



HAL
open science

Sur des Modèles Asymptotiques en Océanographie

Stevan Bellec, Mathieu Colin, Mario Ricchiuto

► **To cite this version:**

Stevan Bellec, Mathieu Colin, Mario Ricchiuto. Sur des Modèles Asymptotiques en Océanographie. [Rapport de recherche] RR-8361, INRIA. 2013. hal-00860438

HAL Id: hal-00860438

<https://inria.hal.science/hal-00860438>

Submitted on 10 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Sur des Modèles Asymptotiques en Océanographie

S. Bellec, M. Colin, M. Ricchiuto

**RESEARCH
REPORT**

N° 8361

Septembre 2013

Project-Teams Bacchus



Sur des Modèles Asymptotiques en Océanographie

S. Bellec *, M. Colin*, M. Ricchiuto*

Équipes-Projets Bacchus

Rapport de recherche n° 8361 — Septembre 2013 — 39 pages

Résumé : Ce document se concentre sur la modélisation de l'écoulement des vagues sur le littoral, ainsi que la dérivation des équations.

Pour cela, on part des équations d'Euler incompressible et irrotationnelle qui régissent cet écoulement. On souhaite les simplifier suffisamment pour y adapter un schéma numérique précis et performant, tout en préservant les caractéristiques de dispersion linéaire du modèle de base (modèle d'Airy, détaillé au début) pour des profondeurs de l'ordre de la moitié de la longueur d'onde des vagues.

Après les premières simplifications, on obtient le modèle de "Shallow-water", dont les caractéristiques de dispersion ne conviennent pas. On cherche donc à affiner la dérivation des équations, on obtient alors les équations de Peregrine et de Green-Naghdi. Celles-ci améliorent la profondeur limite de validité. On cherche alors à les améliorer en introduisant un paramètre libre, ce qui nous amène aux équations de Beji-Nadaoka (ou Madsen et Sorensen) puis aux équations de Nwogu.

La fin de ce document se concentre sur une caractéristique de dispersion linéaire plus restrictive : le gradient de shoaling.

Mots-clés : modèle asymptotique, équations aux dérivées partielles, écoulement littoral, modèle d'Airy, théorie de Boussinesq, équations de Shallow-water, équations de Peregrine, équations de Green-Naghdi, équations de Nwogu, caractéristiques de dispersion linéaire

* INRIA Bordeaux Sud-Ouest

**RESEARCH CENTRE
BORDEAUX – SUD-OUEST**

351, Cours de la Libération
Bâtiment A 29
33405 Talence Cedex

Asymptotic wave models for oceanography

Abstract: This paper focuses on the derivation of Euler equations for the motion of waves in shallow water areas.

We want to simplify these equations, and we want to keep the linear dispersion characteristics (phase velocity, group velocity) close to those of the Airy theory (detailed at the beginning of this document).

First, we obtain the "Shallow-water" equations. But its characteristics are not sufficiently effective referred to the depths. We improve their derivation, and we obtain the Peregrine equations and the Green-Naghdi equations (which are Boussinesq-type equations). The linear dispersion characteristics are not enough improve, so we modify these equations. It leads to the extended Boussinesq equations (Beji-Nadaoka or Madsen-Sorensen equations and Nwogu equations). To conclude, we study another dispersion characteristic: the shoaling gradient.

Key-words: asymptotic model, partial differential equations, coastline flow, Airy model, Boussinesq theory, shallow-water equations, Peregrine equations, Green-Naghdi equations, Nwogu equations, Linear dispersive characteristics

Table des matières

1	Introduction	6
2	Cas général	7
2.1	Quelques notions utiles	8
2.2	Modèle d'Airy	8
2.3	Etude du système linéaire	9
3	Equations dites de "shallow water"	10
3.1	Dérivation des équations	10
3.2	Etude des caractéristiques de dispersion	12
3.3	Comparaison avec la théorie d'Airy	12
3.3.1	Vitesse de phase	12
3.3.2	Vitesse de groupe	12
4	Equations de Boussinesq	13
4.1	Equations de Peregrine	13
4.1.1	Dérivation des équations	13
4.1.2	Etude des caractéristiques de dispersion	17
4.2	Equations de Green-Naghdi	18
4.2.1	Mise en équation	18
4.3	Comparaison avec la théorie d'Airy	22
4.3.1	Vitesse de phase	22
4.3.2	Vitesse de groupe	22
5	"Deep water", ou équations de Boussinesq améliorées	24
5.1	Equations de Beji et Nadaoka	24
5.1.1	Dérivation des équations	24
5.1.2	Etude de la dispersion linéaire	25
5.2	Equations de Nwogu	25
5.2.1	Dérivation des équations	26
5.2.2	Etude de dispersion	28
5.3	Comparaison avec la théorie d'Airy	29
5.3.1	Choix du paramètre libre	29
5.3.2	Vitesse de phase	31
5.3.3	Vitesse de groupe	31
6	Cas où la profondeur h n'est pas constante (le fond n'est pas horizontal)	32
6.1	Equations "Shallow Water"	32
6.2	Equations de Peregrine	33
6.3	Equations de Green-Naghdi	33
6.4	Equations de Beji et Nadaoka	33
6.5	Equations de Nwogu	33
7	Gradient de "shoaling"	34
7.1	Théorie d'Airy	34
7.2	Equations de "shallow" water	36
7.2.1	Calcul du gradient de shoaling	36
7.3	Equations de Boussinesq	36

7.3.1	Calcul du gradient de shoaling	36
7.4	Equations de Boussinesq étendue	37
7.4.1	Calcul du gradient de shoaling	37
7.5	Comparaison avec la théorie d'Airy	38

Table des figures

1	Présentation du problème étudié	7
2	Vitesse de phase des équations de "Shallow water"	13
3	Vitesse de groupe des équations de "Shallow water"	14
4	Vitesse de phase des équations de Boussinesq	23
5	Vitesse de groupe des équations de Boussinesq	23
6	Vitesse de phase des équations de Nwogu (Boussinesq amélioré) .	31
7	Vitesse de groupe des équations de Nwogu (Boussinesq amélioré)	32
8	Gradient de shoaling des différentes équations	38

1 Introduction

Un écoulement littoral irrotationnel et incompressible peut être modélisé à partir des équations d'Euler en 3 dimensions. Le fort caractère non-linéaire de ces équations nous empêche d'appliquer directement une méthode de résolution numérique. On doit donc les simplifier avant d'y appliquer un schéma numérique.

On cherche donc le moyen de simplifier le système. On obtient alors différents types d'équations. Les plus simples étant les équations dites de "shallow-water". On en retrouve d'autres, simplifiées par des développements asymptotiques, telles que les équations de Peregrine ([9]), les équations de Green-Naghdi ([4] et [5]). Ce sont des modèles dits de Boussinesq. Enfin, on retrouve aussi dans la littérature des modèles de Boussinesq améliorés (voir [7] et [9]).

Le but de ce papier est de répertorier ces modèles en les appliquant à un écoulement de profondeur maximale 0.5λ (λ désigne la longueur d'onde de la vague), mais en conservant les caractéristiques de dispersion, que nous définissons dans la première partie de ce document.

On se place dans un cas particulier pour simplifier les calculs et les notations. On ne considère que 2 dimensions (une verticale, notée z , et une horizontale, x), mais les calculs sont très souvent les mêmes en 3 dimensions.

On note le vecteur vitesse $(u, v)^T$.

La position de la mer au repos sera paramétrée par $z = 0$ (on suppose que c'est une droite). L'écoulement se fait à surface libre, paramétrée par

$$z = \eta(x, t).$$

η correspond donc à la surface de la mer, on note a l'amplitude moyenne des vagues (donc la valeur moyenne de la fonction η). Le fond de l'eau est supposé être plat et horizontal, il est paramétré par

$$z = -h,$$

où h est une constante positive.

On a représenté la situation sur la figure 1.

La profondeur totale est alors $H(x, t) = h + \eta(x, t)$.

Les vagues sont de longueur d'onde λ , et sont supposées être de forme sinusoïdale (η est une fonction sinus) de période $2\pi/\omega$. k désigne le nombre d'onde, il est défini par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Enfin on définit deux paramètres, ε et σ , qui sont respectivement le paramètre de non-linéarité et le paramètre de dispersion,

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \quad \sigma = \frac{h}{\lambda}.$$

Dans toute la suite de ce document, l'écoulement sera considéré incompressible et irrotationnel. Le vecteur vitesse dérive donc d'un potentiel que l'on notera Φ . On peut écrire les équations d'Euler qui régissent cet écoulement

$$u_t + uu_x + vv_z + \frac{p_x}{\rho} = 0$$

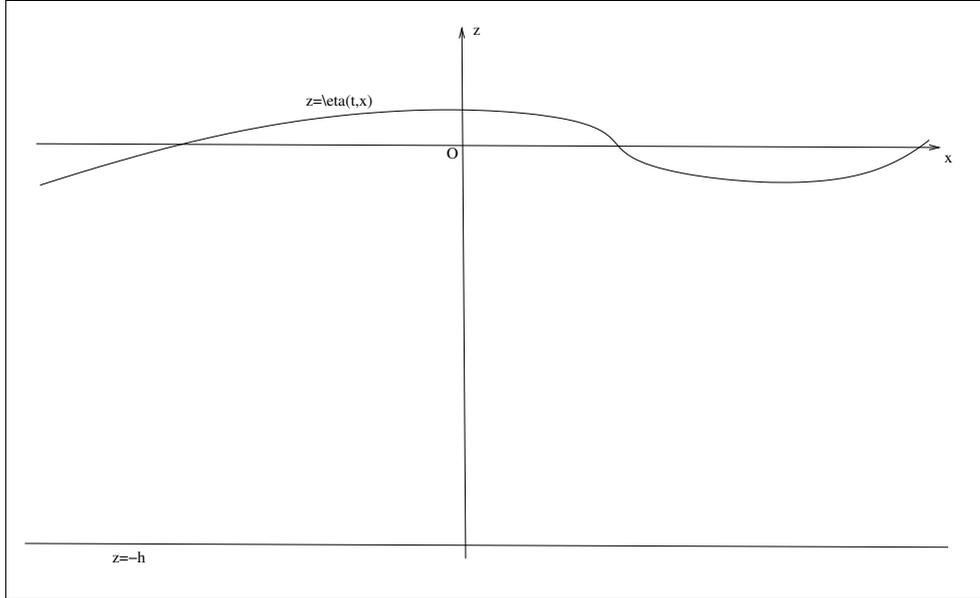


FIGURE 1 – Présentation du problème étudié

$$\begin{aligned}v_t + uv_x + vv_z + \frac{pz}{\rho} + g &= 0 \\u_x + v_z &= 0 \\u_z - v_x &= 0.\end{aligned}$$

Avec les conditions aux bords :
à $z = \eta$, la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la surface libre. On impose donc une condition cinématique :

$$v = \eta_t + u\eta_x.$$

La pression étant définie à une constante près, on peut prendre

$$p = 0.$$

Le fond (paramétré par $z = -h$) est supposé fixe, imperméable et horizontale ($h_x = 0$), la composante verticale de la vitesse doit être nulle sur le fond, ce qui donne la condition :

$$v = 0, \text{ à } z = -h.$$

On va commencer par présenter le cas général pour les caractéristiques de dispersion linéaire qui correspond au modèle d'Airy. Puis nous dériverons les équations d'Euler pour obtenir les autres modèles asymptotiques.

