,1)$ pour $B_2^3(v)$,
- $(j,l) = (2,1)$ pour $B_3^3(v)$.

L'écriture formelle des Q_{IJ} de l'expression issue du regroupement est la suivante

$$Q_{IJ} = \sum_{(i,k),i+k=I} \sum_{(j,l),j+l=J} K_{ik}^{1,0} K_{jl}^{0,1} (\Delta_{i,j}^{1,0} \wedge \Delta_{k,l}^{0,1}) \tag{19}$$

On va exprimer, d'abord en termes des Δ puis en A_i et C_i ces quantités. On ne regarde qu'un exemple de chaque situation, un coin, une arête et l'une des valeurs centrales, c'est-à-dire, respectivement, Q_{00} puis Q_{10} et Q_{20} et enfin Q_{11}. Les autres valeurs s'en déduisant mécaniquement.

Pour Q_{00}, on cherche le coefficient lié à $B_0^2(u)B_0^2(v)$ donc ce qui a trait aux couples $(i,k) = (0,0)$ et $(j,l) = (0,0)$, à savoir le quadruplet $(0,0,0,0)$. Il vient donc

$$K_{00}^{1,0} K_{00}^{0,1} \Delta_{00}^{1,0} \wedge \Delta_{00}^{0,1}$$

$$K_{00}^{1,0} K_{00}^{0,1} (P_{10} - P_{00}) \wedge (P_{01} - P_{00})$$

$$\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}\,.$$

On contrôle ainsi l'angle entre les tangentes de par et d'autre du sommet A_1.

Pour Q_{10} et Q_{20}, on cherche les coefficients liés à $B_1^2(u)B_0^2(v)$ et $B_2^2(u)B_0^2(v)$ respectivement. Pour Q_{10}, on regarde ce qui a trait au couple $(j,l) = (0,0)$ combinés avec les couples $(i,k) = (0,1)$ et $(i,k) = (1,0)$. Il vient les deux quadruplets $(0,0,1,0)$ et $(1,0,0,0)$. Il vient donc la somme

$$K_{01}^{1,0} K_{00}^{0,1} \Delta_{00}^{1,0} \wedge \Delta_{10}^{0,1} \;+\; K_{10}^{1,0} K_{00}^{0,1} \Delta_{10}^{1,0} \wedge \Delta_{00}^{0,1}$$

$$\frac{2}{3}(P_{10} - P_{00}) \wedge (P_{11} - P_{10}) \;+\; \frac{1}{3}(P_{20} - P_{10} \wedge (P_{01} - P_{00})$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} \;+\; \frac{1}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}\,.$$

Le triangle central appuyé sur le point A_1 et l'arête C_5C_9 contribue avec un poids double comparé aux contributions liées aux arêtes éloignées de la position $_{10}$.

Pour Q_{20}, on regarde ce qui a trait au couple $(j,l) = (0,0)$ combinés avec les couples $(i,k) = (0,2)$ et $(i,k) = (1,1)$. Il vient les deux quadruplets $(0,0,2,0)$ et $(1,0,1,0)$. Il vient donc la somme

$$K_{02}^{1,0} K_{00}^{0,1} \Delta_{00}^{1,0} \wedge \Delta_{20}^{0,1} \; + \; K_{11}^{1,0} K_{00}^{0,1} \Delta_{10}^{1,0} \wedge \Delta_{10}^{0,1}$$

$$\frac{1}{3}(P_{10} - P_{00}) \wedge (P_{21} - P_{20}) \; + \; \frac{2}{3}(P_{20} - P_{10}) \wedge (P_{11} - P_{10})$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} \; + \; \frac{2}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_5C_9}\,.$$

Comme ci-dessus, le triangle central appuyé sur le point A_2 et l'arête C_5C_9 contribue avec un poids double comparé aux contributions liées aux arêtes éloignées de la position $_{20}$. Les autres coefficients d'arêtes ont exactement la même forme, une contribution double avec le point central comparée à la contribution des arêtes éloignées.

Pour Q_{11}, on cherche les coefficients liés à $B_1^2(u)B_1^2(v)$ donc ce qui a trait aux couples $(i,k) = (0,1)$ et $(i,k) = (1,0)$ combinés avec les couples $(j,l) = (0,1)$ et $(j,l) = (1,0)$. Ceci conduit à quatre termes pour les quatre quadrulets suivants $(0,0,1,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1)$ et $(1,1,0,0)$.

$$K_{01}^{1,0} K_{01}^{0,1} \Delta_{00}^{1,0} \wedge \Delta_{11}^{0,1} \; + \; K_{01}^{1,0} K_{10}^{0,1} \Delta_{01}^{1,0} \wedge \Delta_{10}^{0,1} \; + \; K_{10}^{1,0} K_{01}^{0,1} \Delta_{10}^{1,0} \wedge \Delta_{01}^{0,1} \; + \; K_{10}^{1,0} K_{10}^{0,1} \Delta_{11}^{1,0} \wedge \Delta_{00}^{0,1}$$

$$\frac{2}{9}(P_{10}-P_{00})\wedge(P_{12}-P_{11}) + \frac{4}{9}(P_{11}-P_{01})\wedge(P_{11}-P_{10}) + \frac{1}{9}(P_{20}-P_{10})\wedge(P_{02}-P_{01}) + \frac{2}{9}(P_{21}-P_{11})\wedge(P_{01}-P_{00})$$

$$\frac{2}{9}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} \; + \; \frac{4}{9}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} \; + \; \frac{1}{9}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} \; + \; \frac{2}{9}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}\,.$$

On a donc une contribution (poids 4) du triangle central côté de $_{11}$, deux contributions (poids 2) construites sur les arêtes éloignées de $_{11}$ avec le point central et une contribution (poids 1) des arêtes éloignées de $_{11}$ et opposées à C_9. Les trois autres coefficients centraux ont exactement la même forme.

In extenso, on obtient :

$$\begin{array}{lcl}
Q_{00} & = & \overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} \\
Q_{01} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} \\
Q_{02} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} \\
Q_{03} & = & \overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} \\
Q_{10} & = & \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} \\
Q_{11} & = & \frac{2}{9}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} \\
Q_{12} & = & \frac{2}{9}\overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{A_1C_8} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{C_8A_4} \\
Q_{13} & = & \frac{2}{3}\overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{C_8C_4} \\
Q_{20} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} \\
Q_{21} & = & \frac{1}{9}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_6A_3} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C_9C_5} \wedge \overrightarrow{C_9C_6} \\
Q_{22} & = & \frac{1}{9}\overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_8C_9} \wedge \overrightarrow{C_6A_3} + \frac{2}{9}\overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} \\
Q_{23} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{A_4C_7} \wedge \overrightarrow{C_6A_3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{C_9C_7} \\
Q_{30} & = & \overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} \\
Q_{31} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{C_6A_3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} \\
Q_{32} & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{A_2C_6} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_9C_6} \wedge \overrightarrow{C_6A_3} \\
Q_{33} & = & \overrightarrow{C_7A_3} \wedge \overrightarrow{C_6A_3}
\end{array}$$

On introduit les coefficients N_{IJ} définis par :

$$N_{IJ} \, = \, 4 < \overrightarrow{u}\,.\,Q_{IJ} >,$$

alors, le jacobien s'écrit comme la forme classique :

$$\mathcal{J}(u,v) \, = \, \sum_{I=0,3} \sum_{J=0,3} B_I^3(u) B_J^3(v) N_{IJ}\,,$$

qui est un carreau de Bézier de degré 3×3 pour lequel on peut écrire une condition suffisante de positivité :

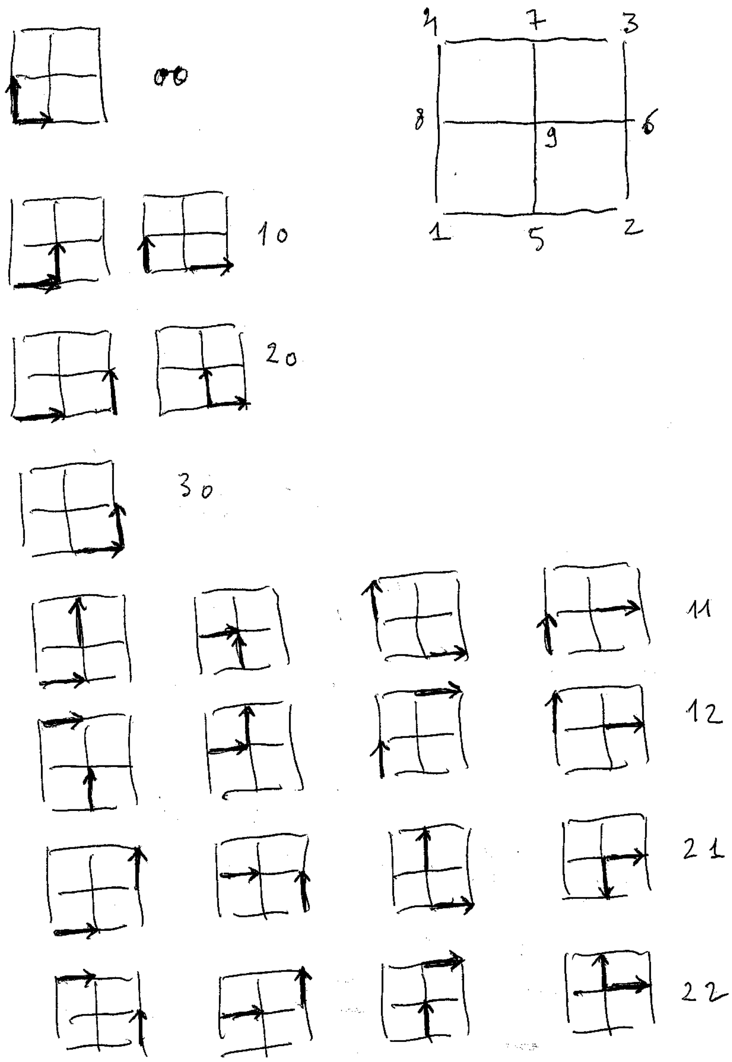

FIG. 6 – *Interprétation géométrique des coefficients N_{ij}. On montre les deux vecteurs impliqués dans la construction des triangles virtuels associés sur le schéma type. On parcourt de bas en haut l'arête $P_{00}P_{20}$ ou A_1A_2 pour montrer ses quatres coefficients puis on dessine les vecteurs impliqués dans les quatre triangles à évaluer pour chacun des quatre coefficients "centraux".*

Théorème Le quadrilatère Q2 à 9 nœuds est valide si $N_{IJ} \geq 0$ pour les couples (I, J) avec I et J de 0 à 3 et si les 4 N_{IJ} relatifs aux coins sont strictement positifs. □

Remarquons que, si dim est la dimension de l'espace, d le degré des polynômes, alors le degré, q, du jacobien[8] vaut $q = dim \times (dim \times d - 1)$.

Interprétation géométrique des coefficients. Pour illustrer ce que mesure les coefficients N_{ij}, on montre sur la Figure 6 les deux vecteurs constitutifs des différents triangles virtuels dont la surface est tout ou partie de ces coefficients. Par exemple, pour N_{00}, il n'y a qu'un seul triangle, le triangle "coin", pour N_{10} et N_{20}, on trouve deux tels triangles, les autres coefficients d'arête sont similaires. Enfin, pour chacun des quatre coefficients centraux, N_{11}, N_{12}, N_{21} et N_{22}, on montre les quatre triangles impliqués dans le contrôle.

Raffinement de la condition. Voir ci-dessous, comment faire en pratique.

[8]équivalent du théorème de Panzoult pour le quadrilatère.

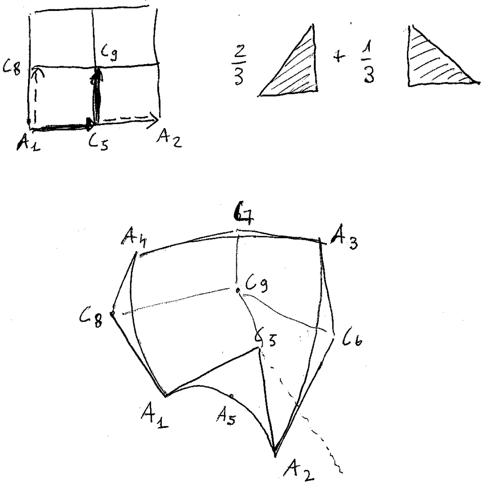

FIG. 7 – *En haut, l'interprétation géométrique du coefficient N_{10}, on montre les deux jeux de vecteurs impliqués et les deux triangles virtuels associés sur le schéma type. En bas, on montre un exemple où, en continuant à "descendre" le sommet A_2, on peut arriver à une situation où le triangle négatif, malgré son poids dans la formule, rend le coefficient négatif.*

Remarque sur l'existence d'un coefficient (non "coin") négatif. Prenons l'exemple du coefficient N_{10}, comme on a :

$$Q_{10} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}\,,$$

on se pose la question de savoir construire un simple exemple où cette valeur est négative. La Figure 7 tente de montrer une construction où cela est possible.

Dans cet exemple, il est tout sauf clair que le jacobien soit négatif, les contributions négatives pouvant être compensées, il n'est également pas évident que d'autres coefficients (non "coins") ne soient pas négatifs mais, encore une fois, que la somme le soit.

On paye ici le fait que notre condition n'est que suffisante. Néanmoins, le fait que N_{10} soit négatif indique que l'arête support, A_1A_2, est suspecte, ici on voit que le nœud A_5 et trop loin du point de contrôle C_5. De manière générale et on le savait déjà, une arête courbe doit rester suffisamment proche de sa contre-partie droite, autrement dit, la qualité de l'approximation géométriques des arêtes doit être bonne.

