Revue Électronique Francophone d'Informatique Graphique, Volume 7, Numéro 1, pp. 41–52, 2013

Surfaces Implicites Homothétiques

C. Zanni[1,2], A. Bernhardt[1,2], M. Quiblier[2], M.-P. Cani[1,2]

[1]Laboratoire Jean-Kutzmann, University of Grenoble, France
[2]INRIA Grenoble - Rhône-Alpes, France

Résumé

Nous introduisons un nouveau type de surface implicite à squelette, inspiré des surfaces de convolution. La principale propriété de ces nouvelles surfaces est d'être invariante par homothétie, ce qui rend leur utilisation bien plus intuitive : les mélanges ont la même allure à toutes les échelles, et nous pouvons contrôler précisément l'épaisseur du volume englobé.

We introduce a new kind of skeleton-based implicit surface, inspired from the convolution surfaces model. The main property of the new model is to be scale invariant, which makes their use more intuitive : blending is the same at all scales, and the thickness around the skeleton can be precisely set.

Mots clé : informatique graphique, modélisation géométrique, surfaces implicites.

1. Introduction

Les surfaces implicites à squelette, définies comme l'ensemble des points P de l'espace vérifiant $f(P) = c$ (où f est une fonction régulière appelée *fonction potentiel* et c une iso-valeur donnée), permettent de modéliser facilement des formes lisses, de genre topologique arbitraire : une simple somme des potentiels permet de raccorder les surfaces données en entrée. Cette propriété permet de construire des formes complexes progressivement, en combinant successivement des primitives, qui peuvent par exemple être construites au départ pour enrober un squelette géométrique (typiquement un point, un segment, ou un triangle). De ce fait, ces surfaces ont été très utilisées récemment dans le domaine de la modélisation progressive par esquisse [KHR02, AGB04, SWSJ07, BPCB08].

Un inconvénient majeur du modèle, à savoir l'apparition de gonflements non voulus au niveau du raccordement entre deux primitives a conduit, dans les années 90, au développement des surfaces de convolution. Ces dernières définissent f comme l'intégrale d'un noyau K le long d'un squelette S et utilisent une simple sommation comme opérateur de mélange. Ceci évite le phénomène de gonflement, l'additivité de l'intégrale rendant le champ de potentiel indépendant de la subdivision du squelette. Par contre, ce modèle n'apporte aucune solution à un autre défaut des surfaces implicites : le lissage excessif des détails, qui intervient lorsqu'une forme de petite taille est mélangée à une forme plus grande. De plus, si des poids sur le squelette peuvent permettre de faire varier l'épaisseur d'une primitive le long du squelette, les surfaces de convolution n'offrent aucun contrôle explicite de l'épaisseur de la forme obtenue. En définitive, ces inconvénients, qui réduisent l'espace des formes générées et rendent leur contrôle difficile, ont cantonné les surfaces de convolution au rang de modèle anecdotique, intéressant en théorie mais peu utilisable au sein d'un modeleur.

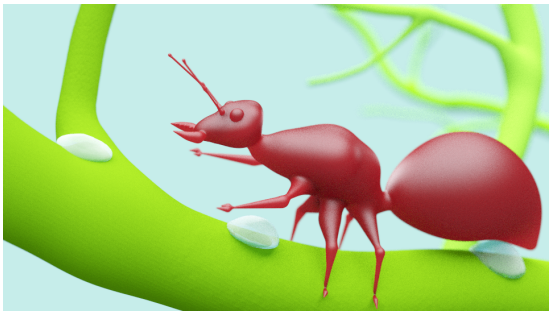


Figure 1: *Fourmi implicite sur branche implicite*

Cet article introduit les surfaces homothétiques, inspirées des surfaces de convolution, qui permettent de résoudre les problèmes de contrôle que nous venons de citer : tout en maintenant un mélange lisse grâce à une simple somme des

© REFIG 2013, Revue Électronique Francophone d'Informatique Graphique.
Publiée par l'Association Française d'Informatique Graphique

potentiels, quelque soit le degré de subdivision du squelette, notre nouveau modèle assure que les petits détails ne seront pas trop lissés, et offre un contrôle fin de l'épaisseur d'enrobage autour de chaque élément de squelette. Enfin, la propriété essentielle de nos surfaces, l'invariance par homothétie, y compris dans les zones de mélange, rend leur manipulation particulièrement intuitive.

La partie 2 détaille les modèles implicites à squelette existant, donnant les bases pour aborder ce travail. Après un argumentaire sur l'importance des propriétés d'homothétie, nous expliquons dans la partie 3 comment utiliser les déformations de l'espace pour rendre les surfaces de convolution invariantes par homothétie. La partie 4 étend ce modèle pour permettre un contrôle précis du rayon de la forme autour de son squelette linéique. La partie 5 présente deux extensions à notre modèle : la première a pour but de garantir une épaisseur minimale autour des squelettes lorsque ceux-ci sont trop courts comparés au rayon d'enrobage souhaité. La seconde est une extension au cas des squelettes surfaciques. Enfin, la partie 6 présente les résultats et discute les avantages et inconvénients de notre approche.

2. Etat de l'art

La plupart des surfaces implicites à squelette sont définies à l'aide de "fonctions de potentiel" que nous noterons K (aussi appelées noyaux dans le cadre des convolutions). Ces fonctions, de $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$, sont décroissantes :

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & d & \mapsto & K(d) \end{array} \quad (1)$$

Nous noterons $K_{\|.\|}$ la version isotrope de K dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccc} K_{\|.\|}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \overrightarrow{u} & \mapsto & K(\|\overrightarrow{u}\|) \end{array} \quad (2)$$

2.1. Surfaces distances

Les surfaces distances, notamment introduites par les "Blobby Molecules" [Bli82] et les "Soft-Objects" [WMW86], sont les iso-surfaces d'une iso-valeur c donnée :

$$\{P \ / \ f(P) = c\}$$



(a) (b)

Figure 2: *Mélange par sommation de deux primitives : les primitives distances (a) entraînent l'apparition d'un gonflement contrairement aux primitives de convolution (b).*

de la fonction :

$$f_S(P) = K\left(\min_{G\in S}\|\overrightarrow{GP}\|\right) \quad (3)$$

où S est un squelette géométrique. Un des intérêts de ces surfaces est la facilité pour fixer les rayons voulus autour des squelettes. Pour des squelettes ponctuels, la méthode de mélange la plus classique (permettant d'obtenir un unique objet lisse) est le mélange par sommation :

$$f(P) = \sum_i f_{S_i}(P)$$

Cependant, les surfaces distances présentent un inconvénient majeur pour des squelettes non ponctuels : le gonflement. Ce dernier intervient lorsque l'on met en continuité deux squelettes et qu'on les mélange par simple somme des potentiels (voir figure 2). Cela est dû au fait que :

$$K\left(\min_{G\in S_1\cup S_2}\|\overrightarrow{GP}\|\right) \neq K\left(\min_{G\in S_1}\|\overrightarrow{GP}\|\right) + K\left(\min_{G\in S_2}\|\overrightarrow{GP}\|\right)$$

2.2. Surfaces de convolution

Les surfaces de convolution ont été introduites par Bloomenthal dans [BS91], sous la forme :

$$f_S(P) = (g_S * K_{\|.\|})(P) = \int_{R^3} g_S(Q)\ K(\|P-Q\|)\ dQ \quad (4)$$

avec g_S une distribution décrivant la géométrie d'un squelette S et $K_{\|.\|}$ la fonction définissant l'influence d'un point du squelette. La forme de g_S dépend de la dimension † du squelette (ponctuel, linéaire, surfacique ou volumique). Pour un squelette volumique g_S est de la forme :

$$g_S(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les squelettes de dimension inférieure, la fonction g_S fait intervenir des distributions de Dirac.