2 Cas général

Dans la littérature, il est courant de valider (ou d'invalidier) les différentes équations en utilisant les caractéristiques de dispersion linéaire des vagues. Pour cela on utilise deux quantités que nous allons définir maintenant.

2.1 Quelques notions utiles

Définition 1 On appelle vitesse de phase (notée dans ce document C), la vitesse d'une particule d'eau située sur la surface libre. Dans le contexte de ce document la vitesse de phase peut s'écrire

$$C = \frac{\omega}{k},$$

k étant le nombre d'onde de la vague, ω la fréquence de la vague.

Définition 2 On appelle vitesse de groupe (notée C_g ici) la vitesse du transport d'énergie dans une vague. Dans le cas de cette étude on peut l'exprimer comme

$$C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = C + k \frac{\partial C}{\partial k},$$

en utilisant la définition précédente.

On va utiliser ces deux notions pour valider ou non des modèles, pour cela on a besoin d'une référence. C'est là qu'intervient le modèle d'Airy présenté ci-après.

2.2 Modèle d'Airy

Dans ce modèle, on se place dans le cas où $\varepsilon \ll 1$ et $\sigma \ll 1$. On réécrit les équations d'Euler avec le potentiel, les deux premières deviennent

$$\Phi_{xt} + \Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_z \Phi_{xz} + \frac{p_x}{\rho} = 0$$

$$\Phi_{zt} + \Phi_x \Phi_{zx} + \Phi_z \Phi_{zz} + \frac{p_z}{\rho} + g = 0,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\frac{d}{dx} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0.$$

$$\frac{d}{dz} \left(\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0.$$

Ainsi on obtient

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t).$$

La fonction $C(t)$ peut-être calculée. On peut montrer qu'elle est négligeable (c'est fait dans [6]). On obtient les équations

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + g\eta = 0, \text{ en } z = \eta$$

$$\Phi_z = \eta_t + \Phi_x \eta_x, \text{ en } z = \eta$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$$

$$\Phi_z = 0, \text{ } z = -h.$$

2.3 Etude du système linéaire

A partir de ces équations, on va chercher à déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Pour cela, on commence par linéariser notre système d'équation, qui devient

$$\begin{aligned}\Phi_t + g\eta &= 0 \\ \Phi_z &= \eta_t \\ \Phi_{xx} + \Phi_{zz} &= 0 \\ \Phi_z &= 0, \quad z = -h.\end{aligned}$$

On a simplement négligé les termes quadratiques en Φ et η .

On va chercher des solutions sous la forme

$$\eta(t, x) = a \sin(kx - \omega t), \text{ et } \Phi(t, x, z) = B(z) \cos(kx - \omega t).$$

On remet l'expression de Φ dans la troisième équation du système précédent, ce qui nous donne

$$-k^2 B(z) + B''(z) = 0.$$

Alors, on en déduit une expression de $B(z)$, qui est

$$B(z) = \alpha \cosh(kz) + \beta \sinh(kz).$$

On utilise alors la condition en $z = -h$ pour déterminer les constantes α et β , on obtient ainsi

$$\alpha \cosh(kh) - \beta \sinh(kh) = 0,$$

donc

$$\alpha = \tanh(kh)\beta.$$

On reprend alors les deux premières équations, et on élimine les termes contenant " η " en dérivant la première par rapport à t et en additionnant la seconde multipliée par g . On obtient alors

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z = 0.$$

ce qui donne en remplaçant par l'expression obtenue ci-dessus,

$$-\omega^2 \beta (\sinh(kz) + \tanh(kh) \cosh(kz)) \cos(kx - \omega t) + kg\beta (\cosh(kz) + \tanh(kh) \sinh(kz)) \cos(kx - \omega t) = 0.$$

On utilise maintenant le fait que $z \in [-h, \eta]$ et $\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$. Ce qui implique

$$kz \leq kh = 2\pi \frac{h}{\lambda} = 2\pi\sigma \ll 1.$$

En tenant compte de cela, et en simplifiant, on peut réécrire l'équation

$$-\omega^2 + kg \tanh(kh) = 0.$$

On peut alors en déduire le carré de la vitesse de phase

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = g \frac{\tanh(kh)}{k} = gh \frac{\tanh(kh)}{kh}.$$

Et, on peut calculer la vitesse de groupe par la formule énoncée auparavant :

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right).$$

Les deux valeurs que nous venons d'obtenir serviront de référence dans la suite de cette étude. Pour cela, on va tracer l'erreur relative en % de chaque vitesse (de phase ou de groupe), définie par l'expression suivante

$$100 \left(\frac{C - C_{Airy}}{C_{Airy}} \right),$$

(ici C peut être remplacé par C_g), en fonction du rapport

$$\sigma = \frac{h}{\lambda}.$$

On rappelle que $k = 2\pi/\lambda$.

Les caractéristiques seront donc "bonnes" si l'erreur reste proche de zéro.

3 Equations dites de "shallow water"

3.1 Dérivation des équations

On va maintenant présenter un modèle dit de "shallow water". L'idée est de simplifier les équations d'Euler selon la petitesse des paramètres.

Dans ce modèle on va supposer $\sigma \ll 1$. On va adimensionner les équations d'Euler, en prenant comme nouvelles variables

$$x^* = \frac{x}{\lambda}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a},$$

$$u^* = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad v^* = \frac{\lambda}{h} \frac{1}{\sqrt{gh}} v, \quad p^* = \frac{p}{gh\rho}.$$

Le système adimensionné est alors

$$u_{t^*}^* + u^* u_{x^*}^* + v^* u_{z^*}^* + p_{x^*}^* = 0 \quad (1)$$

$$\sigma^2 (v_{t^*}^* + u^* v_{x^*}^* + v^* v_{z^*}^*) + p_{z^*}^* + 1 = 0 \quad (2)$$

$$u_{x^*}^* + v_{z^*}^* = 0 \quad (3)$$

$$u_{z^*}^* - \sigma^2 v_{x^*}^* = 0. \quad (4)$$

Les conditions aux bords deviennent

à $z^* = \varepsilon\eta^*$

$$v^* = \varepsilon(\eta_{t^*}^* + u^* \eta_{x^*}^*), \quad (5)$$

$$p^* = 0. \quad (6)$$

Et à $z^* = -1$

$$v^* = 0. \quad (7)$$

Pour simplifier le système précédent, on prend $\sigma = 0$, comme simplification de l'hypothèse $\sigma \ll 1$.

Le système se simplifie et nous permet de calculer explicitement certaines quantités. Ainsi, en intégrant l'équation (2), on obtient

$$p^* = -z^* + A.$$

La condition au bord $z = \varepsilon\eta$ nous permet de trouver la constante A . Ce qui donne

$$p^* = -z^* + \varepsilon\eta^*.$$

A présent on va chercher à éliminer tous les termes contenant v^* .

On commence par regarder l'équation (4) (avec $\sigma = 0$) qui est $u_{z^*}^* = 0$, donc u^* ne dépend pas de z^* ¹. En utilisant cela dans l'équation (3) on arrive à exprimer v^* en fonction des autres quantités :

$$v^* = -u_{x^*}^* z^* + K,$$

où K est une constante à déterminer. Pour la trouver on utilise la condition en $z^* = -1$. On obtient alors

$$v^* = -u_{x^*}^* (z^* + 1).$$

On remet cette expression dans la condition en $z^* = \varepsilon\eta^*$, on obtient

$$u_{x^*}^* (\varepsilon\eta^* + 1) + \varepsilon(\eta_{t^*}^* + u^* \eta_{x^*}^*) = 0.$$

On peut simplifier cette équation. On obtient ainsi la première équation de notre système final :

$$\varepsilon\eta_{t^*}^* + [u^* (\varepsilon\eta^* + 1)]_{x^*} = 0.$$

Enfin, on utilise l'expression de la pression obtenue précédemment, le fait que u^* ne dépend pas de z^* et on remet tout cela dans l'équation (1), pour obtenir la seconde équation du système

$$u_{t^*}^* + u^* u_{x^*}^* + \varepsilon\eta_{x^*}^* = 0.$$

On revient alors aux dimensions (on fait le changement de variables inverse). On obtient un système de deux équations

$$\eta_t + [u(\eta + h)]_x = 0 \quad (8)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x = 0, \quad (9)$$

u étant une fonction que de x et t .

C'est le système d'équation le plus "simple" que l'on peut obtenir, mais il est valable uniquement pour un σ très petit.

Etudions maintenant ses caractéristiques de dispersion linéaire.

1.

Remarque 1 La dérivation de tous les modèles de ce document ont comme point commun de transformer un problème à deux dimensions, en un problème à une seule (en "supprimant" la variable z), nous le verrons par la suite.

3.2 Etude des caractéristiques de dispersion

On va commencer cette partie par écrire le système linéarisé correspondant au modèle "shallow water"

$$\eta_t + hu_x = 0$$

$$u_t + g\eta_x = 0,$$

et on pose

$$\eta(t, x) = a \sin(kx - \omega t), \quad u(t, x) = b \sin(kx - \omega t).$$

On réinjecte alors ces expressions dans le système linéarisé, ce qui nous donne

$$-a\omega \cos(kx - \omega t) + hbk \cos(kx - \omega t) = 0$$

$$-\omega b \cos(kx - \omega t) + agk \cos(kx - \omega t) = 0$$

On obtient, après simplifications,

$$\frac{\omega}{k} = \frac{hb}{a}$$

$$\frac{b}{a} = g \frac{k}{\omega}$$

On en déduit alors la vitesse de phase au carré qui est

$$C^2 = hg,$$

et la vitesse de groupe à partir de la formule

$$C_g = C + k \frac{dC}{dk}.$$

Ainsi, dans ce cas

$$C_g = C.$$

3.3 Comparaison avec la théorie d'Airy

3.3.1 Vitesse de phase

Commençons par étudier la vitesse de phase des équations "shallow water". L'erreur est représentée sur la figure 2.

On remarque que la vitesse est très bonne pour un σ très petit (ce qui est normal car dans ce modèle on a supposé $\sigma = 0$). L'erreur dépasse les 5%, pour $\sigma = 0.1$, et semble augmenter de manière exponentielle.

Pour ce qui est de la vitesse de phase, ces équations ne sont bonnes que pour une profondeur très petite, d'où son nom.

3.3.2 Vitesse de groupe

On va maintenant étudier la vitesse de groupe. On a représenté l'erreur relative sur la figure 3.