5.4 En pratique

Calcul des N_{IJ}. Pour calculer les N_{IJ}, on peut utiliser les formules générales ci-dessus ou bien considérer les 16 nœuds, notés B_{KL}, d'un quadrilatère de degré 3 et identifier les coefficients pour trouver les N_{IJ} par instanciation. Les 4 coefficients liés aux sommets sont évidents, par exemple, $N_{00} = \mathcal{J}(0,0)$. Les coefficients relatifs aux arêtes sont faciles à trouver. Par exemple pour l'arête $v = 0$, on instancie u à $\frac{1}{3}$ puis $\frac{2}{3}$. On obtient un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues, N_{10} et N_{20} qui sont donc calculables facilement. Il en est de même pour les autres coefficients relatifs aux arêtes. Il reste à calculer les 4 derniers coefficients. En prenant des couples (u, v) avec les différentes combinaison des valeurs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, on obtient un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues, N_{11}, N_{12}, N_{21} et N_{22}, qui permet de calculer ces valeurs. Sur cette méthode d'obtention des coefficients, voir également l'annexe.

Raffinement de la condition, méthode 1. Comme la condition n'est que suffisante, elle peut se trouver être trop restrictive, la présence de certains N_{IJ} négatifs s'empechant pas la positivité du jacobien. On peut alors, comme pour le triangle ou le tétraèdre P2, affiner la

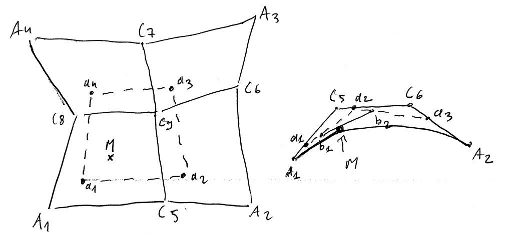

FIG. 8 – *Évaluation par l'algorithme de De Casteljau. À gauche, trouver le point de l'élément de degré 2 pour* $(u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$*, à droite, trouver le point pour* $u = \frac{1}{4}$ *d'une courbe de degré 3.*

condition pour se rapprocher d'une condition nécessaire et suffisante. Ceci revient à casser le polynôme en plusieurs morceaux dont les coefficients de contrôle sont de plus en plus près.

En pratique on coupe l'élément, par exemple en 4, en introduisant le nœud central. Le quadrilatère de sommets $A_1A_2A_3A_4$ est décomposé en $A_1A_5A_9A_8$, $A_5A_2A_6A_9$, $A_9A_6A_4A_8$ et $A_8A_9A_7A_4$. Les nouveaux points de contrôle sont calculés et chaque sous-élément permet d'évaluer la restriction du jacobien initial sur le domaine qu'il détermine. Ce raffinement n'a de sens que si les sommets créés (par exemple le nœud A_5 du quadrilatère initial est devenu le sommet de deux des éléments de son découpage) sont tels que les jacobiens associés sont strictement positifs.

Raffinement de la condition, méthode 2. Ici, on calcule directement le raffinement sur les coefficients N_{ij}, en se basant sur l'algorithme de De Casteljau. Il y a deux sortes de coefficients de contrôle, ceux associés aux arêtes et les 4 centraux.

– Raffinement d'un coefficient d'arête.

Pour fixer les idées, prenons l'arête $v = 0$. Le jacobien se réduit au polynôme :

$$\mathcal{J}(u,0) \;=\; \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(0)N_{IJ} \;=\; \sum_{I=0,3} B_I^3(u)N_{I0}\,,$$

$$\mathcal{J}(u,0) \;=\; (1-u)^3N_{00} + 3(1-u)^2uN_{10} + 3(1-u)u^2N_{20} + u^3N_{30}\,,\; u \in [0,1]$$

et on suppose que, par exemple, N_{10} est négatif. On calcule alors $\mathcal{J}(\frac{1}{2}, 0)$, si cette valeur est négative ou nul, alors le jacobien est négatif ou nul et l'élément n'est pas valide. Sinon, on utilise l'algorithme de De Casteljau qui consiste à calculer les coefficients suivants :

– au rang 1 :

$$N_{00}^1 = \frac{N_{00}+N_{10}}{2} \quad , \quad N_{10}^1 = \frac{N_{10}+N_{20}}{2} \quad \text{et} \quad N_{20}^1 = \frac{N_{20}+N_{30}}{2}$$

– au rang 2 :

$$N_{00}^2 = \frac{N_{00}^1+N_{10}^1}{2} \quad \text{et} \quad N_{10}^2 = \frac{N_{10}^1+N_{20}^1}{2}$$

– au rang 3 :

$$N_{00}^3 = \frac{N_{00}^2+N_{10}^2}{2}\,.$$

On construit alors le polynôme

$$\mathcal{J}(u,0) \;=\; (1-u)^3N_{00} + 3(1-u)^2uN_{00}^1 + 3(1-u)u^2N_{00}^2 + u^3N_{00}^3\,,\; u \in [0,1]\,.$$

Il est immédiat de voir que ce polynôme est identique au précédent et est défini entre $\mathcal{J}(0,0) = N_{00}$ et $\mathcal{J}(\frac{1}{2},0) = N_{00}^3$. Par suite, les nouvelles conditions à satisfaire portent maintenant sur N_{00}^1 et N_{00}^2, qui sont plus "proches" du jacobien.

L'autre partie de l'arête, entre son milieu et sa deuxième extrémité est traitée exactement de la même manière produisant ainsi deux coefficients, N_{10}^2 et N_{20}^1, raffinés. Notons que l'on peut itérer ce processus de raffinement.

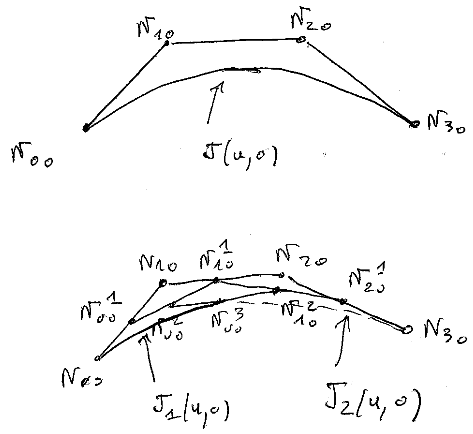

FIG. 9 – *Découper le jacobien de degré 3 en deux en découpant son arête support en deux.*

– Raffinement d'un coefficient central.

Pour fixer les idées, supposons que le coefficient N_{11} est négatif. On va découper l'élément en 4 en utilisant le nœud central et les nœuds milieux des arêtes. Ensuite, on va trouver, sur chaque sous-élément, la restriction de $\mathcal{J}(u,v)$), les nouveaux coefficients de contrôle nous donnant alors les conditions à satisfaire.

On considère l'isoparamétrique $v = cste$ pour $u \in [0, \frac{1}{2}]$ et on regarde les coefficients de contrôle du jacobien sur cette courbe, ces coefficients forment le réseau suivant :

$$N_{0j}, N_{1j}, N_{2j}, N_{3j}\ ,$$

on applique l'agorithme de subdivision, qui revient (voir ci-dessus) à calculer les coefficients suivants :

– au rang 1 :

$$N^1_{0j} = \frac{N_{0j} + N_{1j}}{2} \quad , \quad N^1_{1j} = \frac{N_{1j} + N_{2j}}{2} \quad \text{et} \quad N^1_{2j} = \frac{N_{2j} + N_{3j}}{2}$$

– au rang 2 :

$$N^2_{0j} = \frac{N^1_{0j} + N^1_{1j}}{2} \quad \text{et} \quad N^2_{1j} = \frac{N^1_{1j} + N^1_{2j}}{2}$$

– au rang 3 :

$$N^3_{0j} = \frac{N^2_{0j} + N^2_{1j}}{2}\ .$$

On dispose alors d'un réseau de coefficients pour toute valeur de v et pour $u \in [0, \frac{1}{2}]$. On va alors appliquer la même méthode en faisant maintenant varier v dans $[0, \frac{1}{2}]$. Le changement de notation (avec $N^0_{ij} = N_{ij}$) :

$$Q_{kj} = N^k_{ij}$$

donne les coefficients de contrôle suivants, pour l'isoparamétrique v :

$$Q_{0j}, Q_{1j}, Q_{2j}, Q_{3j}\ .$$

En fixant u, on a ainsi les 4 réseaux suivants :

$$Q_{ij}\ ,\ j = 0,3 \quad \text{pour la valeur} \quad i$$

Par suite, on subdivise comme ci-dessus, ce qui revient à calculer les coefficients suivants :

– au rang 1 :

$$Q^1_{i0} = \frac{Q_{i0} + Q_{i1}}{2} \quad , \quad Q^1_{i1} = \frac{Q_{i1} + Q_{i2}}{2} \quad \text{et} \quad Q^1_{i2} = \frac{Q_{i2} + Q_{i3}}{2}$$

– au rang 2 :

$$Q^2_{i0} = \frac{Q^1_{i0} + Q^1_{i1}}{2} \quad \text{et} \quad Q^2_{i1} = \frac{Q^1_{i1} + Q^1_{i2}}{2}$$

– au rang 3 :

$$Q^3_{i0} = \frac{Q^2_{i0} + Q^2_{i1}}{2}\,.$$

Il suffit de poser

$$M_{ik} = Q^k_{i0}\,,$$

et de faire varier i et j pour construire le polynôme :

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B^3_I(u)B^3_J(v)M_{IJ}\,,$$

que l'on analyse en regardant le signe des M_{IJ}.

Pour raffiner à cause de l'un des trois autres coefficients centraux, il suffit de suivre la même méthode en retenant le sous-élément voulu, $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, \frac{1}{2}]$ s'il s'agit de N_{21}, etc.

6 Élément fini quadrilatéral de degré 2, le Q2 à 8 nœuds

Les notations sont les notations classiques des éléments finis. On note $\hat{K}$ l'élément de référence, K l'élément courant, F_K la transformation permettant de passer de $\hat{K}$ à K, p_i le polynôme de base numéro i et A_i le nœud i de K. $\hat{x}$ et $\hat{y}$ désignent les coordonnées d'un point dans $\hat{K}$, x, et y les coordonnées d'un point courant. Dans ce cas, il est commode de définir $\hat{K}$ comme $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et les nœuds, à savoir les 4 sommets et les 4 nœuds d'arête sont les suivants :

- (-1., -1.) , (1. , -1.) , (1. , 1.) , (-1. , 1.)
- (0., -1.) , (0. , 1.) , (0. , 1.) , (-1. , 0.)

Un élément est décrit par la liste de ses nœuds. Ce quadrilatère est dit incomplet (ou Serendip) contrairement à son homologue à 9 nœuds (voir plus bas plusieurs manières de construire cet élément).

6.1 Élément isoparamétrique

Les huit polynômes de base, du point de vue élément fini et du point de vue de la transformation géométrique, sont (en variables $\hat{x}$ et $\hat{y}$) :

- $p_1 = \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(-1-\hat{x}-\hat{y})$,
- $p_2 = \frac{1}{4}(1+\hat{x})(1-\hat{y})(-1+\hat{x}-\hat{y})$,
- $p_3 = \frac{1}{4}(1+\hat{x})(1+\hat{y})(-1+\hat{x}+\hat{y})$,
- $p_4 = \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1+\hat{y})(-1-\hat{x}+\hat{y})$,
- $p_5 = \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})$,
- $p_6 = \frac{1}{2}(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1+\hat{x})$,
- $p_7 = \frac{1}{2}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1+\hat{y})$,
- $p_8 = \frac{1}{2}(1-\hat{y})(1+\hat{y})(1-\hat{x})$.

La transformation F_K permettant de passer de $\hat{K}$ à K est $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i$, on a ainsi $M = F_K(\hat{M})$. On vérifie immédiatement que la restriction de F_K à une arête définit cette arête comme une courbe de Bézier telle qu'introduite ci-dessus, sous la forme de la Relation (5) (pour, par exemple, la variable $\hat{x} \in [-1, 1]$ et $\hat{y} = -1$ dans le cas de la première arête).

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, se définit à partir des dérivées des polynômes de base. Pour mémoire, au point[9] (x, y), la matrice des dérivées des polynômes s'écrit

[9] en omettant le symbole $\hat{}$.

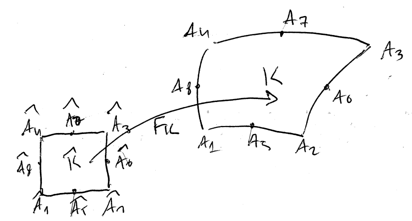

FIG. 10 – *L'élément de référence $\hat{K}$ et ses 8 nœuds $\hat{A}_i$, la transformation F_K et l'élément courant K et ses 8 nœuds A_i.*

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccc} (1-y)(2x+y) & (1-y)(2x-y) & (1+y)(2x+y) & (1+y)(2x-y) \\ (1-x)(2y+x) & (1+x)(2y-x) & (1+x)(2y+x) & (1-x)(2y-x) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} -4(1-y)x & 2(1-y)(1+y) & -4x(1+y) & -2(1-y)(1+y) \\ -2(1-x)(1+x) & -4(1+x)y & 2(1-x)(1+x) & -4(1-x)y \end{array}\right].$$

La matrice jacobienne s'écrit

$$\left[\begin{array}{cc} \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i \\ \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i \end{array}\right],$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du nœud courant A_i et $\hat{A}$ est le nœud d'évaluation. En ce nœud d'évaluation, le jacobien qui est le déterminant de cette matrice, s'écrit comme le produit mixte $< \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) >$. Il représente donc, au facteur 6 près, le volume du tétraèdre formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ rapportés en un point, ici avec, $\overrightarrow{u} =^t (0,0,1)$, $\overrightarrow{v} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ et $\overrightarrow{w} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\overrightarrow{A_i}$ avec $\hat{A}$ le nœud d'évaluation et A_i les nœuds de l'élément considéré. Ce jacobien mesure donc la surface signée (au facteur 2) de la face (du triangle) définie par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Regardons ce jacobien vu par le nœud $\hat{A}_1$ donc pour le couple $\hat{x} = -1, \hat{y} = -1$, la matrice ci-dessus vaut :

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccccccc} -6 & -2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right],$$

donc, pour $\vec{v}$, on a :

$$4\,\overrightarrow{v} = -6A_1 - 2A_2 + 8A_5$$

avec $A_5 = \frac{A_1+A_2+2C_5}{4}$ où C_5 est le point de contrôle de l'arête A_1A_2, autre que A_1 et A_2 qui sont aussi des points de contrôle, en fait on a $C_1 = A_1$ et $C_2 = A_2$, vue comme une arête de Bézier, il vient donc

$$4\,\overrightarrow{v} = -6A_1 - 2A_2 + 2A_1 + 2A_2 + 4C_5 = 4\overrightarrow{A_1C_5}.$$

Pour $\overrightarrow{w}$, on a :

$$4\,\overrightarrow{w} = -6A_1 - 2A_4 + 8A_8$$

avec $A_8 = \frac{A_1+A_4+2C_8}{4}$ où C_8 est le point de contrôle de l'arête A_1A_4 vue comme une arête de Bézier, il vient :

$$4\,\overrightarrow{w} = -6A_1 - 2A_4 + 2A_1 + 2A_4 + 4C_8 = 4\overrightarrow{A_1C_8}.$$

Par suite :

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = 4 < \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >, \tag{20}$$

qui mesure (huit fois) la surface signée du triangle $A_1C_5C_8$, sous-triangle formé par le sommet A_1 et les points de contrôle des deux nœuds d'arête voisins de A_1. Il est immédiat de vérifier que l'on a des expressions analogues pour $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$, $\mathcal{J}(\hat{A}_3)$, et $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$, soient

$$\mathcal{J}(\hat{A}_2) = 4 < \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{A_2C_6} \wedge \overrightarrow{A_2C_5}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_3) = 4 < \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{A_3C_8} \wedge \overrightarrow{A_3C_7}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = 4 < \overrightarrow{u} \,.\, (\overrightarrow{A_4C_1} \wedge \overrightarrow{A_4C_8}) >,$$

qui, par suite, mesurent (à un facteur près) l'aire des triangles $A_2C_6C_5$, $A_3C_8C_7$ et $A_4C_1C_8$. Ces jacobiens contrôlent l'angle entre les tangentes de part et d'autre des sommets.

