

# Intersection entre courbes et surfaces rationnelles au moyen des représentations implicites matricielles

Laurent Busé

► **To cite this version:**

Laurent Busé. Intersection entre courbes et surfaces rationnelles au moyen des représentations implicites matricielles. Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique, Association Française d'Informatique Graphique, 2012, 6 (1), pp.27-37. <<http://www.irit.fr/REFIG/index.php/refig/issue/view/9>>. <hal-00687050v2>

**HAL Id: hal-00687050**

**<https://hal.inria.fr/hal-00687050v2>**

Submitted on 4 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Intersection entre courbes et surfaces rationnelles au moyen des représentations implicites matricielles

Laurent Busé

INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée  
2004 routes des Lucioles, B.P. 93,  
06902 Sophia Antipolis, France.

---

## Résumé

Dans cet article, on introduit une nouvelle représentation implicite des courbes et des surfaces paramétrées rationnelles, représentation qui consiste pour l'essentiel à les caractériser par la chute de rang d'une matrice plutôt que par l'annulation simultanée d'une ou plusieurs équations polynomiales. On montre comment ces représentations implicites, que l'on qualifera de matricielles, établissent un pont entre la géométrie et l'algèbre linéaire, pont qui permet de livrer des problèmes géométriques à des algorithmes classiques et éprouvés d'algèbre linéaire, ouvrant ainsi la possibilité d'un traitement numérique plus robuste. La contribution de cette approche est discutée et illustrée sur des problèmes importants de la modélisation géométrique tels que la localisation (appartenance d'un point à un objet), le calcul d'intersection de deux objets, ou bien encore la détection d'un lieu singulier.

---

**Mots-clés :** Modélisation géométrique, courbes et surfaces paramétrées, problèmes d'intersection, réduction de pincesaux de matrices.

## 1. Introduction

En modélisation géométrique, les courbes et les surfaces paramétrées sont très utilisées. Pour les manipuler il est très avantageux d'en posséder une représentation implicite, en plus de leur représentation paramétrique. En effet, si les représentations paramétriques sont par exemple très utiles pour la visualisation de carreaux, les représentations implicites sont pour leur part d'un intérêt notoire dans les calculs d'intersection. Le but de cet article est de présenter une méthode simple qui permet, à partir d'une représentation paramétrique d'une courbe ou d'une surface, d'en produire une représentation implicite sous la forme d'une matrice, ce que nous nommerons une *représentation implicite matricielle*.

La représentation implicite des courbes et des surfaces paramétrées sous la forme d'une matrice a déjà été abordée dans littérature existante à de nombreuses reprises (voir par exemple [Chi90,CG92,ACGS07,CGZ00,MC91,SC95]). Cependant, elle l'a toujours été dans le but d'écrire une équation implicite comme le déterminant d'une matrice (carrée).

Le cas des courbes planes est bien connu, notamment car l'on sait toujours trouver de manière très simple une telle matrice carrée ; on pourra ici consulter l'article T. Sederberg et F. Chen [SC95] qui introduit cette technique pour les problèmes d'intersection entre courbes planes pour la modélisation géométrique. Le cas des surfaces paramétrées est beaucoup plus délicat, notamment dû au fait que la géométrie de leurs paramétrisations devient plus riche avec l'apparition inévitable des points de base (ce sont les points où une paramétrisation n'est pas bien définie). Afin de pouvoir trouver une matrice carrée dont le déterminant est une équation implicite, il faut se restreindre à des classes particulières de paramétrisations [CGZ00,BCD03,KD06], ce qui s'avère être très contraignant en pratique. Dans cet article, nous montrons comment, en se libérant de la contrainte d'une matrice carrée, on peut former très simplement une représentation implicite sous la forme d'une matrice pour une surface paramétrée très générale. La matrice en question n'est alors plus carrée, mais permet toujours de caractériser la surface : l'annulation d'un déterminant est ici remplacée par une propriété de chute de rang. De plus, le traitement des problèmes d'intersection peut être ramené à des calculs d'algèbre linéaire numérique, permettant ainsi l'exploitation d'outils robustes et performants pour le calcul approché, tels que la décompo-

sition en valeurs singulières et le calcul de valeurs et vecteurs propres généralisés.

Le présent article couvre une succession de travaux [BJ03, BC05, BCJ09] qui ont abouti à la notion de représentations implicites matricielles d'une courbe ou d'une surface paramétrée, ainsi qu'au développement de ses applications pour les problèmes d'intersection en modélisation géométrique [LBBM09, BLB10, BLB]. Nous commencerons par illustrer l'idée générale de l'approche développée dans cet article en s'intéressant au lancer de rayons sur une surface paramétrée, problème pour lequel il faut pouvoir résoudre l'intersection d'une droite et d'une surface paramétrée. Le reste de l'article expose la notion de représentation implicite matricielle, ainsi que ses applications aux problèmes d'intersection, pour le cas des surfaces paramétrées puis pour celui des courbes paramétrées.

Quelques précisions sur les notations et les usages dans ce qui suit. Une paramétrisation (d'une courbe ou d'une surface) est souvent donnée dans une notation affine, c'est-à-dire que les coordonnées de l'image sont des fractions rationnelles des paramètres. Il est cependant souvent plus simple de compactifier l'image de cette paramétrisation, tout comme son espace de paramètres. Plusieurs choix sont alors possibles ; dans ce qui suit, nous avons choisi de nous restreindre au cas des espaces projectifs classiques afin de ne pas gêner l'exposé par des considérations techniques qui sont secondaires dans les méthodes que nous présentons (nous traitons donc le cas des surfaces dites "triangulaires" ; voir [BD07] pour le cas des surfaces dites "tensor product", ce qui revient à paramétrer par un produit de deux droites projectives, ou bien plus généralement [BDD09a, BDD09b] pour des paramétrisations par des variétés toriques). Toujours par souci de simplicité, nous décrirons les polynômes (qui interviennent dans les paramétrisations) dans la base usuelle des monômes, plutôt que dans la base de Bernstein. Enfin, nous choisissons également de considérer des paramétrisations à coefficients réels, mais de nombreuses propriétés peuvent s'énoncer dans un cadre plus général (en particulier pas nécessairement sur un corps). Chaque fois qu'une étape de résolution nécessite le passage à la clôture algébrique, nous pourrions ainsi le souligner en travaillant dans le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

## 2. Une motivation : le lancer de rayons

La motivation principale de ce travail est d'améliorer le traitement des problèmes d'intersection entre courbes et surfaces paramétrées. Le lancer de rayons est une application qui illustre bien l'objectif poursuivi. En effet, cette technique nécessite d'intersecter de manière intensive un rayon, c'est-à-dire une droite paramétrée, avec un objet dont le bord est représenté par une surface paramétrée (cf. Figure 1). Nous

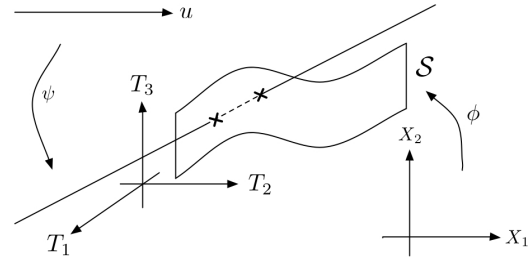
noterons

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3 \\ (X_1, X_2) &\mapsto \left( \frac{f_1}{f_4}, \frac{f_2}{f_4}, \frac{f_3}{f_4} \right) (X_1, X_2) \end{aligned}$$

où  $f_1, f_2, f_3, f_4$  sont des polynômes en  $X_1, X_2$ , une paramétrisation de notre surface  $\mathcal{S}$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 &\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto O + u\vec{d} \end{aligned}$$

où  $O$  désigne un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{d}$  un vecteur direction, une paramétrisation de notre rayon (i.e. une droite)  $\mathcal{C}$ .