Là encore l'erreur semble exploser, mais encore plus tôt que pour la vitesse de phase (c'est récurrent dans toutes les équations), ici l'erreur excède 10% pour une valeur de σ autour de 0.075. Ce qui confirme donc l'analyse de la partie

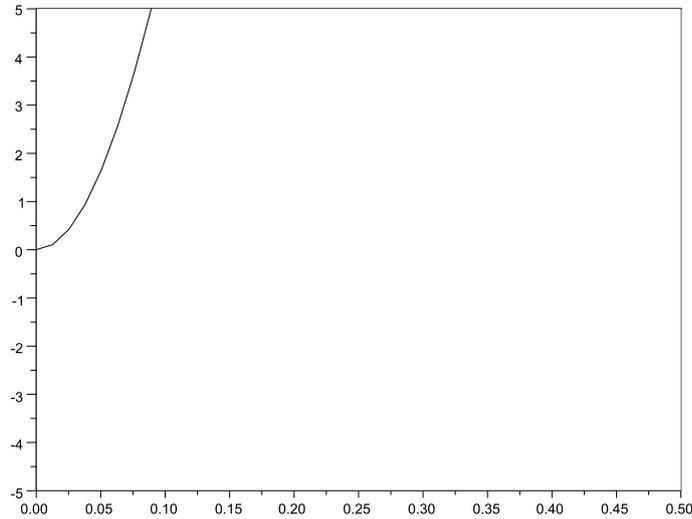


FIGURE 2 – Vitesse de phase des équations de "Shallow water"

précédente.

Pour conclure, ces équations sont certes simples, mais elles ne peuvent être validées que pour une profondeur très petite, presque nulle. On va donc maintenant présenter de nouvelles équations plus complexes, mais qui seront en adéquation avec la théorie d'Airy pour une profondeur plus grande.

4 Equations de Boussinesq

Dans cette partie on va retrouver plusieurs équations dites de Boussinesq. Dans la théorie des vagues de Boussinesq, et par conséquent dans tout ce qui va suivre, on suppose que

$$\varepsilon \ll 1, \sigma \ll 1,$$

et

$$\varepsilon = \mathcal{O}(\sigma^2).$$

4.1 Equations de Peregrine

4.1.1 Dérivation des équations

On va encore une fois reprendre les équations d'Euler et les adimensionner d'une autre façon. On pose

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda}, \tilde{z} = \frac{z}{h}, \tilde{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t, \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a},$$

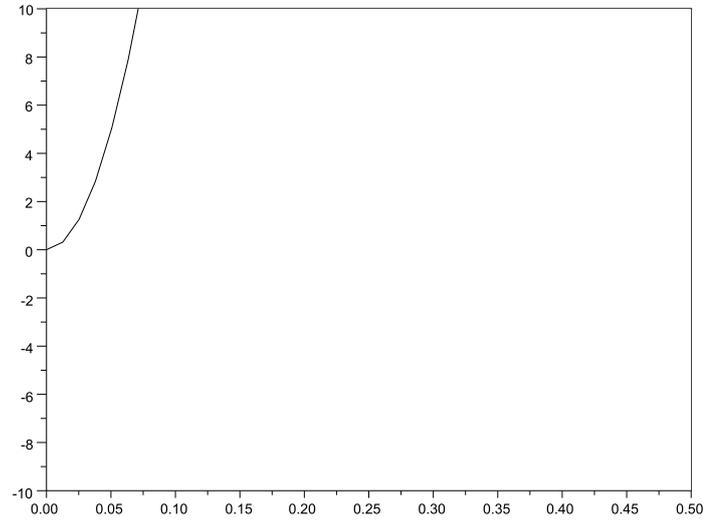


FIGURE 3 – Vitesse de groupe des équations de "Shallow water"

$$\tilde{u} = \frac{h}{a\sqrt{gh}}u, \quad \tilde{v} = \frac{\lambda}{a} \frac{1}{\sqrt{gh}}v, \quad \tilde{p} = \frac{p}{gh\rho}.$$

Le système adimensionné devient alors

$$\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon^2\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \varepsilon^2\tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{z}} + \tilde{p}_{\tilde{x}} = 0 \quad (10)$$

$$\varepsilon\sigma^2\tilde{v}_{\tilde{t}} + \varepsilon^2\sigma^2\tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \varepsilon^2\sigma^2\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{z}} + \tilde{p}_{\tilde{z}} + 1 = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{z}} = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} - \sigma^2\tilde{v}_{\tilde{x}} = 0. \quad (13)$$

Les conditions aux bords deviennent
à $\tilde{z} = \varepsilon\tilde{\eta}$

$$\tilde{v} = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}, \quad (14)$$

$$\tilde{p} = 0. \quad (15)$$

Et à $\tilde{z} = -1$

$$\tilde{v} = 0. \quad (16)$$

A partir de là, on va chercher à obtenir les équations de Peregrine. Pour cela, on commence par intégrer l'équation (12) par rapport à \tilde{z} entre -1 et \tilde{z} . On obtient

$$\int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{v}_z d\tilde{z} = \int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{u}_{\tilde{x}} d\tilde{z}.$$

Ce qui devient, en appliquant la formule de Leibnitz² et les conditions aux bords :

$$\tilde{v} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{u} d\tilde{z}. \quad (17)$$

On reprend l'équation (13) :

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} = \sigma^2 \tilde{v}_{\tilde{x}} = \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Ainsi, en intégrant

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0(\tilde{t}, \tilde{x}) + \mathcal{O}(\sigma^2),$$

où \tilde{u}_0 est la constante d'intégration.

On obtient alors une expression de la vitesse \tilde{v} en la remettant dans l'équation (17), ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-1}^{\tilde{z}} (\tilde{u}_0(\tilde{t}, \tilde{x}) + \mathcal{O}(\sigma^2)) d\tilde{z} \\ &= -\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} (\tilde{z} + 1) + \mathcal{O}(\sigma^2) \end{aligned}$$

Ainsi, en remettant cette expression dans l'équation (13), on obtient

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} = -\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} (\tilde{z} + 1) + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

On intègre alors par rapport à \tilde{z} , en n'oubliant pas la constante d'intégration \tilde{u}_0 . On obtient une expression pour la vitesse \tilde{u}

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} \left(\frac{\tilde{z}^2}{2} + \tilde{z} \right) + \mathcal{O}(\sigma^4). \quad (18)$$

Maintenant, on va chercher une expression pour la pression en utilisant l'équation (11), que l'on réécrit

$$\varepsilon \sigma^2 \tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{p}_{\tilde{z}} + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \sigma^2) = 0.$$

On remplace $\tilde{v}_{\tilde{t}}$ par son expression en dérivant par rapport à \tilde{t} , et en négligeant (on les met dans un \mathcal{O}) les termes en $\varepsilon^2 \sigma^2$ et $\varepsilon \sigma^4$. On obtient alors

$$\tilde{p} = \varepsilon \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x \partial t} \left(\frac{\tilde{z}^2}{2} + \tilde{z} \right) + cste - \tilde{z} + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \sigma^2, \varepsilon \sigma^4).$$

2. Soient trois fonctions $f(x, y)$, $a(x)$, $b(x)$ telles que f et f_x sont continues en x et en z , et telles que a et b sont C^1 , alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).$$

On détermine la constante à partir de la condition en $\tilde{z} = \varepsilon\tilde{\eta}$, ce qui donne

$$\tilde{p} = \varepsilon\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x \partial t} \left(\frac{\tilde{z}^2}{2} + \tilde{z} \right) + \varepsilon\tilde{\eta} - \tilde{z} + \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon\sigma^4).$$

On dérive alors cette expression et on la substitue dans l'équation (10), tout comme les expressions de \tilde{u} et \tilde{v} , on ne garde que les termes qui ne sont pas des \mathcal{O} de $\varepsilon^2\sigma^2$ et $\varepsilon\sigma^4$.

On obtient alors

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon^2 \tilde{u}_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon\sigma^4) = 0.$$

Ce qui devient

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon \tilde{u}_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4) = 0. \quad (19)$$

Pour la suite, on pose

$$\bar{u} = \frac{1}{1 + \varepsilon\tilde{\eta}} \int_{-1}^{\varepsilon\tilde{\eta}} \tilde{u} d\tilde{z}.$$

On intègre donc l'équation (18) entre -1 et $\varepsilon\tilde{\eta}$ par rapport à \tilde{z} , on obtient alors

$$\bar{u} = \tilde{u}_0 - \frac{\sigma^2}{1 + \varepsilon\tilde{\eta}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} \int_{-1}^{\varepsilon\tilde{\eta}} \left(\frac{\tilde{z}}{2} + \tilde{z} \right) d\tilde{z} + \mathcal{O}(\sigma^4),$$

d'où

$$\bar{u} = \tilde{u}_0 - \frac{\sigma^2}{1 + \varepsilon\tilde{\eta}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} \left(\frac{\varepsilon^3 \tilde{\eta}^3}{6} + \frac{\varepsilon^2 \tilde{\eta}^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

Or, le polynôme $P = \frac{X^3}{6} + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{3}$ se factorise en $P = (1+X)(X^2/6 + X/3 - 1/3)$.
Donc

$$\bar{u} = \tilde{u}_0 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} \left(\frac{\varepsilon^2 \tilde{\eta}^2}{6} + \frac{\varepsilon\tilde{\eta}}{3} - \frac{1}{3} \right) + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

On en déduit finalement que

$$\bar{u} = \tilde{u}_0 + \frac{\sigma^2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

Ainsi,

$$\frac{\sigma^2}{3} \bar{u} = \frac{\sigma^2}{3} \tilde{u}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4),$$

soit

$$\frac{\sigma^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\sigma^2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

On peut donc exprimer \tilde{u}_0 en fonction de \bar{u} :

$$\tilde{u}_0 = \bar{u} - \frac{\sigma^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

On remplace alors l'expression de \tilde{u}_0 en fonction de \bar{u} dans l'équation (19), ce qui donne

$$\bar{u}_{\tilde{t}} - \frac{\sigma^2}{3} \bar{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon \bar{u} \bar{u}_{\tilde{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

On néglige alors le grand \mathcal{O} , on obtient la première équation de Peregrine. Pour obtenir la seconde équation de Peregrine, on revient au système d'Euler adimensionné, on intègre l'équation (12) entre -1 et $\varepsilon\tilde{\eta}$ par rapport à la variable \tilde{z} , et on applique la formule de Leibnitz, comme précédemment, ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\int_{-1}^{\varepsilon\tilde{\eta}} \tilde{u} d\tilde{z} \right) - \tilde{u}|_{\varepsilon\tilde{\eta}} + \tilde{v}|_{\varepsilon\tilde{\eta}} - \tilde{v}|_{-1} = 0.$$

On utilise alors les conditions aux bords (15) et (16), pour arriver à

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} ((1 + \varepsilon\tilde{\eta})\tilde{u}) + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = 0.$$

Les équations de Peregrine adimensionnées sont donc

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} ((1 + \varepsilon\tilde{\eta})\tilde{u}) + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = 0.$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - \frac{\sigma^2}{3} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} = 0$$