Regardons ce jacobien vu par le nœud $\hat{A}_5$, donc pour le couple $\hat{x} = 0, \hat{y} = -1$, la matrice ci-dessus vaut :

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

donc

$$2\,\overrightarrow{v} = -A_1 + A_2 = \overrightarrow{A_1A_2}.$$

$$2\,\overrightarrow{w} = -A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + 2A_6 + A_7 + 2A_8,$$

on définit le nœud A_9 pour le couple $(0, 0)$, il vient

$$A_9 = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \frac{1}{2}(A_5 + A_6 + A_7 + A_8)$$

$$4A_9 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(A_5 + A_6 + A_7 + A_8)$$

et

$$2\,\overrightarrow{w} = 4A_9 - 3A_5 - A_7 = 4(A_9 - \frac{3A_5 + A_7}{4}) = 4\overrightarrow{C_5^*A_9}$$

et on retrouve la valeur déjà vue plus haut.

6.2 Élément droit

Dans le cas d'un élément Q2 droit (ses arêtes sont des segments droits) avec comme nœuds les milieux des arêtes, la transformation F_K fait, ici, intervenir les 4 polynômes $Q1$. La validité est donc identique à celle d'un quadrilatère Q1. Par conséquent, traiter un élément droit comme un élément courbe impose que les nœuds milieux soient positionnés exactement aux milieux des arêtes mais les 8 jacobiens ne sont pas égaux entre eux, contrairement au cas du triangle P2 droit.

6.3 Sur la construction du quadrilatère à 8 nœuds

Il y a plusieurs manières de construire cet élément fini dit quadrilatère incomplet. On peut chercher directement les polynômes de base, donc une valeur 1 au nœud considéré et une valeur nulle aux autres nœuds. On peut extraire cet élément du quadrilatère à 9 nœuds en éliminant le nœud A_9. En fait ceci revient à imposer $A_9 = C_9$, voir plus bas, et les 8 polynômes de base s'obtiennent en regroupant les polynômes terme à terme. Par exemple le premier polynôme vient de contributions issues du premier et du neuvième polynôme initial. Une autre manière est de construire une interpolation transfinie appuyée sur les bords de l'élément qui sont des arcs de parabole. Toutes ces méthodes conduisent, évidemment, au même résultat.

Construction directe. On utilise ici la propriété $p_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij}$, le symbole de Kronecker. Par exemple, pour trouver p_1, on veut qu'il s'annule sur la droite $x = 1$, sur la droite $y = 1$ et sur la droite $y = -1 - x$. Par suite, à un coefficient près on trouve $p_1 = \alpha(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(-1 - \hat{x} - \hat{y})$ puis on détermine α pour obtenir la valeur 1 au point $(-1, -1)$, ainsi on obtient $p_1 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(-1 - \hat{x} - \hat{y})$. On construit de la même façon les 7 autres polynômes.

Construction par élimination à partir du quadrilatère complet. On considère un quadrilatère complet et on calcule C_9 en se donnant comme nœud A_9, l'image, pour le quadrilatère réduit, du couple $(0,0)$. Ainsi, comme :

$$A_9 = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \frac{1}{2}(A_5 + A_6 + A_7 + A_8)\,,$$

et que

$$A_9 = \frac{1}{16}((A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2C_5 + 2C_6 + 2C_7 + 2C_8 + 4C_9)\,,$$

on pourra calculer C_9 et se ramener au cas complet. Il reste donc à vérifier que les deux éléments sont les mêmes. Pour trouver le premier polynôme de l'élément réduit, on combine les polynômes de l'élément complet qui contribuent. Il s'agit de p_1 directement par A_1 et de p_9 via $-\frac{A_1}{4}$. Notons q_1 cette combinaison. On a :

$$q_1(\hat{x},\hat{y}) = p_1(\hat{x},\hat{y}) - \frac{1}{4}p_9(\hat{x},\hat{y})$$

$$q_1(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{4}\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x})(1-\hat{y}) - \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1+\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{y})\,,$$

$$q_1(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(\hat{x}\hat{y} - (1+\hat{x})(1+\hat{y}))\,,$$

donc

$$q_1(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{4}(1-\hat{x})(1-\hat{y})(-1-\hat{x}-\hat{y})\,.$$

et, ainsi, on trouve le résultat attendu. On procède de même pour les 7 autres polynômes.

Construction par interpolation transfinie. Dans cette méthode, on se donne 4 sommets (les $A_i, i = 1,4$) et la définition analytique des 4 arêtes de l'élément, $\phi_i(t), i = 1,4$, le paramètre t varie dans $[0,1]$. Le carreau est défini, en variable (u,v) par $\sigma(u,v)$ dont l'expression est :

$$(1-v)\phi_1(u)+u\phi_2(v)+v\phi_3(u)+(1-u)\phi_4(v)-\{(1-u)(1-v)A_1 + u(1-v)A_2 + uvA_3 + (1-u)vA_4\}\,. \tag{21}$$

Les ϕ_i sont définis comme à la Relation (5), donc, par exemple, pour ϕ_1 et ϕ_4, on a :

$$\phi_1(u) \;=\; (1-u)(1-2u)A_1 + 4u(1-u)A_5 + u(2u-1)A_2\,,\;\; u \in [0,1]\,,$$

$$\phi_4(v) \;=\; (1-v)(1-2v)A_1 + 4v(1-v)A_8 + v(2v-1)A_4\,,\;\; v \in [0,1]\,.$$

C'est un jeu d'écriture de trouver le polynôme contribution de A_1, noté q_1, il vient de ϕ_1, de ϕ_4 et du terme correctif, cela donne

$$q_1(u,v) = (1-v)(1-u)(1-2u) + (1-u)(1-v)(1-2v) - (1-u)(1-v)\,,$$

$$q_1(u,v) = (1-u)(1-v)(1-2u-2v)\,,$$

par changement de variable, on se ramene au domaine $[-1,1]\times[-1,1]$ et on trouve effectivement $q_1(u,v) = p_1(u,v)$, le couple $(u.v)$, venant de la notation Bézier, n'étant autre que le couple $(\hat{x},\hat{y})$ de la notation éléments finis. Plus simple encore est de vérifier que $q_5(u,v)$ n'est autre que $p_5(\hat{x},\hat{y})$. En effet, la contribution à A_5 vient de ϕ_1 uniquement, soit :

$$q_5(u,v) = 4u(1-u)(1-v)\,,$$

et, par changement de variable comme ci-dessus, on retrouve exactement p_5.

Question historique subsidiaire. On a vu trois moyens différents de définir le Q2 incomplet. La question[10] est alors de savoir, en fait, comment cet élément a été défini à l'origine.

Le quadrilatère à 8 nœuds est dit élément quadrilatéral avec serendipité, ou sérendipien ou encore de la famille de Serendip (nom venant vraissemblablement d'une vieille légende indienne, selon certains).

[10]et, au moment de rédiger ce rapport, je ne sais pas répondre.

6.4 Validité d'un élément fini Q2 à 8 nœuds

Sans même se poser la question de sa qualité (notion à définir), le premier point à trancher est de s'assurer de la validité d'un quadrilatère Q2 puis de trouver des critères permettant de la caractériser. En fait, la validité est assurée dès lors que le jacobien est positif partout.

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) > 0 \text{ pour tout couple } (\hat{x}, \hat{y})$$

Validité par analogie avec un quadrilatère à 9 nœuds. En fait le quadrilatère à 8 nœuds peut être assimilé à un quadrilatère à 9 nœuds dans lequel on impose $C_9 = A_9$. Par suite la discussion sur la validité est identique à celle vue ci-desssus.

Validité en regardant l'écriture sous la forme de Bézier. On écrit la Relation (21) en notation Bézier en notant, par exemple, que

$$\phi_1(u) \;=\; (1-u)(1-2u)A_1 + 4u(1-u)A_5 + u(2u-1)A_2\,,$$

n'est autre que

$$\phi_1(u) \;=\; (1-u)^2 A_1 + 2u(1-u)C_5 + u^2 A_2 = \sum_{i=0,2} B_i^2(u) P_{i0}\,.$$

Alors la Relation (21) qui donne $\sigma(u,v)$, à savoir :

$$(1-v)\phi_1(u)+u\phi_2(v)+v\phi_3(u)+(1-u)\phi_4(v)-\{(1-u)(1-v)A_1 + u(1-v)A_2 + uvA_3 + (1-u)vA_4\}\,,$$

devient

$$\sigma(u,v) \;=\; B_0^1(v)\left\{\sum_{i=0,2} B_i^2(u)P_{i0} - B_0^1(u)P_{00}\right\} + B_1^1(u)\left\{\sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{2j} - B_0^1(v)P_{20}\right\}$$

$$+B_1^1(v)\left\{\sum_{i=0,2} B_i^2(u)P_{i2} - B_1^1(u)P_{22}\right\} + B_0^1(u)\left\{\sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{0j} - B_1^1(v)P_{02}\right\}.$$

Donc

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \;=\; B_0^1(v)\left\{2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\Delta_{i0}^{10} + P_{00}\right\} + \left\{\sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{2j} - B_0^1(v)P_{20}\right\}$$

$$+B_1^1(v)\left\{2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\Delta_{i2}^{10} - P_{22}\right\} - \left\{\sum_{j=0,2} B_j^2(v)P_{0j} - B_1^1(v)P_{02}\right\},$$

soit encore :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \;=\; 2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_0^1(v)\Delta_{i0}^{10} \;+\; 2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_1^1(v)\Delta_{i2}^{10} \;+\; \sum_{j=0,2} B_j^2(v)\Delta_{0j}^{20}$$

$$-\;B_0^1(v)\Delta_{00}^{20} \;-\; B_1^1(v)\Delta_{02}^{20}\,,$$

avec les notations $\Delta_{ij}^{10} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$ et $\Delta_{ij}^{20} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+2,j}}$ et au final, comme $\sum_i B_i^1(u) = 1$, ..., on trouve :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = 2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_0^1(v)(\Delta_{i0}^{10} - \frac{\Delta_{00}^{20}}{2}) + 2\sum_{i=0,1} B_i^1(u)B_1^1(v)(\Delta_{i2}^{10} - \frac{\Delta_{02}^{20}}{2}) + \sum_{j=0,2} B_j^2(v)\Delta_{0j}^{20}\,.$$

De façon mécanique, on déduit la valeur de $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$, à savoir :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = 2\sum_{j=0,1} B_j^1(v)B_0^1(u)(\Delta_{0j}^{01} - \frac{\Delta_{00}^{02}}{2}) + 2\sum_{j=0,1} B_j^1(v)B_1^1(u)(\Delta_{2j}^{01} - \frac{\Delta_{20}^{02}}{2}) + \sum_{i=0,2} B_i^2(u)\Delta_{i0}^{02}\,.$$

Le jacobien comprend les 9 termes suivants :

$$(1) \quad \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_0(v) B^1_{j_2}(v) B^1_0(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{0 j_2} - \Delta^{02}_{00}|$$

$$(2) \quad + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_0(v) B^1_{j_2}(v) B^1_1(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{2 j_2} - \Delta^{02}_{20}|$$

$$(5) \quad + \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B^1_{i_1}(u) B^1_0(v) B^2_{i_2}(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{i_2 0}|$$

$$(4) \quad + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_1(v) B^1_{j_2}(v) B^1_0(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{0 j_2} - \Delta^{02}_{00}|$$

$$(3) \quad + \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_1(v) B^1_{j_2}(v) B^1_1(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{2 j_2} - \Delta^{02}_{20}|$$

$$(7) \quad + \sum_{i_1=0,1} \sum_{i_2=0,2} B^1_{i_1}(u) B^1_1(v) B^2_{i_2}(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad \Delta^{02}_{i_2 0}|$$

$$(8) \quad + \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B^2_{j_1}(v) B^1_{j_2}(v) B^1_0(u) \, |\Delta^{20}_{0 j_1} \quad 2\Delta^{01}_{0 j_2} - \Delta^{02}_{00}|$$

$$(6) \quad + \sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,1} B^2_{j_1}(v) B^1_{j_2}(v) B^1_1(u) \, |\Delta^{20}_{0 j_1} \quad 2\Delta^{01}_{2 j_2} - \Delta^{02}_{20}|$$

$$(9) \quad + \sum_{j_1=0,2} \sum_{i_2=0,2} B^2_{j_1}(v) B^2_{i_2}(u) \, |\Delta^{20}_{0 j_1} \quad \Delta^{02}_{i_2 0}| \, .$$

Les termes (1), (2), (4) et (3) présentent la même forme, ils ne font intervenir que les arêtes incidentes en un coin, de même les 4 suivants sont relatifs aux nœuds d'arête tandis que le dernier concerne le "centre".