**Figure 1:** Intersection entre une droite et une surface paramétrée.

Afin de déterminer l'intersection entre le rayon  $\mathcal{C}$  et la surface  $\mathcal{S}$ , deux stratégies classiques peuvent être utilisées. La première consiste à projeter les points qui nous intéressent sur  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres de  $\mathcal{S}$ . Pour cela, on calcule une représentation implicite de la droite  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire un système de deux équations de plans dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'intersection est notre rayon :

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 + a_4 = b_1 T_1 + b_2 T_2 + b_3 T_3 + b_4 = 0.$$

Dès lors, en substituant dans ce système les variables  $T_1, T_2$  et  $T_3$  par la paramétrisation  $\phi$ , c'est-à-dire par  $f_1/f_4, f_2/f_4$  et  $f_3/f_4$  respectivement, on obtient, après mise au même dénominateur, un système de deux équations algébriques en  $X_1, X_2$  dont les solutions sont les paramètres des points de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  au travers de la paramétrisation  $\phi$ . Il faut alors utiliser des algorithmes de résolution numérique pour un tel système, par exemple un algorithme de type "Newton" est dans ce cas très classique.

La deuxième stratégie possible est de projeter non plus sur  $\mathbb{R}^2$ , mais sur  $\mathbb{R}^1$ , c'est-à-dire sur l'espace des paramètres de la droite  $\mathcal{C}$ . Pour cela, ce n'est plus la droite dont il nous faut donner une représentation implicite, mais la surface  $\mathcal{S}$ . En effet, supposons que nous connaissions une équation implicite  $S(T_1, T_2, T_3) = 0$  de  $\mathcal{S}$ , alors la substitution de la paramétrisation de la droite  $\mathcal{C}$  dans cette équation fournirait un polynôme en la variable  $u$  dont les racines seraient les paramètres des points de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  au travers de la paramétrisation  $\psi$ .

En résumé, on voit bien que dans la première stratégie

l'étape de changement de représentation est simple alors que la résolution du système obtenu peut s'avérer délicate et difficile à contrôler, notamment en termes de robustesse et de précision. Dans la deuxième stratégie, c'est l'étape de changement de représentation qui est difficile, aussi bien en termes de mise en oeuvre d'un algorithme qu'en coût de calculs nécessaires, alors que l'étape de résolution est plutôt simple et il existe de nombreux algorithmes permettant de la traiter de manière robuste, précise et efficace.

Dans ce qui suit, nous introduisons un nouveau concept de représentation implicite pour la surface  $\mathcal{S}$  afin de palier à la difficulté du calcul de l'équation implicite  $S(T_1, T_2, T_3) = 0$ . Cette nouvelle représentation de  $\mathcal{S}$  prend une forme matricielle et permet de manipuler implicitement  $\mathcal{S}$  sans jamais avoir à calculer son équation implicite. Sa nature matricielle permet de ramener toutes les questions de type "intersection" à des calculs d'algèbre linéaire numérique dont la robustesse et la précision ont été très largement étudiées et développées. Aussi, il est important de souligner qu'aucune arithmétique sur les polynômes n'est nécessaire dans notre approche.

### 3. Représentations implicites matricielles pour les surfaces paramétrées

Étant donnée une surface représentée par une de ses paramétrisations rationnelles, nous décrivons ici une nouvelle représentation implicite pour cette surface ainsi que ses principales propriétés. Afin de simplifier cette présentation, il est préférable d'adopter des coordonnées projectives. Ainsi, nous supposons dans la suite que  $\mathcal{S}$  est une surface de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  (l'espace projective de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ ) dont une paramétrisation rationnelle est

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \quad (1)$$

$$(X_1 : X_2 : X_3) \mapsto (f_1 : f_2 : f_3 : f_4)(X_1, X_2, X_3)$$

où  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont maintenant des polynômes homogènes en les variables  $X_1, X_2$  et  $X_3$  de même degré  $d \geq 1$ . En outre, nous supposons que ces polynômes n'ont pas de facteur commun, situation à laquelle il est toujours possible de se ramener facilement en opérant une simplification après calcul d'un plus grand diviseur commun.

#### 3.1. Construction d'une famille de matrices

Introduisant les variables  $T_1, T_2, T_3, T_4$  pour désigner les coordonnées homogènes de l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$ , on s'intéresse aux relations de degré  $v$ , pour  $v$  un entier naturel, des polynômes  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , c'est-à-dire aux polynômes

$$\sum_{i=1}^4 g_i(X_1, X_2, X_3) T_i \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3][T_1, T_2, T_3, T_4]$$

tels que  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  sont des polynômes homogènes de degré  $v$  qui satisfont à la propriété

$$\sum_{i=1}^4 g_i(X_1, X_2, X_3) f_i(X_1, X_2, X_3) \equiv 0. \quad (2)$$

On note  $\mathcal{R}_v$  l'ensemble de toutes ces relations. Il est important d'observer que  $\mathcal{R}_v$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. De plus une base de  $\mathcal{R}_v$  s'obtient par la résolution du système linéaire induit par (2) que l'on écrit dans la base des monômes de degré  $v + d$  en les variables  $X_1, X_2, X_3$ .

Partant de là, pour tout entier  $v \geq 0$ , on définit la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$  par l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} X_1^v & X_1^{v-1}X_2 & X_1^{v-1}X_3 & \cdots & X_3^v \end{pmatrix} \mathbb{M}(\phi)_v = \begin{pmatrix} L^{(1)} & L^{(2)} & \cdots & L^{(n_v)} \end{pmatrix}$$

où  $L^{(1)}, \dots, L^{(n_v)}$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{R}_v$ . En d'autres termes,  $\mathbb{M}(\phi)_v$  est la matrice dont les colonnes sont formées par les coefficients de chaque relation  $L^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n_v$ , dans la base des monômes en les variables  $X_1, X_2, X_3$  de degré  $v$ .

**Exemple 1** Considérons la paramétrisation de la sphère de la forme (1) où

$$f_1 = X_1^2 - X_2^2 - X_3^2, \quad f_2 = 2X_1X_3,$$

$$f_3 = 2X_1X_2, \quad f_4 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

Il est évident de constater que la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_0$  est la matrice nulle car la seule relation linéaire entre  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  est la relation triviale. Pour  $v = 1$ , on doit déterminer les relations de la forme (2) où les  $g_i(X_1, X_2, X_3)$  sont des formes linéaires. La simple résolution d'un système linéaire fournit les quatre relations suivantes :

$$\begin{cases} X_3 \cdot f_1 - X_1 \cdot f_2 + X_3 \cdot f_4 = 0, \\ X_2 \cdot f_1 - X_1 \cdot f_3 + X_2 \cdot f_4 = 0, \\ -X_1 \cdot f_1 - X_3 \cdot f_2 - X_2 \cdot f_3 + X_1 \cdot f_4 = 0, \\ -X_2 \cdot f_2 + X_3 \cdot f_3 = 0. \end{cases}$$

À partir de là, on réécrit ces relations : par exemple, la première fournit le polynôme

$$X_3 \cdot T_1 - X_1 \cdot T_2 + X_3 \cdot T_4 = (-T_2)X_1 + (0) \cdot X_2 + (T_1 + T_4)X_3$$

qui détermine une colonne (la première ci-dessous) de la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_1$ . Au final, on obtient

$$\mathbb{M}(\phi)_1 = \begin{pmatrix} -T_2 & -T_3 & -T_1 + T_4 & 0 \\ 0 & T_1 + T_4 & -T_3 & -T_2 \\ T_1 + T_4 & 0 & -T_2 & T_3 \end{pmatrix}.$$

On pourrait de même former  $\mathbb{M}(\phi)_2, \mathbb{M}(\phi)_3$ , etc. On peut vérifier que le plus grand diviseur commun des mineurs (maximaux)  $3 \times 3$  de  $\mathbb{M}(\phi)_1$  donne bien une équation implicite de la sphère (mais rappelons qu'un tel calcul est à proscrire en pratique) : par exemple le déterminant du mineur le plus à gauche est égal à  $(T_1 + T_4)(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2)$  et celui du mineur le plus à droite vaut  $T_3(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2)$ . Enfin, terminons cet exemple en notant que notre paramétrisation de la sphère possède deux *points de base*, c'est-à-dire que les polynômes  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  possèdent deux racines communes

dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  : les points  $(0 : 1 : i)$  et  $(0 : 1 : -i)$  où  $i$  est tel que  $i^2 = -1$ . La présence de ces points de base s'avère être délicate pour les méthodes de représentation implicite basée sur les résultants, alors que l'approche que nous décrivons dans cet article y est beaucoup moins sensible. Précisons que les points de base apparaissent partout ; par exemple, toute paramétrisation d'une surface de degré 2 possède nécessairement des points de base (dans le plan projectif).

