Quelques formes normales non linéaires plates

Soraya Bououden, Driss Boutat, Frédéric Kratz, Jean-Pierre Barbot

Quelques formes normales non linéaires plates

Soraya Bououden[1], Driss Boutat[1], Fréderic Kratz [1], Jean-Pierre Barbot[2]

[1]ENSI-Bourges, Institut Prisme, 88 boulvard Lahitolle 18020
Bourges cedex, France.
soria.bouden,driss.boutat,frederic.kratz@ensi-bourges.fr

[2] ECS ENSEA
6 Avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, et EPI ALIEN, INRIA, France
jean-pierre.barbot@ensea.fr

Résumé— **Cet article propose quelques formes "normales" non linéaires plates. L'idée est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit équivalent par difféomorphisme à un système que l'on sait plat. Ainsi nous obtenons des conditions suffisantes qui permettent de conclure si un système non linéaire est plat.**

I. Introduction

La commande d'un système à non minimum de phase est un problème délicat aussi bien pour les systèmes non linéaires que linéaires. Ce problème peut être résolu par le choix de nouvelles sorties qui rendent le système à minimum de phase, la démarche logique étant de passer d'un problème de commande mal posé à un problème bien posé. En 1992, M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin et P. Rouchon ([11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]) ont introduit le concept de sorties plates, ces sorties garantissent que le problème sera bien posé en terme de commande et de génération de trajectoire [35]. Mais le concept de sorties plates peut avoir d'autres applications (voir [32], [43], [44], [45], [46], [47]). En effet, un problème de détection et d'isolation de défauts ainsi que la commande tolérante aux défauts, peuvent dans certains cas, être vu comme un problème d'inversion à gauche (sorties/défauts) qui devient un problème bien posé si les sorties sont plates [27]. De même, en communication privée par synchronisation de systèmes chaotiques, il est possible d'utiliser le concept de platitude pour bien choisir la ou les lignes de transmissions (sorties). Enfin, si sur un système mal modélisé, on connaît uniquement les sorties plates et les degrés relatifs qui leurs sont associés, il est possible de faire de la commande sans modèle ou de la commande par mode glissant [29]. Dans tous les cas énumérés ci-dessus, le problème revient alors à déterminer si le système est plat et si la réponse est positive à trouver des sorties plates. Ce problème de détermination de platitude est un problème encore largement ouvert, bien que des travaux importants sur le sujet ont déjà été fait, citons par exemple une approche par les différentielles extérieurs où les systèmes dynamiques sont vus comme des systèmes Pfaffian dans un espace de jets approprié (voir [1], [7], [8], [30], [33], [44]), ainsi la platitude a été reliée à la notion d'équivalence absolue introduite par E. Cartan [4]. On trouve également une approche géométrique sous le nom de l'équivalence de Lie-Bäcklund mise en évidence en [12], [14], [15], [26].
Tous ces travaux sur la platitude ont donné de nombreux résultats. Ainsi, on sait que les systèmes dynamiques linéarisables par retour d'état statique ou dynamique sont plats. D'ailleurs, la notion de platitude peut être vue comme une sorte de généralisation de la linéarisation étudiée par exemple dans ([23], [36], [37], [38],[39], [40],[41] [42]). Il est aussi connu [5] qu'un système dynamique affine, commandable et de codimension 1 est plat.

Dans cet article, comme dans sa première version [21], nous allons utiliser le concept de forme normale pour déterminer si un système est plat. Rappelons que le concept de forme normale a été introduit par H. Poincaré pour l'étude de la stabilité des systèmes et utilisé par la suite par [23], [24], [25] pour déterminer si un système est linéarisable, stabilisable, observable. Dans la même logique, la classe des formes normales considérées est ici reliée à la relation d'équivalence par difféomorphisme aux systèmes zéro plat, c'est-à-dire aux systèmes plats qui ont une expression de la sortie plate uniquement en fonction des états du système. Il est à noter que l'on trouve dans [30], une caractérisation des systèmes k-plats par une approche de type Cartan-Kähler .

La suite de l'article est organisée de la façon suivante : la section 2 est consacrée aux notations et quelques définitions. La section 3 décrit les classes de systèmes 0-plats étudiés, ces classes vont être caractérisées par leurs formes normales et les systèmes non linéaires équivalent à une de ces formes normales seront représentés par celle-ci. Dans la section 4 des conditions géométriques seront fournies pour caractériser les systèmes qui appartiennent à la classe décrite dans la section 3.

II. Notations et Definitions

Commençons par définir la notion de platitude pour un système non linéaire dont le modèle est sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

où $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ et f un champs de vecteurs suffisamment dérivable sur $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ qui régit la dynamique du système en question.

Définition 1 Le système dynamique (1) est plat s'il existe m fonctions $y = (y_1, ..., y_m)^T$ appelées les sorties différentiellement plates telles que :

1. La sortie plate soit uniquement une fonction de l'état x et de l'entrée u et ses dérivées $u^{(i)}$, c'est-à-dire $y(x, u, \dot{u}, ..., u^{(r_1)})$.