L'idée est de regrouper ces termes entre-eux afin de calculer les coefficients de contrôle de l'élément. Pour ce faire il faut trouver des expressions comparables et le moyen de les obtenir est de calculer ce que sont les polynômes puis d'en élever le degré à 3. On va donc, dans ce but, traiter une à une les expressions ci-dessus.

On prend $(1) \quad \displaystyle\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_0(v) B^1_{j_2}(v) B^1_0(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{0 j_2} - \Delta^{02}_{00}| \, ,$

soit $(1) \displaystyle\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^2_{i_1}(u) B^2_{j_2}(v) \frac{1}{C^2_{i_1} C^2_{j_2}} \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{0 j_2} - \Delta^{02}_{00}|$ qui donne les coefficients $Q^{(1)}_{i_1, j_2}$.

Ceci est noté : $(1) \quad \displaystyle\sum_{I=0,1} \sum_{J=0,1} B^2_I(u) B^2_J(v) Q^{(1)}_{IJ} \, ,$

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v, on construit la séquence :

$$R^{(1)}_{I0} = Q^{(1)}_{I0} \quad , \quad R^{(1)}_{I1} = \frac{Q^{(1)}_{I0} + 2Q^{(1)}_{I1}}{3} \quad , \quad R^{(1)}_{I2} = \frac{2Q^{(1)}_{I1}}{3} \, ,$$

puis la séquence, en u :

$$S^{(1)}_{0J} = R^{(1)}_{0J} \quad , \quad S^{(1)}_{1J} = \frac{R^{(1)}_{0J} + 2R^{(1)}_{1J}}{3} \quad , \quad S^{(1)}_{2J} = \frac{2R^{(1)}_{1J}}{3} \, ,$$

et on obtient au final pour cette expression : $(1) \quad \displaystyle\sum_{I=0,2} \sum_{J=0,2} B^3_I(u) B^3_J(v) S^{(1)}_{IJ} \, .$

On regarde maintenant $(2) \quad \displaystyle\sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_0(v) B^1_{j_2}(v) B^1_1(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{2 j_2} - \Delta^{02}_{20}|$

soit $(2) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^2_{i_1+1}(u) B^2_{j_2}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1+1} C^2_{j_2}} \, |2\Delta^{10}_{i_1 0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{2j_2} - \Delta^{02}_{20}|$,

qui s'écrit $(2) \sum_{i_1=1,2} \sum_{j_2=0,1} B^2_{i_1}(u) B^2_{j_2}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1} C^2_{j_2}} \, |2\Delta^{10}_{i_1-1,0} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{2j_2} - \Delta^{02}_{20}|$ et donne les coefficients $Q^{(2)}_{i_1,j_2}$.

Ceci est noté : $(2) \sum_{I=1,2} \sum_{J=0,1} B^2_I(u) B^2_J(v) Q^{(2)}_{I,J}$,

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v, on construit la séquence :

$$R^{(2)}_{I0} = Q^{(2)}_{I0} \quad , \quad R^{(2)}_{I1} = \frac{Q^{(2)}_{I0} + 2Q^{(2)}_{I1}}{3} \quad , \quad R^{(2)}_{I2} = \frac{2Q^{(2)}_{I1}}{3} \quad ,$$

puis la séquence, pour u :

$$S^{(2)}_{1J} = \frac{2R^{(2)}_{1J}}{3} \quad , \quad S^{(2)}_{2J} = \frac{2R^{(2)}_{1J} + R^{(2)}_{2J}}{3} \quad , \quad S^{(2)}_{3J} = R^{(2)}_{2J} \, ,$$

et on obtient au final pour cette expression : $(2) \sum_{I=1,3} \sum_{J=0,2} B^3_I(u) B^3_J(v) S^{(2)}_{IJ}$.

On regarde maintenant $(3) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_1(v) B^1_{j_2}(v) B^1_1(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{2j_2} - \Delta^{02}_{20}|$

soit $(3) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^2_{i_1+1}(u) B^2_{j_2+1}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1+1} C^2_{j_2+1}} \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{2j_2} - \Delta^{02}_{20}|$,

qui s'écrit $(3) \sum_{i_1=1,2} \sum_{j_2=1,2} B^2_{i_1}(u) B^2_{j_2}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1} C^2_{j_2}} \, |2\Delta^{10}_{i_1-1,2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{2,j_2-1} - \Delta^{02}_{20}|$ et donne les coefficients $Q^{(3)}_{i_1,j_2}$.

Ceci est noté : $(3) \sum_{I=1,2} \sum_{J=1,2} B^2_I(u) B^2_J(v) Q^{(3)}_{IJ}$.

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v, on construit la séquence :

$$R^{(3)}_{I1} = \frac{2Q^{(3)}_{I1}}{3} \quad , \quad R^{(3)}_{I2} = \frac{2Q^{(3)}_{I1} + Q^{(3)}_{I2}}{3} \quad , \quad R^{(3)}_{I3} = Q^{(3)}_{I2} \quad ,$$

puis la séquence, pour u :

$$S^{(3)}_{1J} = \frac{2R^{(3)}_{1J}}{3} \quad , \quad S^{(3)}_{2J} = \frac{2R^{(3)}_{1J} + R^{(3)}_{2J}}{3} \quad , \quad S^{(3)}_{3J} = R^{(3)}_{2J} \, ,$$

et on obtient au final pour cette expression : $(3) \sum_{I=1,3} \sum_{J=1,3} B^3_I(u) B^3_J(v) S^{(3)}_{IJ}$.

On regarde maintenant $(4) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^1_{i_1}(u) B^1_1(v) B^1_{j_2}(v) B^1_0(u) \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{0j_2} - \Delta^{02}_{00}|$

soit $(4) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=0,1} B^2_{i_1}(u) B^2_{j_2+1}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1} C^2_{j_2+1}} \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{0j_2} - \Delta^{02}_{00}|$,

qui s'écrit $(4) \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_2=1,2} B^2_{i_1}(u) B^2_{j_2}(v) \, \frac{1}{C^2_{i_1} C^2_{j_2}} \, |2\Delta^{10}_{i_1 2} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{0,j_2-1} - \Delta^{02}_{00}|$ et donne les coefficients $Q^{(4)}_{i_1,j_2}$

Ceci est noté : $(4) \sum_{I=0,1} \sum_{J=1,2} B^2_I(u) B^2_J(v) Q^{(4)}_{IJ}$,

ensuite, on élève le degré de 1 dans chaque direction. En v, on construit la séquence :

$$R^{(4)}_{I1} = \frac{2Q^{(4)}_{I1}}{3} \quad , \quad R^{(4)}_{I2} = \frac{2Q^{(4)}_{I1} + Q^{(4)}_{I2}}{3} \quad , \quad R^{(4)}_{I3} = Q^{(4)}_{I2} \quad ,$$

puis la séquence, pour u :

$$S_{0J}^{(4)} = R_{0J}^{(4)} \quad , \quad S_{1J}^{(4)} = \frac{R_{0J}^{(4)} + 2R_{1J}^{(4)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(4)} = \frac{2R_{2J}^{(4)}}{3} \,,$$

et on obtient au final pour cette expression : (4) $\displaystyle\sum_{I=0,2}\sum_{J=1,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(4)}$.

Les termes (5) et (7) présentent la même forme, en effet, on a :

$$(5) \sum_{i_1=0,1}\sum_{i_2=0,2} B_{i_1+i_2}^3(u)B_0^1(v)\,\frac{C_{i_1}^1 C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3}\,|2\Delta_{i_10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{i_20}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients} \quad Q_{i_1+i_2,0}^{(5)}$$

$$(7) \sum_{i_1=0,1}\sum_{i_2=0,2} B_{i_1+i_2}^3(u)B_1^1(v)\,\frac{C_{i_1}^1 C_{i_2}^2}{C_{i_1+i_2}^3}\,|2\Delta_{i_12}^{10} - \Delta_{02}^{20} \quad \Delta_{i_20}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients} \quad Q_{i_1+i_2,1}^{(7)} \,,$$

donc :

$$(5) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=0} B_I^3(u)B_J^1(v)Q_{IJ} \quad \text{et} \quad (7) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=1} B_I^3(u)B_J^1(v)Q_{IJ} \,.$$

Les termes (8) et (6) conduisent également à un regroupement analogue :

$$(8) \sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,1} B_{j_1+j_2}^3(v)B_0^1(u)\,\frac{C_{j_2}^1 C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3}\,|\Delta_{0j_1}^{20} \quad 2\Delta_{0j_2}^{01} - \Delta_{00}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients} \quad Q_{0,j_1+j_2}^{(8)}$$

$$(6) \sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,1} B_{j_1+j_2}^3(v)B_1^1(u)\,\frac{C_{j_2}^1 C_{j_1}^2}{C_{j_1+j_2}^3}\,|\Delta_{0j_1}^{20} \quad 2\Delta_{2j_2}^{01} - \Delta_{20}^{02}| \quad \text{qui donne les coefficients} \quad Q_{1,j_1+j_2}^{(6)} \,,$$

donc :

$$(8) \quad \sum_{I=0}\sum_{J=0,3} B_I^1(u)B_J^3(v)Q_{IJ} \quad \text{et} \quad (6) \quad \sum_{I=1}\sum_{J=0,3} B_I^1(u)B_J^3(v)Q_{IJ} \,,$$

et le dernier terme, (9), a la forme directe :

$$(9) \quad \sum_{I=0,2}\sum_{J=0,2} B_I^2(u)B_J^2(v)Q_{IJ} \quad \text{qui donne les coefficients} \quad Q_{i_2,j_1}^{(9)} \,.$$

On élèvent maintennat le degré de ces cinq dernières expressions. Le dernier terme, le plus simple car complet, va être élevé d'un degré pour chaque direction. On écrit ainsi :

$$\sum_{I=0,2}\sum_{J=0,2} B_I^2(u)B_J^2(v)Q_{IJ}^{(9)} = \sum_{I=0,2} B_I^2(u)\,(\sum_{J=0,2} B_J^2(v)Q_{IJ}^{(9)}) \,,$$

et on définit la séquence d'élévation du degré en v :

$$R_{I0}^{(9)} = Q_{I0}^{(9)} \quad , \quad R_{I1}^{(9)} = \frac{Q_{I0}^{(9)} + 2Q_{I1}^{(9)}}{3} \quad , \quad R_{I2}^{(9)} = \frac{2Q_{I1}^{(9)} + Q_{I2}^{(9)}}{3} \quad \text{et} \quad R_{I3}^{(9)} = Q_{I2}^{(9)} \,,$$

et on obtient la nouvelle expression de cette somme, à savoir :

$$\sum_{I=0,2}\sum_{J=0,3} B_I^2(u)B_J^3(v)R_{IJ}^{(9)} \,,$$

que l'on traite de la même manière. On construit donc la séquence d'élévation du degré en u :

$$S_{0J}^{(9)} = R_{0J}^{(9)} \quad , \quad S_{1J}^{(9)} = \frac{R_{0J}^{(9)} + 2R_{1J}^{(9)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(9)} = \frac{2R_{1J}^{(9)} + R_{2J}^{(9)}}{3} \quad \text{et} \quad S_{3J}^{(9)} = R_{2J}^{(9)} \,,$$

et l'expression finale est : (9) $\displaystyle\sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(9)}$.

Les termes restants ont en commun une direction au degré 3 et l'autre, incomplète, au degré 1, que l'on va élever en deux temps.

$$\text{Ainsi pour} \quad (5) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=0} B_I^3(u)B_J^1(v)Q_{IJ}^{(5)}$$

$$\text{on construit la séquence en} \quad v \quad : R_{I0}^{(5)} = Q_{I0}^{(5)} \quad , \quad R_{I1}^{(5)} = \frac{Q_{I0}^{(5)}}{2}$$

$$\text{puis, toujours en} \quad v \quad : S_{I0}^{(5)} = R_{I0}^{(5)} \quad , \quad S_{I1}^{(5)} = \frac{R_{I0}^{(5)} + 2R_{I1}^{(5)}}{3} \quad , \quad S_{I2}^{(5)} = \frac{2R_{I1}^{(5)} + R_{I2}^{(5)}}{3} \,,$$

$$\text{et on obtient :} \quad (5) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,2} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(5)} \,.$$

$$\text{Pour} \quad (7) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=1} B_I^3(u)B_J^1(v)Q_{IJ}^{(7)}$$

$$\text{on construit la séquence en} \quad v \quad : R_{I1}^{(7)} = \frac{Q_{I1}^{(7)}}{2} \quad , \quad R_{I2}^{(7)} = Q_{I1}^{(7)}$$

$$\text{puis, toujours en} \quad v \quad : S_{I1}^{(7)} = \frac{2R_{I1}^{(7)}}{3} \quad , \quad S_{I2}^{(7)} = \frac{2R_{I1}^{(7)} + R_{I2}^{(7)}}{3} \quad , \quad S_{I3}^{(7)} = R_{I2}^{(7)} \,,$$

$$\text{et on obtient :} \quad (7) \quad \sum_{I=0,3}\sum_{J=1,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(7)} \,.$$

$$\text{Pour} \quad (6) \quad \sum_{I=1}\sum_{J=0,3} B_I^1(u)B_J^3(v)Q_{IJ}^{(6)}$$

$$\text{on construit la séquence en} \quad u \quad : R_{1J}^{(6)} = \frac{Q_{1J}^{(6)}}{2} \quad , \quad R_{2J}^{(6)} = Q_{1J}^{(6)}$$

$$\text{puis, toujours en} \quad u \quad : S_{1J}^{(6)} = \frac{2R_{1J}^{(6)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(6)} = \frac{2R_{1J}^{(6)} + R_{2J}^{(6)}}{3} \quad , \quad S_{3J}^{(6)} = R_{2J}^{(6)} \,,$$

$$\text{et on obtient :} \quad (6) \quad \sum_{I=1,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(6)} \,.$$

$$\text{Et enfin pour} \quad (8) \quad \sum_{I=0}\sum_{J=0,3} B_I^1(u)B_J^3(v)Q_{IJ}^{(8)}$$

$$\text{on construit la séquence en} \quad u \quad : R_{0J}^{(8)} = Q_{0J}^{(8)} \quad , \quad R_{1J}^{(8)} = \frac{Q_{0J}^{(8)}}{2}$$

$$\text{puis, toujours en} \quad u \quad : S_{0J}^{(8)} = R_{0J}^{(8)} \quad , \quad S_{1J}^{(8)} = \frac{R_{0J}^{(8)} + 2R_{1J}^{(8)}}{3} \quad , \quad S_{2J}^{(8)} = \frac{2R_{1J}^{(8)}}{3} \,,$$

$$\text{et on obtient :} \quad (8) \quad \sum_{I=0,2}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)S_{IJ}^{(8)} \,.$$

Chaque coefficient va etre obtenu via la somme des coefficients ci-dessus, par exemple N_{00} contient des contributions de tous les Q_{00} qui existent dans certaines des neuf sommes. Comme les sommes sont incomplètes, pour les autres coefficients, c'est moins évident. Établir la correspondance entre les N_{IJ} et les $Q_{IJ}^{(k)}$ se fait en regroupant convenablement les termes des 9 sommes. En fait, il suffit maintenant de regrouper les coefficients de ces 9 sommes ayant les mêmes indices pour construire les coefficients effectifs.