### 3.2. Représentation implicite matricielle

La famille de matrices que nous venons de construire est particulièrement intéressante car à partir d'un certain degré  $v_0$ , toutes ces matrices peuvent être qualifiées de représentations implicites de la surface  $\mathcal{S}$ . En effet, pour tout entier  $v \geq v_0$  la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$  vérifie les propriétés suivantes :

- elle est formée de  $C_{v+2}^2 = \frac{(v+2)(v+1)}{2}$  lignes et d'au moins autant de colonnes (en général strictement plus),
- ses entrées sont des formes linéaires en  $T_1, T_2, T_3, T_4$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ ,
- évaluée en un point  $P \in \mathbb{P}^3 \setminus \mathcal{S}$ , elle est de rang maximum égal à  $C_{v+2}^2$ ,
- évaluée en un point  $P \in \mathcal{S} \subset \mathbb{P}^3$ , elle est de rang strictement plus petit que  $C_{v+2}^2$ .

Ces propriétés justifient la qualification de "représentation implicite" pour ces matrices puisqu'il apparaît qu'elles permettent de caractériser la surface  $\mathcal{S}$  par une chute de rang, de manière similaire au fait qu'une équation implicite  $S(T_1, T_2, T_3, T_4) = 0$  de  $\mathcal{S}$  la caractérise par le fait de s'annuler ou non.

D'un point de vue pratique, c'est la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_{v_0}$  qu'il faut privilégier car c'est celle de plus petite taille. L'entier  $v_0$  est très simple à contrôler : on peut toujours choisir  $v_0 = 2(d-1)$  et lorsque les polynômes  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  possèdent au moins une racine commune dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  (on parle de points de base, cf. Exemple 1) alors on peut prendre  $v_0 = 2(d-1) - 1$ . Ainsi, la matrice donnée dans l'exemple 1 est une matrice de représentation de la sphère.

Les résultats que nous venons d'énoncer sont démontrés dans [BJ03, BC05]. Ils sont valables sous une hypothèse très faible, mais technique, qui demande que le système d'équations  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$  de  $\mathbb{P}^2$  soit localement défini par deux équations au voisinage de chacune de ses solutions (points de base), s'il en existe. En pratique, cette hypothèse peut se tester directement sur la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_{v_0}$ . En effet, la seule obstruction à l'utilisation de ces représentations survient lorsque le rang de  $\mathbb{M}(\phi)_{v_0}(P)$  n'est pas égale à son nombre de lignes pour presque tout point  $P \in \mathbb{P}^3$  (ce que l'on teste concrètement à l'aide d'un point "pris au hasard" dans  $\mathbb{P}^3$ ). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter *loc. cit.* .

Bien que la preuve des propriétés des représentations matricielles dépasse le cadre de cet article, signalons qu'il est possible de justifier très simplement le fait que le rang des

matrices de représentation chute en tout point de l'image de (1), donc en tout point de  $\mathcal{S}$ . Cette justification découle de la construction même de ces matrices et permet en fait d'inverser "presque partout" la paramétrisation (1). Nous décrivons cela en détails ci-dessous dans le paragraphe 3.3, notamment avec l'égalité (3).

Ces représentations implicites matricielles s'avèrent être relativement souples. En effet, une fois une matrice de représentation formée, notons la  $\mathbb{M}$ , tester si un point  $P$  donné appartient à la surface  $\mathcal{S}$  (c'est-à-dire détecter une intersection point/surface) se fait en calculant le rang de  $\mathbb{M}(P)$  qui est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (la notation  $\mathbb{M}(P)$  signifie que l'on a évalué la matrice  $\mathbb{M}$  au point  $P$ , coefficient par coefficient). On peut donc ici utiliser l'outil très puissant de l'algèbre linéaire numérique qu'est la décomposition en valeurs singulières (DVS). En effet, une DVS de la matrice  $\mathbb{M}$  permet de quantifier (par la détermination d'un saut dans les rapports successifs des valeurs singulières) si le point  $P$  est sur la surface  $\mathcal{S}$  à une précision donnée ; on parle de rang numérique. Pour faire le parallèle avec une équation implicite  $S = 0$  de la surface, cela correspondrait à voir si  $\|S(P)\| < \epsilon$  pour un epsilon petit donné.

En termes de représentation machine, il est important de noter que ces représentations matricielles correspondent simplement à la donnée de 4 matrices  $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \mathbb{M}_3, \mathbb{M}_4$  à coefficients réels puisque

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 T_1 + \mathbb{M}_2 T_2 + \mathbb{M}_3 T_3 + \mathbb{M}_4 T_4.$$

Ainsi, la manipulation de cette représentation implicite se fait sans aucun usage d'une arithmétique de polynômes ; il suffit de posséder des opérations élémentaires sur les matrices à coefficients des flottants. Par exemple, une évaluation d'une matrice de représentation en un point  $P \in \mathbb{P}^3$  correspond à 4 multiplications scalaire/matrice et 3 additions matrice/matrice. Les quatre matrices  $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \mathbb{M}_3, \mathbb{M}_4$ , qui sont calculées une seule fois puis mémorisées, peuvent donc être ajoutées aux attributs de représentation des surfaces paramétrées avec les avantages que nous allons voir dans ce qui suit.

### 3.3. Inversion d'un point

Supposons donnée une surface  $\mathcal{S}$  paramétrée par (1) et un point  $P = (P_1 : P_2 : P_3 : P_4) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ . Lorsque ce point appartient à  $\mathcal{S}$  et possède un unique antécédent  $(x_1 : x_2 : x_3)$  par la paramétrisation  $\phi$ , alors il est important de savoir déterminer  $(x_1 : x_2 : x_3)$  à partir de  $P = (P_1 : P_2 : P_3 : P_4)$  et  $\phi$ . L'utilisation d'une matrice de représentation  $\mathbb{M}(\phi)_v$ , pour tout  $v \geq v_0$ , rend cette opération très simple. En effet, par construction même de cette matrice, on a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1^v & x_1^{v-1}x_2 & x_1^{v-1}x_3 & \cdots & x_3^v \end{pmatrix} \times \mathbb{M}(\phi)_v(P) = 0. \quad (3)$$

De plus, on montre que le noyau de la transposée de la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  est de dimension 1, sous l'hypothèse natu-

relle que  $P$  possède un unique antécédent (noter qu'en dehors de cette hypothèse, la question même d'inversion est mal définie). Il s'ensuit que tout vecteur non nul dans le noyau de la transposée de  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  est de la forme

$$c \cdot (x_1^y \quad x_1^{y-1}x_2 \quad x_1^{y-1}x_3 \quad \cdots \quad x_3^y)$$

où  $c$  est une constante non nulle. On peut dès lors en extraire le point  $(x_1 : x_2 : x_3)$  comme suit : une des coordonnées homogènes  $x_1, x_2, x_3$  est non nulle, disons  $x_1$  par exemple. Alors, notant  $V = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  un vecteur non nul du noyau de la transposée de  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$ , il est immédiat de constater que  $(x_1 : x_2 : x_3) = (v_1 : v_2 : v_3)$ .