Le but des surfaces de convolution était de supprimer le problème de gonflement des surfaces distances. Cette propriété des surfaces de convolution provient de l'additivité de l'intégrale par rapport au domaine d'intégration (qui est une généralisation de la relation de Chasles) : l'intégrale sur un support est égale à la somme des intégrales sur les parties du support à condition que l'intersection des supports soit de mesure nulle. Ceci donne au modèle l'additivité par rapport au squelette :

$$f_{S_1\cup S_2}(P) = f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P),$$

sous la condition que $S_1 \cap S_2$ soit de mesure nulle. On remarquera que cette propriété dérive aussi de la linéarité du produit de convolution :

$$g_{S_1} * K_{\|.\|} + g_{S_2} * K_{\|.\|} = (g_{S_1} + g_{S_2}) * K_{\|.\|}.$$

†. On appelle dimension d'un squelette la dimension de l'espace dans lequel il est plongé.

© REFIG 2013.

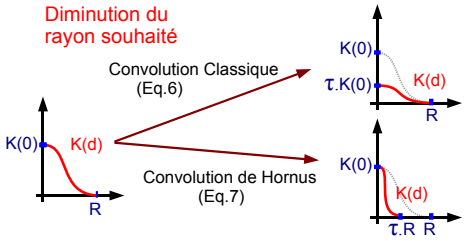


Figure 3: *Modification du noyau en fonction de l'épaisseur voulue pour les deux types de convolution à épaisseur variable classiques.*

Il est aussi possible d'introduire une formulation des surfaces de convolution dépendant d'une paramétrisation des squelettes (formulation dépendant de la dimension de ces derniers) :

$$f_S(P) = \int_S K\left(\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|\right)\, ds \tag{5}$$

où S est un squelette géométrique, généralement un segment, et Γ sa définition paramétrique (par abscisse curviligne pour une courbe).

On notera que le noyau K ayant initialement servi à introduire les surfaces de convolution, le noyau Gaussien, n'est plus utilisé (dû à son support global et à l'absence de forme analytique de l'intégrale). Mc Cormack and Sherstyuk [MS98] ont introduit le noyau de *Cauchy* accompagné de formules analytiques pour calculer l'intégrale (eq. (5)) afin de rendre l'utilisation des surfaces de convolution plus efficace. Les principaux noyaux de convolution utilisés sont :

— *Cauchy* de rang i :

$$K(d) = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{d}{\sigma}\right)^2\right)^{\frac{i}{2}}} \tag{6}$$

— *Inverse* de rang i :

$$K(d) = \frac{1}{\left(\frac{d}{\sigma}\right)^i} \tag{7}$$

— *Polynomiaux Compact* de rang i :

$$K(d) = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{d}{\sigma}\right)^2\right)^{\frac{i}{2}} & \text{si } d < s\,, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

Ils sont ici légèrement modifiés afin d'uniformiser leur formulation : ils font maintenant tous appel à un paramètre commun σ qui est un facteur d'échelle.

Chacun possède ses avantages : les noyaux *Inverse* et de *Cauchy* sont C^∞ mais à support global tandis que le noyau *Polynomial Compact* est $C^{\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor}$ mais à support compact, ce qui permet un contrôle local des formes engendrées.

2.3. Convolution d'épaisseur variable

Afin d'offrir plus de flexibilité sur les formes générées, plusieurs approches ont été introduites pour générer des surfaces de convolution à rayon variable autour de segments. Elles sont toutes basées sur l'utilisation d'une fonction de poids $\tau(s)$ donnant une "épaisseur/densité" à chaque point d'un squelette.

D'un coté [HAC03], propose d'utiliser la formule suivante :

$$f_S(P) = \int_S K\left(\frac{\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|}{\tau(s)}\right)\, ds \tag{9}$$

Cependant, la seule formule analytique fournie pour calculer efficacement l'intégrale de la formule (9) est celle pour un segment et le noyau *Inverse* de degré 2. A notre connaissance, cette formulation n'a jamais été reprise par la suite. On notera que cette formule ne définit plus une convolution au sens mathématique.

De l'autre, [JT02b, JT02a, AC02] utilisent la formule suivante :

$$f_S(P) = \int_S \tau(s)\, K\left(\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|\right)\, ds \tag{10}$$

C'est cette formulation qui a été reprise ultérieurement. [HC12] introduit une formule de récurrence pour obtenir des formules analytiques pour les noyaux *Inverse* et de *Cauchy* de degré arbitraire le long d'un segment muni d'une fonction de poids polynomial de degré quelconque. Cet article présente aussi une étude poussée du comportement des surfaces de convolution pour les noyaux *Inverse* et de *Cauchy*.

Les deux formules proposées (eq. (9) et (10)) correspondent respectivement à faire varier le poids du noyau de convolution, ou son "support" le long du squelette (voir figure 3). Dans les deux cas, les formulations présentent un certain nombre de défauts, que nous verrons plus en détail dans la section suivante.

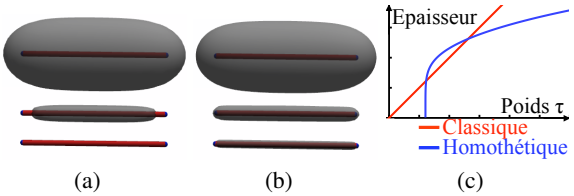


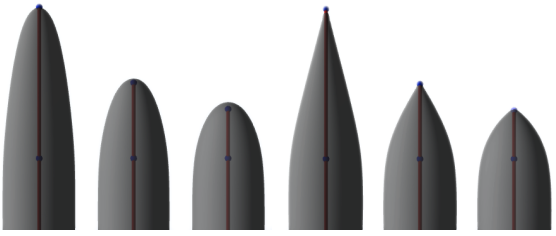
Figure 4: *Primitives de rayon décroissant (noyau de Cauchy) : la formulation classique (a) entraine la contraction de la surface vers le centre du squelette puis sa disparition, contrairement à la formulation homothétique (b). (c) donne l'épaisseur de la forme engendrée en fonction de τ lorsque le squelette est un segment infini.*

© REFIG 2013.

2.4. Problèmes posés par ces modèles

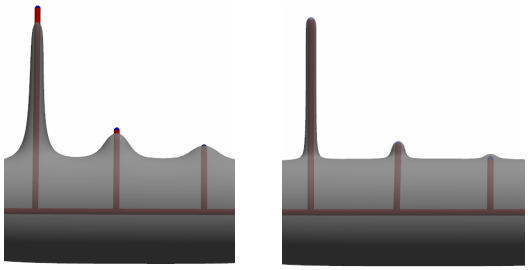
Si elles parviennent à engendrer des surfaces implicites dont l'épaisseur varie le long d'un squelette, les deux formules que nous venons de donner amènent un certain nombre de problèmes rendant leur utilisation difficile :

1. **Disparition de la surface :** Pour les noyaux de *Cauchy* et *Polynomiaux Compact*, il est démontré dans [HC12] qu'il existe une valeur minimale de τ pour que la surface de convolution (iso-surface associée à une iso-valeur c) existe autour d'un segment (même si celui-ci est infini). Nous pouvons observer ce phénomène sur la figure 4(a) où le poids d'un segment tend vers 0 : la surface va progressivement se contracter vers le centre du segment puis disparaitre au lieu de devenir simplement de plus en plus fine (plus l'épaisseur diminue plus le squelette va dépasser aux extrémités).
2. **Contrôle de l'épaisseur :** La relation entre le poids τ et le rayon auquel se situe l'iso-surface d'intérêt (celle où $f(P) = c$) est non linéaire (figure 4(c) : courbe bleue). En pratique, cela rend le contrôle de l'épaisseur difficile. Notamment, comme l'illustre la figure 5(a), il ne suffit pas de fixer τ à 0 à l'extrémité d'un segment pour obtenir une surface en forme de cône.
3. **Lissage des détails :** Les détails fins sont lissés lorsqu'ils sont mélangés à une forme de plus grande taille. On observe sur la figure 6(a) que les rayons des segments verticaux (de même diamètre avant mélange) ne sont pas aussi bien conservés que ceux de la figure 6(b).
4. **Dépendance du mélange à l'échelle de travail :** Comme nous pouvons le remarquer sur la figure 7(a), le mélange entre deux objets similaires dépend de leur épaisseur : l'aire d'influence d'une primitive reste inchangée quelque soit sa finesse, ceci rend le mélange peu prévisible.