2. L'état puisse s'écrire comme une fonction des sorties plates et leurs dérivées, c'est-à-dire $x = \varphi(y, \dot{y}, ..., y^{(r_2)})$.

3. L'entrée puisse s'écrire comme une fonction des sorties plates et leurs dérivées, c'est-à-dire $u = \gamma(y, \dot{y}, ..., y^{(r_2+1)})$.

Dans cet article, sans perdre en généralité, les systèmes considérés seront affines de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \quad (2)$$

Remarque 1 : un système de la forme (1) peut se réécrire sous la forme (2) en ajoutant à chaque entrée un intégrateur.
De même, et ici sans aucune perte de généralité, nous allons supposer que :

Hypothèses 1 :

$$G = [g_1, ..., g_m] \text{ est de rang } m.$$

L'objectif de ce travail est de mettre en évidence une classe de systèmes non-linéaires dont les sorties plates ne dépendent que des variables d'état x. Ceci signifie que dans le point 1 de la définition 1, nous avons seulement l'écriture $y(x)$. Dans la littérature, ces systèmes sont nommés systèmes 0-plat [30].
On rappelle que les systèmes dynamiques 0-plat les plus connus sont les systèmes dynamiques linéarisable par retour d'état statique ([23],[28]).
Une autre classe, bien connue, de systèmes dynamiques 0-plat est celle des systèmes dynamiques affines et commandables de codimension 1, c'est-à-dire $m = n - 1$ ([26], [35]).

III. Classes de Systèmes Dynamiques 0-plat

Dans cette section, nous présentons des classes de systèmes 0-plat, représentées par leur forme normale, celles-ci comprennent le cas le plus connu des systèmes affines commandable de co-codimension 1. Pour cela, nous ferons l'hypothèse que le système dynamique affine (2) est commandable. Plus précisément, nous allons supposer qu'il existe une liste de m entiers : $\nu_1 \geq \nu_2 \geq ... \geq \nu_m$ tels que :

$$\nu_1 + ... + \nu_m = n,$$

et la distribution

$$\Delta = span\{ad_f^j g_i \text{ pour } 0 \leq j \leq \nu_i\}$$

est de dimension n, où $ad_f g_i = [f, g_i]$ est le crochet de Lie de f par g_i et $ad_f^k g_i = [ad_f^{k-1} g_i, g_i]$ avec la convention classique : $ad_f^0 g_i = g_i$. Pour tout $1 \leq j \leq m$, on pose $z_j = (z_{1,j}, ..., z_{\nu_j,j})^T$ et on définit les dynamiques suivantes par bloc :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{z}_{1,j} = & z_{2,j} + \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{1,j}^l(\xi_1) u_l \\ \dot{z}_{2,j} = & z_{3,j} + \sum\limits_{l=2}^{m} \alpha_{2,j}^l(\xi_2) u_l \\ ... & ... \\ \dot{z}_{\nu_j,j} = & a_j(\xi_{\nu_j}) + \sum\limits_{l=1}^{m} \alpha_{\nu_j,j}^l(\xi_{\nu_j}) u_l \end{array} \right. \quad (3)$$

où $\xi_i = (z_{s,k},\ 1 \leq k \leq m$ et $1 \leq s \leq \min(i+1, \nu_k))$ et si pour un indice $1 \leq j \leq m$, on a $\nu_j = 1$ alors on garde que la dernière equation du système dynamique (3).

D'après les équations du système dynamique (3), les fonctions a_j et $\alpha_{i,j}^l$ satisfont les propriétés suivantes :

Propriétés 1 :

$a)$ Pour $1 \leq k \leq m$, les fonctions a_k dépendent seulement des variables suivantes :
– $z_{i,j}$ tel que $\nu_j > \nu_k$ et $1 \leq i \leq \nu_k + 1$
– $z_{i,j}$ tel que $\nu_j \leq \nu_k$ et $1 \leq i \leq \nu_j$
$b)$ Les fonctions $\alpha_{i,j}^k$ sont définies par :
– si $\nu_k > i$, alors $\alpha_{i,j}^k = 0$,
– si $\nu_k \leq i$, alors $\alpha_{i,j}^k$ dépend seulement des variables suivantes :
  – $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq \nu_l$ si $\nu_l \leq i \leq \nu_j$,
  – $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq i+1$ si $i < \nu_l \leq \nu_j$.
– $\alpha_{\nu_j,j}^j \neq 0$ sur $\mathcal{X}$

Remarque 2 :
$a)$ Pour un indice i fixe et pour tout $1 \leq j \leq m$, la dynamique $(\dot{z}_{i,j})_{\nu_j \geq i}$ dépend des variables :

1. u_k pour $\nu_k \leq i$
2. $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq \nu_l$ si $\nu_l \leq i \leq \nu_j$,
3. $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq i+1$ si $i < \nu_l \leq \nu_j$.