On va maintenant détailler les trois types de coefficients, ceux associés aux coins, ceux associés aux arêtes et les quatre coefficients "centraux".

Coefficients coins. On va, en premier, calculer les coefficients associés aux 4 sommets. Par exemple, pour trouver N_{00}, on regarde dans quelles sommes se trouve un terme indicé $_{00}$. Il vient :

$$N_{00} = S^{(1)}_{00} + S^{(5)}_{00} + S^{(8)}_{00} + S^{(9)}_{00}$$

$$\text{soit : } \quad N_{00} = R^{(1)}_{00} + R^{(5)}_{00} + R^{(8)}_{00} + R^{(9)}_{00} \;=\; Q^{(1)}_{00} + Q^{(5)}_{00} + Q^{(8)}_{00} + Q^{(9)}_{00}\,,$$

on remplace alors les Q par leurs expressions.

$$N_{00} \;=\; |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| + |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}|\,, + |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| + |\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}|$$

soit :

$$|2\overrightarrow{A_1C_5} - \overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_1C_8}| \;+\; |\overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_1C_8}|\,, \text{il vient donc : } N_{00} \;=\; 4\,|\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{A_1C_8}|\,,$$

qui est le résultat attendu. Le jacobien évalué pour A_1 est représenté par la surface du triangle coin. On a, de même :

$$N_{30} = Q^{(2)}_{20} + Q^{(5)}_{30} + Q^{(6)}_{10} + Q^{(9)}_{20}$$

et, par suite :

$$N_{30} \;=\; |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| + |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{20}| + |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|\,, + |\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{20}|\,,$$

$$\text{soit : } |2\overrightarrow{C_5A_2} - \overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_2C_6}| \;+\; |\overrightarrow{A_1A_2} \quad 2\overrightarrow{A_2C_6}|\,,$$

qui est similaire à l'expression trouvée ci-dessus, par conséquent :

$$N_{30} \;=\; 4\,|\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{A_2C_6}|\,.$$

On trouve de même :

$$N_{03} = Q^{(4)}_{02} + Q^{(7)}_{01} + Q^{(8)}_{03} + Q^{(9)}_{02} \quad \text{et le calcul donne} \quad 4\,|\overrightarrow{A_4C_7} \quad \overrightarrow{C_8A_4}|$$

.

Et, pour finir avec les 4 jacobiens coins :

$$N_{33} = Q^{(3)}_{22} + Q^{(7)}_{31} + Q^{(6)}_{13} + Q^{(9)}_{22} \quad \text{et le calcul donne} \quad 4\,|\overrightarrow{C_7A_3} \quad \overrightarrow{C_6A_3}|$$

.

Coefficients associés à une arête. On passe à une arête et ses deux coefficients, par exemple N_{10} et N_{20}. On a :

$$N_{10} = S^{(1)}_{10} + S^{(2)}_{10} + S^{(5)}_{10} + S^{(6)}_{10} + S^{(8)}_{10} + S^{(9)}_{10}\,,$$

$$N_{10} = \frac{R^{(1)}_{00} + 2R^{(1)}_{10}}{3} + \frac{2R^{(2)}_{10}}{3} + R^{(5)}_{10} + \frac{2R^{(6)}_{10}}{3} + \frac{R^{(8)}_{00} + 2R^{(8)}_{10}}{3} + \frac{R^{(9)}_{00} + 2R^{(9)}_{10}}{3}\,,$$

$$3\,N_{10} = Q^{(1)}_{00} + 2Q^{(1)}_{10} + 2Q^{(2)}_{10} + 3Q^{(5)}_{10} + Q^{(6)}_{10} + 2Q^{(8)}_{00} + Q^{(9)}_{00} + 2Q^{(9)}_{10}\,,$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme.

$$\begin{aligned}
Q^{(1)}_{00} \;&=\; |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| \\
2Q^{(1)}_{10} \;&=\; |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| \\
2Q^{(2)}_{10} \;&=\; |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| \\
3Q^{(5)}_{10} \;&=\; |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}| \;+\; 2\,|2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}| \\
Q^{(6)}_{10} \;&=\; |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| \\
2Q^{(8)}_{00} \;&=\; 2\,|\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|
\end{aligned}$$

$$Q_{00}^{(9)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|$$
$$2Q_{10}^{(9)} = 2\,|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|\,,$$

en additionnant, les 2 premier termes s'annulent tandis que d'autres termes s'annulent partiellement par regroupement. Ne restent alors que :

$$2\,|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}|$$
$$|2\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| + 2\,|2\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}|$$
$$|2\Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|\,\text{ouvert en}\,|2\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|\,\text{et}\,|2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|\,,$$

soit :

$$3N_{10} = 2\,|\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02}| + 2\,|2\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| + |2\Delta_{00}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}| + |2\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01}|\,,$$

et au final :

$$3N_{10} = 2|\Delta_{00}^{10} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4|\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}|\,,$$

avec

$$\overrightarrow{V_{00}} = 2\Delta_{10}^{02} + (2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}) + (2\Delta_{20}^{01} - \Delta_{20}^{02})\,,$$

ou encore

$$\overrightarrow{V_{00}} = 2\Delta_{10}^{02} + (\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}) + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01})\,.$$

En fonction des A_i et des C_i, on a :

$$3N_{10} = 2|\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4|\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_8}|\,,$$

avec

$$\overrightarrow{V_{00}} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{A_1C_8} - \overrightarrow{C_8A_4}) + (\overrightarrow{A_2C_6} - \overrightarrow{C_6A_3})\,,$$

et ce vecteur n'est autre que le vecteur $4\,\overrightarrow{C_5C_9}$, voir la Relation (**??**), de l'élément complet quand on définit C_9 à partir du nœud A_9 obtenu en prenant l'image du couple $(0,0)$[11] de l'élément réduit. Ainsi les coefficients N_{10} de l'élément complet et de l'élément réduit sont, via cette construction, strictement identiques.

Pour vérifier plus avant, on va calculer N_{20}. On a :

$$N_{20} = S_{20}^{(1)} + S_{20}^{(2)} + S_{20}^{(5)} + S_{20}^{(6)} + S_{20}^{(8)} + S_{20}^{(9)}\,,$$
$$N_{20} = \frac{2R_{10}^{(1)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(2)} + R_{20}^{(2)}}{3} + R_{20}^{(5)} + \frac{2R_{10}^{(6)} + R_{20}^{(6)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(8)}}{3} + \frac{2R_{10}^{(9)} + R_{20}^{(9)}}{3}\,,$$
$$3\,N_{20} = 2Q_{10}^{(1)} + 2Q_{10}^{(2)} + Q_{20}^{(2)} + 3Q_{20}^{(5)} + 2Q_{10}^{(6)} + Q_{00}^{(8)} + 2Q_{10}^{(9)} + Q_{20}^{(9)}\,,$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme dont certains ont déjà été explicités lors du calcul de N_{20}.

$$2Q_{10}^{(1)} = |2\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{20} \quad 2\Delta_{00}^{01} - \Delta_{00}^{02}|$$

[11] En effet, comme, élément réduit :

$$A_9 = -\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} + \frac{A_5 + A_6 + A_7 + A_8}{2}\,,$$

il vient $4A_9 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(A_5 + A_6 + A_7 + A_8)\,,$

et puisque, élément complet :

$$16A_9 = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) + 4C_9\,,$$

on a, en remplacant A_9 par sa valeur : $4C_9 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8)\,,$

et, par suite, on trouve successivement :

$$4\overrightarrow{C_5C_9} = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) - 4C_5$$
$$4\overrightarrow{C_5C_9} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + \overrightarrow{A_1C_8} + \overrightarrow{A_2C_6} + \overrightarrow{A_3C_6} + \overrightarrow{A_4C_8}\,,$$

qui est bien $\overrightarrow{V_{00}}$.

$$
\begin{aligned}
2Q^{(2)}_{10} &= |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| \\
Q^{(2)}_{20} &= |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| \\
3Q^{(5)}_{20} &= |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{20}| + 2\,|2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}| \\
2Q^{(6)}_{10} &= 2|\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| \\
Q^{(8)}_{00} &= |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| \\
2Q^{(9)}_{10} &= 2\,|\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}|\,, \\
Q^{(9)}_{20} &= |\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{20}|\,,
\end{aligned}
$$

en additionnant, le second et le troisième terme s'annulent tandis que d'autres s'annulent partiellement par regroupement. Ne restent alors que :

$$|2\Delta^{10}_{10} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|$$

$$|2\Delta^{10}_{00} \quad \Delta^{02}_{20}| + 2\,|2\Delta^{10}_{10} \quad \Delta^{02}_{10}|$$

$$2|\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|\,\text{ouvert en}\,2|\Delta^{10}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|\text{et}\,2|\Delta^{10}_{10} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$

soit :

$$3N_{20} = |2\Delta^{10}_{10} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| + 2|2\Delta^{10}_{10} \quad \Delta^{02}_{10}| + 2|\Delta^{10}_{10} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}| + 2|\Delta^{10}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20}|\,,$$

et au final :

$$3N_{20} = 2|\Delta^{10}_{10} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4|\Delta^{10}_{00} \quad \Delta^{01}_{20}|\,\text{avec le vecteur}\,\overrightarrow{V_{00}}\,\text{introduit pour}\,N_{10}\,.$$

En fonction des A_i et des C_i, on a :

$$3N_{20} = 2|\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{V_{00}}| + 4|\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{A_2C_6}|\,,$$

qui est le symétrique de N_{10} comme espéré.

Coefficients centraux. On va ici donner l'expression du coefficient N_{11}, les trois autres s'en déduisant. On a :

$$N_{11} = S^{(1)}_{11} + S^{(2)}_{11} + S^{(3)}_{11} + S^{(4)}_{11} + S^{(5)}_{11} + S^{(6)}_{11} + S^{(7)}_{11} + S^{(8)}_{11} + S^{(9)}_{11}\,,$$

$$N_{11} = \frac{R^{(1)}_{01} + 2R^{(1)}_{11}}{3} + \frac{2R^{(2)}_{11}}{3} + \frac{2R^{(3)}_{11}}{3} + \frac{R^{(4)}_{01} + 2R^{(4)}_{11}}{3} + \frac{R^{(5)}_{10} + 2R^{(5)}_{11}}{3} + \frac{2R^{(6)}_{11}}{3} + \frac{2R^{(7)}_{11}}{3} + \frac{R^{(8)}_{01} + 2R^{(8)}_{11}}{3} + \frac{R^{(9)}_{01} + 2R^{(9)}_{11}}{3}\,,$$

soit

$$3N_{11} = R^{(1)}_{01} + 2R^{(1)}_{11} + 2R^{(2)}_{11} + 2R^{(3)}_{11} + R^{(4)}_{01} + 2R^{(4)}_{11} + R^{(5)}_{10} + 2R^{(5)}_{11} + 2R^{(6)}_{11} + 2R^{(7)}_{11} + R^{(8)}_{01} + 2R^{(8)}_{11} + R^{(9)}_{01} + 2R^{(9)}_{11}\,,$$

qui, exprimé en fonction des Q, donne :

$$
\begin{aligned}
3N_{11} = {} & \frac{Q^{(1)}_{00} + 2Q^{(1)}_{01}}{3} + 2\frac{Q^{(1)}_{10} + 2Q^{(1)}_{11}}{3} + 2\frac{Q^{(2)}_{10} + 2Q^{(2)}_{11}}{3} + 2\frac{2Q^{(3)}_{11}}{3} + \frac{2Q^{(4)}_{01}}{3} + 2\frac{2Q^{(4)}_{11}}{3} \\
& + Q^{(5)}_{10} + Q^{(5)}_{10} + Q^{(6)}_{11} + Q^{(7)}_{11} + Q^{(8)}_{01} + Q^{(8)}_{01} + \frac{Q^{(9)}_{00} + 2Q^{(9)}_{01}}{3} + 2\frac{Q^{(9)}_{10} + 2Q^{(9)}_{11}}{3}\,,
\end{aligned}
$$

soit :

$$
\begin{aligned}
9N_{11} = {} & Q^{(1)}_{00} + 2Q^{(1)}_{01} + 2(Q^{(1)}_{10} + 2Q^{(1)}_{11}) + 2(Q^{(2)}_{10} + 2Q^{(2)}_{11}) + 4Q^{(3)}_{11} + 2Q^{(4)}_{01} + 4Q^{(4)}_{11} \\
& + 6Q^{(5)}_{10} + 3Q^{(6)}_{11} + 3Q^{(7)}_{11} + 6Q^{(8)}_{01} + Q^{(9)}_{00} + 2Q^{(9)}_{01} + 2(Q^{(9)}_{10} + 2Q^{(9)}_{11})\,,
\end{aligned}
$$

soit encore :

$$9N_{11} = Q^{(1)}_{00} + 2Q^{(1)}_{01} + 2Q^{(1)}_{10} + 4Q^{(1)}_{11} + 2Q^{(2)}_{10} + 4Q^{(2)}_{11} + 4Q^{(3)}_{11} + 2Q^{(4)}_{01} + 4Q^{(4)}_{11}$$
$$+6Q^{(5)}_{10} + 3Q^{(6)}_{11} + 3Q^{(7)}_{11} + 6Q^{(8)}_{01} + Q^{(9)}_{00} + 2Q^{(9)}_{01} + 2Q^{(9)}_{10} + 4Q^{(9)}_{11}\,,$$

on exprime alors les Q (avec les poids) présents dans cette somme dont certains ont déjà été explicités pour N_{10} et N_{20}.