(a) (b)

Figure 5: *Différentes formes générées lorsque le poids décroit linéairement jusqu'à* 0 *au bout du squelette : formulation classique (a), homothétique (b). Remarquez les extrémités arrondies non voulues en (a).*



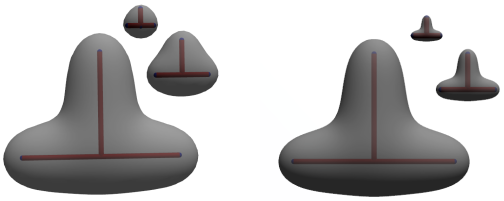
(a) (b)

Figure 6: *Mélange de 3 primitives à faible épaisseur (même épaisseur, longueur variable) avec une primitive linéique épaisse (segment horizontal). Les détails sont lissés lorsque les surfaces de convolution sont utilisées (a), mais pas avec les surfaces homothétiques (b).*

L'objectif de ce travail est de remplacer les surfaces de convolution par un nouveau modèle, évitant ces quatre inconvénients majeurs. Notons que le troisième (le mélange des détails) a été résolu récemment [BBCW10] mais en utilisant un opérateur binaire complexe, alors que nous souhaitons ici le faire en gardant les avantages des surfaces de convolution : un mélange n-aire à l'aide d'une simple somme des potentiels, et l'indépendance vis à vis du degré de subdivision du squelette.

3. Surfaces implicites invariantes par homothétie

Comme nous venons de le voir, les modèles classiques de convolution à épaisseur variable ne se comportent pas de manière linéaire avec τ. Notamment, les primitives de convolution (associées à leur poids) ne sont pas invariantes par homothétie : si l'on applique une homothétie à la fois aux



(a) (b)

Figure 7: *Application d'une homothétie à la fois aux dimensions d'un squelette de convolution et aux poids τ associés. La formulation classique (a) ne génère pas des formes similaires contrairement à la formulation homothétique (b). Le noyau utilisé est Cauchy 4 avec $\sigma = \frac{1}{2}$. Pour (a), on a $\tau = 14$ pour la forme la plus grande, pour (b), on a $\tau = 1$. Le rapport de la première homothétie est $\frac{1}{3}$, celui de la seconde est $\frac{1}{2}$.*

© REFIG 2013.

squelettes et aux poids qui leur sont associés, la forme de la surface obtenue ne sera pas la même (figure 7). Elle diffère tant au niveau des épaisseurs des surfaces, qu'au niveau de la forme du mélange. Ceci signifie que le comportement du modèle est fortement dépendant de l'échelle de travail ce qui le rend inutilisable en pratique.

Pour obtenir des surfaces au comportement plus intuitif, il faut se ramener à une formulation invariante par homothétie. C'est ce que nous proposons ci-dessous, en nous appuyant sur une déformation de l'espace. Nous verrons par la suite que la correction de ce problème entraine la résolution de l'ensemble des problèmes cités.

3.1. Solution par déformation de l'espace

Dans le cadre de la modélisation par surfaces implicites, les déformations de l'espace (par exemple, les déformations "courber", "vriller" et "aplatir" définies dans [Bar84]) ont été utilisées pour définir des primitives complexes à partir de primitives simples [WO97]. Pour ce faire, le champ de potentiel $\tilde{f}$ associé à la primitive complexe est défini à partir d'une déformation de l'espace $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et d'une primitive simple de champ f de la manière suivante (voir figure 8) :

$$\tilde{f}(P) = f(W(P))$$

Nous allons voir comment utiliser cette approche pour construire nos nouvelles primitives.

Revenons aux surfaces de convolution du départ, (eq. (5)), sans paramètre de poids le long du squelette, et donc d'épaisseur constante.

Afin de pouvoir modéliser deux objets identiques à deux échelles différentes, le champ potentiel engendré par un squelette doit être invariant par homothétie. En effet, la forme d'un mélange est influencée par la forme de toutes les iso-surfaces associées à une primitive. L'idée est de se ramener à un espace où tous les segments engendrent une surface d'épaisseur unitaire pour calculer le potentiel, en utilisant une transformation de l'espace W adaptée : une homothétie (voir figure 9). Notons que la transformation est à la fois appliquée au squelette S, à l'épaisseur voulue τ et au point de

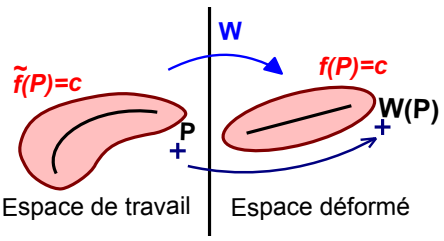


Figure 8: *Principe de la création d'une primitive complexe par déformation de l'espace introduit dans [WO97].*

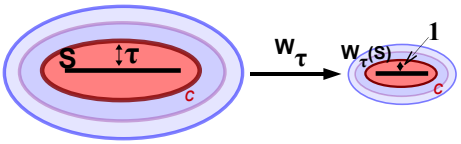


Figure 9: *Transformation de l'espace utilisé pour obtenir des primitives invariantes par homothétie.*

calcul P. Le rapport de l'homothétie est inversement proportionnel à l'épaisseur souhaitée. On définit donc notre nouveau champ de potentiel $f_{\tau_c,S}$ défini à partir d'un squelette S muni d'un poids constant τ_c par :

$$f_{\tau_c,S}(P) = \tilde{f}_{W_{\tau_c}(S)}(W_{\tau_c}(P)) \tag{11}$$

où $\tilde{f}_{W_{\tau_c}(S)}$ est une fonction potentiel de convolution à poids constant valant 1 (eq. (5)) autour du squelette $W_{\tau_c}(S)$. L'homothétie W_{τ_c} appliquée à un point est définie par :

$$W_{\tau_c}(P) = O + \frac{1}{\tau_c}\overrightarrow{OP}, \tag{12}$$

où O est l'origine du repère. De la même façon, l'homothétie appliqué à un squelette (ensemble de point) est défini par $W_{\tau_c}(S) = \{W_{\tau_c}(P)/P \in S\}$.

Si l'on regarde la formule utilisée pour le calcul de $\tilde{f}_{W_{\tau_c}(S)}(W_{\tau_c}(P))$, on remarque que seul les distances entre les points du squelette et le point de calcul ainsi que la longueur du squelette (pour une courbe, respectivement aire pour une surface, volume pour un solide) sont utilisées. De ce fait, le centre de l'homothétie n'a pas d'influence, en effet l'homothétie utilisée pour déformer le squelette et le point de calcul est la même, donc les distances (et longueurs) sont multipliées par le rapport de l'homothétie, les aires par le rapport au carré, les volumes par le rapport au cube (cela dérive du théorème de Thalès).

Par la suite, le centre de l'homothétie n'ayant pas d'influence, on utilisera l'abus de notation suivant αP et αS pour désigner l'homothétie de rapport α et de centre O respectivement appliquée à un point P et à un squelette S.

Nous pouvons facilement vérifier que le nouveau champ de potentiel est invariant par homothétie :

$$f_{\alpha\tau_c,\alpha S}(\alpha P) = \tilde{f}_{\frac{\alpha}{\alpha\tau_c}S}(\frac{\alpha}{\alpha\tau_c}P) = \tilde{f}_{\frac{1}{\tau_c}S}(\frac{1}{\tau_c}P) = f_{\tau_c,S}(P)$$

Il est aussi facile de vérifier que l'additivité de f par rapport aux squelettes est bien préservée , la démonstration est fournie en annexe.

4. Primitives linéiques à rayons variables

4.1. Généralisation aux rayons variables

Dans la section précédente, nous expliquions pourquoi l'invariance par homothétie était une propriété fondamentale

© REFIG 2013.

pour rendre les surfaces implicites à squelette utilisables, et la manière de procéder lorsque le rayon voulu est constant. Nous allons maintenant étendre notre modèle à des primitives linéiques à rayon variable. On ne peut plus, maintenant, appliquer une déformation de l'espace globale à la primitive comme dans l'équation (11) car la déformation précédemment définie était fonction de l'épaisseur de la primitive.