Ainsi, pour $1 \leq j \leq m$ la dynamique $\dot{z}_{1,j}$ dépend seulement de $(u_k)_{\nu_k=1}$, $(z_{1,l})_{1 \leq l \leq m}$ et $(z_{2,l})_{\nu_l \geq 2}$.
La dynamique $(\dot{z}_{2,j})_{\nu_j \geq 2}$ dépend seulement de : $(u_k)_{\nu_k=1}$, $(u_k)_{\nu_k=2}$, $(z_{1,l})_{1 \leq l \leq m}$, $(z_{2,l})_{1 \leq l \leq m}$ et $(z_{3,l})_{\nu_l \geq 3}$
et ainsi de suite.
$b)$ Nous pouvons utiliser le fait que $\alpha_{\nu_j,j}^j \neq 0$ sur $\mathcal{X}$ pour avoir $a_{\nu_j} = 0$ et $u_j = 1$. En effet, nous considérons le retour d'état statique suivant :

$$u_j = \frac{1}{\alpha_{\nu_j,j}^j}(v_j - a_{\nu_j}).$$

Interprétation géométrique
Pour donner une interprétation géométrique des conditions ci-dessus, commençons par écrire le système dynamique (3) sous la forme compacte suivante :

$$\dot{z} = \overline{f} + \sum_{k=1}^{m} \overline{g}_k u_k, \quad (4)$$

avec

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} \overline{f}_1 & \overline{f}_2 & ... & \overline{f}_m \end{pmatrix}^T$$

où pour $1 \leq j \leq m$ nous avons :

$$\overline{f}_j = \begin{pmatrix} z_{2,j} & z_{3,j} & ... z_{\nu_j,j} & a_j \end{pmatrix}^T.$$

Pour $1 \leq k \leq m$ nous posons :

$$\overline{g}_k = \begin{pmatrix} \overline{g}_1^k & \overline{g}_2^k & ... & \overline{g}_m^k \end{pmatrix}^T$$

où pour $1 \leq j \leq m$

$$\overline{g}_j^k = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j}^k & \alpha_{2,j}^k & ... & \alpha_{\nu_j,j}^k \end{pmatrix}^T.$$

Grâce au point (b) des propriétés 1, nous avons :

$$\overline{g}_j^k = 0 \text{ si } \nu_j < \nu_k, (1 \leq k \leq m)$$

Ce résultat nous donne les caractéristiques géométriques du système (3) écrit sous sa forme compact (4).

Proposition 1 :

– La distribution suivante :

$$\overline{\Delta} = span\{ad_f^k \overline{g}_i, \text{ pour tout } \nu_i \geq 2 \text{ et } 0 \leq k \leq \nu_i - 2\},$$

est involutive.

– le point (b) des propriétés (1), est équivalent au fait suivant :
pour $1 \leq k \leq m$ avec $\nu_k \geq 2$ et pour les indices l tels que : $\nu_l < \nu_k$ nous avons pour $0 \leq s \leq \nu_k - \nu_l - 1$:

$$[\overline{g}_l, ad_f^{\nu_k - \nu_l - 1 - s}\overline{g}_k] \in span\{ad_f^j \overline{g}_i \text{ pour } j = 0 : \nu_i - \nu_l - s \text{ et } j \geq 0\}.$$

Preuve 1 : La deuxième partie de la proposition est évidente. La première est due au fait que le dual de la distribution Δ est la codistribution :

$$\overline{\Delta}^T = \text{span}\{dz_{1,j}\}_{1 \leq j \leq m}.$$

qui est engendrée par des formes différentielles exactes donc elle est involultive. Cela est compatible avec la forme dynamique (3) et le fait que la fonction a_j satisfait le point (a) des propriétés (1).

Remarque 3 :
En utilisant un changement de coordonnées linéaire, nous pouvons supposer que : $a_k = O^2(z)$ et pour $\alpha_{i,j}^k$ tel que $i \neq \nu_j$ nous avons $\alpha_{i,j}^k = O^1(z)$, ou $O^2(z)$, $O^1(z)$ sont les termes d'ordre 2 et 1 respectivement en z.
Ainsi, nous avons le résultat préliminaire suivant.

Proposition 2 : Le système dynamique (3) est localement 0-plat et les variables $(z_{1,j})_{1 \leq j \leq m}$ sont des sorties plates.

Preuve 2 : Grâce au point (b) des propriétés (1), pour un indice fixe $1 \leq s \leq \max_{j=1}^m(\nu_j)$, les dynamiques suivantes :

$$\{\dot{z}_{s,j}, \;\; 1 \leq j \leq m \text{ avec } s \leq \nu_j\}$$

dependent seulement de $\mathfrak{S}_s$ l'ensemble des variables suivantes :

1. u_k pour $\nu_k \leq i$,
2. $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq \nu_l$ si $\nu_l \leq i \leq \nu_j$,
3. $z_{s,l}$ pour $1 \leq s \leq i+1$ si $i < \nu_l \leq \nu_j$.