D'un point de vue du calcul, il est important d'observer que cette technique est particulièrement bien adaptée aux outils de l'algèbre linéaire numérique. En effet, calculons une DVS de la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  :

$$\mathbb{M}(\phi)_v(P) = U\Sigma V.$$

La matrice  $\Sigma$  est diagonale et contient les valeurs singulières qui nous permettent de déterminer si  $P$  appartient à la surface  $\mathcal{S}$ , comme nous l'avons signalé dans le paragraphe précédent. Si la réponse est positive, c'est-à-dire si le rang numérique de cette matrice chute, alors la dernière ligne de la matrice  $U$  est un élément du noyau (approché) qui permet de calculer l'inversion du point  $P$  comme décrit ci-dessus. Noter que, par propriété de la DVS, cet élément est la meilleure approximation du noyau de  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  à une précision donnée et qu'aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire par rapport au test d'appartenance de  $P$  à la surface  $\mathcal{S}$ . La robustesse et la précision sont ici contrôlable par héritage de la DVS [GVL96].

Revenant à notre illustration du lancer de rayons, on peut ici souligner l'importance de l'inversion dans notre approche consistant à projeter l'intersection d'un rayon avec la surface sur le paramètre du rayon. En effet, lorsqu'un point d'intersection est déterminé, il est nécessaire de calculer la normale à la surface en ce point afin de pouvoir réfléchir ou réfracter la lumière. Ne disposant pas d'une équation implicite de  $\mathcal{S}$ , c'est la paramétrisation  $\phi$  qui permet de trouver cette normale. Le paramètre correspondant est alors obtenu directement pendant le calcul d'intersection, par inversion, et l'on peut en déduire la normale.

Enfin, remarquons que ce processus d'inversion est impossible avec une équation implicite classique  $S(T_1, T_2, T_3, T_4) = 0$  car, contrairement à notre représentation implicite matricielle, celle-ci est complètement décorrélée de la paramétrisation  $\phi$ .

#### 4. Intersection entre une courbe et une surface paramétrées

En plus de notre surface  $\mathcal{S}$  paramétrée par (1), on suppose à présent donnée une courbe  $\mathcal{C}$  non contenue dans  $\mathcal{S}$  et

paramétrée en coordonnées homogènes par

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \\ (u : v) &\mapsto (x(u, v) : y(u, v) : z(u, v) : w(u, v)). \end{aligned}$$

Les polynômes  $x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v)$  sont des polynômes homogènes dans  $\mathbb{R}[u, v]$  sans facteur commun et de même degré. L'ensemble des points d'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  est fini et notre objectif est de le décrire explicitement.

Si l'on dispose d'une équation implicite  $S(T_1, T_2, T_3, T_4) = 0$  de  $\mathcal{S}$ , la détermination de l'ensemble d'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  peut se faire en calculant, de manière approchée, les racines du polynôme homogène

$$S(x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v)) \in \mathbb{R}[u, v]$$

puisque ces dernières sont en correspondance avec l'ensemble  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  par  $\Psi$ . Dans ce qui suit, nous présentons une méthode alternative basée sur l'utilisation d'une matrice de représentation de  $\phi$  qui permet d'obtenir les points de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  non seulement dans l'espace des paramètres de  $\mathcal{C}$ , mais également dans l'espace des paramètres de  $\mathcal{S}$  par les résultats du paragraphe précédent.

#### 4.1. Formulation matricielle

Soit  $\mathbb{M}(\phi)_{v_0}$  une matrice de représentation de  $\phi$  (nous choisissons ici la plus petite matrice). En substituant les polynômes  $x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v)$  aux variables  $T_1, T_2, T_3, T_4$  dans cette matrice, nous obtenons une nouvelle matrice, que nous noterons

$$\mathbb{M}(u, v) := \mathbb{M}(\phi)_{v_0}(x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v))$$

et dont les entrées sont des polynômes homogènes dans  $\mathbb{R}[u, v]$ . Par propriété d'une matrice de représentation, nous avons que pour tout point  $(u_0 : v_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , le rang de la matrice  $\mathbb{M}(u_0, v_0)$  chute si et seulement si le point  $\Psi(u_0, v_0)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ . Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$  est en correspondance avec les points de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  où le rang de la matrice  $\mathbb{M}(u, v)$  chute, c'est-à-dire où le rang de  $\mathbb{M}(u, v)$  est strictement inférieur à son nombre de lignes  $C_{v_0+2}^2$ . Nous présentons maintenant des techniques d'algèbre linéaire qui vont nous permettre de déterminer ces points par un calcul de valeurs (et vecteurs) propres généralisées [LBBM09].

#### 4.2. Linéarisation d'une matrice polynomiale

Étant donnée une matrice  $\mathbb{N}(t) = (a_{i,j}(t))$  de taille  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}[t]$ , on peut l'écrire sous la forme

$$\mathbb{N}(t) = \mathbb{N}_d t^d + \mathbb{N}_{d-1} t^{d-1} + \dots + \mathbb{N}_0$$

où  $d = \max_{i,j} \{\deg(a_{i,j}(t))\}$  et  $\mathbb{N}_i, i = 0, \dots, d$ , est une matrice de taille  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On définit alors les *matrices compagnes généralisées*, que nous noterons  $A$  et  $B$ ,

par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I}_m \\ {}^t\mathbb{N}_0 & {}^t\mathbb{N}_1 & \cdots & {}^t\mathbb{N}_{d-2} & {}^t\mathbb{N}_{d-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -{}^t\mathbb{N}_d \end{pmatrix}$$

où  $\mathbb{I}_r$  désigne la matrice identité de taille  $r$  et où la notation  ${}^t-$  désigne l'opération de transposition d'une matrice. Ce sont deux matrices de taille  $((d-1)m+n) \times dm$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Elles permettent de *linéariser* la matrice polynomiale  $\mathbb{N}(t)$  au sens où il existe deux matrices unimodulaires  $E(t)$  et  $F(t)$  à coefficients dans  $\mathbb{R}[t]$  et de taille respective  $dm$  et  $(d-1)m+n$  telles que

$$E(t)(A-tB)F(t) = \left( \begin{array}{c|c} {}^t\mathbb{N}(t) & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{d(m-1)} \end{array} \right). \quad (4)$$

Ainsi, les valeurs de  $t \in \mathbb{C}$  pour lesquelles le rang de  $\mathbb{N}(t)$  chute sont en correspondance avec les valeurs de  $t \in \mathbb{C}$  pour lesquelles le rang de  $A-tB$  chute. On les appelle les *valeurs propres généralisées du pinceau de matrices  $A-tB$* . Si les matrices  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées et que  $B$  est une matrice inversible alors les valeurs propres généralisées du pinceau  $A-tB$  se calculent directement à l'aide de l'algorithme dit "QZ" [GVL96]. Dans le cas contraire, il faut réduire le pinceau ; c'est l'objectif du paragraphe suivant.

#### 4.3. Extraction de la partie régulière d'un pinceau de matrices

Pour tout pinceau de matrices  $A-tB$ , il existe des matrices constantes et inversibles  $P$  et  $Q$  telles que le pinceau de matrices  $P(A-tB)Q = PAQ - tPBQ$  est diagonal par blocs de la forme

$$\text{diag}\{L_{i_1}, \dots, L_{i_s}, L_{j_1}^t, \dots, L_{j_u}^t, \Omega_{k_1}, \dots, \Omega_{k_v}, A' - tB'\} \quad (5)$$

où les matrices  $A'$  et  $B'$  sont carrées, la matrice  $B'$  est inversible et où pour tout entier  $k \geq 1$  les matrices  $L_k(t)$ , de taille  $k \times (k+1)$ , et  $\Omega_k(t)$ , de taille  $k \times k$ , sont définies par

$$L_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix},$$

$$\Omega_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On parle de la *forme de Kronecker* du pinceau  $A-tB$  (voir par exemple [Gan66, p. 31-34]).