$$Q^{(1)}_{00} = |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(1)}_{01} = |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{01} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(1)}_{10} = |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$4Q^{(1)}_{11} = |2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{01} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(2)}_{10} = |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$4Q^{(2)}_{11} = |2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{21} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$4Q^{(3)}_{11} = |2\Delta^{10}_{02} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$2Q^{(4)}_{01} = |2\Delta^{10}_{02} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$4Q^{(4)}_{11} = |2\Delta^{10}_{12} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$6Q^{(5)}_{10} = 2|2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}| + 4\,|2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}|$$
$$3Q^{(6)}_{11} = |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{21} - \Delta^{02}_{20}| + 2|\Delta^{20}_{01} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$3Q^{(7)}_{11} = 2|2\Delta^{10}_{02} - \Delta^{20}_{02} \quad \Delta^{02}_{10}| + |2\Delta^{10}_{12} - \Delta^{20}_{02} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$6Q^{(8)}_{01} = 4|\Delta^{20}_{01} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| + 2|\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{01} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$Q^{(9)}_{00} = |\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(9)}_{01} = 2\,|\Delta^{20}_{01} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(9)}_{10} = 2\,|\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}|$$
$$4Q^{(9)}_{11} = 4\,|\Delta^{20}_{01} \quad \Delta^{02}_{10}|\,,$$

les termes 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6 et 8 et 9 s'annulent, ne restent que :

$$4Q^{(3)}_{11} = |2\Delta^{10}_{02} - \Delta^{20}_{02} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$6Q^{(5)}_{10} = 2|2\Delta^{10}_{10} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}| + 4\,|2\Delta^{10}_{00} - \Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}|$$
$$3Q^{(6)}_{11} = |\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{21} - \Delta^{02}_{20}| + 2|\Delta^{20}_{01} \quad 2\Delta^{01}_{20} - \Delta^{02}_{20}|$$
$$3Q^{(7)}_{11} = 2|2\Delta^{10}_{02} - \Delta^{20}_{02} \quad \Delta^{02}_{10}| + |2\Delta^{10}_{12} - \Delta^{20}_{02} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$6Q^{(8)}_{01} = 4|\Delta^{20}_{01} \quad 2\Delta^{01}_{00} - \Delta^{02}_{00}| + 2|\Delta^{20}_{00} \quad 2\Delta^{01}_{01} - \Delta^{02}_{00}|$$
$$Q^{(9)}_{00} = |\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(9)}_{01} = 2\,|\Delta^{20}_{01} \quad \Delta^{02}_{00}|$$
$$2Q^{(9)}_{10} = 2\,|\Delta^{20}_{00} \quad \Delta^{02}_{10}|$$
$$4Q^{(9)}_{11} = 4\,|\Delta^{20}_{01} \quad \Delta^{02}_{10}|\,.$$

On ouvre tous les $\Delta^{20}_{..}$ et les $\Delta^{02}_{..}$ et on répartit le dernier terme :

$$4Q^{(3)}_{11} = |\Delta^{10}_{02} - \Delta^{10}_{12} \quad \Delta^{01}_{20} - \Delta^{01}_{21}|$$

$$6Q_{10}^{(5)} = 2|\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}| \,+\, 4\,|\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}|$$

$$3Q_{11}^{(6)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}| \,+\, 2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}|$$

$$3Q_{11}^{(7)} = 2|\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{10}^{02}| \,+\, |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

$$6Q_{01}^{(8)} = 4|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}| \,+\, 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}|$$

$$Q_{00}^{(9)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

$$2Q_{01}^{(9)} = 2\,|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

$$2Q_{10}^{(9)} = 2\,|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|$$

$$4Q_{11}^{(9)} \;=\; 2\,|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}| + 2\,|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02}|\,.$$

On cherche les termes en $|\Delta_{01}^{20} \quad ...|$ et en $|... \quad \Delta_{10}^{02}|$, on trouve les deux expressions suivantes :

$$|\Delta_{01}^{20} \quad 2\Delta_{10}^{02} + 2(\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 4(\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}) + 2(\Delta_{00}^{02})|\,,$$

soit

$$2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02} + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 3\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}|\,,$$

et

$$|2\Delta_{01}^{20} + 4(\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10}) + 2(\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) + 2(\Delta_{00}^{20}) \quad \Delta_{10}^{02}|\,,$$

soit

$$2|\Delta_{01}^{20} + 3\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} + (\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{10}^{02}|\,,$$

expressions totalement symétriques. Restent alors à assembler :

$$4Q_{11}^{(3)} = |\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}|$$

$$6Q_{10}^{(5)} = 2|\Delta_{10}^{10} - \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

$$3Q_{11}^{(6)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}|$$

$$3Q_{11}^{(7)} = |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

$$6Q_{01}^{(8)} = 2|\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}|$$

$$Q_{00}^{(9)} = |\Delta_{00}^{20} \quad \Delta_{00}^{02}|\,.$$

On cherche les termes en $|\Delta_{00}^{10} \quad ...|$ et en $|\Delta_{10}^{10} \quad ...|$ puis en $|\Delta_{02}^{10} \quad ...|$ et en $|\Delta_{12}^{10} \quad ...|$, on trouve les quatres expressions qui suivent :

$$|\Delta_{00}^{10} \quad - 2\Delta_{00}^{01} - 2\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01} + 2(\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}) + \Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01}|$$

$$|\Delta_{00}^{10} \quad - 3\Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}|$$

$$|\Delta_{10}^{10} \quad 2\Delta_{00}^{01} + 2\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01} + 2(\Delta_{01}^{01} - \Delta_{00}^{01}) + \Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01}|$$

$$|\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01} + 5\Delta_{01}^{01} + \Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01}|\,,$$

restent alors :

$$4Q_{11}^{(3)} = |\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}|$$

$$3Q_{11}^{(7)} = |\Delta_{12}^{10} - \Delta_{02}^{10} \quad \Delta_{00}^{02}|$$

donc :

$$|\Delta_{02}^{10} \quad (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) - \Delta_{00}^{02}|$$

$$|\Delta_{12}^{10} \quad \Delta_{00}^{02} - (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01})|\,,$$

en résumé, on a les termes :

$$|\Delta_{00}^{10} \quad - 3\Delta_{00}^{01} + \Delta_{01}^{01} + (\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01})|$$

$$|\Delta_{10}^{10} \quad \Delta_{00}^{01} + 5\Delta_{01}^{01} + (\Delta_{21}^{01} - \Delta_{20}^{01})|\,,$$

$$|(\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01} - \Delta_{00}^{02}|$$

$$2|\Delta_{01}^{20} \quad \Delta_{10}^{02} + (\Delta_{20}^{01} - \Delta_{21}^{01}) + 3\Delta_{00}^{01} - \Delta_{01}^{01}|\,,$$

$$2|\Delta_{01}^{20} + 3\Delta_{00}^{10} - \Delta_{10}^{10} + (\Delta_{02}^{10} - \Delta_{12}^{10}) \quad \Delta_{10}^{02}|\,.$$

Au total, le coefficient N_{11} est la somme des termes calculés ci-dessus, où l'on voit la nature des contributions, l'arête "centrale" de chaque direction, l'arête proche avec ses deux "moitiés" et, pour finir, l'arête éloignée. Écrit en fonction des A_i et des C_i, ceci donne :

$$9N_{11} \; = |\overrightarrow{A_1C_5} \quad - 3\overrightarrow{A_1C_8} + \overrightarrow{C_8A_4} + (\overrightarrow{C_6A_3} - \overrightarrow{A_2C_6})|$$

$$+ |\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{A_1C_8} + 5\overrightarrow{C_8A_4} + (\overrightarrow{C_6A_3} - \overrightarrow{A_2C_6})|\,,$$

$$+ |(\overrightarrow{A_4C_7} - \overrightarrow{C_7A_3}) \quad \overrightarrow{A_2C_6} - \overrightarrow{C_6A_3} - \overrightarrow{A_1A_4}|$$

$$+ 2|\overrightarrow{C_8C_6} \quad \overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{A_2C_6} - \overrightarrow{C_6A_3}) + 3\overrightarrow{A_1C_8} - \overrightarrow{C_8A_4}|\,,$$

$$+ 2|\overrightarrow{C_8C_6} + 3\overrightarrow{A_1C_5} - \overrightarrow{C_5A_2} + (\overrightarrow{A_4C_7} - \overrightarrow{C_7A_3}) \quad \overrightarrow{C_5C_7}|\,.$$

Cette expression peut semblé assez bizarre et délicate à décrypter, en fait elle cache des vecteurs "naturels" que l'on va exhiber ci-dessous en vérifiant que ce coefficient est identique à celui de la Relation (**??**) quand on construit C_9, élément complet, à partir de A_9 de l'élément incomplet. On part de

$$9N_{11} = 9{\times}4Q_{11} = 8\,|\,\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{C_9C_7}\,| + 16\,|\,\overrightarrow{C_8C_9} \quad \overrightarrow{C_5C_9}\,| + 4\,|\,\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{C_8A_4}\,| + 8\,|\,\overrightarrow{C_9C_6} \quad \overrightarrow{A_1C_8}\,|\,,$$

on remplace C_9 par son expression et on exprime tous les vecteurs ayant C_9 comme extrémité. Il vient :

$$9N_{11} = 2\,|\,\overrightarrow{A_1C_5} \quad \overrightarrow{V_{02}}\,| \; + \; |\,\overrightarrow{U_{00}} \quad \overrightarrow{V_{00}}\,| \; + \; 4\,|\,\overrightarrow{C_5A_2} \quad \overrightarrow{C_8A_4}\,| \; + 2\,|\,\overrightarrow{U_{20}} \quad \overrightarrow{A_1C_8}\,|\,,$$

avec

$$\overrightarrow{U_{00}} = 2\overrightarrow{C_8C_6} + (\overrightarrow{A_1C_5} - \overrightarrow{C_5A_2}) + (\overrightarrow{A_4C_7} - \overrightarrow{C_7A_3})\,,$$

$$\overrightarrow{U_{20}} = 2\overrightarrow{C_8C_6} + (\overrightarrow{C_5A_2} - \overrightarrow{A_1C_5}) + (\overrightarrow{C_7A_3} - \overrightarrow{A_4C_7})\,,$$

$$\overrightarrow{V_{00}} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{A_1C_8} - \overrightarrow{C_8A_4}) + (\overrightarrow{A_2C_6} - \overrightarrow{C_6A_3})\,,$$

$$\overrightarrow{V_{02}} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{C_8A_4} - \overrightarrow{A_1C_8}) + (\overrightarrow{C_6A_3} - \overrightarrow{A_2C_6})\,.$$

Il faut donc montrer que les deux façons de calculer le coefficient conduisent au même résultat ce qui n'est pas immédiatement évident. Nous choisissons de montrer que, terme à terme, les deux formules sont identiques. La démonstration consiste donc à énumerer tout les termes de chacune des deux expressions et à vérifier simplement que l'on trouve les mêmes termes dans chacune.

La structure de ce coefficient permettra de trouver les 3 autres coefficients centraux en permutant, par symétrie, les vecteurs et les poids en repartant de l'élément complet qui offre un meilleur aspect.

Au final, on a, pour les coefficients, la liste suivante :

$$
\begin{array}{lcc}
N_{00} & = & 4\,|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{A_1C_8}| \\
N_{10} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{V_{00}}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{A_1C_8}| \\
N_{20} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{V_{00}}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{A_2C_6}| \\
N_{30} & = & 4\,|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{A_2C_6}| \\
N_{31} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{A_2C_6}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{C_6A_3}| \\
N_{32} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{C_6A_3}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{A_2C_6}| \\
N_{33} & = & 4\,|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{C_6A_3}| \\
N_{13} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{V_{02}}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{C_8A_4}| \\
N_{23} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{V_{02}}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{C_6A_3} \\
N_{03} & = & 4\,|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{C_8A_4}| \\
N_{01} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{A_1C_8}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{C_8A_4}| \\
N_{02} & = & \frac{2}{3}|\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{C_8A_4}| + \frac{4}{3}|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{A_1C_8}| \\
N_{11} & = & \frac{1}{9}(2\,|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{V_{02}}\,| + |\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{V_{00}}\,| + 4\,|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{C_8A_4}\,| + 2\,|\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{A_1C_8}\,|) \\
N_{21} & = & \frac{1}{9}(2\,|\overrightarrow{C_5A_2}\quad \overrightarrow{V_{02}}\,| + |\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{V_{00}}\,| + 4\,|\overrightarrow{A_1C_5}\quad \overrightarrow{C_6A_3}\,| + 2\,|\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{A_2C_6}\,|) \\
N_{12} & = & \frac{1}{9}(2\,|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{V_{00}}\,| + |\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{V_{02}}\,| + 4\,|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{A_1C_8}\,| + 2\,|\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{C_8A_4}\,|) \\
N_{22} & = & \frac{1}{9}(2\,|\overrightarrow{C_7A_3}\quad \overrightarrow{V_{00}}\,| + |\overrightarrow{U_{20}}\quad \overrightarrow{V_{02}}\,| + 4\,|\overrightarrow{A_4C_7}\quad \overrightarrow{A_2C_6}\,| + 2\,|\overrightarrow{U_{00}}\quad \overrightarrow{C_6A_3}\,|)\,,
\end{array}
$$

avec les vecteurs déjà vus :

$$\overrightarrow{U_{00}} = 2\overrightarrow{C_8C_6} + (\overrightarrow{A_1C_5} - \overrightarrow{C_5A_2}) + (\overrightarrow{A_4C_7} - \overrightarrow{C_7A_3})\,,$$

$$\overrightarrow{U_{20}} = 2\overrightarrow{C_8C_6} + (\overrightarrow{C_5A_2} - \overrightarrow{A_1C_5}) + (\overrightarrow{C_7A_3} - \overrightarrow{A_4C_7})\,,$$

$$\overrightarrow{V_{00}} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{A_1C_8} - \overrightarrow{C_8A_4}) + (\overrightarrow{A_2C_6} - \overrightarrow{C_6A_3})\,,$$

$$\overrightarrow{V_{02}} = 2\overrightarrow{C_5C_7} + (\overrightarrow{C_8A_4} - \overrightarrow{A_1C_8}) + (\overrightarrow{C_6A_3} - \overrightarrow{A_2C_6})\,.$$

En remarque finale sur cet élément réduit, on note que, plus simple dans son aspect élément fini, il est peu évident d'analyser son jacobien et que, par suite, construire un élément complet semble être la meilleure solution pour valider un élément réduit.