Soit une primitive segment à épaisseur variable, celle-ci peut être approximée par un ensemble de primitives segments à épaisseurs constantes. L'approximation est améliorée lorsque le nombre de segments utilisé augmente et donc lorsque leur longueur tend vers zéro. En passant le modèle précédent à la limite, nous désirons donc appliquer une homothétie différente pour chaque longueur infinitésimale de segment. Cette transformation dépend de l'épaisseur souhaitée localement. Regardons donc ce que devient l'influence d'un élément ds dans le calcul de notre intégrale (figure 10). La déformation appliquée a pour effet de modifier les distances par $\frac{1}{\tau(s)}$. Ainsi l'influence d'un élément ds est donnée par $K\left(\frac{1}{\tau(s)}\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|\right)$. Cependant il faut aussi se souvenir que la déformation appliquée affecte aussi le squelette lui-même. Ainsi la longueur infinitésimale devient $\frac{ds}{\tau(s)}$. L'intégrale devient donc :

$$f_S(P) = \int_S K\left(\frac{\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|}{\tau(s)}\right)\frac{ds}{\tau(s)} \qquad (13)$$

Si l'on compare cette formule à l'approche utilisée par Hornus (eq. (9)), notre formulation consiste à ajouter une densité au squelette, cette dernière étant inversement proportionnelle au rayon voulu.

L'intégration augmentant d'une unité le degré de régularité d'une fonction, nous pouvons en déduire que la nouvelle formulation est C^∞ pour les noyaux *Inverse* et de *Cauchy*, et $C^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}$ pour les noyaux *Polynomiaux Compacts*.

4.2. Ajout d'un contrôle explicite de l'épaisseur

Prenons une droite (squelette segment de longueur infinie) ayant un poids constant τ_c, et notons $h(\tau_c, d)$ la valeur de potentiel à la distance d de la droite. Les formules pour les différents noyaux (eq. (6), (7) et (8)) sont données dans la table 5. On peut remarquer que la valeur $h(\tau_c,\tau_c)$ est indépendante de τ_c. Cela est dû à l'invariance par homothétie de notre modèle ($h(\tau_c,\tau_c)$ dépend donc uniquement du noyau utilisé). Ainsi, si l'on note $N_K(c) = \frac{c}{h(1,1)}$, et que l'on renormalise le champ de potentiel par l'inverse de cette valeur, alors la surface associée à l'iso-valeur c autour du squelette aura pour épaisseur τ_c.

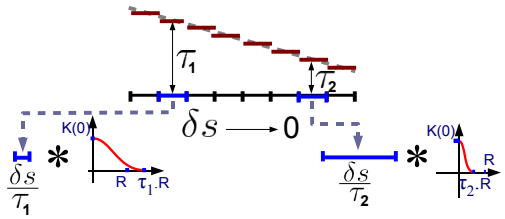


Figure 10: *Passage de la déformation de l'espace à la limite.*

Le facteur normalisateur $N_K(c)$ étant indépendant de τ_c, nous définissons finalement les surfaces implicites homothétiques comme les iso-surfaces de :

$$f_S(P) = \frac{1}{N_K(c)}\int_S K\left(\frac{\|\overrightarrow{\Gamma(s)P}\|}{\tau(s)}\right)\frac{ds}{\tau(s)}. \qquad (14)$$

Ceci permet un contrôle intuitif de l'épaisseur dès que la longueur du squelette S est suffisante (la longueur nécessaire pour le noyau polynomial compact sera précisée dans la sous-section suivante). En effet, dans ce cas la surface aura le rayon voulu τ_c.

Afin de pouvoir utiliser nos surfaces en pratique, il est nécessaire d'obtenir une formulation analytique des intégrales. Nous allons maintenant étudier les primitives segments à rayon linéaire. En effet, ce sont les primitives les plus simples que l'on puisse étudier mais aussi les plus intuitive à manipuler car elles sont définies par deux points associés à leurs rayons. Ce cas particulier a été largement étudié pour les surfaces de convolution. Du fait de la similarité des formules à intégrer, nous allons pouvoir nous baser sur les travaux présentés dans [HC12, Hub12].

4.3. Squelettes segments à rayon linéaire

Supposons que l'on ait un segment $[AB]$, muni de la paramétrisation définie sur $[0;1]$ suivante :

$$\Gamma(t) = A + t\,\overrightarrow{AB},$$

comme expliqué précédemment, le plus intuitif est de fixer le rayon souhaité aux deux extrémités du segment (le rayon voulu en A est τ_0 et celui en B est τ_1). Il nous faut donc maintenant définir un rayon souhaité tout au long du segment, le plus simple est d'utiliser une interpolation linéaire des rayons souhaités aux extrémités. Nous introduisons donc la fonction τ définie sur l'intervalle $[0;1]$ (le même intervalle que la paramétrisation du segment) :

$$\tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau\, t$$

avec $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0$.

On a alors (avec P le point de calcul) :

$$\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2\, t^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}\, t + \|\overrightarrow{AP}\|^2$$

En injectant cette égalité dans la formulation de l'intégrale (eq. (13)), nous obtenons les formules intégrales données dans le tableau 3 en annexe. On peut obtenir des formules analytiques du potentiel à partir de ces formules, en suivant

© REFIG 2013.

le même principe que dans [HC12, Hub12]. En effet, nous obtenons des primitives du type de :

$$\int w(t)(at^2-2bt+c)^{\frac{i}{2}}\,dt \text{ avec } w(t) \text{ polynomial et } i\in\mathbb{Z}$$

et

$$\int \frac{(at^2-2bt+c)^{\frac{i}{2}}}{(dt+e)^k}\,dt \text{ avec } k\in\mathbb{N}^* \text{ et } i\in\mathbb{N}$$

On trouve la formule analytique associée à la première en appliquant la formule de récurrence fournie dans [HC12, Hub12] . La seconde se ramène à la première en appliquant k intégrations par partie. On peut remarquer qu'il est possible d'appliquer le théorème de dérivée sous le signe intégrale (règle de Leibniz) pour permettre de trouver une formulation du gradient analytique. En effet il suffit de connaitre les différentielles des applications suivantes pour obtenir la formulation du gradient sous forme intégrale (on associe P à son vecteur position) :

* $N : P \mapsto \|\overrightarrow{AP}\|^2 \Rightarrow \vec{\nabla}N : P \mapsto 2\overrightarrow{AP}$
* $S : P \mapsto \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} \Rightarrow \vec{\nabla}S : P \mapsto \overrightarrow{AB}$
* $R : P \mapsto \frac{1}{h(P)^\alpha} \Rightarrow \vec{\nabla}R : P \mapsto -\alpha\frac{\vec{\nabla}h(P)}{h(P)^{\alpha+1}}$
* $M : P \mapsto (h(P))^\alpha \Rightarrow \vec{\nabla}M : P \mapsto \alpha\vec{\nabla}h(P)\,(h(P))^{\alpha-1}$

Les formules sont fournies dans la table 3. De même que pour les formules précédentes, nous disposons d'une formule de récurrence pour trouver les formes analytiques. Comme il est préconisé dans [HC12], nous pouvons utiliser Maple pour dépiler la récurrence et nous fournir directement un code d'évaluation optimisé de nos fonctions. Le nombre d'opérations nécessaires à chaque évaluation est fourni en annexe dans la table 4.

Cas du noyau Inverse: On peut remarquer que la formulation homothétique associée au noyau *Inverse* d'ordre i correspond à l'utilisation d'un poids $(\Delta\tau\ t+\tau_0)^{i-1}$ avec les convolutions classiques (eq. (10)).

Cas du noyau polynomial compact: Pour pouvoir calculer l'intégrale associée au noyau polynomial à support compact il faut tout d'abord sélectionner la partie du squelette qui se situe dans la zone d'influence de ce dernier (en effet ce noyau est défini par morceau).

Pour ce faire, nous cherchons les t tel que $K\left(\frac{1}{\tau(t)}\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|\right) > 0$, K étant une fonction décroissante. Cela revient à étudier :

$$1-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|}{\tau(t)}\right)^2 > 0,$$

soit :

$$\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2 < \sigma^2\,\tau^2(t)$$

avec :

$$\sigma^2\,\tau^2(t) = \sigma^2\Delta\tau^2\,t^2 + 2\sigma^2\Delta\tau\tau_0\,t + \sigma^2\tau_0^2.$$

Nous sommes donc amenés à étudier une inéquation du second degré :

$$(\|\overrightarrow{AB}\|^2-\sigma^2\Delta\tau^2)t^2 - 2(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}+\sigma^2\Delta\tau\tau_0)t + \|\overrightarrow{AP}\|^2-\sigma^2\tau_0^2 \le 0$$

Ceci se résout facilement en étudiant le signe du discriminant associé. Notons juste que par des considérations géométriques, nous sommes assurés de ne jamais avoir deux intervalles de solution disjoints.