Le bloc  $A' - tB'$  est la partie régulière du pinceau  $A-tB$ . Dans notre contexte du problème d'intersection, il est très intéressant car il contient toute l'information sur les valeurs propres généralisées (à distance finie) du pinceau  $A-tB$  et car l'on sait calculer ces valeurs propres généralisées par un algorithme QZ puisque c'est un bloc carré et que  $B'$  est inversible. Nous présentons ici un algorithme permettant d'extraire la partie régulière  $A' - tB'$  d'un pinceau de matrice  $A-tB$  et renvoyons le lecteur à [LBBM09] pour plus de détails.

L'extraction de la partie régulière  $A' - tB'$  du pinceau de matrice  $A-tB$  est basée sur des réductions que l'on obtient aisément par des calculs de DVS. C'est une extraction itérative. Partant du pinceau  $A-tB$ , on procède comme suit :

- On calcule une forme échelon par colonne de  $B$ . Pour cela, on calcule une DVS de  $B$  :  $B = U_B S_B V$ , puis on forme la matrice

$$B \cdot {}^tV = U_B S_B = (*|0).$$

- On applique cette transformation à la matrice  $A$  :

$$A \cdot {}^tV = (*|A_1)$$

de sorte que les colonnes les plus à droite du pinceau  $(A-tB) \cdot {}^tV$  sont données par la matrice  $A_1$ , en particulier sont indépendantes de  $t$ .

- On calcule une forme échelon par lignes de la matrice  $A_1$ , toujours à l'aide d'une DVS que l'on applique ici à  $A_1$ . On obtient  $A_1 = U_S A V_A$  et donc la matrice

$${}^tU \cdot A_1 = S_A V_A = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À la fin de cette première itération, on obtient le pinceau

$${}^tU(A-tB){}^tV = \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline A' - tB' & 0 \end{array} \right) \quad (6)$$

et on peut donc réduire le pinceau  $A-tB$  en le pinceau  $A' - tB'$  puisque le rang de la partie supérieure de la matrice (6) est indépendant de  $t$  (cf. deuxième étape). On recommence alors la procédure jusqu'au moment où cette partie supérieure n'apparaît plus. Il convient alors d'opérer la même réduction sur la transposée du pinceau  $A' - tB'$ . On aboutit ainsi à un pinceau carré qui est la partie régulière du pinceau de départ  $A-tB$ .

#### 4.4. Algorithme pour l'intersection courbe/surface

Nous avons maintenant tous les éléments pour énoncer un algorithme permettant de calculer, de manière approchée et

robuste, l'intersection entre une surface rationnelle et une courbe rationnelle (lorsque cette dernière n'est pas contenue dans la première).

Les données en entrée sont notre surface  $S$  paramétrée par  $\phi$ , ainsi qu'une matrice de représentation  $\mathbb{M}(T_1, \dots, T_4)$ , et notre courbe  $C$  paramétrée par  $\Psi$ . On procède alors de la façon suivante :

1. On forme la matrice  $\mathbb{M}(\Psi(u, 1))$ .
2. On forme les matrices compagnes  $A, B$  de la matrice  $\mathbb{M}(\Psi(u, 1))$ .
3. On extrait la partie régulière  $A' - uB'$  du pinceau  $A - uB$ .
4. On calcule l'ensemble des valeurs propres (généralisées)  $\{u_1, \dots, u_r\}$  du pinceau  $A' - uB'$ .
5. On renvoie l'ensemble de points  $\{\Psi(u_1), \dots, \Psi(u_r)\}$  qui correspond aux points d'intersection de  $S \cap C$  (à l'exception du point  $\Psi(1 : 0)$  qui pourrait éventuellement appartenir à  $S$ ).

Seules les étapes 3 et 4 nécessitent des calculs, calculs qui sont basés sur des algorithmes éprouvés de l'algèbre linéaire numérique et qui permettent d'assurer une robustesse importante aux points d'intersection calculés. Précisons, comme il est mentionné dans l'étape 5, que le point  $\Psi(1 : 0)$  est exclu de cet algorithme dès la première étape où l'on impose  $v = 1$  (i.e. on exclut le point à l'infini  $(1 : 0)$  de la droite projective des paramètres de la courbe  $C$ ). Ce point peut cependant être un point d'intersection entre  $C$  et  $S$ , propriété qu'il faut tester indépendamment, par exemple par un simple calcul du rang de la matrice  $\mathbb{M}(\Psi(1 : 0))$ .

Afin d'illustrer cet algorithme sur un exemple élémentaire, revenons à notre première motivation : le lancer de rayons. Remarquons d'ailleurs que l'étape de linéarisation donnée dans la section 4.2 est inutile dans ce cas puisque le pinceau  $\mathbb{M}(\Psi(u, 1))$  est déjà linéaire. On peut aussi noter que le terme constant de ce pinceau (la matrice  $A$ ) ne dépend que de l'origine de la droite considérée et est donc invariant si l'on considère une collection de droites lancées d'un même point. Reprenons à présent la sphère et sa matrice de représentation  $\mathbb{M}(\phi)_1$  donnée dans l'exemple 1 dont nous précisons ici que ces lignes sont indexées par les monômes  $X_1, X_2, X_3$  (dans cet ordre). On choisit de l'intersecter avec la droite de  $\mathbb{R}^3$  passant par le point  $(1/2, 1/2, 1/2)$  et de vecteur directeur  $(1, 1, 1)$ . On substitue donc dans la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_1$ , les variables  $T_1, T_2$  et  $T_3$  par  $1/2 + u$  et  $T_4$  par 1. On obtient la matrice

$$\mathbb{M}(u) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - u & -\frac{1}{2} - u & \frac{1}{2} - u & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} + u & -\frac{1}{2} - u & -\frac{1}{2} - u \\ \frac{3}{2} + u & 0 & -\frac{1}{2} - u & \frac{1}{2} + u \end{pmatrix}.$$

Puisque nous intersectons avec une droite, le procédé de linéarisation est trivial et on obtient

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

de telle sorte que  $\mathbb{M}(u) = A - uB$ . Le calcul de la partie régulière du pinceau  $(A, B)$  fournit le pinceau  $(A', B')$  donné par

$$A' := \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres renvoie le vecteur (exceptionnellement exact dans notre exemple très simple)

$$(u_1, u_2) := (-1/2 + 1/3\sqrt{3}, -1/2 - 1/3\sqrt{3}).$$

De là on obtient les points d'intersection entre la droite et la sphère :

$$P_1 := \left(\frac{1}{2} + u_1, \frac{1}{2} + u_1, \frac{1}{2} + u_1\right), P_2 := \left(\frac{1}{2} + u_2, \frac{1}{2} + u_2, \frac{1}{2} + u_2\right).$$

Nous souhaitons à présent obtenir la normale à la sphère au point d'intersection  $P_1$ . Pour ce faire, nous inversons le point  $P_1$  par  $\phi$  : on forme tout d'abord la matrice de représentation de la sphère au point  $P_1$

$$\mathbb{M}(\phi)_1(P_1) = \mathbb{M}(u_1)$$

puis on calcule le noyau de sa transposée. Le calcul donne le vecteur

$$(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$$

dont on déduit que la pré-image de  $P_1$  par  $\phi$  est le point à distance finie  $(x_1, x_2) = (1 + \sqrt{3}, 1)$ . Partant de là, on déduit facilement la normale à la sphère au point  $P_1$  à l'aide de sa paramétrisation  $\phi$ .

Le lecteur intéressé pourra consulter [LBBM09, Section 5] où se trouvent deux autres exemples, un peu plus compliqués, illustrant cet algorithme d'intersection courbe/surface.