7 Éléments quadrilatéraux Q2 faux

Un maillage Q2 est faux si au moins l'un de ses éléments Q2 est faux. Un élément est faux si son jacobien, en un nœud d'évaluation quelconque est négatif ou nul. Géométriquement, cela signifie un problème au niveau des tangentes en un sommet, une intersection entre deux arêtes (auto-intersection de l'élément lui-même), un chevauchement entre deux éléments (donc une auto-intersection de l'un des deux) ou un élément retourné (donc encore une auto-intersection quelque part).

7.1 Élément courbe

Un quadrilatère courbe Q2 (sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et points de contrôle $C_5, C_6, C_7, ...$) est faux dés lors que son jacobien, en un point interne ou un point de son bord, est négatif ou nul. Plusieurs cas, *a priori* contre-intuitifs, existent pour lesquels un jacobien est strictement nul en un nœud du bord de l'élément en question alors que, visuellement, tout semble normal.

- un quadrilatère avec son arête A_1A_2 droite et tel que l'arête A_4A_1 soit courbe avec comme tangente en A_1 la droite portée par A_1A_2. Donc, A_1, C_8 et A_2 sont alignés et le premier jacobien est nul car C_5 est sur A_1A_2. On nomme un tel quadrilatère, *quadrilatère auto-tangent à angle nul.*
- un quadrilatère avec son arête A_4A_1 droite et tel que l'arête A_1A_2 soit courbe avec comme tangente en A_1 la droite portée par A_1A_4. Donc, A_4, A_1 et C_5 sont alignés et le premier jacobien est nul car C_8 est sur A_1A_4. On nomme un tel quadrilatère, *quadrilatère auto-tangent à angle plat.*

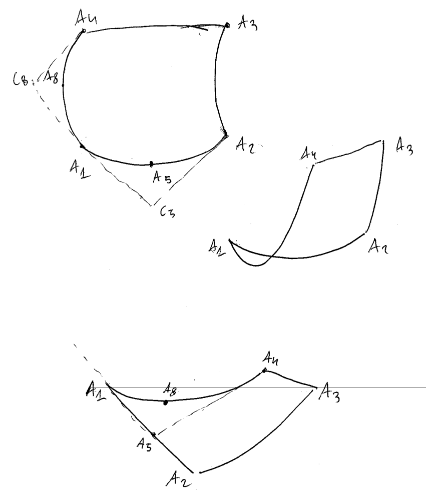

FIG. 11 – *Quelques exemples simples d'éléments Q2 plans faux.*

– un quadrilatère avec ses arêtes A_1A_2 et A_4A_1 courbes avec une tangente en A_1, à droite, identique à la tangente en A_1 à gauche. Donc, C_8, A_1 et C_5 sont alignés et le premier jacobien est encore nul. On nomme un tel quadrilatère, comme ci-dessus, *quadrilatère auto-tangent à angle plat.*
– plus surprenant est le cas d'un quadrilatère tel que, par exemple, C_5^*, point virtuel situé au quart de A_5A_7, est "au dessus" de A_9, impliquant que le jacobien évalué au milieu de la première arête est négatif. Ceci est lié à la position relative de A_5, A_7 et A_9. On nomme un tel quadrilatère, *quadrilatère auto-pénétrant.*

Une conséquence de cette situation est que à partir d'un maillage P2 correct d'une courbe, on peut, si l'on n'y prête garde, construire des quadrilatères Q2 dont un jacobien au bord est nul (la même remarque vaut évidemment dans la dimension supérieure, une surface Q2 correcte peut conduire à construire d'hexaèdres Q2, voir [7], ayant un jacobien nul au bord) voire négatif.

Les autres cas d'invalidité réelle sont plus classiques, en fait l'élément lui-même, s'auto-intersecte[12] (pour le cas d'une surface, c'est identique, en supposant que la surface ne s'auto-intersecte pas elle-même (si deux éléments se coupent)) ou est à l'envers (surface orientable)).

7.2 Élément droit

Le nœud milieu d'une arête ne doit pas être situé avant le quart ou après les trois-quarts, bornes comprises, de son arête. Une telle situation provoque une singularité ou une définition avec retournement. Ainsi, pour la première arête, si A_5 est au quart de A_1A_2, on a $\overrightarrow{v}$ qui est un vecteur nul dans l'expression de $\mathcal{J}(\hat{A}_1)$ tandis que si A_5 est aux trois-quarts, c'est le vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$ qui est un vecteur nul.

7.3 Correction d'un maillage quadrilatéral Q2 faux

Quadrilatères Q2 plans. Dans le cas plan, on suppose que les sommets et nœuds sont internes au domaine, alors une idée pour corriger le maillage est l'algorithme étonnamment simple suivant :

- Boucle sur les éléments
  - calculer les 4 premiers jacobiens,
  - si, par exemple, le premier (sommet A_1) est (strictement) négatif, inverser les 2 points de contrôle associés (C_5 et C_8) s'ils sont libres,
  - dans le même cas, si un seul point de contrôle est libre, par exemple C_8, faire $C_8 = C_5 - \varepsilon\, \overrightarrow{C_5C_8}$ (ε petit),

[12]situation inexistante pour un quadrilatère Q1.

  - dans le même cas, si les deux points de contrôle sont fixes (nœuds frontière), le maillage de la frontière est faux,
  - si ce jacobien est nul et si A_1 est fixe, le maillage de la frontière n'est pas nécessairement faux mais on peut s'attendre à des conséquence en terme de qualité et supprimer cette pathologie (en ramenant, si c'est possible une arête sur A_1, ce qui revient à casser l'arête en face de A_1),
  - si ce jacobien est nul et si A_1 est libre, faire (même si ce n'est pas strictement nécessaire) $A_1 = .5(C_5 + C_8)$ puis $C_5 = C_5 + \varepsilon\overrightarrow{C_5A_2}$ et $C_8 = C_8 + \varepsilon\overrightarrow{C_8A_4}$ (ε petit), ou faire comme ci-dessus (ramener une connexion sur A_1),
- Fin

Dans cet algorithme heuristique, il faut valider toute opération en considérant les éléments voisins.

Notons que l'endroit où le jacobien est négatif ou nul indique l'endroit où les modifications sont à effectuer. En effet, par exemple si on considère un cas où c'est le premier jacobien qui est non valide, il est clair que l'on ne peut agir que sur A_1, A_5 ou C_5 et A_8 ou C_8 puisque les autres entités n'influent pas sur la valeur de ce jacobien. Par contre, autre exemple, si le jacobien est non valide sur le nœud A_5, alors toutes les entités voisines des extrémités de l'arête portant A_5 sont à prendre en compte.

Dans le cas où le maillage de la frontière est faux, il faut retourner à la CAO, c'est-à-dire au code qui, partant de la définition des courbes, construit effectivement le maillage de celles-ci.

Quadrilatères Q2 surfaciques. Dans le cas surfacique, on suppose que la surface ne s'auto-intersecte pas (au sens où aucun couple de quadrilatr̀es ne s'intersecte), alors les algorithmes ci-dessus peuvent être utilisés pour donner un diagnostic sur une éventuelle pathologie du maillage (tous les sommets et nœuds étant réputés fixes).

Le plus simple est, pour un élément donné, de construire des tétraèdres virtuels en choisissant quelques découpes en triangles et en définissant, pour chacun de ses triangles, un quatrième sommet et 3 arêtes droites et d'évaluer divers jacobiens de ces tétraèdres (voir [7]) en fonction de leur pertinence à détecter telle ou telle pathologie.

- Boucle sur les éléments
  - Découpage en triangles et boucle sur ces triangles
    - construire un tétraèdre virtuel appuyé sur le triangle
    - calculer les premiers jacobiens (ceux associés aux sommets),
    - si, par exemple, le premier (sommet A_1) est strictement négatif, l'arête A_1A_2 coupe l'arête A_3A_1 après projection (sur le plan tangent en A_1, plan défini de manière approchée),
    - si ce jacobien est nul, l'arête A_1A_2 et l'arête A_3A_1 ont des tangentes coplanaires identiques ou opposées,
  - Fin découpage
- Fin

8 Vers une définition de la qualité d'un élément

Distorsion du jacobien. On définit $Q_{\mathcal{J}}(K)$ par :

$$Q_{\mathcal{J}}(K) = \frac{\min_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})}{\max_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})}.$$

Ce critère permet de quantifier l'écart entre un élément Q2 et l'élément Q1 correspondant (construits sur ses seuls sommets). En pratique, on ne sait pas calculer efficacement ce critère, certains auteurs utilisent simplement les jacobiens des nœuds. Cependant, on peut utiliser les extrema des "points" de contrôle du jacobien (les N_{ij}) et définir $Q_{\mathcal{J}}(K)$ par :

$$Q_{\mathcal{J}}(K) = \frac{\min_{ij} N_{ij}}{\max_{ij} N_{ij}}.$$

Notons que $Q_{\mathcal{J}}(K) = 1$ uniquement dans le cas d'un carré droit.

Vers un critère de qualité purement géométrique. On a ici deux difficultés à résoudre puisque l'élément n'est pas simplicial et, de plus, est courbe.

L'idée est de quantifier la qualité avec plusieurs objectifs, la continuité d'un élément droit à un élément courbe, la continuité d'un élément quadrilatéral à un élément simplicial (cas d'un maillage mixte) et la faculté de bien caractériser et différencier les éléments entre eux.

La mesure classique pour les simplexes, $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$ où h est le diamètre, ρ est le rayon inscrit et α un coefficient de normalisation ne peut être utilisé ici car on ne sait pas définir[13] ρ. Par conséquent, on va partir d'une définition (en forme) de la forme rapport des longueurs (d'arêtes ou de diagonales) avec le volume. Nous proposons donc la forme générale suivante :

$$Q_F = \alpha \frac{h\, S_{max}}{V_{min}} \,,$$

en trois dimensions qui se réduit ici à :

$$Q_F = \alpha \frac{h\, l_{max}}{S_{min}} \,,$$

avec

– h, dit le diamètre de l'élément, évalué comme la plus grande distance entre deux nœuds,
– l_{max} la plus grande distance entre deux nœuds consécutifs du bord de l'élément,
– S_{min} la surface du plus petit quadrilatère du découpage en quatre de l'élément en considérant les points de Bézier ou les nœuds, point qui reste à discuter.

9 Conclusions

Après avoir donné quelques rappels sur les courbes et les carreaux quadrilatéraux de Bézier et sur les éléments finis quadrilatéraux Q2, on a fait le lien entre ces éléments Q2 et les carreaux de Bézier. De la sorte, on a exhibé une condition suffisante de validité qui revient à calculer un certain nombre de coefficients[14] et à en regarder le signe. Incidemment, on a montré quelques pathologies correspondant à des éléments non valides en proposant des méthodes de correction.

Le cas des surfaces gauches a fait l'objet de quelques remarques. Par ailleurs, on a discuté de ce que pourrait être une définition de la notion de qualité pour les éléments quadrilatéraux plans.

La construction effective de maillage composé de ce type d'élément n'est pas le sujet de ce rapport, voir cependant [6], construction de maillage en triangles P2, et [3], construction de maillage en triangles P1 et conversion en maillage composé de quadrilatères.

Références

[1] P. Bézier, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.

[2] H. Borouchaki and P.L. George, Quality mesh generation, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Concise review paper, t. 328, Serie II-b, pp. 505-518, 2000.

[3] P. Laug and H. Borouchaki, The BL2D Mesh Generator, Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual, *RT INRIA* **0194** (**0185** in French), 1996.

[4] H. Borouchaki et P. Laug, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 2 : Surface P2, à paraître.

[5] S. Dey, R.M. O'Bara and M.S. Shephard, Curvilinear mesh generation in 3D, *8th Inter. Meshing Roundtable*, pp. 407-417, 1999.

[6] P.L. George, H. Borouchaki et P. Laug, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 1 : Triangle P2, *RR INRIA* **7519**, 2011.

[13] On pourrait considérer le maximum du rayon de tout cercle inscrit mais, en pratique, c'est peu réaliste.

[14] Pour un élément Q2 complet, on a 9 coefficients, pour des degrés plus elevé ce nombre vaut $(d+1)^2$.

[7] P.L. George et H. Borouchaki, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 3 : Tétraèdre P2, *RR INRIA* **7626**, 2011.

[8] P.L. George et H. Borouchaki, Analyse et correction des maillages de surface de degré 2, *RR INRIA* **7668**, 2011.

[9] P.L. George et H. Borouchaki, Simplexe de Lagrange de degré et de dimension arbitraire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Serie 1 349, pp. 905-910, 2011.