On notera que, contrairement au convolution classique, un segment à poids variable entraine un support à rayon non constant (figure 12) cela a pour avantage de ne pas demandé une gestion explicite de ce dernier par une sous subdivsion en segment lorsque on veut obtenir une forme avec un rayon variant progressivement.

Comme expliqué dans [Hub12], on notera que le noyau homothétique à poids constant amène une garantie sur l'épaisseur obtenue lorsque la longueur d'intégration (et donc celle du squelette) est suffisante ; cela est dû à son support compact (voir figure 11). La longueur L nécessaire pour avoir un point à l'épaisseur exacte τ_c est donnée par le théorème de Pythagore : $\tau_c^2 + (\frac{L}{2})^2 = (\sigma\tau_c)^2$, donc la longueur d'intégration nécessaire est $L = 2\tau_c\sqrt{\sigma^2-1}$.

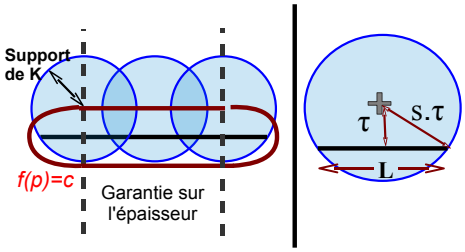
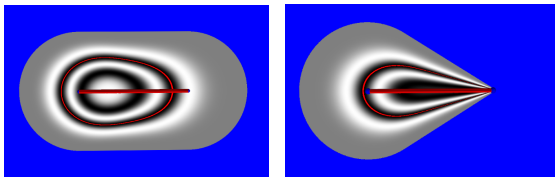


Figure 11: *Cas du noyau à support compact : garantie sur l'épaisseur. Un point à la distance* τ *d'un squelette segment doit être dans l'air d'influence d'une longueur* L *de squelette pour avoir la garantie que la surface passe par ce point.*



(a) (b)

Figure 12: *Champ de potentiel associé à (a) une primitive de convolution classique (eq. (10)), (b) une primitive homothétique, pour un noyau à support compact le long d'un squelette segment, avec une variation linéaire de poids jusqu'à* 0 *à droite.*

© REFIG 2013.

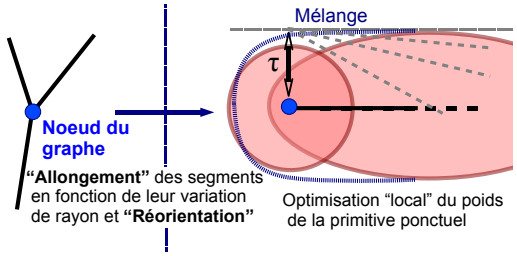


Figure 13: *Optimisation locale des poids des noeuds du graphe nécessitant correction.*

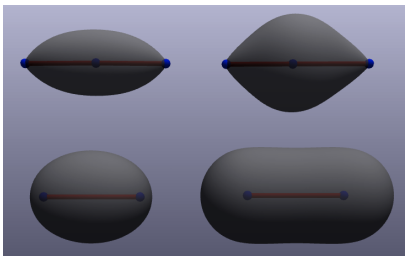


Figure 14: *Comparaison entre surfaces non corrigées (gauche) et corrigées (droite), pour respectivement des épaisseurs de (0,1,0) et (1,1) le long de squelettes segments.*

Dans la pratique: Nous utilisons principalement le noyau polynomial à support compact (eq. (8)) de degré $i = 6$. Le choix de ce noyau est dû au support compact qui permet d'obtenir des influences localisées pour chaque primitive, limitant ainsi les mélanges à distance. Il permet aussi de réduire le nombre de calculs nécessaires en un point de l'espace, et ce sans avoir à faire aucune approximation. Le choix du degré 6 est un compromis entre la régularité de la surface et son coût de calcul. En effet, le degré 6 est le premier degré pour les noyaux polynomiaux pour lequel la Hessienne est continue.

Nous montrons dans le paragraphe suivant comment assurer une épaisseur minimale donnée à l'extrémité des squelettes, et le long des squelettes trop courts pour avoir l'épaisseur voulue.

5. Extensions des surfaces homothétiques

5.1. Garantir une épaisseur minimale

Parce qu'avec nos nouvelles surfaces homothétiques (eq. (14)), l'épaisseur voulue n'est obtenue que si l'on dispose d'une longueur de squelette à intégrer suffisante, notre modèle est particulièrement adapté à la représentation de formes tubulaires. En revanche il est mal-aisé de reconstruire des formes avec des maxima locaux d'épaisseur. De plus, notre modèle ne garantit pas l'épaisseur de la surface aux extrémités du squelette : ces deux problèmes sont dus à un manque de longueur de squelette à intégrer. Nous proposons une adaptation automatique du modèle pour palier à ces défauts.

Afin de corriger le manque de longueur d'intégration nous allons ajouter à notre squelette des squelettes ponctuels (placés en ses extrémités et ses maxima d'épaisseur). Considérons le graphe représentant le squelette, nous allons effectuer nos corrections sur les sommets du graphe qui le nécessitent (extrémités du graphe et noeuds de poids maximal). Les corrections ponctuelles sont mélangées les unes avec les autres avec un mélange de Barthe [BDS*03] symétrique paramétré de telle sorte à limiter leur mélange. Le résultat est ensuite mélangé aux surfaces homothétiques grâce à un mélange de Barthe asymétrique. Pour choisir l'influence des convolutions ponctuelles il suffit d'étudier les variations de rayon des segments partant du noeud du graphe (voir figure 13).

Notre correction n'est pas parfaite dans la mesure où elle peut entraîner de légers gonflements non voulus, cependant nous pensons que les résultats obtenus sont satisfaisants et améliorent nettement l'intuitivité du modèle (voir figures 14 et 15), et ce pour un surcout de calcul assez faible.

5.2. Primitives homothétiques surfaciques

On remarquera tout d'abord que la formulation précédente (eq. (14)) est uniquement valable pour des squelettes linéiques. Pour le cas des intégrales surfaciques, la formulation de l'invariance par homothétie est légèrement différente. Elle fait intervenir le facteur $\frac{1}{\tau(u,v)^2}$ à la place de $\frac{1}{\tau(s)}$ dans l'équation (14) :

$$f_S(P) = \frac{1}{N_K(c)} \int_S K\left(\frac{\|\overrightarrow{\Gamma(u,v)P}\|}{\tau(u,v)}\right) \frac{du\,dv}{\tau(u,v)^2} \qquad (15)$$

Ceci correspond à la déformation appliquée au domaine d'intégration (une homothétie multiplie les aires par son rapport au carré). La seule formule analytique actuellement disponible pour utiliser ce genre de convolution est celle de la convolution à poids constant sur un triangle [She99, Hub12]. Nous pouvons voir sur la figure 16 des objets créés à partir

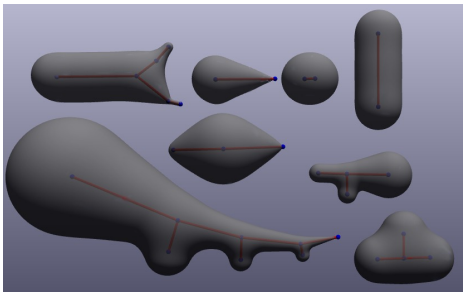
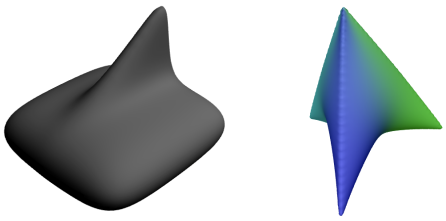


Figure 15: *Différents exemples de correction d'épaisseur.*

© REFIG 2013.