#### 4.5. Extension à l'intersection surface/surface

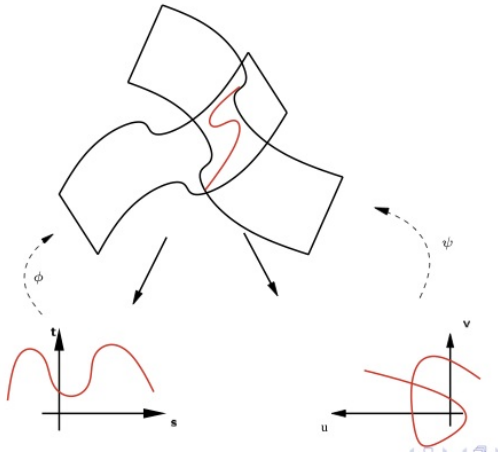
Le problème de l'intersection entre deux surfaces paramétrées est un problème classique de la modélisation géométrique. Cependant, cette intersection est en général une courbe et pas un ensemble fini de points comme ce que nous avons vu jusqu'à présent (et verrons à nouveau par la suite). L'étude de ce lieu d'intersection requiert donc d'anticiper sur la façon dont on va le représenter, d'autant plus que ce choix de représentation, contrairement au cas des ensembles finis de points, est multiple et pas toujours naturel. En fait, c'est plutôt l'information que l'on souhaite extraire ou utiliser de ce lieu d'intersection qui doit guider ce choix.

Dans ce court paragraphe, nous choisissons l'approche introduite par J. Canny et D. Manocha [MC91] qui consiste à représenter la courbe d'intersection entre deux surfaces comme une courbe paramétrée par une autre courbe plane qui est définie dans l'espace des paramètres d'une des deux surfaces. On peut la résumer comme suit :



- On projette la courbe intersection sur l'espace des paramètres d'une des deux surfaces. On obtient ainsi une courbe plane qui est représentée par une équation implicite.
- On détermine alors la topologie exacte de cette courbe (présence d'ovales, singularités, etc.).
- On en déduit alors une bonne représentation de l'intersection au travers de la paramétrisation de la surface.

La figure 2 ci-contre illustre ce procédé ; on a ici dessiné les deux courbes possibles, suivant que l'on choisisse de projeter sur l'espace des paramètres d'une surface ou bien de l'autre. Noter qu'il se peut qu'une telle projection introduise des singularités, comme cela est illustré dans la figure 2.



**Figure 2:** Projections de la courbe d'intersection entre deux surfaces paramétrées dans leur espace de paramètres respectif.

Comme décrite dans [MC91], cette approche est tout fait pertinente car elle permet de ramener des considérations géométriques à des calculs d'algèbre linéaire numérique. Cependant, elle souffre d'une restriction extrêmement forte qui impose de pouvoir représenter implicitement une des deux surfaces comme le déterminant d'une "matrice résultante" (matrice nécessairement carrée). En particulier, il faut demander que la paramétrisation de la surface en question ne possède pas de points de base. Il se trouve que l'utilisation des représentations implicites matricielles que nous avons introduites permet de lever cette restriction. On procède de la façon suivante.

Notons  $\mathbb{M}(T_1, T_2, T_3, T_4)$  une matrice de représentation d'une des deux surfaces, disons  $\mathcal{S}_1$ . En substituant la paramétrisation  $\phi(X_1 : X_2 : 1)$  de l'autre surface, disons  $\mathcal{S}_2$ , aux variables  $T_1, T_2, T_3, T_4$  respectivement dans cette paramétrisation, on obtient une matrice polynomiale bivariée  $\mathbb{M}(X_1, X_2)$ . À ce stade, le lieu qui nous intéresse est, par propriété des représentations implicites matricielles,

$$\{(X_1, X_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \text{rang}(\mathbb{M}(X_1, X_2)) \text{ chute}\}. \quad (7)$$

On montre [BLB] que *ce lieu est en fait une courbe algébrique plane de  $\mathbb{C}^2$*  (qui passe par tous les points de base de la paramétrisation  $\phi$ ), en particulier, il ne possède pas de point isolé. Cette propriété permet alors d'exprimer le lieu (7) par une équation implicite, comme dans l'approche Canny-Manocha, cela afin de pouvoir déterminer la topologie de ce lieu. Cette réduction est assez technique et nous renvoyons le lecteur à l'article [BLB] pour les détails. Elle consiste pour l'essentiel à linéariser la matrice  $\mathbb{M}(X_1, X_2)$  en un pinceau bivarié  $A + X_1B + X_2C$ , où  $A, B, C$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , puis d'adapter un algorithme de réduction de pinceau, appelé décomposition  $\Delta W - 1$  et dû à V. Kublanovskaia [Kub99, KK96], pour arriver à un pinceau carré dont le déterminant fournit l'équation recherchée.

Avant de clore ce paragraphe, mentionnons une application particulièrement intéressante de cette approche du problème d'intersection entre deux surfaces paramétrées : la représentation du lieu d'auto-intersection d'une surface paramétrée (là encore, précisons que la façon de représenter l'auto-intersection d'une surface dépend fortement de l'utilisation poursuivie). En effet, rien n'empêche dans la méthode décrite ci-dessus de considérer que les deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont identiques, ainsi que leur paramétrisation. Le lieu (7) décrit alors une courbe dans l'espace des paramètres de cette surface que est en correspondance avec le lieu d'auto-intersection au travers de sa paramétrisation. Nous reviendrons de manière un peu plus précise sur ce procédé dans le paragraphe 5.3.

## 5. Représentations implicites matricielles pour les courbes paramétrées

Le concept de représentation implicite matricielle que nous avons introduit pour les surfaces paramétrées est en fait plus général et peut s'appliquer à divers types d'objets paramétrés. Dans le cadre de la modélisation géométrique, les courbes paramétrées sont intensivement utilisées, notamment par le fait que de nombreuses surfaces paramétrées sont définies comme des familles de courbes paramétrées. Dans ce qui suit, nous introduisons donc le concept de représentation implicite matricielle pour une courbe  $\mathcal{D}$  donnée par une paramétrisation en coordonnées homogènes

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \\ (s : t) &\mapsto (f_1(s, t) : f_2(s, t) : f_3(s, t) : f_4(s, t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Les polynômes  $f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t), f_4(s, t)$  sont des polynômes homogènes dans  $\mathbb{R}[s, t]$  sans facteur commun et de même degré  $d \geq 1$ .

### 5.1. Définition et propriétés

La construction d'une représentation implicite matricielle pour une courbe paramétrée est en tout point semblable à celle pour une surface paramétrée que nous avons détaillée

précédemment. Notant toujours  $T_1, T_2, T_3, T_4$  les coordonnées homogènes de l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$ , on s'intéresse aux relations de degré  $v$ , pour  $v$  un entier naturel, des polynômes  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , c'est-à-dire aux polynômes

$$\sum_{i=1}^4 g_i(s, t) T_i \in \mathbb{R}[s, t][T_1, T_2, T_3, T_4]$$

tels que  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  sont des polynômes homogènes de degré  $v$  qui satisfont à la propriété

$$\sum_{i=1}^4 g_i(s, t) f_i(s, t) \equiv 0. \quad (9)$$

On note  $\mathcal{R}_v$  l'ensemble de toutes ces relations qui est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une base de  $\mathcal{R}_v$  s'obtient en résolvant le système linéaire induit par (9) que l'on écrit dans la base des monômes de degré  $v + d$  en les variables  $s, t$ .

Pour tout entier  $v \geq 0$ , on définit ainsi la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$  par l'égalité

$$\begin{pmatrix} s^v & s^{v-1}t & s^{v-2}t^2 & \dots & t^v \end{pmatrix} \mathbb{M}(\phi)_v = \begin{pmatrix} L^{(1)} & L^{(2)} & \dots & L^{(n_v)} \end{pmatrix}$$

où  $L^{(1)}, \dots, L^{(n_v)}$  est une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathcal{R}_v$ . Les colonnes de la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$  sont donc formées par les coefficients de chaque relation  $L^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, n_v$ , dans la base des monômes en les variables  $s, t$  de degré  $v$ .

