Le jeu des Kirlis et des Gourlus

Corinne Touati

Le Jeu des Kirlis et des Gourlus

Corinne Touati, Inria, 2013

But:

- Familiarisation avec l'utilisation d'arbres de décisions et / ou de tableaux (matrices).
- Calculs élémentaires de probabilités, interprétation de la notion de gain moyen / gain escompté.

Consignes générales:
Pour chaque jeu, les élèves, répartis en 2 groupes (villages) doivent pouvoir prendre le temps de la réflexion et d'élaboration de stratégies. Il est possible de répéter le jeu plusieurs fois pour voir l'évolution des stratégies mais 2 aspects doivent être bien précisés aux élèves:

Principe 1 A chaque fois, le but de chaque village n'est pas de marquer plus de points que l'adversaire mais uniquement de marquer le plus de points possibles. On ne s'intéresse qu'à son propre gain.

Principe 2 On peut rejouer chaque round autant de fois que voulues mais la stratégie que l'on cherche est celle qui optimise le gain à l'instant présent. On ne cherche donc pas de stratégie impliquant des intimidations ou des menaces sur le long terme.

---

1 Premier round: Est il préférable de se développer ou d'attaquer?

Les cartes de jeux donnent les règles du premier scénario.

Village des Gourlus

Vous voulez œuvrer pour le développement de votre ville. Vous êtes face au village des Kirlis mais une montagne vous sépare, et vous ne pouvez pas voir ce qu'ils préparent...

Pour gagner des points, chaque village peut:
- **soit attaquer l'autre** (pour voler ses biens),
- **soit développer sa propre ville**.

Les règles sont les suivantes:

- Si les 2 villages se développent pacifiquement, alors ils **gagnent chacun 8 points**.
- Si les 2 villages attaquent, alors à l'issue de la bataille, chaque village **perd 4 points**.
- Si un seul village attaque, il bénéficie alors de l'effet de surprise et **prend 10 points** à son adversaire (qui perd donc 10 points).

Que décidez vous? Attaquez-vous ou vous développez-vous?

Village des Kirlis

Vous voulez œuvrer pour le développement de votre ville. Vous êtes face au village des Gourlus mais une montagne vous sépare, et vous ne pouvez pas voir ce qu'ils préparent...

Pour gagner des points, chaque village peut:
- **soit attaquer l'autre** (pour voler ses biens),
- **soit développer sa propre ville**.

Les règles sont les suivantes:

- Si les 2 villages se développent pacifiquement, alors ils **gagnent chacun 8 points**.
- Si les 2 villages attaquent, alors à l'issue de la bataille, chaque village **perd 4 points**.
- Si un seul village attaque, il bénéficie alors de l'effet de surprise et **prend 10 points** à son adversaire (qui perd donc 10 points).

Que décidez vous? Attaquez-vous ou vous développez-vous?

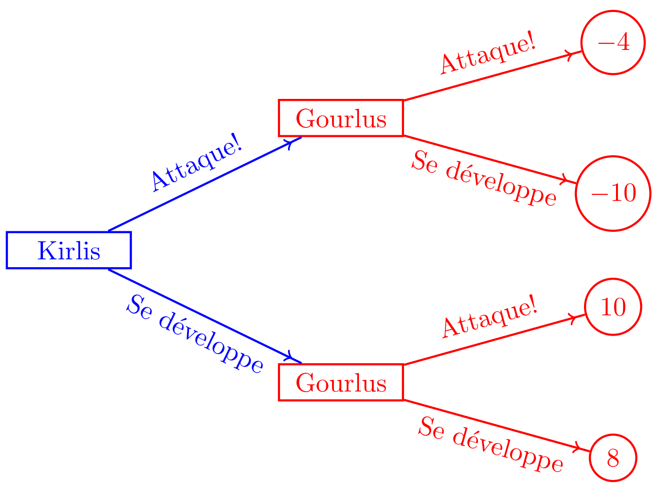
Quelles que soient les stratégies choisies par les élèves lors du premier jeu, on les incite à raisonner sur combien ils ont obtenus et combien ils auraient obtenus s'ils avaient joués différemment. Ainsi, si par exemple les deux équipes ont choisi d'être pacifiques, on propose de recommencer le jeu. Avant qu'ils ne prennent leur décision, on demande à chaque équipe (séparément) si elle pense que l'autre village va de nouveau être pacifique. Si c'est le cas, a t'elle envie de jouer à nouveau de se développer (et gagner 8 points) ou d'attaquer (et gagner alors 10 points)? Inversement, si elle pense que l'autre équipe va les attaquer, est-il raisonnable de continuer à se développer (et perdre 10 points) ou vaut-il mieux l'attaquer également et ne perdre que 4 points?