Nous allons montrer que : $y_j = z_{1,j}$ pour $1 \leq j \leq m$ sont des sorties plates. Pour cela, nous commençons par écrire toutes les variables dans $\mathfrak{S}_1$ au moyen de $y_j = z_{1,j}$ et $\dot{y}_j = \dot{z}_{1,j}$. Or, dans $\mathfrak{S}_1$ nous connaissons déjà les variables $(y_j = z_{1,j})_{1 \leq j \leq m}$. Nous avons alors à déterminer toutes les variables d'état $(z_{2,j})_{\nu_j \geq 2}$: $(u_k)_{\nu_k = 1}$.

– Pour cela, nous utilisons le théorème des fonctions implicites pour calculer les variables $(z_{2,j})_{\nu_j \geq 2}$ et les entrées $(u_k)_{\nu_k=1}$, à partir des dynamiques $\dot{z}_{1,l}$ pour $1 \leq l \leq m$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,j} &- z_{2,j} - \sum_{l=r+1}^{m} \alpha_{1,l}^j u_l = 0 \text{ si } \nu_j \geq 2 \\ \dot{z}_{1,j} &- a_j - \sum_{l=r+1}^{m} \alpha_{1,l}^j u_l = 0 \text{ si } \nu_j = 1, \end{aligned}$$

où $\alpha_{1,l}^j$ dépend seulement de $(z_{1,l})_{1 \leq l \leq m}$ et $(z_{2,l})_{\nu_l \geq 2}$. Donc, nous devons calculer les m variables $(z_{2,l})_{\nu_l \geq 2}$, $(u_j)_{\nu_j = 1}$. La différentielle de cette équation par $\frac{\partial}{\partial(z_{2,j}, u_k)}$ est égale à $I + O^1(z,u)$ qui est localement inversible (ici nous avons utilisé la remarque (2) et la proposition (2)). Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} z_{2,l} &= \varphi_l(y_k, \dot{y}_k) \text{ pour } \nu_l \leq 2 &(5)\\ u_k &= \gamma_k(y_k, \dot{y}_k) \text{ pour } \nu_k = 1 &(6) \end{aligned}$$

où $y_k = z_{1,k}$ et $1 \leq k \leq m$. Ainsi, nous connaissons toutes les variables dans $\mathfrak{S}_1$.

– Dans la deuxième étape, nous injectons les expressions (5)-(6) dans la dynamique $(\dot{z}_{2,j})_{\nu_j \geq 2}$. Puis, nous utilisons le même argument pour calculer $(z_{3,l})_{\nu_l \geq 3}$ et u_k pour les indices k tel que $\nu_k = 2$ (si $\nu_k > 2$), ainsi, nous devons seulement calculer $(z_{3,l})_{\nu_l \geq 3}$. Finalement, nous obtenons toutes les variables dans $\mathfrak{S}_2$

– Maintenant, par induction nous supposons que nous avons calculé $\mathfrak{S}_s$, et de la dynamique $(\dot{z}_{s+1,j})_{s+1 \leq \nu_j}$ nous calculons les variables dans $\mathfrak{S}_{s+1}$ en utilisant les mêmes arguments que précédemment.

Donnons un exemple illustratif pour montrer la procédure de calcul proposée dans la démonstration ci-dessus.

Exemple 1 : Considérons le système dynamique suivant :

$$\Sigma_1 \left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_{1,1} = z_{2,1} \\ \dot{z}_{2,1} = z_{3,1} + \frac{z_{2,1}}{z_{2,2}-1} u_2 \\ \dot{z}_{3,1} = (z_{2,2} - 1)\, u_1 + \frac{z_{3,1}}{z_{2,2}-1} u_2 \\ \dot{z}_{1,2} = z_{2,2} \\ \dot{z}_{2,2} = u_2 \end{array} \right.$$

Nous donnerons la procédure pour calculer toutes les variables d'états et les entrées de $y_1 = z_{1,1}$ et $y_2 = z_{1,2}$. Pour cela, considérons la sous-dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{1,1} - z_{2,1} = 0 \\ \dot{z}_{1,2} - z_{2,2} = 0 \end{array} \right.$$

nous obtenons $z_{2,1} = \dot{y}_1$ et $z_{2,2} = \dot{y}_2$.
Maintenant, la dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_{2,1} = z_{3,1} + \frac{z_{2,1}}{z_{2,2}-1} u_2 \\ \dot{z}_{2,2} = u_2 \end{array} \right.$$

donne $u_2 = \ddot{y}_2$ et $z_{3,1} = y_1^{(2)} - \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2 - 1}\ddot{y}_2$.
Finalement, de la troisième équation du système dynamique nous obtenons :

$$\dot{z}_{3,1} - (z_{2,2} - 1)\, u_1 - \frac{z_{3,1}}{z_{2,2} - 1} u_2 = 0$$

nous en déduisons

$$u_1 = \frac{1}{\dot{y}_2 - 1}\left(y_1^{(3)} - \frac{\partial \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2-1}\ddot{y}_2}{\partial t} - \frac{y_1^{(2)} - \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2-1}\ddot{y}_2}{\dot{y}_2 - 1} y_2^{(2)}\right).$$