On montre alors qu'à partir d'un certain degré  $v_0$ , toute matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$ , avec  $v \geq v_0$ , vérifie les propriétés suivantes :

- elle est formée de  $v + 1$  lignes et  $3(v + 1) - d$  colonnes,
- ses entrées sont des formes linéaires en  $T_1, T_2, T_3, T_4$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ ,
- évaluée en un point  $P \in \mathbb{P}^3 \setminus \mathcal{D}$ , elle est de rang maximum égal à  $v + 1$ ,
- évaluée en un point  $P \in \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^3$ , elle est de rang strictement plus petit que  $v + 1$ .

Une telle matrice est qualifiée de représentation implicite matricielle de la courbe  $\mathcal{D}$  car elle permet de la caractériser par une chute de rang. Il est ici tout à fait remarquable d'obtenir une représentation implicite de notre courbe avec une *unique* matrice. En effet, une représentation implicite classique de  $\mathcal{D}$  nécessite pour sa part plusieurs (au moins deux) équations polynomiales.

D'un point de vue du calcul, c'est évidemment la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_{v_0}$  qu'il faut privilégier car c'est celle de plus petite taille. L'entier  $v_0$  est très simple à contrôler : on peut toujours choisir  $v_0 = d - 1$ . Cependant, si l'on calcule le plus petit degré  $\eta$  tel qu'il existe une relation non nulle dans  $\mathcal{R}_\eta$ , alors on peut choisir  $v_0 = d - 1 - \eta$ .

Une fois formée, une représentation implicite matricielle d'une courbe paramétrée se manipule de la même façon qu'une représentation implicite matricielle d'une surface paramétrée. Ainsi, notant  $\mathbb{M}(\phi)_v$ , pour  $v \geq v_0$ , une représentation implicite matricielle de  $\mathcal{D}$ , tester si un point  $P = (P_1 :$

$P_2 : P_3 : P_4) \in \mathbb{P}^3$  donné appartient à la courbe  $\mathcal{D}$  (intersection point/courbe) se fait en calculant le rang de  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  qui est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On utilise une DVS afin de calculer un rang numérique approché. De plus, ce calcul de DVS permet également de résoudre le problème d'inversion, c'est-à-dire de déterminer un antécédent ( $s_P : t_P$ ) de  $P$  par  $\phi$  lorsque celui-ci est unique. En effet, par construction même de cette matrice, on a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} s_P^v & s_P^{v-1}t_P & s_P^{v-2}t_P^2 & \dots & t_P^v \end{pmatrix} \times \mathbb{M}(\phi)_v(P) = 0.$$

De plus, le noyau de la transposée de la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$  étant de dimension 1 dans ce cas, le vecteur formant la dernière ligne de la matrice  $U$  apparaissant dans une DVS de  $\mathbb{M}(\phi)_v(P)$ , i.e.  $\mathbb{M}(\phi)_v(P) = U\Sigma V$ , est une très bonne approximation d'un vecteur de la forme

$$c \cdot \begin{pmatrix} s_P^v & s_P^{v-1}t_P & s_P^{v-2}t_P^2 & \dots & t_P^v \end{pmatrix}$$

où  $c$  est une constante non nulle. Par suite, on en extrait très simplement l'antécédent ( $s_P : t_P$ ) de  $P$ .

**Exemple 2** Considérons la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} f_0(s, t) &= 3s^4t^2 - 9s^3t^3 - 3s^2t^4 + 12st^5 + 6t^6, \\ f_1(s, t) &= -3s^6 + 18s^5t - 27s^4t^2 - 12s^3t^3 + 33s^2t^4 + 6st^5 - 6t^6, \\ f_2(s, t) &= s^6 - 6s^5t + 13s^4t^2 - 16s^3t^3 + 9s^2t^4 + 14st^5 - 6t^6, \\ f_3(s, t) &= -2s^4t^2 + 8s^3t^3 - 14s^2t^4 + 20st^5 - 6t^6. \end{cases}$$

On peut vérifier que  $\eta = 2$ , par exemple en formant le système linéaire des relations degré 0 entre les  $f_i$ , dont on vérifie qu'il n'a pas de solution, puis celui des relations de degré 1, dont on vérifie également qu'il ne possède pas de solutions, puis enfin celui des relations de degré 2 pour lequel on trouve des solutions. On obtient ainsi une représentation implicite matricielle dès le degré 3, la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_3$  étant donnée par

$$\begin{pmatrix} T_1 + T_2 & 0 & 3T_2 - 3T_3 & 0 & 2T_3 - 2T_4 & 0 \\ -3T_1 & T_1 + T_2 & -T_2 - 3T_3 & 3T_2 - 3T_3 & -2T_4 & 2T_3 - 2T_4 \\ T_1 & -3T_1 & T_2 + 3T_3 & -T_2 - 3T_3 & T_4 & -2T_4 \\ 0 & T_1 & 0 & T_2 + 3T_3 & 0 & T_4 \end{pmatrix}$$

## 5.2. Intersection courbe/courbe

En plus de notre courbe  $\mathcal{D}$  paramétrée par (8), supposons à présent donnée une deuxième courbe  $\mathcal{C}$ , distincte de  $\mathcal{D}$ , et paramétrée en coordonnées homogènes par

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \\ (u : v) &\mapsto (x(u, v) : y(u, v) : z(u, v) : w(u, v)). \end{aligned}$$

Comme toujours, les polynômes  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  et  $w(u, v)$  sont des polynômes homogènes dans  $\mathbb{R}[u, v]$  sans facteur commun et de même degré. Usant d'une matrice de représentation pour la courbe  $\mathcal{D}$ , on peut déterminer l'ensemble des points d'intersection  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$  de manière robuste, exactement comme nous l'avons fait pour l'intersection courbe/surface, grâce aux outils de l'algèbre linéaire numérique. Nous répétons ici l'algorithme qui est identique à celui présenté au paragraphe 4.4.

Les données en entrée sont notre courbe  $\mathcal{D}$  paramétrée par  $\phi$ , ainsi qu'une matrice de représentation  $\mathbb{M}(T_1, \dots, T_4)$ , et notre courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $\Psi$ . On procède alors de la façon suivante :

1. On forme la matrice  $\mathbb{M}(\Psi(u, 1))$ .
2. On forme les matrices compagnes  $A, B$  de la matrice  $\mathbb{M}(\Psi(u, 1))$ .
3. On extrait la partie régulière  $A' - uB'$  du pinceau  $A - uB$ .
4. On calcule l'ensemble des valeurs propres (généralisées)  $\{u_1, \dots, u_r\}$  du pinceau  $A' - uB'$ .
5. On renvoie l'ensemble de points  $\{\Psi(u_1), \dots, \Psi(u_r)\}$  qui correspond aux points d'intersection de  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$  (à l'exception du point  $\Psi(1 : 0)$  qui pourrait éventuellement appartenir à  $\mathcal{D}$ ).

### 5.3. Lieu d'auto-intersection d'une courbe paramétrée

Une application intéressante des représentations implicites matricielles pour notre courbe  $\mathcal{D}$  paramétrée par  $\phi$  est la détermination de ses points singuliers, si elle en possède. En effet, ces points sont obtenus en intersectant la courbe  $\mathcal{D}$  avec elle-même. Afin d'être plus précis, rappelons tout d'abord ce que l'on désigne par un point singulier de la courbe  $\mathcal{D}$ .