(a) (b)

Figure 16: *Surfaces implicites homothétiques créées à partir de squelettes triangles : (a) triangles à épaisseur constante utilisant des formules analytiques, (b) triangles à variation d'épaisseur tri-linéaire utilisant une intégration numérique.*

de primitives triangles, avec soit une intégration analytique , soit numérique de la formule (15)

6. Résultats et discussions

6.1. Résultats

Dans un but de validation, nous avons mis en place une interface de modélisation interactive où nous utilisons un "marching-triangles" [AG01] pour afficher nos surfaces. Grâce aux surfaces implicites homothétiques, nous pouvons manipuler de manière interactive des formes simples (figure 15), en contrôlant précisément leurs épaisseurs, et en les raccordant. Nous avons aussi utilisé nos surfaces pour modéliser une forme complexe : nous pouvons voir une fourmi (figures 1 et 17) avec de petits détails notamment au niveau des mandibules qui ne sont pas lissés. La table 1 donne des temps de calcul pour des objets plus ou moins complexes.

6.2. Discussion

6.2.1. Avantage des surfaces homothétiques

Notre modèle présente un certain nombre d'avantages sur les surfaces de convolution. Il corrige notamment tous les problèmes cités à la section 2.3 (tant au niveau du comportement des mélanges que de la gestion des épaisseurs). Voici la liste des améliorations apportées :

- **Invariance par homothétie** Il est enfin possible de faire le changement d'échelle d'un objet de manière simple (figure 7).
- **Pas de lissage excessif des détails** (voir figure 6, 19). Les rayons des segments fins de la figure 6(b) ne sont pas trop modifiés lors du mélange avec un objet épais. On peut voir sur la figure 19(b) que les mélanges sont du même type aux deux extrémités de la forme.
- Le poids τ **correspond à l'épaisseur souhaitée** (voir figure 5).
- **Garantie sur l'épaisseur minimale** lors de l'utilisation d'un graphe de squelette (voir figures 14 et 15).



Figure 17: *Zoom sur la tête de la fourmi de la figure 1. Nous pouvons notamment constater que les détails sur les mandibules restent suffisamment petits.*

- **Goutte d'eau :** nous pouvons facilement produire des volumes en forme de gouttes d'eau (ie - pointus d'un côté et épais de l'autre, voir figure 18)
- Formulation **plus adaptée aux convolutions à support compact**. Contrairement aux convolutions définies par (eq. (10)), le support du noyau évolue en même temps que l'épaisseur souhaitée varie ; l'utilisateur n'a donc plus besoin de réfléchir à la manière dont il va faire changer le support de ses primitives lorsqu'il souhaite créer une forme avec un changement progressif d'épaisseur (voir figure 12).
- La fonction potentiel et son gradient sont exprimés par des formules analytiques pour tous les noyaux classiques intégrés le long de segment avec rayon souhaité τ linéaire. De plus f et son gradient ayant de nombreux termes en commun (voir table 4) une **évaluation efficace de** $(\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f})$ peut être proposée. En effet, les schémas numériques classiques pour calculer une approximation du gradient de f font appel à 3 ou 6 évaluations de f, l'évaluation classique combiné de $(\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f})$ amènerait donc à un nombre d'évaluation de f de 4 ou 7. En revanche, dans notre cas, $(\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f})$ se cal-

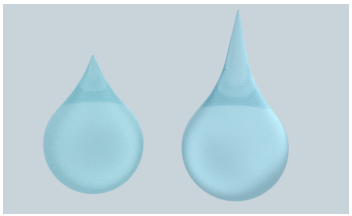
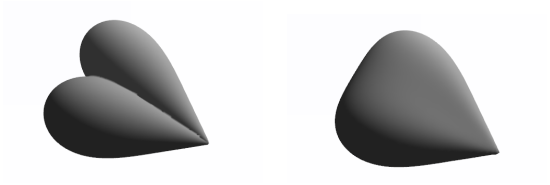


Figure 18: *Gouttes d'eau créées à partir de 3 primitives segments homothétiques chacune et en appliquant la méthode de correction d'épaisseur de la section 5.1.*

© REFIG 2013.



(a) (b)

Figure 19: *Le positionnement de deux squelettes segments en "V" permet d'apprécier le comportement du mélange invariant par homothétie. Le mélange est le même aux deux extrémités de la forme, notamment l'extrémité fine n'est pas trop lissée. (a) mélange "max", (b) mélange "+".*

cule pour un coup inférieur à 2 fois l'évaluation de f (le facteur dépend du noyau K utilisé). ‡

6.2.2. Limitations

Cependant notre modèle présente quelques inconvénients par rapport aux surfaces de convolution :

— **Formulation plus coûteuse à calculer :** Bien que l'on ait des formules analytiques pour les surfaces homothétiques générées à partir de segments avec "rayon linéaire", celles-ci sont plus coûteuses à évaluer que les convolutions classiques (le nombre d'opérations est augmenté, voir table 4). Cependant cela est à relativiser puisque les surfaces à supports compacts sont enfin facilement manipulables.

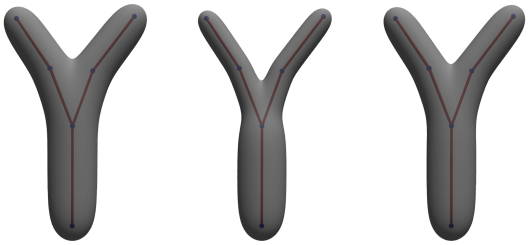
— **Perte de la propriété de "superposabilité" :** Le principal avantage de la méthode classique (eq. (10)) est que lorsqu'on superposait deux squelettes de poids τ_1 et τ_2 alors nous obtenions une surface équivalente à une surface unique générée par un squelette de poids $\tau_1+\tau_2$, cette propriété rendait facile la création de jonction en Y où une branche se subdivisait en deux branches plus fines, et ce sans bosse. La perte de cette propriété n'est pas si problématique. En effet, il est maintenant possible de conserver certaines propriétés dépendant des rayons le long des branchements. On peut au choix décider de conserver la somme des rayons (avoir un rayon $R = R_1 + R_2$ avant un branchement suivi de R_1 et R_2 après le branchement), ou obtenir une conservation de la quantité de matière de part et d'autre du branchement en fixant $R^2 = R_1^2 + R_2^2$. Nous pouvons voir sur la figure 20 une comparaison entre quelques types de branchement.

— La **garantie d'épaisseur minimale ne fonctionne qu'en présence d'un graphe de modélisation**, et demande d'employer localement une opération de mélange plus complexe (Notons qu'elle n'est nécessaire qu'aux extrémités de l'objet et aux maxima d'épaisseur).

‡. Ceci est aussi vrai pour les potentiels de convolution classiques, mais à notre connaissance personne ne disposait encore des formules analytiques pour les gradients.

	Nombre de Triangle	Temps de calcul
Fig. 19(b)	4 545	0.03s
Fig. 20(c)	3 912	0.03s
Fourmi (résolution moyenne)	94 953	3.58s
Tête de Fourmi (haute-résolution)	64 756	1.71s

Table 1: *Temps d'exécution d'un "Marching Triangle" non-adaptatif sur un Intel Core 2 Duo (2.4 GHz, 1 coeur utilisé) équipé de 2 Go de mémoire vive.*



(a) (b) (c)

Figure 20: *Comparaison entre différents types de branchement : (a) surfaces de convolution avec $\tau_1+\tau_2=\tau$, (b) surfaces homothétiques avec $\tau_1+\tau_2=\tau$, (c) surfaces homothétiques avec $\tau_1^2+\tau_2^2=\tau^2$.*

7. Conclusion et Travaux Futurs

Les surfaces homothétiques, que nous venons d'introduire, conservent les bonnes propriétés des surfaces de convolution, à savoir enrober de manière lisse un squelette, qui peut être subdivisé sans modification de la forme. Ce faisant, elles évitent les inconvénients de ce modèle : l'épaisseur d'enrobage devient contrôlable et le mélange autosimilaire à toutes les échelles ce qui rend leur manipulation très intuitive. De plus, nous disposons de formules analytiques pour le calcul de f et de son gradient ce qui permet une évaluation efficace.