A ce stade, il est souvent utile de bien repréciser les 2 principes de base du jeu (l'équipe ayant obtenu un meilleur score la première fois a souvent tendance à vouloir "gérer" son avance). Normalement au bout de 2 ou 3 répétitions du jeu, les élèves arrivent naturellement à la stratégie d'équilibre qui est l'attaque réciproque.

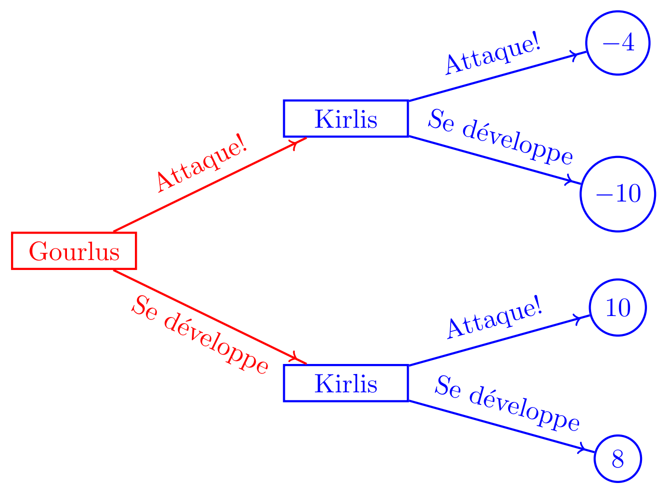
On peut alors passer à l'analyse du résultat obtenu. Cet exemple est une reformulation du célèbre "dilemme du prisonnier", c'est-à-dire que la situation d'équilibre est néfaste pour les deux équipes. Effectivement, en raisonnant individuellement, chaque village perd 4 points alors qu'en raisonnant pour le bien être collectif, chaque village aurait pu en gagner 8. Si le temps le permet on peut faire réfléchir les élèves à d'autres situations qu'ils connaissent dans lesquelles ce type de phénomène apparaît.

Vient enfin la représentation mathématique du jeu. Deux représentations équivalentes sont possibles. Soit la représentation par arbre qu'ils ont généralement utilisés dans le cas de calculs de probabilités, soit la représentation par tableaux.

Dans la représentation par arbre, chaque niveau de l'arbre est contrôlé par une équipe et chaque branche correspond à une décision. Le résultat est donné sur les figures ci-dessous. Sur les deux arbres, dans chaque niveau inférieur, on voit alors que la stratégie "Attaque!" est plus avantageuse que la stratégie "Se développe". La stratégie des deux villages est donc d'attaquer ce qui mène a **une perte de 4 points pour chaque village**.



(a) Le jeu vu par les Gourlus



(b) Le jeu vu par les Kirlis

Dans la représentation par tableau, les stratégies des équipes se traduisent par le choix d'une ligne du tableau (pour les Gourlus) et d'une colonne (pour les Kirlis). Le couple (ligne choisie - colonne choisie) détermine alors une case du tableau, qui est le nombre de points gagnés par l'équipe.

On voit alors que dans le tableau des Gourlus, pour chaque colonne, les nombres de la 1$^{\text{ère}}$ ligne sont supérieurs à ceux de la seconde, c'est-à-dire que la stratégie "attaquer" est meilleure quelle que soit le choix de la colonne fait par les Kirlis. De la même façon dans le tableau des Kirlis (qui choisissent la colonne) les nombres de la première colonne sont plus grands que ceux de la seconde pour chaque ligne: la stratégie "attaquer" est également meilleure pour les Kirlis.

	Attaque!	Se développe
Attaque!	−4	10
Se développe	−10	8

(c) Le jeu vu par les Gourlus

	Attaque!	Se développe
Attaque!	−4	−10
Se développe	10	8

(d) Le jeu vu par les Kirlis

2 Deuxième round: l'impact de l'arme atomique

Ce second scénario est similaire au premier, mais avec des nombres de points différents.

Village des Gourlus - Attention au savant fou!

Patou, le savant fou donne aux 2 villages le secret de l'énergie nucléaire!