Pour revenir aux équations "dimensionnées", on va faire le changement de variable inverse, ce qui donne notamment pour \tilde{u} :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{1 + \varepsilon\tilde{\eta}} \int_{-1}^{\varepsilon\tilde{\eta}} \tilde{u} dz' \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\eta}{h}} \int_{-1}^{\frac{\eta}{h}} \frac{h}{a\sqrt{gh}} u dz' \\ &= \frac{h}{a\sqrt{gh}} \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz, \text{ en posant } z = \frac{z'}{h} \\ &= \frac{h}{a\sqrt{gh}} \bar{u}. \end{aligned}$$

Les équations de Peregrine sont alors

$$\eta_t + [H\bar{u}]_x = 0. \quad (20)$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x + \bar{u}\bar{u}_x - \frac{h^2}{3} \bar{u}_{xxt} = 0 \quad (21)$$

4.1.2 Etude des caractéristiques de dispersion

Comme dans les cas précédents (c'est le procédé standard), on linéarise les équations, ce qui nous donne

$$\eta_t + h\bar{u}_x = 0. \quad (22)$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x - \frac{h^2}{3} \bar{u}_{xxt} = 0 \quad (23)$$

On pose

$$\eta(t, x) = a \sin(kx - \omega t), \quad \bar{u}(t, x) = b \sin(kx - \omega t).$$

On remet ces expressions dans les équations (23) et (22), on obtient alors

$$-\omega a + hkb = 0. \quad (24)$$

$$-b\omega + gak - \frac{h^2}{3}bk^2\omega = 0 \quad (25)$$

On résout ce système. On obtient alors que le carré de la vitesse de phase est

$$C^2 = \frac{gh}{1 + \frac{h^2k^2}{3}}$$

On en déduit la vitesse de groupe

$$C_g = C + k \frac{\partial C}{\partial k} = C \left(\frac{3}{3 + h^2k^2} \right).$$

4.2 Equations de Green-Naghdi

On va maintenant s'intéresser à de nouvelles équations, appelées équations de Green-Naghdi (ou équations de Serre). Ce sont des équations qui relient la surface et ses dérivées η à la vitesse moyenne sur la profondeur \bar{u} .

4.2.1 Mise en équation

Pour dériver les équations de Green-Naghdi, on part des équations d'Euler écrite à partir du potentiel, comme dans le cas du modèle d'Airy :

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + g\eta = 0, \text{ en } z = \eta$$

$$\Phi_z = \eta_t + \Phi_x \eta_x, \text{ en } z = \eta$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$$

$$\Phi_z = 0, \text{ en } z = -h.$$

Maintenant on va adimensionner ce système en effectuant le même changement de variables que pour les équations de Peregrine

$$x = \lambda x', \quad z = h z', \quad t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} t', \quad \eta = a \eta', \quad H = h H',$$

$$u = \frac{a\sqrt{gh}}{h} u', \quad \Phi = \frac{a\lambda\sqrt{gh}}{h} \Phi'.$$

Le système adimensionné devient alors, en notant $\mu := \sigma^2$,

$$\Phi'_{t'} + \frac{\varepsilon}{2} \left((\Phi'_{x'})^2 + \frac{1}{\mu} (\Phi'_{z'})^2 \right) + \eta' = 0, \quad \text{à } z' = \varepsilon \eta' \quad (26)$$

$$\Phi'_{z'z'} + \mu \Phi'_{x'x'} = 0 \quad (27)$$

$$\mu(\eta'_{t'} + \varepsilon u' \eta'_{x'}) = \Phi'_{z'}, \text{ à } z' = \varepsilon \eta' \quad (28)$$

$$z' = 0, \text{ à } z' = -1. \quad (29)$$

On va commencer par trouver la première équation. Pour cela, on reprend la vitesse moyenne définie par

$$\bar{u}' = \frac{1}{1 + \varepsilon \eta'} \int_{-1}^{\varepsilon \eta'} \Phi'_{x'} dz' = \frac{1}{H'} \int_{-1}^{\varepsilon \eta'} \Phi'_{x'} dz'.$$

On intègre alors l'équation (27) entre -1 et $\varepsilon \eta'$ par rapport à z'

$$\int_{-1}^{\varepsilon \eta'} \Phi'_{z'z'} dz' + \mu \int_{-1}^{\varepsilon \eta'} \Phi'_{x'x'} dz' = 0.$$

On applique alors la formule de Leibnitz, et on fait apparaître \bar{u}' . Ce qui donne

$$v'_{|\varepsilon \eta'} - v'_{|-1} + \mu [H' \bar{u}']_{x'} - \mu \varepsilon u' \eta'_{x'} = 0.$$

On utilise ensuite la relation (28) pour simplifier l'expression. On obtient alors

$$\eta'_{t'} + [H' \bar{u}']_{x'} = 0. \quad (30)$$

C'est la première équation de Green-Naghdi (qui est la même que Peregrine). Trouvons maintenant la seconde équation. Pour cela on va introduire une nouvelle notation :

$$\psi(t', x') := \Phi'(t', x', \varepsilon \eta'(t', x')).$$

Réécrivons l'équation (26) en fonction de ψ et de ses dérivées.

On va commencer par calculer les différentes dérivées de ψ .

$$\psi_{t'} = \Phi'_{t'} + \varepsilon \eta'_t \Phi'_{z'},$$

soit

$$\Phi'_{t'} = \psi_{t'} - \varepsilon \eta'_t \Phi'_{z'}.$$

Et de même

$$\Phi'_{x'} = \psi_{x'} - \varepsilon \eta'_{x'} \Phi'_{z'}.$$

Il nous reste plus que des $\Phi'_{z'}$, à exprimer en fonction de ψ . Pour cela on va utiliser l'équation (28) :

$$\begin{aligned} \Phi'_{z'} &= \mu(\eta'_{t'} + \varepsilon \Phi'_{x'} \eta'_{x'}) \\ &= \mu \eta'_{t'} + \varepsilon \mu \eta'_{x'} \psi_{x'} - \mu \varepsilon^2 \eta'_{x'}{}^2 \Phi'_{z'}, \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Phi'_{z'} = \frac{\mu}{1 + \mu \varepsilon^2 \eta'_{x'}{}^2} (\eta'_{t'} + \varepsilon \eta'_{x'} \psi_{x'}).$$

Remarque 2 Notons que comme $H' = 1 + \varepsilon \eta'$, alors

$$H'_{t'} = \varepsilon \eta'_{t'}, \quad H'_{x'} = \varepsilon \eta'_{x'}.$$

Faisons un bilan des expressions obtenues

$$\Phi'_{t'} = \psi_{t'} - \frac{\mu H'_t}{1 + \mu(H'_{x'})^2} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'}),$$

$$\Phi'_{x'} = \psi_{x'} - \frac{\mu H'_x}{1 + \mu(H'_{x'})^2} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'}).$$

$$\Phi'_{z'} = \frac{\mu}{1 + \mu(H'_{x'})^2} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'}).$$

En remettant tout cela dans l'équation (26), on a

$$\psi_{t'} + \eta' + \frac{\varepsilon}{2} (\psi_{x'})^2 - \mu \frac{H'_{t'} + \varepsilon H'_{x'} \psi_{x'}}{1 + \mu(H'_{x'})^2} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'}) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\mu + \mu^2 (H'_{x'})^2}{(1 + \mu(H'_{x'})^2)} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'})^2 = 0,$$

ce qui devient en simplifiant :

$$\psi_{t'} + \eta' + \frac{\varepsilon}{2} (\psi_{x'})^2 - \frac{\varepsilon \mu}{2(1 + \mu(H'_{x'})^2)} (\eta'_{t'} + H'_{x'} \psi_{x'})^2 = 0.$$

On réécrit cette dernière équation en utilisant la première équation de Green-Naghdi (30)

$$\psi_{t'} + \eta' + \frac{\varepsilon}{2} (\psi_{x'})^2 - \frac{\varepsilon \mu}{2(1 + \mu(H'_{x'})^2)} (H'_{x'} \psi_{x'} - [H' \bar{u}']_{x'})^2 = 0 \quad (31)$$

L'idée à présent est de réussir à exprimer $\psi_{x'}$ en fonction de \bar{u}' . Pour cela, on considère Φ'_{app} une fonction proche de Φ' , telle que

$$\Phi' = \Phi'_{app} + \mathcal{O}(\mu^2),$$

où $\Phi'_{app} = \Phi_0 + \mu \Phi_1$, Φ_1 et Φ_0 étant des fonctions de t' , x' et z' .

On remplace alors Φ' par Φ'_{app} dans l'équation (27) pour obtenir des relations entre Φ_0 et Φ_1 (par identification des coefficients devant les puissances de μ et en négligeant les termes en μ^2). On obtient comme relation

$$\Phi_{0z'z'} = 0, \quad \Phi_{1z'z'} = -\Phi_{0x'x'},$$

avec comme conditions

$$\Phi_0 = \psi, \quad \Phi_1 = 0, \quad \text{en } z' = \varepsilon \eta', \quad \text{cela vient de la définition de } \psi,$$

et

$$\Phi_{0z'} = 0, \quad \Phi_{1z'} = 0, \quad \text{en } z' = -1, \quad \text{cela vient de l'équation (29).}$$

Ce système d'équations différentielles ordinaires se résout simplement, et les solutions sont

$$\Phi_0 = \psi, \quad \Phi_1 = \psi_{x'x'} \left(-\frac{1}{2} (z' - \varepsilon \eta') (z' + \varepsilon \eta') - (z' - \varepsilon \eta') \right).$$

On remplace alors Φ' par Φ_{app} dans la définition de \bar{u}' . On obtient alors une relation entre \bar{u}' et les dérivées de ψ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= \frac{1}{H'} \int_{-1}^{\varepsilon \eta'} \left[\psi_{x'} + \mu (\psi_{x'x'x'}) \left(-\frac{1}{2} (z' - \varepsilon \eta') (z' + \varepsilon \eta') - (z' - \varepsilon \eta') \right) + \psi_{x'x'} (\varepsilon^2 \eta' \eta'_{x'} + \varepsilon \eta'_{x'}) \right] dz' + \mathcal{O}(\mu^2) \\ &= \psi_{x'} + \frac{\mu}{3H'} (H'^3 \psi_{x'x'})_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2) \end{aligned}$$

Ainsi, comme on souhaite obtenir $\psi_{x'}$ en fonction de \bar{u}' , on a

$$\psi_{x'} = \bar{u}' - \frac{\mu}{3H'}(H'^3\psi_{x'x'})_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

En dérivant cette expression et substituant dedans l'expression de $\psi_{x'}$ ainsi obtenue, on obtient

$$\psi_{x'} = \bar{u}' - \frac{\mu}{3H'}(H'^3\bar{u}'_{x'})_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

On va chercher maintenant à remplacer les dérivées de ψ dans l'équation (31). Pour cela, on va dériver cette équation par rapport à x' , et on ne note pas les termes qui sont des grands \mathcal{O} de μ^2 .