Un point  $P$  sur la courbe  $\mathcal{D}$  est dit singulier si l'espace tangent à  $\mathcal{D}$  n'est pas une droite vectorielle. Il y a deux types de points singuliers : les singularités qui correspondent à un recouvrement de la courbe avec elle-même, auquel cas ce point possède au moins deux antécédents distincts par  $\phi$ , et les singularités qui sont locales au paramètre (noter que ces deux pathologies peuvent se cumuler). Plus concrètement, choisissons un plan  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{P}^3$  passant par  $P$  et ne contenant pas notre courbe  $\mathcal{D}$ . Soit  $H(T_1, T_2, T_3, T_4) = 0$  une équation de ce plan. Alors, l'intersection de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{D}$  se voit algébriquement au travers du polynôme homogène de degré  $d$  dans  $\mathbb{C}[s, t]$

$$H(f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t), f_4(s, t)) = \prod_{i=1}^d (t_i s - s_i t).$$

En effet, les  $d$  points  $(s_i : t_i) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , pas nécessairement distincts, sont tels que  $\phi(s_i : t_i) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ . On définit alors la *multiplicité d'intersection* de  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{H}$  au point  $P$ , que l'on note  $i_P(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ , comme le nombre de points  $(s_i : t_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , tels que  $\Psi(s_i : t_i) = P$ . À partir de là, on définit la *multiplicité du point  $P$*  de  $\mathcal{C}$ , que l'on note  $m_P(\mathcal{C})$ , comme le minimum des multiplicités d'intersection  $i_P(\mathcal{D}, \mathcal{H})$  lorsque  $\mathcal{H}$  parcourt tous les plans ne contenant pas  $\mathcal{D}$  et passant par le point  $P \in \mathcal{D}$ , minimum qui est atteint pour un choix suffisamment général de  $\mathcal{H}$ . Finalement, le point  $P$  est appelé un point singulier de  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $m_P(\mathcal{D}) \geq 2$ .

Soit  $\mathbb{M}(\phi)_v$ ,  $v \geq v_0$ , une représentation implicite matricielle de  $\mathcal{D}$ . On montre alors la propriété suivante [BLB10] :

pour tout point  $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  et tout entier  $v \geq v_0$  on a

$$\text{rang } \mathbb{M}(\phi)_v(P) = v + 1 - m_P(\mathcal{C}).$$

Par conséquent, une représentation implicite matricielle de  $\mathcal{D}$  permet de stratifier les points de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  en termes de leur multiplicité par rapport à la courbe  $\mathcal{C}$ .

Il est également possible de déterminer explicitement tous les points singulier de  $\mathcal{D}$ . En effet, on peut substituer la paramétrisation de  $\mathcal{D}$  aux variables  $T_1, T_2, T_3, T_4$  dans la matrice  $\mathbb{M}(\phi)_v$  pour obtenir la matrice

$$\mathbb{M}(s, t) := \mathbb{M}(\phi)_v(f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t), f_4(s, t)).$$

Cette opération revient géométriquement à intersecter la courbe  $\mathcal{D}$  avec elle-même (noter qu'un tel procédé n'a aucun sens avec une représentation implicite de  $\mathcal{D}$  classique par des équations polynomiales puisqu'il conduit aux équations inexploitable  $0 = 0$ , alors qu'il prend tout son sens avec une représentation implicite matricielle). À partir de là, on peut appliquer un algorithme complètement similaire à celui utilisé pour l'intersection courbe/courbe. Soulignons que l'usage des notions de rang numérique et de DVS permet de déterminer de manière robuste si un point est très proche d'être singulier.

## 6. Conclusion

Cet article présente un nouveau concept de représentation implicite d'une courbe ou d'une surface paramétrée. Cette représentation consiste en une matrice dont les entrées sont des formes linéaires en les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ . Elle caractérise une courbe ou une surface par une propriété de chute de rang. Très simple à calculer, elle s'avère être, en complément d'une paramétrisation, un outil intéressant pour les problèmes d'intersection. Son intérêt principal est notamment de transformer ces problèmes d'intersection en des problèmes d'algèbre linéaire numérique pour lesquels nous disposons d'algorithmes puissants et robustes pour les résoudre (décomposition en valeurs singulières, calcul de valeurs et vecteur propres généralisés). Ainsi, dans le cadre plus particulier du lancer de rayons sur une surface paramétrée, cette nouvelle approche pourrait permettre d'améliorer la robustesse des méthodes existantes dans des situations singulières.

## Références

- [ACGS07] ARULIAH D. A., CORLESS R. M., GONZALEZ-VEGA L., SHAKOORI A. : Geometric applications of the bezout matrix in the lagrange basis. In *Proceedings of the 2007 international workshop on Symbolic-numeric computation* (London, Ontario, Canada, 2007), ACM, pp. 55–64.
- [BC05] BUSÉ L., CHARDIN M. : Implicitizing rational hypersurfaces using approximation complexes. *J. Symbolic Comput.* Vol. 40, Num. 4-5 (2005), 1150–1168.

- [BCD03] BUSÉ L., COX D., D'ANDREA C. : Implicitization of surfaces in  $\mathbb{P}^3$  in the presence of base points. *J. Algebra Appl.* Vol. 2, Num. 2 (2003), 189–214.
- [BCJ09] BUSÉ L., CHARDIN M., JOUANOLOU J. : Torsion of the symmetric algebra and implicitization. *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 137, Num. 06 (février 2009), 1855–1865.
- [BD07] BUSÉ L., DOHM M. : Implicitization of bihomogeneous parametrizations of algebraic surfaces via linear syzygies. In *ISSAC 2007*. ACM, New York, 2007, pp. 69–76.
- [BDD09a] BOTBOL N., DICKENSTEIN A., DOHM M. : Matrix representations for toric parametrizations. *Comput. Aided Geom. Design*. Vol. 26, Num. 7 (2009), 757–771.
- [BDD09b] BOTBOL N., DOHM M., DICKENSTEIN A. : Matrix representations for toric parametrizations. arXiv :0807.4802 ; to appear in *Computer Aided Geometric Design*, 2009.
- [BJ03] BUSÉ L., JOUANOLOU J.-P. : On the closed image of a rational map and the implicitization problem. *J. Algebra*. Vol. 265, Num. 1 (2003), 312–357.
- [BLB] BUSÉ L., LUU BA T. : The surface/surface intersection problem by means of matrix based representations. Preprint HAL inria-00620947.
- [BLB10] BUSÉ L., LUU BA T. : Matrix-based Implicit Representations of Rational Algebraic Curves and Applications. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 27, Num. 9 (2010), 681–699.
- [CG92] CHIONH E.-W., GOLDMAN R. N. : Degree, multiplicity, and inversion formulas for rational surfaces using u-resultants. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 9, Num. 2 (1992), 93 – 108.
- [CGZ00] COX D., GOLDMAN R., ZHANG M. : On the validity of implicitization by moving quadrics of rational surfaces with no base points. *J. Symbolic Comput.* Vol. 29, Num. 3 (2000), 419–440.
- [Chi90] CHIONH E.-W. : *Base points, resultants, and the implicit representation of rational surfaces*. PhD thesis, University of Waterloo, 1990.
- [Gan66] GANTMACHER F. R. : *Théorie des matrices. Tome 2 : Questions spéciales et applications*. Traduit du Russe par Ch. Sarthou. Collection Universitaire de Mathématiques, No. 19. Dunod, Paris, 1966.
- [GVL96] GOLUB G. H., VAN LOAN C. F. : *Matrix computations*, third ed. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [KD06] KHETAN A., D'ANDREA C. : Implicitization of rational surfaces using toric varieties. *J. Algebra*. Vol. 303, Num. 2 (2006), 543–565.
- [KK96] KUBLANOVSKAYA V., KHAZANOV V. : Spectral problems for pencils of polynomial matrices. methods and algorithms v. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 79(3) (1996), 1048–1076.
- [Kub99] KUBLANOVSKAYA V. : Methods and algorithm of solving spectral problems for polynomial matrices and rational matrix. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 96(3) (1999), 3085–3287.
- [LBBM09] LUU BA T., BUSÉ L., MOURRAIN B. : Curve/surface intersection problem by means of matrix representations. In *SNC (Kyoto, Japan, 2009)*, Kai H., Sekigawa H., (Eds.), ACM Press, pp. 71–78.
- [MC91] MANOCHA D., CANNY J. : A new approach for surface intersection. In *Proceedings of the first ACM symposium on Solid modeling foundations and CAD/CAM applications* (Austin, Texas, United States, 1991), ACM, pp. 209–219.
- [SC95] SEDERBERG T., CHEN F. : Implicitization using moving curves and surfaces. In *Proceedings of SIGGRAPH* (1995), vol. 29, pp. 301–308.