- Grâce à cette invention, en temps de paix les 2 villages peuvent se développer plus vite, grâce à l'électricité des centrales nucléaires. Alors si les deux villages sont pacifiques, ils gagnent chacun **14 points**.
- Mais en cas de guerre entre les 2 villages, les conséquences sont désastreuses à cause de l'utilisation de la bombe atomique! Ainsi si les deux villages attaquent, à l'issue de la bataille, ils perdent chacun **20 points**.
- Si un village attaque alors que l'autre est pacifique, alors comme précédemment l'attaquant bénéficie de l'effet de surprise et n'a pas besoin de recourir à l'arme atomique. Comme précédemment, il prend **10 points** à son adversaire.

Que décidez vous?

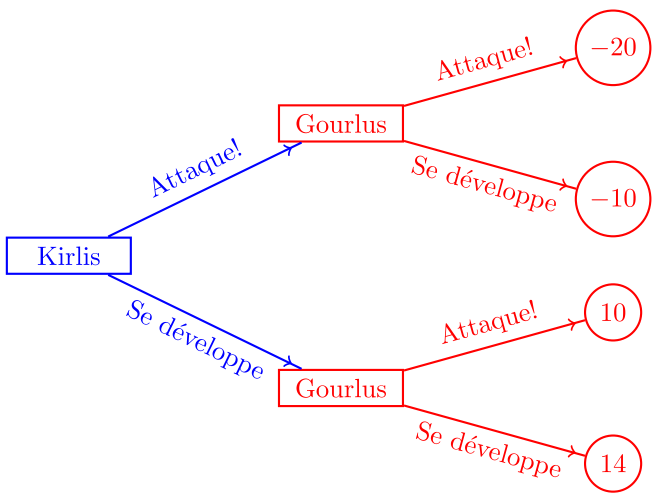
Village des Kirlis - Attention au savant fou!

Patou, le savant fou donne aux 2 villages le secret de l'énergie nucléaire!

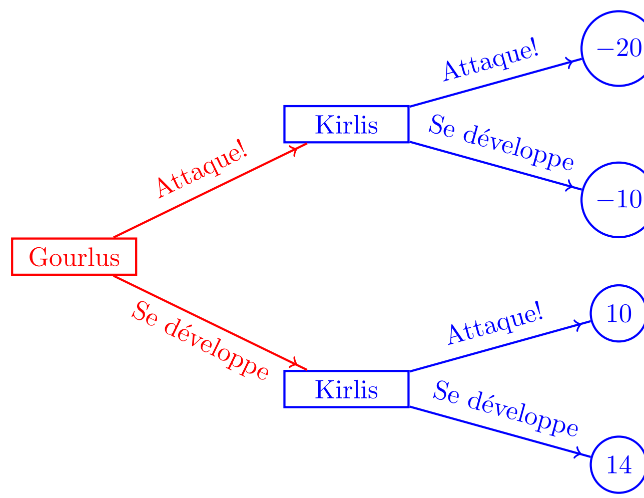
- Grâce à cette invention, en temps de paix les 2 villages peuvent se développer plus vite, grâce à l'électricité des centrales nucléaires. Alors si les deux villages sont pacifiques, ils gagnent chacun **14 points**.
- Mais en cas de guerre entre les 2 villages, les conséquences sont désastreuses à cause de l'utilisation de la bombe atomique! Ainsi si les deux villages attaquent, à l'issue de la bataille, ils perdent chacun **20 points**.
- Si un village attaque alors que l'autre est pacifique, alors comme précédemment l'attaquant bénéficie de l'effet de surprise et n'a pas besoin de recourir à l'arme atomique. Comme précédemment, il prend **10 points** à son adversaire.

Que décidez vous?

Cette fois-ci, les élèves suivent généralement par eux-mêmes le même raisonnement qu'au premier round et arrivent directement à la situation d'équilibre qui est le développement des deux villages avec **un gain de 14 points** chacun. Les représentations par arbres et par tableaux sont données ci-dessous et ne présentent pas de difficulté particulière.



(e) Le jeu vu par les Gourlus



(f) Le jeu vu par les Kirlis

	Attaque!	Se développe
Attaque!	−20	10
Se développe	−10	14

(g) Le jeu vu par les Gourlus

	Attaque!	Se développe
Attaque!	−20	−10
Se développe	10	14

(h) Le jeu vu par les Kirlis

Une fois le jeu résolu on se questionne sur le résultat obtenu. Cette fois-ci l'équilibre égoïste obtenu correspond au point qui est globalement efficace. Il est généralement difficile de prédire sans étudier un jeu quelles seront les propriétés de ses équilibres: quelquefois ils sont efficaces, d'autre fois, ils ne le sont pas!