IV. Conditions Géométriques de la mise sous Formes structurellement Plates

Dans cette section, nous donnerons les conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour l'existence du difféomorphisme local qui transforme un système dynamique affine de la forme (2) sous la forme normale (3).
Pour cela, nous supposons qu'il existe des entiers $\nu_1 \geq \nu_2 \geq ... \geq \nu_m$ tels que :
1. $\sum_{i=1}^{m} \nu_i = n$,
2. $\Delta_= \{ad_f^k g_i \text{ pour } i = 1 : m \text{ et } 1 \leq k \leq \nu_k - 1\}$ est de rang n sur $\mathcal{X}$.
Considèrons aussi la distribution suivante :

$$\overline{\Delta} = span\{ad_f^k g_i, \text{ pour tout } \nu_i \geq 2 \text{ et } 0 \leq k \leq \nu_i - 2\}$$

Théorème 1 : Il existe un difféomorphisme local qui transforme le système dynamique (2) sous la forme (3) si et seulement si :
1) Δ est involutive
2) Pour $1 \leq k \leq m$ avec $\nu_k \geq 2$ et pour l'indice l tel que : $\nu_l < \nu_k$ nous avons pour $0 \leq s \leq \nu_k - \nu_l - 1$:

$$[g_l, ad_f^{\nu_k - \nu_l - 1 - s} g_k] \in span\{ad_f^j g_i \text{ pour } j = 0 : \nu_i - \nu_l - s \text{ et } \nu_i - \nu_l \geq s\}.$$

Avant de prouver le théorème ci-dessus, nous allons énoncer un corollaire direct.

Corollaire 1 : Si $\nu_j \leq 2$ pour tout $j = 1 : m$, alors il existe un difféomorphisme local qui transforme le système dynamique (2) sous la forme normale (3) si et seulement si la distribution

$$\Delta = \{g_j \text{ pour } 1 \leq j \leq m \text{ tel que } \nu_j = 2\}$$

est involutive. (Ainsi, nous n'avons pas besoin de la condition (1) du théorème (1)).
En particulier le système dynamique $m = n - 1$ de codimension 1 est plat résultat bien connu [5].

Remarque 4 :
Dans le cas mono-entrée $m = 1$, nous avons seulement la condition (1) du théorème 1 et cette condition est exactement la condition de linéarisation au moyen d'un difféomorphisme et d'un retour d'état statique.

Maintenant, nous prouverons le théorème 1.

Preuve 3 : La proposition 1 montre que les conditions (1),(2) du théorème 1 sont nécessaires.
Il reste donc à montrer qu'elles sont suffisantes. Pour cela, nous assumons que $\nu_i \geq 2$ pour $i = 1 : r$ et $\nu_i = 1$ de $r + 1 \leq i \leq m$. Ainsi $dim\Delta = \nu_1 + ... + \nu_r - r$ de codimension m.
Si $\overline{\Delta}$ est involutive alors, il existe m fonctions indépendantes $h_1, ..., h_r, h_{r+1}, ..., h_m$ telles que :

1. $dh_i(\Delta) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$,
2. $dh_i(ad_f^{\nu_i - 1} g_i) \neq 0$ sur $\mathcal{X}$ pour $1 \leq i \leq m$.

Maintenant, considérons les nouvelles variables suivantes :

$$z_{i,j} = L_f^{i-1} h_j \text{ pour } j = 1 : m \text{ et } 1 \leq i \leq \nu_i.$$

et posons $z = (z_j)_{1 \leq j \leq m}$ avec pour $1 \leq j \leq m$

$$z_j = (z_{i,j})_{1 \leq i \leq \nu_j}.$$

Puis, considérons le difféomorphisme $z = \phi(x)$, et pour $1 \leq s \leq m$, nous notons par $\overline{g_s} = \phi_* g_s$, $\overline{g_s} = (\alpha_j^s)_{1 \leq j \leq m}$ où $\alpha_j^s = (\alpha_{i,j}^s)_{1 \leq i \leq \nu_s}$.
Par définition des nouvelles coordonnées pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq \nu_j$, nous avons :
$dz_{i,j}\overline{g_s} = 0$ pour $\nu_s - i > 0$. Ainsi, $\alpha_{i,j}^s = 0$ pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq \nu_j$ tel que $\nu_s - i > 0$.
Finalement, nous pouvons en conclure que $\phi_* f$ est de la forme (3) .

De plus, par les conditions d'involutivité, les fonctions a_k vérifient le point (a) des propriétés 1.
Maintenant, les conditions (2) du théorème 1 suivantes :

$$[g_l, ad_f^{\nu_k - \nu_l - 1 - s} g_k] \in span\{ad_f^j g_i \text{ pour } j = 0 : \nu_i - \nu_l - s \text{ et } \nu_i - \nu_l \geq s\},$$

impliquent que $\alpha_{p,q}^l$ avec $p \leq \nu_q$ ne dépendent pas des variables $z_{\nu_l + s + 1, k}$ pour $p \leq \nu_l + s$. Donc, le point (b) des propriétés 1 est vérifié.