Avant de dériver, on va simplifier un peu le terme

$$\frac{\varepsilon\mu}{2(1 + \mu(H'_{x'})^2)} (H'_{x'}\psi_{x'} - [H'\bar{u}']_{x'})^2.$$

Notons tout d'abord que

$$\frac{\mu}{1 + \mu(H'_{x'})^2} = \mu(1 - \mu(H'_{x'})^2) + \mathcal{O}(\mu^2) = \mu + \mathcal{O}(\mu^2).$$

Puis, d'après l'expression de $\psi_{x'}$, on a

$$H'_{x'}\psi_{x'} - [H'\bar{u}']_{x'} = -H'\bar{u}'_{x'} - \frac{\mu H'_{x'}}{3H'}(H'^3\bar{u}'_{x'})_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

Ainsi

$$(H'_{x'}\psi_{x'} - [H'\bar{u}']_{x'})^2 = (H'\bar{u}'_{x'})^2 + 2\frac{\mu H'_{x'} H'_{x'}}{3H'}(H'^3\bar{u}'_{x'})_{x'}\bar{u}'_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2),$$

Donc on en déduit

$$\frac{\varepsilon\mu}{2(1 + \mu(H'_{x'})^2)} (H'_{x'}\psi_{x'} - [H'\bar{u}']_{x'})^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2}(H'\bar{u}'_{x'})^2 + \mathcal{O}(\mu^2).$$

L'équation (31) devient alors

$$\psi_{x't'} + \eta' + \frac{\varepsilon}{2}(\psi_{x'})^2 - \frac{\varepsilon\mu}{2}(H'\bar{u}'_{x'})^2 + \mathcal{O}(\mu^2) = 0.$$

On dérive cette expression par rapport à x' . On obtient

$$\psi_{x't't'} + \eta'_{x'} + \varepsilon\psi_{x'}\psi_{x'x'} - \varepsilon\mu H'\bar{u}'_{x'}(H'\bar{u}'_{x'})_{x'} + \mathcal{O}(\mu^2) = 0.$$

Or en utilisant l'expression de $\psi_{x'}$, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_{x't'} &= \bar{u}'_{t'} - \frac{\mu}{3H'}(H'^3\bar{u}'_{x't'})_{x'} + \mu(H'H'_{t'}\bar{u}'_{x'} + H'_{t'}H'_{x'}\bar{u}'_{x'} + \frac{2}{3}H'H'_{t'}\bar{u}'_{x'x'}) + \mathcal{O}(\mu^2), \\ \psi_{x'x'} &= \bar{u}'_{x'x'} \left(\frac{2}{3}H'H'_{x'}\bar{u}'_{x'x'} + \frac{H'^2}{3}\bar{u}'_{x'x'x'} + H'_{x'}\bar{u}'_{x'x'} + H'H'_{x'x'}\bar{u}'_{x'} + H'H'_{x'}\bar{u}'_{x'x'} \right) + \mathcal{O}(\mu^2). \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'équation (30) pour se débarrasser des dérivées temporelles de H' , en se souvenant que $H'_{t'} = \varepsilon\eta'_{t'}$. On obtient alors la seconde équation de Green-Naghi en substituant toutes les expressions :

$$\bar{u}'_{t't'} + \eta'_{x'} + \varepsilon\bar{u}'\bar{u}'_{x'} - \frac{\varepsilon\mu}{3H'}(H'^3(\bar{u}'\bar{u}'_{x'x'} + \frac{1}{\varepsilon}\bar{u}'_{x't't'} - (\bar{u}'_{x'})^2)) = 0.$$

On revient ensuite aux dimensions, en se souvenant que $\mu = \sigma^2$. On obtient les équations de Green-Naghdi

$$\eta_t + [H\bar{u}]_x = 0 \quad (32)$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x + \bar{u}\bar{u}_x - \frac{1}{3H} \left(H^3(\bar{u}\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{xt} - (\bar{u}_x)^2) \right)_x = 0 \quad (33)$$

Remarque 3 *On ne fera pas d'étude de dispersion pour ces équations, car le système linéarisé des équations de Green-Naghdi est le même que celui des équations de Peregrine. La vitesse de phase et la vitesse de groupe seront donc les mêmes (cf 4.1.2).*

4.3 Comparaison avec la théorie d'Airy

Dans cette partie nous allons comparer les caractéristiques de dispersion linéaire en procédant de la même manière que dans la partie 3.3. Comme indiqué précédemment les vitesses de groupe et de phase sont les mêmes pour les équations de Peregrine et de Green-Naghdi, on ne fera donc pas de différences entre les deux.

4.3.1 Vitesse de phase

Etudions la vitesse de phase. L'erreur est représentée sur la figure 4. Si on compare les résultats aux équations de "Shallow water", on remarque que là aussi l'erreur est très petite pour σ petit, mais elle dépasse les 5% (en valeur absolue) pour σ environ égal à 0.3. Et l'erreur semble augmenter moins brutalement. Ces équations sont donc plus adaptées à des modèles où la profondeur sera plus importante.

4.3.2 Vitesse de groupe

Vérifions que la vitesse de groupe a les mêmes propriétés. On a tracé l'erreur sur la figure 5. On remarque que là encore l'erreur est plus grande pour un σ plus petit, elle excède les 10% pour un σ aux alentours de 0.22. Encore une fois ces résultats sont meilleurs que pour les équations de "shallow water", mais ne restent proche du modèle d'Airy que pour une profondeur assez petite.

Les équations de Boussinesq sont plus compliquées, mais permettent d'améliorer les caractéristiques de dispersion pour qu'elles soient valable pour une plus grande profondeur. On va donc chercher à améliorer les caractéristiques de dispersion linéaire en modifiant les équations de Boussinesq. Une des idées que nous allons développer est de faire intervenir un paramètre que l'on peut modifier pour se rapprocher de la théorie d'Airy. On les appellera les équations de Boussinesq améliorées.

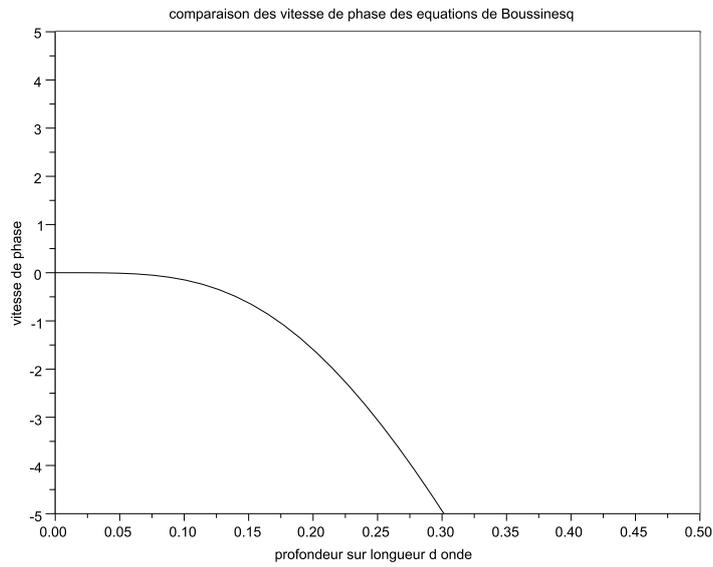


FIGURE 4 – Vitesse de phase des équations de Boussinesq

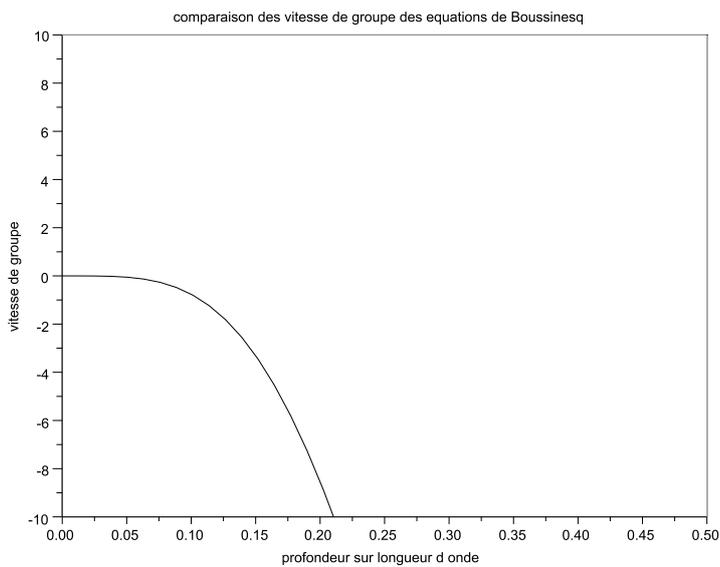


FIGURE 5 – Vitesse de groupe des équations de Boussinesq

5 "Deep water", ou équations de Boussinesq améliorées

Dans cette partie, on prend les mêmes hypothèses sur les paramètres ε et σ que pour les équations de Boussinesq, c'est-à-dire

$$\sigma \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1,$$

et

$$\varepsilon = \mathcal{O}(\sigma^2).$$

5.1 Equations de Beji et Nadaoka

Pour obtenir ces équations, on va partir de celles de Peregrine. L'idée est de les modifier un peu afin d'améliorer les caractéristiques de dispersion linéaire en introduisant un paramètre libre.

5.1.1 Dérivation des équations

Comme précisé ci-dessus, on part des équations de Peregrine sous forme adimensionnée que l'on rappelle maintenant (on reprend les expressions où les grands \mathcal{O} apparaissent) :

$$\tilde{\eta}_t + [(1 + \varepsilon\tilde{\eta})\tilde{u}]_{\tilde{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4). \quad (34)$$

$$\tilde{u}_t + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \frac{\sigma^2}{3}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4) \quad (35)$$

On va essentiellement modifier l'équation (35). Pour cela, on introduit un paramètre libre que l'on note α_B . On ajoute et on soustrait à cette équation $\alpha_B(\sigma^2/3)u_{txx}$, ce qui donne

$$\tilde{u}_t + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - (1 + \alpha_B)\frac{\sigma^2}{3}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} + \alpha_B\frac{\sigma^2}{3}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

On reprend l'équation (35) en ne considérant que les termes qui ne sont pas un \mathcal{O} de ε et/ou σ^2 , ce qui fait

$$\tilde{u}_t + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon, \sigma^2).$$

On en déduit directement que

$$\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = -\tilde{\eta}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon, \sigma^2).$$

On remet alors cette expression dans l'équation d'avant, seulement pour le terme $\alpha_B(\sigma^2/3)\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}}$. On obtient alors la seconde équation de Beji et Nadaoka adimensionnée (la première restant inchangée par rapport à Peregrine) :

$$\tilde{u}_t + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - (1 + \alpha_B)\frac{\sigma^2}{3}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} - \alpha_B\frac{\sigma^2}{3}\tilde{\eta}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

Ensuite on revient aux dimensions, et on néglige les grands \mathcal{O} , ce qui nous donne :

$$\eta_t + [H\bar{u}]_x = 0. \quad (36)$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x + \bar{u}\bar{u}_x - (1 + \alpha_B)\frac{h^2}{3}\bar{u}_{txx} - \alpha_B\frac{gh^2}{3}\eta_{xxx} = 0. \quad (37)$$

5.1.2 Etude de la dispersion linéaire

Encore une fois, commençons par linéariser les équations (36) et (37) :

$$\eta_t + h\bar{u}_x = 0.$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x - (1 + \alpha_B)\frac{h^2}{3}\bar{u}_{txx} - \alpha_B\frac{gh^2}{3}\eta_{xxx} = 0.$$