De nombreuses améliorations sont possibles en vue de l'utilisation de ces surfaces en modélisation interactive : la méthode de maillage serait à améliorer et à paralléliser (CPU ou GPU). Nous pouvons également rechercher des formules analytiques pour les potentiels engendrés par des triangles à poids tri-linéaire, ainsi qu'améliorer la précision de la garantie sur l'épaisseur minimale.

Bien que le phénomène de mélange à distance soit réduit par l'utilisation de noyaux à support compact, ce qu'il manque vraiment à notre nouveau modèle (et manquait déjà aux surfaces de convolution) est un moyen de garantir que la

© REFIG 2013.

surface résultante aura la topologie de son squelette. Cependant, nous noterons que le modèle présenté devrait permettre une analyse plus simple du comportement des mélanges à distance (ces derniers étant les mêmes à toutes les échelles). Nous espérons que cela facilitera la mise en place de garanties sur la topologie de la surface obtenue.

Remerciements

Ces travaux ont été financés par la "Advanced grant EXPRESSIVE" du comité de recherche européen.

Références

[AC02] ANGELIDIS A., CANI M.-P. : Adaptive implicit modeling using subdivision curves and surfaces as skeletons. In *7th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, June, 2002* (juin 2002), pp. 45–52.

[AG01] AKKOUCHE S., GALIN E. : Adaptive implicit surface polygonization using marching triangles. *COMPUTER GRAPHICS FORUM. Vol. 20* (2001), 67–80.

[AGB04] ALEXE A., GAILDRAT V., BARTHE L. : Interactive modelling from sketches using spherical implicit functions. In *Proceedings of the 3rd international conference on Computer graphics, virtual reality, visualisation and interaction in Africa* (2004), AFRIGRAPH '04, pp. 25–34.

[Bar84] BARR A. H. : Global and local deformations of solid primitives. *Special issue : SIGGRAPH84 - Comput. Graph.. Vol. 18* (January 1984), 21–30.

[BBCW10] BERNHARDT A., BARTHE L., CANI M.-P., WYVILL B. : Implicit blending revisited. *Comput. Graph. Forum. Vol. 29*, Num. 2 (mai 2010), 367–375.

[BDS*03] BARTHE L., DODGSON N. A., SABIN M. A., WYVILL B., GAILDRAT V. : Two-dimensional potential fields for advanced implicit modeling operators. *Comput. Graph. Forum* (2003), 23–34.

[Bli82] BLINN J. F. : A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Trans. Graph.. Vol. 1*, Num. 3 (juillet 1982), 235–256.

[BPCB08] BERNHARDT A., PIHUIT A., CANI M.-P., BARTHE L. : Matisse : Painting 2D regions for modeling free-form shapes. In *EUROGRAPHICS Workshop on Sketch-Based Interfaces and Modeling, SBIM 2008, June, 2008* (juin 2008), pp. 57–64.

[BS91] BLOOMENTHAL J., SHOEMAKE K. : Convolution surfaces. In *Proceedings SIGGRAPH '91* (1991), pp. 251–256.

[HAC03] HORNUS S., ANGELIDIS A., CANI M.-P. : Implicit modelling using subdivision curves. *Visual Comput.. Vol. 19*, Num. 2-3 (mai 2003), 94–104.

[HC12] HUBERT E., CANI M.-P. : Convolution surfaces based on polygonal curve skeletons. *Journal of Symbolic Computation. Vol. 47*, Num. 6 (2012), 680 – 699.

[Hub12] HUBERT E. : Convolution surfaces based on polygons for infinite and compact support kernels. *Graphical Models. Vol. 74*, Num. 1 (2012), 1 – 13.

[JT02a] JIN X., TAI C.-L. : Analytical methods for polynomial weighted convolution surfaces with various kernels. *Computer Graphics. Vol. 26*, Num. 3 (2002), 437–447.

[JT02b] JIN X., TAI C.-L. : Convolution surfaces for arcs and quadratic curves with a varying kernel. *The Visual Computer. Vol. 18*, Num. 8 (2002), 530–546.

[KHR02] KARPENKO O., HUGHES J. F., RASKAR R. : Free-form sketching with variational implicit surfaces. *Computer Graphics Forum. Vol. 21* (2002), 585–594.

[MS98] MCCORMACK J., SHERSTYUK A. : Creating and rendering convolution surfaces. *Computer Graphics Forum. Vol. 17*, Num. 2 (1998), 113–121.

[She99] SHERSTYUK A. : Kernel functions in convolution surfaces : A comparative analysis. *The Visual Computer. Vol. 15*, Num. 4 (1999), 171–182.

[SWSJ07] SCHMIDT R., WYVILL B., SOUSA M. C., JORGE J. A. : Shapeshop : sketch-based solid modeling with blobtrees. In *ACM SIGGRAPH 2007 courses* (2007), SIGGRAPH '07.

[WMW86] WYVILL G., MCPHEETERS C., WYVILL B. : Data structure for soft objects. *The Visual Computer. Vol. 2*, Num. 4 (ao˚t 1986), 227–234.

[WO97] WYVILL B., OVERVELD K. V. : Warping as a modelling tool for csg/implicit models. In *Proceedings of the 1997 International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI '97)* (1997), pp. 205–214.

© REFIG 2013.

Afin de démontrer l'additivité de f_S (eq. (13)) par rapport au squelette, nous allons utiliser une formulation indépendante de la paramétrisation (inspirée de la formulation d'un produit de convolution dans $\mathbb{R}^3$, et reprenant une partie des notations de l'état de l'art) :

$$f_S(P) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{i,\mathbf{S}}(Q)}{\tau_S(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_S(Q)}\right) \mathrm{d}Q$$

où le squelette S est défini par :

$$S = (i, \mathbf{S}, \tau_S).$$

L'ensemble $\mathbf{S}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ appartenant au squelette, tandis que i représente la dimension du squelette (ensemble de point, de courbe, de surface, ou de volume). La fonction τ_S définit quant à elle une épaisseur souhaitée autour d'un point donné. La distribution $g_{i,\mathbf{S}}$ est définie de la manière suivante :

$$g_{i,\mathbf{S}}(P) = \delta_{i,\mathbf{S}}(P)$$

où $\delta_{i,\mathbf{S}}$ est la distribution permettant de se ramener à une intégrale correspondant à la dimension du squelette. Pour les squelettes de dimension 1, on a donc $\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{i,\mathbf{S}}(P).f(P)\,\mathrm{d}P = \int_I f(\Gamma(s))\mathrm{d}s$, où Γ est la représentation par abscisse curviligne du squelette S. On remarquera que $g_{3,\mathbf{S}}(P) = \mathbb{1}_{\mathbf{S}}(P)$. Nous souhaitons montrer l'additivité pour deux squelettes de dimension similaire. Prenons deux squelettes S_1 et S_2 de même dimension ($i = i_1 = i_2$) et montrons que si :

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_{i,\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2}(P)\,\mathrm{d}P = 0 \quad (H_1)$$

alors $f_{S_1\cup S_2} = f_{S_1} + f_{S_2}$. Si $i = 3$, on remarquera que l'hypothèse (H_1) est équivalente à $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$ est de mesure nulle.