Cas 1 : Codimension 2
Nous allons analyser le cas de codimension 2, ainsi $m = n - 2$.
En ré-ordonnant $(g_j)_{1 \leq j \leq m}$, nous avons deux cas :
1. $\nu_1 = 2$ et $\nu_2 = 2$
2. $\nu_1 = 3$.

Le premier cas est semblable au corollaire (1). Ainsi, nous devons seulement vérifier l'involutivité de la distribution $\overline{\Delta} = span\{g_1, g_2\}$.
Pour le deuxième cas, nous devons vérifier deux conditions :
– distribution $\overline{\Delta} = \{g_1, ad_f g_1\}$ est involutive, et
– pour tout $2 \leq k \leq m$ nous devons avoir $[g_k, g_1] \in span\{g_1, ad_f g_1\}$.

Exemple 2 : Considérons l'exemple issu de [30] modifié pour une question de régularité :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_4 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = x_5 \\ \dot{x}_4 = u_1 \\ \dot{x}_5 = u_2 \end{cases}$$

Un calcul simple montre que la distribution Δ est engendrée par les champs de vecteurs suivants :

$$g_1 = \tfrac{\partial}{\partial x_4},$$
$$ad_f g_1 = -\tfrac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \tfrac{\partial}{\partial x_1}$$
$$ad_f^2 g_1 = (1 - x_5) \tfrac{\partial}{\partial x_1}$$
$$g_2 = \tfrac{\partial}{\partial x_5} \text{ et } ad_f g_2 = -\tfrac{\partial}{\partial x_3}.$$

Ainsi, $dim\Delta = 5$ dans un voisinage ouvert de 0 tel que $x_5 \neq 1$.

De plus, la distribution

$$\overline{\Delta} = span\,\{g_1, ad_f g_1, g_2\}$$

est involutive. Ainsi, la condition (1) du théorème 1 est vérifiée. La condition (2) est aussi satisfaite, parce que g_2 commute avec g_1 et $ad_f g_1$:

$$[g_2, g_1] = [g_2, ad_f g_1] = 0.$$

Maintenant, nous allons donner le difféomorphisme. Pour cela, il est facile de voir que la codistribution $\overline{\Delta}^T$ est engendrée par dh_1 et dh_2 où $h_1 = x_3 x_2 - x_1$ et $h_2 = x_3$. Donc, nous avons le difféomorphisme suivant :

$$\begin{gathered} z_{1,1} = h_1 \\ z_{2,1} = L_f h_1 = (x_5 - 1)\, x_2 \\ z_{3,1} = L_f^2 h_1 = (x_5 - 1)\, x_4 \\ z_{1,2} = h_2 \\ z_{2,2} = L_f h_2 = x_5 \end{gathered}$$

Celui-ci transforme le système dynamique en la forme 0-plate suivante étudiée dans exemple 1 :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = z_{2,1} \\ \dot{z}_{2,1} = z_{3,1} + \frac{z_{2,1}}{z_{2,2}-1} u_2 \\ \dot{z}_{3,1} = (z_{2,2} - 1)\, u_1 + \frac{z_{3,1}}{z_{2,2}-1} u_2 \\ \dot{z}_{1,2} = z_{2,2} \\ \dot{z}_{2,2} = u_2 \end{cases}$$

Remarque 5 : – Les spécialistes de la linéarisation par retour d'état dynamique vont remarquer que le système ci-dessus est linéarisable. Mais ici on gagne par le fait que l'on ne dérive pas u.

– Si, au lieu de prendre la première dynamique $\dot{x}_1 = x_2 + x_4 x_3$ nous prenons la dynamique $\dot{x}_1 = x_4 x_3$ comme dans [30]. Alors dans ce cas, les mêmes sorties plates restent valable $dy_1(ad_f^3 g_1) \neq 0$ et $dy_2(ad_f^2 g_2) \neq 0$ sur un sous ensemble ouvert dense.

Donnons un autre exemple pour mettre en évidence la deuxième condition dans le théorème.

Exemple 3 : Considérons dans $\mathbb{R}^6$ le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta u_2 + ((1 + x_3)\beta + x_5)\, u_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_4 u_2 + x_3 u_3 \\ \dot{x}_3 = u_1 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = u_2 + x_3 u_3 \\ \dot{x}_6 = x_3 x_5 e^{x_4} + e^{x_4} u_1 + u_3 \end{cases}$$

où $\beta = x_6 - x_3 e^{x_4}$.