On pose

$$\eta(t, x) = a \sin(kx - \omega t), \quad \bar{u}(t, x) = b \sin(kx - \omega t),$$

et on substitue dans le système précédent, ce qui donne, après simplifications :

$$-\omega a + hkb = 0$$

$$-\omega b + gka - (1 + \alpha_B)\frac{h^2}{3}\omega k^2 b + \alpha_B\frac{gh^2}{3}k^3 a = 0.$$

Soit

$$\frac{\omega}{k} = h\frac{b}{a},$$

$$\frac{b}{a} = g\frac{k(1 + \alpha_B\frac{k^2 h^2}{3})}{\omega(1 + (1 + \alpha_B)\frac{k^2 h^2}{3})}.$$

On en déduit alors

$$C^2 = gh\frac{1 + \frac{\alpha_B}{3}k^2 h^2}{1 + \frac{1 + \alpha_B}{3}k^2 h^2}.$$

On peut alors en déduire la vitesse de groupe :

$$C_g = C \left(1 - \frac{k^2 h^2}{3(1 + \frac{\alpha_B}{3}k^2 h^2)(1 + \frac{1 + \alpha_B}{3}k^2 h^2)} \right).$$

5.2 Equations de Nwogu

Dans cette sous-partie, on va chercher à obtenir les équations de Nwogu. Il les a obtenus en dérivant les équations d'Euler et en utilisant la vitesse à une profondeur arbitraire (que nous noterons z_α) comme l'une des variables. La profondeur z_α peut être choisie de façon à optimiser les caractéristiques de dispersion des équations finales, nous verrons cela à la fin de cette partie.

5.2.1 Dérivation des équations

On repart des équations d'Euler adimensionnée comme pour les équations de Peregrine

$$\varepsilon \tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon^2 \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \varepsilon^2 \tilde{v} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \tilde{p}_{\tilde{x}} = 0 \quad (38)$$

$$\varepsilon \sigma^2 \tilde{v}_{\tilde{t}} + \varepsilon^2 \sigma^2 \tilde{u} \tilde{v}_{\tilde{x}} + \varepsilon^2 \sigma^2 \tilde{v} \tilde{v}_{\tilde{z}} + \tilde{p}_{\tilde{z}} + 1 = 0 \quad (39)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{z}} = 0 \quad (40)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} - \sigma^2 \tilde{v}_{\tilde{x}} = 0, \quad (41)$$

les conditions aux bords deviennent
à $\tilde{z} = \varepsilon \tilde{\eta}$

$$\tilde{v} = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \varepsilon \tilde{u} \tilde{\eta}_{\tilde{x}}, \quad (42)$$

$$\tilde{p} = 0. \quad (43)$$

Et à $\tilde{z} = -1$

$$\tilde{v} = 0. \quad (44)$$

En procédant de la même manière que pour les équations de Peregrine, on arrive à

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} = -\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left(\int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{u} d\tilde{z} \right). \quad (45)$$

On écrit maintenant le développement de Taylor de \tilde{u} en une profondeur quelconque z_α .

On va noter à partir de maintenant \tilde{U} la vitesse \tilde{u} en $\tilde{z} = \tilde{z}_\alpha$. Le développement est alors

$$\tilde{u} = \tilde{U} + (\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \dots$$

On va chercher à obtenir des expressions pour les dérivées de \tilde{u} , pour cela on intègre cette relation entre -1 et \tilde{z} , ce qui nous donne

$$\int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{u} d\tilde{z} = (\tilde{z}+1)\tilde{U} + \left[\frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)^2}{2} - \frac{(1 + \tilde{z}_\alpha)^2}{2} \right] \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \left[\frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)^3}{6} - \frac{(1 + \tilde{z}_\alpha)^3}{6} \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \dots$$

On remet cette expression dans l'équation (45)

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} = -\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left((\tilde{z}+1)\tilde{U} + \left[\frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)^2}{2} - \frac{(1 + \tilde{z}_\alpha)^2}{2} \right] \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \dots \right)$$

Ce qui nous donne

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} = -\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left((\tilde{z}_\alpha + 1)\tilde{U} - \frac{(1 + \tilde{z}_\alpha)^2}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} + \dots \right) = \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Pour obtenir une expression de la dérivée seconde par rapport à \tilde{z} , on dérive la formule obtenue pour $\tilde{u}_{\tilde{z}}$ (on utilise le théorème de Schwarz pour inverser

les dérivées par rapport à \tilde{z} et à \tilde{x} , et on substitue l'expression de $\tilde{u}_{\tilde{z}}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha}$, en faisant apparaître un $\mathcal{O}(\sigma^4)$. On obtient alors l'expression de la dérivée seconde :

$$\tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}} = -\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

Et, en dérivant une nouvelle fois, et en réitérant le même procédé, on obtient que

$$\tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}\tilde{z}} = \mathcal{O}(\sigma^4).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} = -\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\sigma^4), \quad \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}\tilde{z}}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} = \mathcal{O}(\sigma^4),$$

et toutes les dérivées supérieures sont aussi un $\mathcal{O}(\sigma^4)$. Ainsi

$$\tilde{u}_{\tilde{z}}|_{\tilde{z}=\tilde{z}_\alpha} = -\sigma^2 (\tilde{z}_\alpha + 1) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

On peut donc remettre l'expression de chaque dérivée dans le développement de Taylor de \tilde{u} . On obtient ainsi une expression de \tilde{u} en fonction de \tilde{U} et de ses dérivées (qui ne dépendent pas de \tilde{z}) :

$$\tilde{u} = \tilde{U} - \sigma^2 \left((\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)(1 + \tilde{z}_\alpha) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \mathcal{O}(\sigma^4).$$

Or, on a que

$$\tilde{v} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\int_{-1}^{\tilde{z}} \tilde{u} d\tilde{z} \right).$$

Ce qui donne

$$\tilde{v} = -(1 + \tilde{z})\tilde{U}_{\tilde{x}} + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

On substitue cette expression dans l'équation (39) :

$$\varepsilon \sigma^2 ((1 + \tilde{z})\tilde{U}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \mathcal{O}(\sigma^2)) + \tilde{p}_{\tilde{z}} + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \sigma^2) = 0.$$

On isole $\tilde{p}_{\tilde{z}}$ et on intègre entre \tilde{z} et $\varepsilon \tilde{\eta}$,

$$\tilde{p} = -\tilde{z} + \varepsilon \tilde{\eta} + \varepsilon \sigma^2 \left(\tilde{z} + \frac{\tilde{z}^2}{2} \right) \tilde{U}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon \sigma^4, \varepsilon^2 \sigma^2).$$

Ainsi, on obtient une expression de $\tilde{p}_{\tilde{x}}$:

$$\tilde{p}_{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \varepsilon \sigma^2 \left(\tilde{z} + \frac{\tilde{z}^2}{2} \right) \tilde{U}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon \sigma^4, \varepsilon^2 \sigma^2).$$

On remet enfin les expressions de \tilde{u} , \tilde{v} et $\tilde{p}_{\tilde{x}}$ dans l'équation (38) et on simplifie pour obtenir la première équation de Nwogu, en se souvenant que $\tilde{u}_{\tilde{z}} = \mathcal{O}(\sigma^2)$,

$$\tilde{U}_{\tilde{t}} + \varepsilon \tilde{U}_{\tilde{x}} + \tilde{\eta}_{\tilde{x}} + \sigma^2 \left(\frac{\tilde{z}_\alpha^2}{2} + \tilde{z}_\alpha \right) \tilde{U}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon \sigma^2, \sigma^4).$$

On va maintenant chercher à obtenir la seconde équation. Pour cela on intègre l'équation (40), on applique la formule de Leibnitz, et on utilise les conditions aux bords, pour obtenir l'habituelle formule

$$\tilde{\eta}_{\bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\int_{-1}^{\varepsilon \tilde{\eta}} \tilde{u} d\tilde{z} \right) = 0.$$

On remet alors l'expression de \tilde{u} obtenue précédemment en fonction de \tilde{U} . On obtient après simplifications la seconde équation :

$$\tilde{\eta}_{\bar{t}} + [(\varepsilon \tilde{\eta} + 1)\tilde{U}]_{\bar{x}} + \sigma^2 \left(\frac{\tilde{z}_{\alpha}^2}{2} + \tilde{z}_{\alpha} + \frac{1}{3} \right) \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4).$$

Le système d'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\bar{t}} + [(\varepsilon \tilde{\eta} + 1)\tilde{U}]_{\bar{x}} + \sigma^2 \left(\frac{\tilde{z}_{\alpha}^2}{2} + \tilde{z}_{\alpha} + \frac{1}{3} \right) \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} &= 0, \\ \tilde{U}_{\bar{t}} + \varepsilon \tilde{U}_{\bar{x}} + \tilde{\eta}_{\bar{x}} + \sigma^2 \left(\frac{\tilde{z}_{\alpha}^2}{2} + \tilde{z}_{\alpha} \right) \tilde{U}_{\bar{t}\bar{x}\bar{x}} &= 0 \end{aligned}$$

On peut maintenant revenir aux dimensions, ce qui donne

$$\eta_t + [(\eta + h)U]_x + \left(\frac{z_{\alpha}^2}{2} h + z_{\alpha} h^2 + \frac{h^3}{3} \right) U_{xxx} = 0 \quad (46)$$

$$U_t + UU_x + g\eta_x + \left(\frac{z_{\alpha}^2}{2} + z_{\alpha} h \right) U_{txx} = 0 \quad (47)$$

Enfin, on va poser $z_{\alpha} = \theta h$, avec $\theta \in [-1, 0]$, afin de faire apparaître un paramètre libre et neutre (θ en l'occurrence), ce qui nous donne comme équations

$$\eta_t + [(\eta + h)U]_x + \alpha h^3 U_{xxx} = 0 \quad (48)$$

$$U_t + UU_x + g\eta_x + \beta h^2 U_{txx} = 0 \quad (49)$$

où $\alpha = \theta^2/2 + \theta + 1/3$, et $\beta = \theta^2/2 + \theta$.