Etant donné que $\tau_S(Q)$ représente le rayon souhaité autour d'un point Q, la définition logique de $\tau_{S_1\cup S_2}$ et $\tau_{S_1\cap S_2}$ est :

$$\begin{array}{rcl} \tau_{S_1\cup S_2}(Q) & = & \max(\tau_{S_1}(Q), \tau_{S_2}(Q)) \\ \tau_{S_1\cap S_2}(Q) & = & \min(\tau_{S_1}(Q), \tau_{S_2}(Q)) \end{array}$$

Montrons que $f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P)$ est nulle sous l'hypothèse (H_1). On peut tout d'abord remarquer que $\mathbf{S}_1 \setminus \mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_2 \setminus \mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$ forme une partition de $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$ (et que les distributions $g_{i,\mathbf{S}_1}$, $g_{i,\mathbf{S}_2}$ et $g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}$ sont nulles sur $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2)$) ce qui implique :

$$\begin{array}{rcl} f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P) = & & \int_{\mathbf{S}_1\setminus\mathbf{S}_2} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_1}(Q)}{\tau_{S_1}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1}(Q)}\right) - \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q \\ & + & \int_{\mathbf{S}_2\setminus\mathbf{S}_1} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_2}(Q)}\right) - \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q \\ & + & \int_{\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_1}(Q)}{\tau_{S_1}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1}(Q)}\right) + \frac{g_{i,\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_2}(Q)}\right) - \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q. \end{array}$$

Or pour tout point $Q \in \mathbf{S}_1 \setminus \mathbf{S}_2$ (et inversement), on a $g_{i,\mathbf{S}_1}(Q) = g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)$ et $\tau_{S_1}(Q) = \tau_{S_1\cup S_2}(Q)$ ce qui implique :

$$\int_{\mathbf{S}_1\setminus\mathbf{S}_2} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_1}(Q)}{\tau_{S_1}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1}(Q)}\right) - \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q = 0,$$

on a donc :

$$f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P) = \int_{\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_1}(Q)}{\tau_{S_1}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1}(Q)}\right) + \frac{g_{i,\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_2}(Q)}\right) - \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q.$$

Toute les quantités manipulées étant positives ou nulles, cela revient à :

$$|f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P)| \leq \int_{\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2} \left(\frac{g_{i,\mathbf{S}_1}(Q)}{\tau_{S_1}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1}(Q)}\right) + \frac{g_{i,\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_2}(Q)}\right) + \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right)\right) \mathrm{d}Q.$$

Or sur $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$, on a $g_{i,\mathbf{S}_1}(Q) = g_{i,\mathbf{S}_2}(Q) = g_{i,\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2}(Q) = g_{i,\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2}(Q)$, $\tau_{S_1\cap S_2}(Q) \leq \tau_{S_1}(Q) \leq \tau_{S_1\cup S_2}(Q)$ et $\tau_{S_1\cap S_2}(Q) \leq \tau_{S_2}(Q) \leq \tau_{S_1\cup S_2}(Q)$, ce qui combiné au fait que K est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$|f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P)| \leq 3 \int_{\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2} \frac{g_{i,\mathbf{S}_1\cap\mathbf{S}_2}(Q)}{\tau_{S_1\cap S_2}(Q)^i} K\left(\frac{\|P-Q\|}{\tau_{S_1\cup S_2}(Q)}\right) \mathrm{d}Q$$

et grâce à l'hypothèse (H_1), on a :

$$|f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) - f_{S_1\cup S_2}(P)| \leq 0$$

qui conduit à :

$$f_{S_1}(P) + f_{S_2}(P) = f_{S_1\cup S_2}(P) \text{ sous la condition } (H_1).$$

Table 2: ***Démonstration de l'additivité des surfaces implicites homothétiques par rapport au squelette.***

© REFIG 2013.

Noyau	*Formule*
Cauchy	$\mathcal{C}_{g,i}(P) = \|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i-1}}{((l^2+\Delta\tau^2)t^2-2(uv(P)-\Delta\tau\tau_0)t+d(P)^2+\tau_0^2)^{\frac{i}{2}}}\, dt$ $\vec{\nabla}\mathcal{C}_{g,i}(P) = \frac{i}{\sigma^2}\|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i-1}}{((l^2+\Delta\tau^2)t^2-2(uv(P)-\Delta\tau\tau_0)t+d(P)^2+\tau_0^2)^{\frac{i+2}{2}}}\, \overrightarrow{h}(t,P)\, dt$
Inverse	$\mathcal{P}_{g,i}(P) = \|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i-1}}{(l^2t^2-2\,uv(P)\,t+d(P)^2)^{\frac{i}{2}}}\, dt$ $\vec{\nabla}\mathcal{P}_{g,i}(P) = \frac{i}{\sigma^2}\|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i-1}}{(l^2t^2-2\,uv(P)\,t+d(P)^2)^{\frac{i+2}{2}}}\, \overrightarrow{h}(t,P)\, dt$
Polynomial Compact	$\mathcal{R}_{g,i}(P) = \|\overrightarrow{AB}\| \int_{l1}^{l2} \frac{((\Delta\tau^2-l^2)t^2-2(-\Delta\tau\tau_0-uv(P))t+\tau_0^2-d(P)^2)^{\frac{i}{2}}}{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i+1}}\, dt$ $\vec{\nabla}\mathcal{R}_{g,i}(P) = \frac{i}{\sigma^2}\|\overrightarrow{AB}\| \int_{l1}^{l2} \frac{((\Delta\tau^2-l^2)t^2-2(-\Delta\tau\tau_0-uv(P))t+\tau_0^2-d(P)^2)^{\frac{i-2}{2}}}{(\Delta\tau\, t+\tau_0)^{i+1}}\, \overrightarrow{h}(t,P)\, dt$

Table 3: ***Intégrales pour les segments homothétiques à variation de rayon linéaire. Nous utilisons les variables intermédiaires suivantes :*** $l^2 = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2}{\sigma^2}$, $uv = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{\sigma^2}$, $d(P)^2 = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|^2}{\sigma^2}$ ***et*** $\overrightarrow{h}(t,P) = \overrightarrow{AB}\, t - \overrightarrow{AP}$. ***Dans le cas du noyau polynomial compact,*** l_1 ***et*** l_2 ***correspondent aux coordonnées paramètriques des points du segment à la limite du support du noyau.***

	f				∇f				$f, \nabla f$			
	$+$	$*$	$/$	$(\sqrt{},atan,\ln)$	$+$	$*$	$/$	$(\sqrt{},atan,\ln)$	$+$	$*$	$/$	$(\sqrt{},atan,\ln)$
Homothétique Cauchy 4	29	38	4	(1,2,1)	38	62	6	(1,2,0)	47	81	6	(1,2,1)
Homothétique Inverse 3	25	33	5	(5,0,1)	32	58	5	(2,0,0)	40	71	5	(5,0,1)
Homothétique Comp. Polynom. 4	43	82	3	(0,0,1)	37	67	3	(0,0,0)	50	102	3	(0,0,1)
Homothétique Comp. Polynom. 6	71	144	3	(0,0,1)	62	125	3	(0,0,0)	83	172	3	(0,0,1)
Classique Inverse 3 Linéaire	18	20	4	(2,0,0)	26	46	4	(2,0,0)	29	50	4	(2,0,0)
Classique Cauchy 4 Linéaire	21	26	4	(1,2,0)	29	40	6	(1,2,0)	32	58	6	(1,2,0)
Classique Cauchy 4 Cubique	27	34	4	(1,2,1)	36	59	6	(1,2,0)	45	77	6	(1,2,1)

Table 4: ***Nombres d'opérations nécessaires pour les évaluations des formules analytiques associées à chaque noyaux.***

© REFIG 2013.

Noyaux	Termes initiaux		Relation de récurrence
Cauchy	$h_2(\tau_c,d) = \pi\sigma \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{\tau_c\sigma}\right)^2+1}}$	$h_3(\tau_c,d) = 2\sigma \frac{1}{\left(\frac{d}{\tau_c\sigma}\right)^2+1}$	$h_i(\tau_c,d) = \frac{i-3}{i-2} \frac{1}{\left(\frac{d}{\tau_c\sigma}\right)^2+1} h_{i-2}(\tau_c,d)$
Inverse	$h_2(\tau_c,d) = \pi\sigma \left(\frac{\tau_c\sigma}{d}\right)$	$h_3(\tau_c,d) = 2\sigma \left(\frac{\tau_c\sigma}{d}\right)^2$	$h_i(\tau_c,d) = \frac{i-3}{i-2} \left(\frac{\tau_c\sigma}{d}\right)^2 h_{i-2}(\tau_c,d)$
Compact Polynomial	$h_0(\tau_c,d) = 2\sigma\sqrt{1-\left(\frac{d}{\tau_c\sigma}\right)^2}$		$h_i(\tau_c,d) = \frac{i}{i+1} \left(1-\left(\frac{d}{\tau_c\sigma}\right)^2\right) h_{i-2}(\tau_c,d)$

Table 5: ***Formule de récurrence pour le calcul du potentiel*** $h(\tau_c,d)$ ***pour un point situé à une distance*** d ***d'une droite de poids constant*** τ_c ***dans le modèle homothétique avant normalisation du potentiel (eq. 13).***

© REFIG 2013.