Les générateurs de la distribution Δ sont :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial}{\partial x_3} + e^{x_4} \frac{\partial}{\partial x_6} \\ ad_f g_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_2},\ ad_f^2 g_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ g_2 &= \frac{\partial}{\partial x_5} + \beta \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ ad_f g_2 &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 e^{x_4} \frac{\partial}{\partial x_6} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ g_3 &= \frac{\partial}{\partial x_6} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_5} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_5 + (1 + x_3)\beta) \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$[g_2, g_1] = 0 \in span\{g_1, ad_f g_1\}$$

$$[g_3, g_1] = -\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_5} - \beta \frac{\partial}{\partial x_1} \in span\{g_1, ad_f g_1, g_2\}$$

Ainsi, la condition (2) du théorème 1 est vérifiée.
La condition (1) du théorème est également validée. En effet, la distribution

$$\overline{\Delta} = span\{g_1, ad_f g_1, g_2\},$$

est involutive. De plus, $\overline{\Delta}^T = span\{dh_1, dh_2, dh_3\}$, où $h_1 = x_1 - x_5(x_6 - x_3 e^{x_4})$, $h_2 = x_4$ et $h_3 = x_6 - x_3 e^{x_4}$.
Mettons $z_{1,1} = h_1$, $z_{1,2} = h_2$ et $z_{1,3} = h_3$, nous obtenons le difféomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= x_1 - \ x_5\, (x_6 - x_3 e^{x_4}) \\ z_{2,1} &= L_f h_1 = x_2 \ \text{ et } \ z_{3,1} = L_f^2 h_1 = x_3 \\ z_{1,2} &= h_2 = x_4 \ \text{ et } \ z_{2,2} = L_f h_2 = x_5 \\ z_{1,3} &= h_3 = x_6 - x_3 e^{x_4} \end{aligned}$$

qui transforme la dynamique sous la forme 0-plate (3) suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = z_{2,1} + z_{1,3} u_3 \\ \dot{z}_{2,1} = z_{3,1} + z_{1,2} u_2 + z_{3,1} u_3 \\ \dot{z}_{3,1} = u_1 \\ \dot{z}_{1,2} = z_{2.2} \\ \dot{z}_{2,2} = u_2 + z_{3.1} u_3 \\ \dot{z}_{1,3} = u_3 \end{cases}$$

V. Conclusion

Nous avons exhibé dans cet article les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système non linéaire soit équivalent par difféomorphisme à un système de référence (forme normale) qui est 0-plat. Il est évident que notre démarche est de répondre à la question. "Ce système est-il plat ?" Par la recherche d'équivalence à un système que nous savons plat, nous donnons uniquement des conditions suffisantes. Néanmoins, cette démarche, au-delà de son souci de caractérisation et de classification, nous a ici permis d'obtenir des conditions qui sont une généralisation naturelle des conditions de 0-plat pour les systèmes dynamiques de co- dimension 1.

Remerciements

Nous exprimons notre sincère gratitude à M. Michel Fliess pour ses conseils, ses encouragements et les références bibliographiques qu'il nous a communiquées.

Références

[1] R.L. Anderson et N. H. Ibragimov. *Lie-Bäcklund Transformations in Applications.* SIAM, Philadelphia, 1979.

[2] Aranda-Bricaire E. , C. H. Moog, et J. B. Pomet. *A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization.* IEEE Trans. Automat. Control, 40 : pp 127-132, 1995.

[3] R. Briant, S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, et P. Griffiths. *Exterior Differential Systems.* Springer Verlag, 1991.

[4] E. Cartan. *Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes.* Bull. Soc. Math. France, 42 : pp 12-48, 1914. in Oeuvres Compl'etes, part II, vol 2, pp 1133-1168, CNRS, Paris, 1984.

[5] B. Charlet, J. Lévine. *On dynamic feedback linearization.* Systems Control Lett., 13 : pp 143-151, 1989.

[6] B. Charlet, J. Lévine, et R. Marino. *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization.* SIAM J. Control Optim., 29 : pp 38-57, 1991.

[7] E. Delaleau et P. S. Pereira da Silva. *Filtrations in feedback synthesis Part I- systems et feedbacks.* Forum Math., 10(2) : pp 147-174, 1998.

[8] J. Descusse et C. H. Moog. *Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems.* Internat. J. Control, 42 : pp 1387-1398, 1985.

[9] M. D. Di Benedetto, J. W. Grizzle, et C. H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. SIAM J. Control Optim., 27 : pp 658-672, 1989.

[10] M. Fliess. *Automatique et corps différentiels.* Forum Math., 1 : pp 227-238, 1989.

[11] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 315 : pp 619-624, 1992.

[12] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Linèarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 317 : pp 981-986, 1993.

[13] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Flatness defect of non-linear systems introductory theory and examples.* Internat. J. Control, 61 : pp 1327-1361, 1995.

[14] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Deux applications de la géométrie locale des diffiétés.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 66 : pp 275-292, 1997.

[15] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Nonlinear control and diffieties, with an application to physics.* In J. Krasilśhchik M. Henneaux and A. Vinogradov, editors, Secondary Calculus and Cohomological Physics, volume 219 of Contemporary Math., pp 81-92, 1998.

[16] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 44(5) : pp 922-937, 1999.