[10] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method*, North Holland, 1978.

[11] P.G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 17-352, 1991.

[12] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide.* 5^{th} edition, Academic Press, 2002.

[13] P.J. Frey and P.L. George, *Mesh Generation*, 2^{nd} edition, ISTE and Wiley, 2008.

[14] S.J. Sherwin and J. Peiro, Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements, *Int. J. Numer. Meth. and Engng.*, 55, 207-223, 2002.

[15] X.J. Xuo, M.S. Shephard, R.M. O'Bara, R. Natasia and M.W. Beal, Automatic p-version mesh generation for curved domains, *Eng. with Comp.*, 20, 273-285, 2004.

[16] O. Sahni, X.J. Xuo, K.E. Janse and M.S. Shephard, Curved boundary layer meshing for adaptive viscous flow simulations, *FEAD*, 46, 132-139, 2010.

Annexe

Dans cette annexe, on va exhiber les coefficients N_{ij} par instanciations sur les nœuds d'évaluation du quadrilatère Q3 et vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs que par le calcul direct.

Calcul des coefficients N_{ij} par instanciations

On prend comme nœuds d'évaluation ceux du quadrilarère de référence Q3 définis sur $[0,1] \times [0,1]$. Ces nœuds sont les suivants :
- $(0,0), (\frac{1}{3},0), (\frac{2}{3},0), (1,0)$,
- $(0,\frac{1}{3}), (\frac{1}{3},\frac{1}{3}), (\frac{2}{3},\frac{1}{3}), (1,\frac{1}{3})$,
- $(0,\frac{2}{3}), (\frac{1}{3},\frac{2}{3}), (\frac{2}{3},\frac{2}{3}), (1,\frac{2}{3})$,
- $(0,1), (\frac{1}{3},1), (\frac{2}{3},1), (1,1)$.

Pour fixer les idées, regardons l'arête A_1A_2 et calculons les 4 jacobiens suivants :

$$\mathcal{J}(\hat{B}_1) = \mathcal{J}(0,0)\,, \mathcal{J}(\hat{B}_5) = \mathcal{J}(\frac{1}{3},0)\,, \mathcal{J}(\hat{B}_6) = \mathcal{J}(\frac{2}{3},0)\,, \mathcal{J}(\hat{B}_2) = \mathcal{J}(1,0)\,.$$

Fixons $v=0$, alors

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}\,,$$

se réduit à :

$$\mathcal{J}(u,0) \;=\; \sum_{I=0,3} B_I^3(u)N_{I0}\,,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}(u,0) \;=\; \sum_{I=0,3} B_I^3(u)N_{I0} \;=\; (1-u)^3N_{00} + 3u(1-u)^2N_{10} + 3u^2(1-u)N_{20} + u^3N_{30}\,.$$

Posant $u=\frac{1}{3}$ puis $u=\frac{2}{3}$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 27\,\mathcal{J}(\hat{B}_5) = 8N_{00} + 12N_{10} + 6N_{20} + N_{30} \\ 27\,\mathcal{J}(\hat{B}_6) = N_{00} + 6N_{10} + 12N_{20} + 8N_{30} \end{array}\right. ,$$

soit encore :

$$\left\{\begin{array}{l} 27\,\mathcal{J}(\hat{B}_5) = 8\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 12N_{10} + 6N_{20} + \mathcal{J}(\hat{B}_2) \\ 27\,\mathcal{J}(\hat{B}_6) = \mathcal{J}(\hat{B}_1) + 6N_{10} + 12N_{20} + 8\mathcal{J}(\hat{B}_2) \end{array}\right. .$$

Donc :

$$N_{10} = \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6}$$

et

$$N_{20} = \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_5) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_6) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6}.$$

Les autres coefficients relatifs aux arêtes s'obtiennent de la même façon (cf. [7]).

Il reste alors 4 coefficients à calculer, N_{11}, N_{21}, N_{12} et N_{22}. On va d'abord évaluer les jacobiens centraux aux images des couples formés par des combinaisons en u et v avec les valeurs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Soient donc ces valeurs $\mathcal{J}(\hat{B}_{13})\,, \mathcal{J}(\hat{B}_{14})\,, \mathcal{J}(\hat{B}_{15})$ et $\mathcal{J}(\hat{B}_{16})$. On instancie ensuite aux couples ci-dessus. Il vient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\mathcal{J}(\hat{B}_{13}) & = & \displaystyle\sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} \,\text{pour}\,(u,v) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{14}) & = & \displaystyle\sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} \,\text{pour}\,(u,v) = (\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{15}) & = & \displaystyle\sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} \,\text{pour}\,(u,v) = (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{16}) & = & \displaystyle\sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} \,\text{pour}\,(u,v) = (\frac{2}{3},\frac{2}{3})
\end{array}\right.,$$

que l'on écrit, en exprimant les termes connus et les termes cherchés comme :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{J}(\hat{B}_{13}) = M_{IJ}(u,v) + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}\,,\ (u,v) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{14}) = M_{IJ}(u,v) + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}\,,\ (u,v) = (\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{15}) = M_{IJ}(u,v) + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}\,,\ (u,v) = (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\
\mathcal{J}(\hat{B}_{16}) = M_{IJ}(u,v) + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ} + B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}\,,\ (u,v) = (\frac{2}{3},\frac{2}{3})
\end{array}\right.,$$

où $M_{IJ}(u,v) = 81 \displaystyle\sum_{(I,J)\in\mathcal{E}} B_I^3(u)B_J^3(v)N_{IJ}$ avec $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples autres que les 4 calculés ici, autrement dit, une quantité connue. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}
81\,\mathcal{J}(\hat{B}_{13}) = M_{IJ}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) + 16N_{11} + 8N_{21} + 8N_{12} + 4N_{22} \\
81\,\mathcal{J}(\hat{B}_{14}) = M_{IJ}(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) + 8N_{11} + 16N_{21} + 4N_{12} + 8N_{22} \\
81\,\mathcal{J}(\hat{B}_{15}) = M_{IJ}(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) + 8N_{11} + 4N_{21} + 16N_{12} + 8N_{22} \\
81\,\mathcal{J}(\hat{B}_{16}) = M_{IJ}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) + 4N_{11} + 8N_{21} + 8N_{12} + 16N_{22}
\end{array}\right.,$$

ce système est bien posé donc il y a une solution, laisons un programme la calculer (à la main, ce n'est pas très amusant).

Équivalence des deux définitions

On va se contenter de vérifier un coefficient d'arête, par exemple, N_{10}. Ci-dessus, on a calculé :

$$N_{10} = \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

tandis que le calcul direct nous a donné :

$$N_{10} = 4 < \overrightarrow{u}.Q_{10} >= \frac{4}{3} < \overrightarrow{u}.(2\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{C_5C_9} + \overrightarrow{C_5A_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >,$$

et on va montrer que ces deux valeurs sont identiques. Les jacobiens en $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ sont déjà connus. On a en effet vu que $\mathcal{J}(\hat{A}_1) = 4 < \overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >$, qui est donc $\mathcal{J}(\hat{B}_1)$, tandis que $\mathcal{J}(\hat{B}_2)$, qui vaut $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$, vaut $\mathcal{J}(\hat{B}_2) = 4 < \overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{A_2C_6} \wedge \overrightarrow{A_2C_5}) >$. Pour trouver $\mathcal{J}(\hat{B}_5)$ et $\mathcal{J}(\hat{B}_6)$, il faut se coltiner la matrice des dérivées en les valeurs voulues, $(-\frac{1}{3},-1)$ et $(\frac{1}{3},-1)$.

Pour $\hat{B}_5$,

$$\frac{1}{36}\begin{bmatrix} -30 & 6 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 2 & -4 & -48 & -8 & -16 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$36\,\overrightarrow{v} = -30A_1 + 6A_2 + 24A_5 = 12\overrightarrow{A_1A_2} + 12\overrightarrow{A_1C_5}\,,$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5})\,.$$

$$36\,\overrightarrow{w} = -12A_1 + 6A_2 + 2A_3 - 4A_4 - 48A_5 - 8A_6 - 16A_7 + 16A_8 + 64A_9\,,$$

on exprime alors tous les nœuds en fonction des points de contrôle, il vient

$$36\,\overrightarrow{w} = 16\overrightarrow{A_1C_8} + 16\overrightarrow{C_5C_9} + 4\overrightarrow{A_2C_6}\,,$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{9}(4\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + \overrightarrow{A_2C_6})\,,$$

et, par suite :

$$\mathcal{J}(\hat{B}_5) = \frac{4}{27} < \overrightarrow{u}.((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \wedge (4\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + \overrightarrow{A_2C_6})) > \,.$$

Pour $\hat{B}_6$,

$$\frac{1}{36}\begin{bmatrix} -6 & 30 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -4 & 2 & -48 & 16 & -16 & -8 & 64 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$36\,\overrightarrow{v} = -6A_1 + 30A_2 - 24A_5 = 12\overrightarrow{A_1A_2} - 12\overrightarrow{A_2C_5}\,,$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5})\,.$$

$$36\,\overrightarrow{w} = 6A_1 - 12A_2 - 4A_3 + 2A_4 - 48A_5 + 16A_6 - 16A_7 - 8A_8 + 64A_9\,,$$

on exprime alors tous les nœuds en fonction des points de contrôle, il vient

$$36\,\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{A_1C_8} + 16\overrightarrow{C_5C_9} + 16\overrightarrow{A_2C_6}\,,$$

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + 4\overrightarrow{A_2C_6})\,,$$

et, par suite :

$$\mathcal{J}(\hat{B}_6) = \frac{4}{27} < \overrightarrow{u}.((\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \wedge (\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + 4\overrightarrow{A_2C_6})) > \,.$$

On part de

$$6\,N_{10} \;=\; -5\mathcal{J}(\hat{B}_1) \;+\; 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) \;-\; 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) \;+\; 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)\,,$$

et on déroule la vérification en ne regardant que les produits vectoriels, c'est-à-dire Q_{10}, on a successivement :

$$6\,Q_{10} \;=\; -20(\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) \;+\; \frac{8}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \wedge (4\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + \overrightarrow{A_2C_6}))$$

$$-\,\frac{4}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \wedge (\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9} + 4\overrightarrow{A_2C_6})) \;+\; 8(\overrightarrow{A_2C_6} \wedge \overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

et, en premier, on considère le terme en $(* \wedge \overrightarrow{A_2C_6})$, un simple calcul montre que ce terme est nul, en effet, (6 fois) la contribution s'écrit

$$\frac{8}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \wedge \overrightarrow{A_2C_6}) \;-\; \frac{4}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \wedge 4\overrightarrow{A_2C_6}) \;+\; 8(\overrightarrow{A_2C_6} \wedge \overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

soit

$$\frac{8}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \;-\; \frac{16}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \;-\; 8\overrightarrow{A_2C_5}\,,$$

$$\frac{1}{3}(8(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \;-\; 16(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \;-\; 24\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(8\overrightarrow{A_1A_2} + 8\overrightarrow{A_1C_5} \;-\; 16\overrightarrow{A_1A_2} + 16\overrightarrow{A_2C_5} \;-\; 24\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(-8\overrightarrow{A_1A_2} + 8\overrightarrow{A_1C_5} - 8\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

et, en ouvrant $\overrightarrow{A_2C_5}$ par A_1, il vient

$$\frac{1}{3}(-8\overrightarrow{A_1A_2} + 8\overrightarrow{A_1C_5} - 8\overrightarrow{A_2A_1} - 8\overrightarrow{A_1C_5}) \;=\; \overrightarrow{0}\,,$$

et ainsi $\overrightarrow{A_2C_6}$ disparait.

On considère maintenant le terme en $(* \wedge \overrightarrow{C_5C_9})$. On trouve (6 fois) :

$$\frac{32}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \;-\; \frac{16}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(32\overrightarrow{A_1A_2} + 32\overrightarrow{A_1C_5} \;-\; 16\overrightarrow{A_1A_2} + 16\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(16\overrightarrow{A_1A_2} + 32\overrightarrow{A_1C_5} + 16\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

et, en ouvrant $\overrightarrow{A_2C_5}$ par A_1, il vient

$$\frac{1}{3}(16\overrightarrow{A_1A_2} + 32\overrightarrow{A_1C_5} + 16\overrightarrow{A_2A_1} + 16\overrightarrow{A_1C_5}) \;=\; 16\overrightarrow{A_1C_5}\,,$$

la contribution cherchée est donc

$$\frac{16}{6}\overrightarrow{A_1C_5} = \frac{8}{3}\overrightarrow{A_1C_5}\,.$$

Il reste enfin à regarder la contribution en $(* \wedge \overrightarrow{A_1C_8})$. On trouve (6 fois) :

$$-20(\overrightarrow{A_1C_5} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) \;+\; \frac{8}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \wedge (4\overrightarrow{A_1C_8})) \;-\; \frac{4}{3}((\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5}) \wedge (\overrightarrow{A_1C_8}))$$

soit

$$-20\overrightarrow{A_1C_5} \;+\; \frac{32}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1C_5}) \;-\; \frac{4}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(-60\overrightarrow{A_1C_5} \;+\; 32\overrightarrow{A_1A_2} + 32\overrightarrow{A_1C_5} \;-\; 4\overrightarrow{A_1A_2} + 4\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

$$\frac{1}{3}(-28\overrightarrow{A_1C_5} \;+\; 28\overrightarrow{A_1A_2} + 4\overrightarrow{A_2C_5})\,,$$

et, en ouvrant $\overrightarrow{A_1C_5}$ par A_2, il vient

$$\frac{1}{3}(-28\overrightarrow{A_1A_2} - 28\overrightarrow{A_2C_5} \;+\; 28\overrightarrow{A_1A_2} + 4\overrightarrow{A_2C_5})\,, = -8\overrightarrow{A_2C_5} = 8\overrightarrow{C_5A_2}$$

la contribution cherchée est donc

$$\frac{8}{6}\overrightarrow{C_5A_2} = \frac{4}{3}\overrightarrow{C_5A_2}\,,$$

ce qui termine la vérification, les deux méthodes de définition sont bien équivalentes.

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399