5.2.2 Etude de dispersion

Pour l'étude de la dispersion, on va partir des équations (48) et (49), comme dans les études précédentes, on va commencer par linéariser le système :

$$\eta_t + hU_x + \alpha h^3 U_{xxx} = 0$$

$$U_t + g\eta_x + \beta h^2 U_{txx} = 0.$$

Comme toujours, on pose

$$\eta(t, x) = a \sin(kx - \omega t), \quad U(t, x) = b \sin(kx - \omega t),$$

et on substitue dans les équations linéarisées, ce qui donne

$$-\omega a + hkb - \alpha h^3 k^3 b = 0$$

$$-\omega b + gka + \beta h^2 \omega k^2 = 0.$$

Cela nous amène à

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 - \alpha(kh)^2}{1 - \beta(kh)^2}.$$

Encore une fois, on en déduit la vitesse de groupe en utilisant la formule,

$$C_g = C \left(1 - \frac{k^2 h^2}{3(1 - \alpha k^2 h^2)(1 - \beta k^2 h^2)} \right).$$

Remarque 4 *On remarque que la formule de la vitesse de phase (et par conséquence directe, de la vitesse de groupe) des équations de Nwogu et de Beji-Nadaoka sont les mêmes, à condition de prendre*

$$\alpha = -\frac{\alpha_B}{3}, \quad \beta = -\frac{1 + \alpha_B}{3}.$$

En faisant ce choix, la relation $\alpha = \beta + 1/3$ est encore vérifiée. Dans un soucis de clarté, et pour coller aux notations de [7], on va poser, pour les équations de Nwogu et de Beji-Nadaoka,

$$C^2 = gh \frac{1 + Bk^2 h^2}{1 + (B + \frac{1}{3})k^2 h^2},$$

et

$$C_g = C \left(1 - \frac{k^2 h^2}{3(1 + Bk^2 h^2)(1 + (B + \frac{1}{3})k^2 h^2)} \right),$$

B étant une constante arbitraire que l'on choisira dans la partie suivante.

5.3 Comparaison avec la théorie d'Airy

Dans cette partie on étudie les équations de Nwogu et de Beji-Nadaoka, les expressions des vitesses de phase et de groupe étant les mêmes, on ne fera plus de différences et on les appellera équations de Boussinesq améliorées.

On va commencer par choisir une valeur pour le paramètre libre.

5.3.1 Choix du paramètre libre

On va chercher à déterminer une valeur de B qui soit cohérente avec la théorie d'Airy, donc telle que la fraction rationnelle qui est égale à C^2 (cf partie précédente) soit la plus proche de la vitesse de phase de la théorie d'Airy. Pour cela on va utiliser les approximant de Padé.

Cherchons l'approximant de Padé de la fonction $f : x \mapsto \tanh(x)/x$ d'ordre (2,2). On commence par noter le développement en série entière de la fonction f :

$$\frac{\tanh(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \mathcal{O}(x^5).$$

On cherche donc une fraction rationnelle telle que

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2} - 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} = \mathcal{O}(x^5),$$

soit, en remettant tout au même dénominateur,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 - (b_0 + b_1x + b_2x^2)\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right) = \mathcal{O}(x^5).$$

On identifie alors les coefficients des différentes puissances (en "oubliant" les termes en $\mathcal{O}(x^5)$), et on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{2}{15}b_0 &= \frac{b_2}{3} \\ b_1 &= 0 \\ a_2 &= b_2 - \frac{b_0}{3} \\ a_1 &= 0 \\ a_0 &= b_0 \end{cases}$$

On impose $b_0 = 1$, ce qui nous donne

$$\begin{cases} b_2 &= \frac{2}{5} \\ b_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{15} \\ a_1 &= 0 \\ a_0 &= 1 \end{cases}$$

On obtient alors l'approximant de Padé qui est

$$\frac{1 + \frac{x^2}{15}}{1 + \frac{2x^2}{5}}.$$

On choisit la constante B de façon à ce que C^2 soit égal à cette fraction rationnelle, donc

$$B = \frac{1}{15}.$$

On rappelle que $\beta = -(1/3 + B)$, le choix de β est donc (pour la théorie de Nwogu, en utilisant l'approximant de Padé)

$$\beta = -0.4.$$

On va ajouter une autre valeur de β que l'on trouve présentée comme une minimisation de l'erreur de la vitesse de phase dans [9] :

$$\beta_1 = -0.39.$$

Remarque 5 on remarque que $\beta = -(B + 1/3)$, on notera aussi $B + 1/3 = 0.4$ et $B + 1/3 = 0.39$.

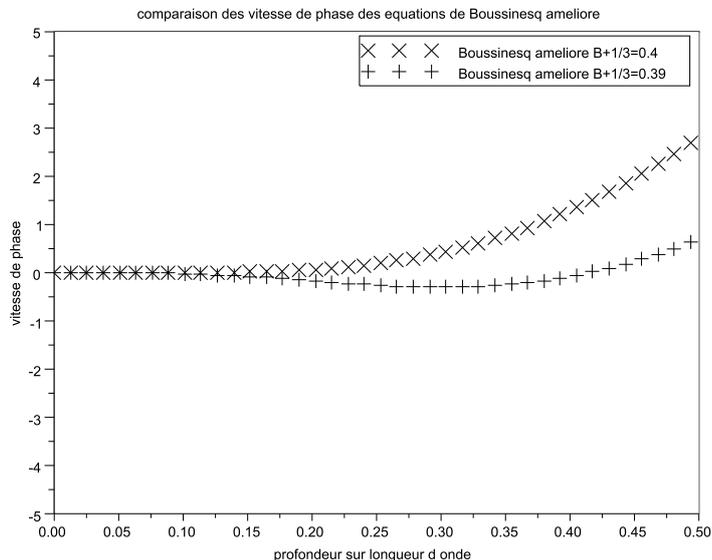


FIGURE 6 – Vitesse de phase des équations de Nwogu (Boussinesq amélioré)

5.3.2 Vitesse de phase

Dans cette partie on va comparer l'erreur relative de la vitesse de phase, pour les deux valeurs du paramètre β . On a tracé cela sur la figure 6. On remarque que la présence du paramètre influence énormément le comportement de cette erreur relative, puisque pour les deux valeurs de β , l'erreur reste en dessous de 5% pour $\sigma < 0.5$. La vitesse de phase a donc un comportement plus en adéquation avec la théorie linéaire d'Airy. De plus, il semble que le choix de β_1 soit le plus approprié pour minimiser l'erreur (a priori c'est normal car il a été choisi pour cela).

5.3.3 Vitesse de groupe

Étudions maintenant la vitesse de groupe de ces équations. On a tracé cela sur la figure 7.

Encore une fois l'erreur relative est plus grande plus "loin" pour ces équations. En effet elle reste en dessous de 10% pour des valeurs de σ inférieure à 0.37. Et là encore, le choix de 0.39 est plus adéquate, car l'erreur dépasse 10% que pour $\sigma = 0.47$.

L'avantage de ces équations vient du paramètre libre qui peut être choisi en fonction des caractéristiques que l'on souhaite mettre en valeur.

Pour conclure cette partie, on a vu que les équations de Boussinesq améliorées sont meilleures pour des valeurs de σ plus grandes, donc pour de plus grandes profondeurs. Le choix du paramètre s'avère très utile et très efficace pour améliorer les caractéristiques de dispersion linéaire.

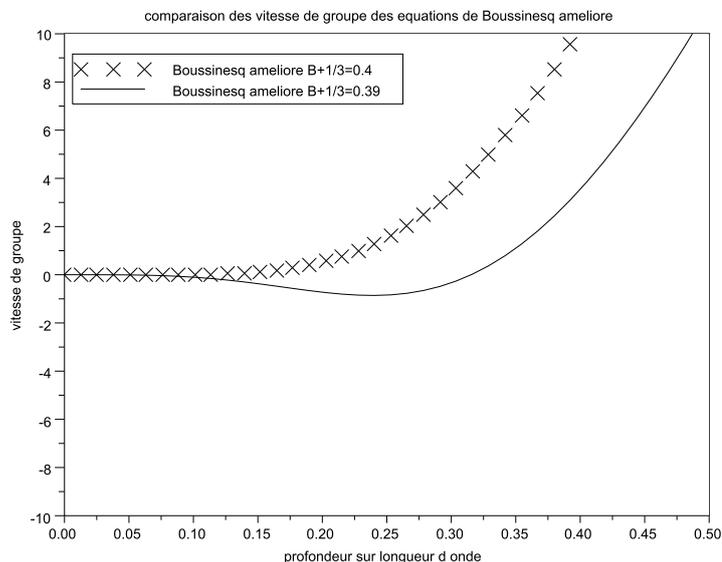


FIGURE 7 – Vitesse de groupe des équations de Nwogu (Boussinesq amélioré)

6 Cas où la profondeur h n'est pas constante (le fond n'est pas horizontal)

Dans cette partie, on ne va pas refaire tous les calculs qui permettent d'arriver aux différentes équations présentées précédemment. On va simplement donner les équations dans le cas où le paramètre h dépend de x . Les équations d'Euler sont les mêmes dans ce contexte, seule la condition en $z = -h(x)$ change, elle devient

$$v = -uh_x.$$

On change également l'adimensionnement. On ne divise plus par h (on pouvait le faire car c'était une constante), à présent, on divise par h_0 qui est la valeur moyenne de la fonction h (les paramètres ε et σ se définissent aussi avec h_0 , qui remplace h).

6.1 Equations "Shallow Water"

C'est le cas le plus simple, car les équations sont les mêmes dans le cas où h est une constante ou non. On a alors

$$\eta_t + [u(\eta + h)]_x = 0$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x = 0,$$

u étant une fonction que de x et t .

Attention ! Les équations s'écrivent de la même façon mais lorsque l'on développe la dérivée de la première équation, des termes supplémentaires apparaissent (car $h_x \neq 0$).

6.2 Equations de Peregrine

En reprenant les mêmes notations que dans la partie 4.1, on peut écrire les équations plus générales avec h qui dépend de x ,

$$\eta_t + [(h + \eta)\bar{u}]_x = 0$$

$$\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + g\eta_x + \frac{h^2}{6}\bar{u}_{txx} - \frac{h}{2}[h\bar{u}]_{txx} = 0.$$

6.3 Equations de Green-Naghdi

On peut également trouver une expression des équations de Green-Naghdi pour un fond non horizontal, les équations sont alors (en se rappelant que $H = h + \eta$)

$$\eta_t + [(h + \eta)\bar{u}]_x = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + g\eta_x + \bar{u}\bar{u}_x - \frac{1}{3H} \left(H^3(\bar{u}\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{xt} - (\bar{u}_x)^2) \right)_x + \\ \frac{1}{2H} \left([H^2(u\partial_x)^2 h]_x - H^2 h_x (u u_{xx} - u_x^2) + [H^2 h_x u_t]_x - H^2 h_x u_{tx} \right) + h_x^2 u_t + ((u\partial_x)^2 h) h_x = 0 \end{aligned}$$

6.4 Equations de Beji et Nadaoka

On reprend les mêmes notations que dans la partie 5.1, et après avoir refait les mêmes calculs en tenant compte de ce qui précède, on obtient les équations suivantes

$$\eta_t + [(h + \eta)\bar{u}]_x = 0$$

$$\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + g\eta_x - (1 + \alpha_B) \left(\frac{h^2}{6}\bar{u}_{txx} - \frac{h}{2}[h\bar{u}]_{txx} \right) + g\alpha_B \left(\frac{h^2}{6}\eta_{xxx} - \frac{h}{2}[h\eta_x]_{xx} \right) = 0.$$

6.5 Equations de Nwogu

Là encore, on réécrit les équations obtenues précédemment, avec les mêmes notations, mais avec h non constant, ce qui donne, en prenant un z_α arbitraire

$$\eta_t + [(h + \eta)U]_x + \left[\left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h [hU]_{xx} + \left(\frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h U_{xx} \right]_x = 0$$

$$U_t + UU_x + g\eta_x + z_\alpha [hU_t]_{xx} + \frac{z_\alpha^2}{2} U_{txx} = 0.$$

Si on pose maintenant $z_\alpha = \theta h$, avec $\theta \in [-1, 0]$, les équations s'écrivent

$$\eta_t + [(h + \eta)U]_x + [\alpha_1 h^2 [hU]_{xx} + \alpha_2 h^3 U_{xx}]_x = 0$$

$$U_t + UU_x + g\eta_x + \beta_1 h [hU_t]_{xx} + \beta_2 h^2 U_{txx} = 0,$$

avec

$$\alpha_1 = \theta + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{6};$$

$$\beta_1 = \theta, \quad \beta_2 = \frac{\theta^2}{2}.$$

7 Gradient de "shoaling"

Le gradient de shoaling est un moyen de comparer les caractéristiques des équations, en considérant cette fois-ci un fond non constant.