[17] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Some open question related to flat nonlinear systems.* In V.D. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar, et J.C. Willems, editors, Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory, pp 99-103, London, 1999. Springer Verlag.

[18] J. Lévine. *Analysis and control of nonlinear systems.* 2009, Springer Verlag.

[19] R. B. Gardner et W. F. Shadwick. *The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form.* IEEE Trans. Automat. Control, 37 : pp 224-230, 1992.

[20] M. Guay, P. J. McLellan, et D.W. Bacon. *A condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems.* Internat. J. Control, 68(1) : pp 87-106, 1997.

[21] S. Bououden, D. Boutat, J.-P. Barbot, et F. Kratz. *A geometrical characterization of a class of* 0*-flat affine dynamical systems.* IEEE ACC (2009)[inria-00408226 - version 1].

[22] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag, 3nd edition, 1995.

[23] B. Jakubczyk, W. Respondek. *On linearization of control systems.* Bull. Acad. Pol. Sc., Ser. Sci. Math., 28 : pp 517-522, 1980.

[24] W. Kang and A.J. Krener, *Extended quadratic controller normal form and dynamic feedback linearization of nonlinear systems.* SIAM J. Control Optim. 30 (1992), pp. 13191337.

[25] D. Boutat and J.P. Barbot. *Poincare normal form for a class of driftless systems in a one-dimension submanifold neighborhood.* Mathematics of Control, Signals, and Systems, Vol 15, pp. 256-274, 2002

[26] Ph. Martin, R. M. Murray, P. Rouchon. *Flat Systems.* European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses, 1997 Brussels.

[27] P. Mai, C. Join, J. Reger, *Flatness-Based Fault Tolerant control of a nonlinear MIMO system using algebraic derivative estimation*, in 3^{rd} IFAC Symposium on System, Structure and Control, SSC 07, 2007.

[28] H. Nijmeijer et W. Respondek. *Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 33 : pp 1065-1070, 1988.

[29] W. Perruquetti, J-P Barbot, Sliding Mode Control in Engineering, Marcel Dekker, 2002.

[30] P. S. Pereira da Silva. *Flatness of nonlinear control systems a Cartan-Kähler approach.* In Proc. Mathematical Theory of Networks et Systems MTNS'2000, pages 110, Perpignan, Jun. 19-23, 2000.

[31] P. S. Pereira da Silva. *On the nonlinear dynamic disturbance decoupling problem.* J. Math. Systems Estim. Control, 6 : pp 1-26, 1996.

[32] J.B. Pomet,(1995). *A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization.* Banach Center Publications pp. 319-339.

[33] J.B. Pomet. *A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization.* In B. Jackubczyk, W. respondek, and T. Rzezuchowski, editors, Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions, pp 319-339, Warsaw, 1995. Banach Center Publications.

[34] J.B. Pomet. *On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 : 151-230 (electronic), 1997.

[35] F. Rotella et I. Zambettakis *Commande des systèmes par platitude.* S7950 Techniques de l'ingénieurs.

[36] P. Rouchon. *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization.* J. Math. Systems Estim. Control, 5(3) : pp 345-358, 1995.

[37] J. Rudolph. *Well-formed dynamics under quasi-static state feedback.* In B. Jackubczyk, W. Respondek, et T. Rzezuchowski, editors, Geometry in Nonlinear Control et Differential Inclusions, pp 349-360, Warsaw, 1995. Banach Center Publications.

[38] W. F. Shadwick. *Absolute equivalence and dynamic feedback linearization.* Systems Control Lett., 15 : pp 35-39, 1990.

[39] F. Shadwick, M. Sluis. *Dynamic feedback for classical geometries.* In Differential geometry and mathematical physics (Vancouver, BC, 1993), volume 170 of Contemp. Math., pp 207-213. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[40] S. N. Singh. *A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems.* IEEE Trans. Automat. Control, AC-26 : pp 595-598, 1981.

[41] W. M. Sluis. *A necessary condition for dynamic feedback linearization.* Systems Control Lett., 21 : pp 277-283, 1993.

[42] W. M. Sluis et D. M. Tilbury. *A bound on the number of integrators needed to linearize a control system.* Systems Control Lett., 29(1) : pp 43-50, 1996.

[43] D. Tilbury, R. M. Murray, et S. R. Sastry. *Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form.* IEEE Trans. Automat. Control, 40 : pp 802-819, 1995.

[44] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, et R. M. Murray. *Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems.* SIAM J. Control Optim., 36(4) : pp 1225-1239 (electronic), 1998.

[45] V. Hagenmeyer, E. Delaleau.*Robustness analysis of exact feedforward linearization based on differential fatness.* Automatica, vol. 39, pp 1941-1946.

[46] J. Lévine. *On flatness necessary and sufficient conditions.* Proc. NOLCOS 2004, Stuttgart (Germany), Sep. 2004.

[47] K. Schlacher, M. Schöberl.*Construction of flat outputs by reduction and elimination.* Proc. NOLCOS 2007, Pretoria (South Africa), Aug. 2004.