Définition 3 On appelle gradient de "shoaling", et on le note s , le rapport entre la variation de l'amplitude de la vague et la variation de la profondeur. Il est défini par la formule :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + s \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

7.1 Théorie d'Airy

Dans cette partie, on va chercher la valeur du gradient dans la théorie d'Airy (qui sera encore la valeur de référence). Pour cela on rappelle que

$$C_{Airy}^2 = gh \frac{\tanh(kh)}{kh}, \quad C_{g\,Airy} = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) = CF(\phi),$$

avec $\phi = kh$, et $F(\phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\phi}{\sinh(2\phi)} \right)$.

On considère un train de vagues de fréquence constante ω , de nombre d'onde $k(x)$ (dépend de x), d'amplitude $a(x)$ et de profondeur $-h(x)$.

La conservation du flux d'énergie peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} (a^2 C_g) = 0.$$

Après simplifications, on obtient

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2C_g} \frac{\partial C_g}{\partial x} = 0. \quad (50)$$

On va chercher à exprimer $\frac{1}{2C_g} \frac{\partial C_g}{\partial x}$ en fonction de $\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x}$ et de $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}$. Pour cela on note que $C_g = CF(\phi)$, donc

$$\frac{1}{C_g} \frac{\partial C_g}{\partial x} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Or,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega}{k} \right) = -\frac{\omega}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0. \quad (51)$$

On va maintenant chercher une expression de $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{2\phi(\sinh(2\phi) - 2\phi \cosh(2\phi))}{\sinh(2\phi)(\sinh(2\phi) + 2\phi)} \right).$$

De plus, par définition de ϕ , on a

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (52)$$

On va exprimer $\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ en fonction de $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}$, ainsi on aura une relation entre $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x}$. Pour cela on utilise la définition de C :

$$\frac{\omega^2 h}{g} = \phi \tanh(\phi). \quad (53)$$

On dérive par rapport à x

$$\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} (\phi \tanh(\phi)).$$

On y substitue l'équation (53), pour éliminer les ω , ce qui donne :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \tanh(\phi) = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} (\tanh(\phi) + \phi(1 - \tanh^2(\phi))).$$

En remettant l'expression (52), on obtient la relation entre la dérivée de h et k :

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = \left(\frac{-2\phi}{2\phi + \sinh(2\phi)} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

On remet toutes les expressions dans l'équation (50), on obtient

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{2\phi(\sinh(2\phi) + \phi(1 - \cosh(2\phi)))}{(2\phi + \sinh(2\phi))^2} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

On en déduit, par définition, que le gradient de "shoaling" est :

$$s = \frac{2\phi(\sinh(2\phi) + \phi(1 - \cosh(2\phi)))}{(2\phi + \sinh(2\phi))^2}.$$

A présent on va chercher ce gradient de shoaling pour chaque type d'équations. Le calcul se fait par le même algorithme utilisé ci-dessus. On utilise uniquement les expressions de la vitesse de phase, et de la vitesse de groupe. On fera les calculs que pour les équations de Shallow water, de Boussinesq et de Boussinesq étendue.

7.2 Equations de "shallow" water

7.2.1 Calcul du gradient de shoaling

On a vu précédemment que

$$C_g = C.$$

Donc dans ce cas particulier F est la fonction constante égale à 1, ce qui va grandement simplifier les calculs. Si on reprend les calculs précédent, on a :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2C_g} \frac{\partial C_g}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

Cherchons une relation entre la dérivée de k et de h . Pour cela, on remarque que

$$\frac{\omega^2 h}{g} = \phi^2.$$

On dérive cette expression par rapport à x , puis on élimine les ω , comme précédemment, ce qui donne :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

En remettant dans l'équation (54), on obtient par identification le gradient de shoaling :

$$s = \frac{1}{4}.$$

7.3 Equations de Boussinesq

7.3.1 Calcul du gradient de shoaling

On rappelle que

$$C^2 = \frac{gh}{1 + \frac{\phi^2}{3}}, \quad C_g = C \frac{3}{3 + \phi^2}.$$

Donc dans ce cas,

$$F(\phi) = \frac{3}{3 + \phi^2}.$$

On va réutiliser l'équation (51), en y remettant les expressions de $\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x}$ et de $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \phi} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{6\phi}{(3 + \phi^2)^2}.$$

On en déduit alors que :

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{2\phi^2}{3 + \phi^2}.$$

On repart de l'expression de C^2 pour trouver une expression du gradient de ϕ .

$$\frac{\omega^2}{g} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{6\phi(3 + \phi^2) - 6\phi^3}{(3 + \phi^2)^2}.$$

Donc en éliminant $\frac{\omega^2}{g}$ à partir de l'expression de la vitesse de phase, on obtient :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 2 \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{3}{3 + \phi^2}.$$

En utilisant l'équation (52), on a

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi^2}{3} - 1 \right) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

En substituant dans l'équation (51), on trouve le gradient de shoaling pour les équations de Boussinesq :

$$s = \frac{1}{4}(1 - \phi^2).$$

7.4 Equations de Boussinesq étendue

7.4.1 Calcul du gradient de shoaling

On rappelle que :

$$C^2 = gh \frac{1 - \alpha\phi^2}{1 - \beta\phi^2}, \quad C_g = C \left(1 - \frac{\phi^2}{3(1 - \alpha\phi^2)(1 - \beta\phi^2)} \right).$$

Pour coller aux notation de [9], on pose

$$P = 1 - \beta\phi^2, \quad Q = 1 - \alpha\phi^2.$$

Comme précédemment, on calcule la dérivée de F par rapport à x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{6\phi PQ + 3\phi^2(2\beta\phi Q + 2\alpha\phi P)}{9P^2Q^2} \right).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = A_1 \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\text{où } A_1 = -\frac{2\phi^2}{PQ} \left(\frac{1 - \alpha\beta\phi^4}{3PQ - \phi^2} \right).$$

En utilisant l'expression de la vitesse de phase, et la relation (52), on obtient les deux formules :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{A_2} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\text{où } A_2 = \frac{2}{PQ}(1 + \alpha(\beta\phi^2 - 2)\phi^2).$$

On remet toutes ces expressions dans l'équation (51), on en déduit le gradient de shoaling :

$$s = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_1 - 1}{A_2} \right).$$

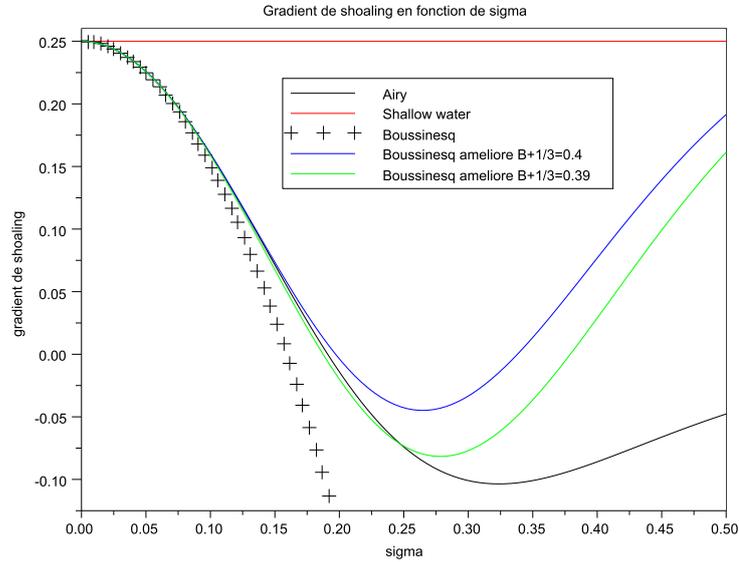


FIGURE 8 – Gradient de shoaling des différentes équations

7.5 Comparaison avec la théorie d'Airy

Pour comparer les gradients de shoaling, on les a tracé en fonction du paramètre σ sur la figure 8.

Ce critère de validation des modèles est plus restrictif que ceux basé sur la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

En effet si on observe le gradient de shoaling du modèle de shallow water, on remarque que dès $\sigma = 0.05$ la différence avec la théorie d'Airy est importante. Pour les équations de Boussinesq, l'écart devient très grand dès $\sigma = 0.2$, alors que pour la vitesse de phase, elles restaient valides jusque 0.3. Les différences sont plus grandes lorsque l'on regarde les équations de Boussinesq étendues, qui sont valides jusque 0.5 pour la vitesse de phase et 0.4 pour la vitesse de groupe. En effet pour le gradient de shoaling, le comportement n'est plus correcte aux environs de $\sigma = 0.3$, pour les deux valeurs de coefficient.

Il serait intéressant de savoir si on peut améliorer le gradient en changeant le paramètre libre, en risquant de perdre de la précision sur la vitesse de phase et/ou la vitesse de groupe.

Références

- [1] Fabrice Ardhuin. Les vagues : un compartiment important du système terre, 2012.
- [2] Eric Barthélemy. Nonlinear shallow water theories for costal waves. *Surveys in Geophysics*, 25, 2003.
- [3] D. Ionescu-Kruse. A new two-component system modelling shallow-water waves. *Quarterly of applied Mathematics*, 2013.
- [4] J.W. Kim, K.J. Bai, R.C. Ertekin, and W.C. Webster. A derivation of the green-naghdi equations for irrotational flows. *Journal of Engineering Mathematics*, 40, 2001.
- [5] D. Lannes and P. Bonneton. Derivation of asymptotic two-dimensional time-dependent equations for surface water wave propagation. *Physics of fluids*, 21, 2009.
- [6] M.S. Longuet-Higgins. A theory of the origin of microseisms. *Philosophical transactions of the royal society of london*, 243 :1–35, 1950.
- [7] A. Madsen, R.Murray, and O.R. Sorensen. A new form of the boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal engineering*, 15, 1991.
- [8] J.J. Stoker. *Water Waves The Mathematical Theory with Applications*. Wiley Classics Library Edition, 1992.
- [9] Mark Andrew Walkley. *A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations*. PhD thesis, University of Leeds, 1999.



**RESEARCH CENTRE
BORDEAUX – SUD-OUEST**

351, Cours de la Libération
Bâtiment A 29
33405 Talence Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399