3 Troisième round: L'incertitude sur les valeurs du jeu

Ce troisième scénario est une combinaison des deux premiers. C'est l'occasion de réviser les concepts vus en cours de probabilités et leur lien avec les expressions du langage courant ("une chance sur deux"). Dans la mise en pratique le hasard du jeu peut être simulé par un tirage à pile ou face ou un lancement de dés.

Village des Gourlus - Patou s'est peut être trompé!

En fait, il est de notoriété publique que Patou dit quelquefois des bêtises, et il y a **une chance sur deux** pour que le savant se soit trompé en fournissant les codes nucléaires! Les Gourlus et les Kirlis le savent bien!

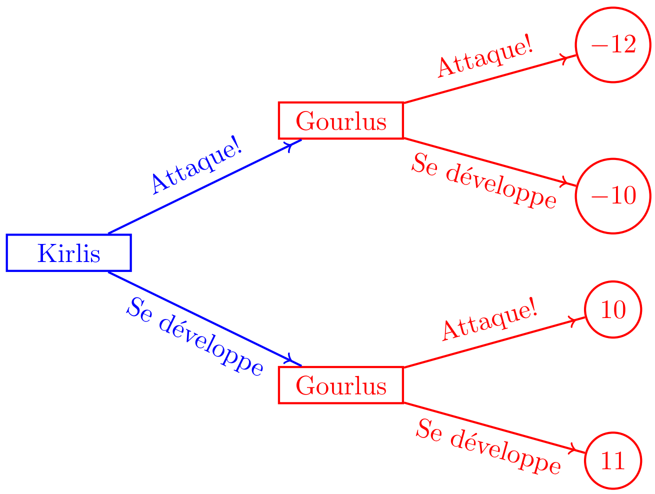
Que décidez vous?

Village des Kirlis - Patou s'est peut être trompé!

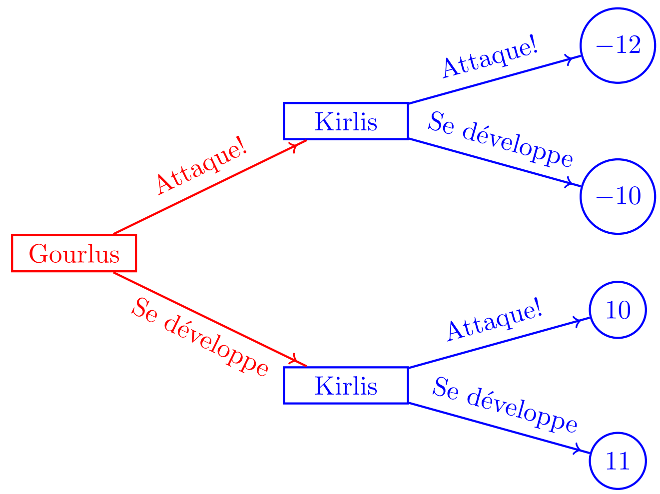
En fait, il est de notoriété publique que Patou dit quelquefois des bêtises, et il y a **une chance sur deux** pour que le savant se soit trompé en fournissant les codes nucléaires! Les Gourlus et les Kirlis le savent bien!

Que décidez vous?

La difficulté est alors de comprendre que tout se passe "comme si" on avait un nouveau round de jeu dans lequel pour chaque paire d'actions, le nombre de points obtenus était la moyenne des points des deux scénarios précédents. Ainsi, si les deux villages se développent pacifiquement, alors ils gagnent chacun $\frac{8+14}{2} = 11$ points. Ceci étant acquis, on peut alors construire les arbres et les tableaux du jeu.



(i) Le jeu vu par les Gourlus



(j) Le jeu vu par les Kirlis

	Attaque!	Se développe
Attaque!	-12	10
Se développe	-10	11

(k) Le jeu vu par les Gourlus

	Attaque!	Se développe
Attaque!	-12	-10
Se développe	10	11

(l) Le jeu vu par les Kirlis

L'équilibre obtenu est alors la stratégie pacifique pour chaque village. **Les deux villages remportent 11 points**.

4 Quatrième round: Asymétrie de l'information

Dans ce round, il y a asymétrie de l'information:

- Les Gourlus savent si les codes nucléaires sont justes ou faux,
- Les Kirlis l'ignorent,
- Les Kirlis savent que les Gourlus savent si les codes nucléaires sont justes ou faux (et donc qu'ils vont jouer en conséquence) et les Gourlus savent que les Kirlis n'ont pu vérifier l'information des codes nucléaires, et savent également que les Kirlis savent que les Gourlus ont percé les codes nucléaires (et ainsi de suite).

Village des Gourlus - Patou s'est peut être trompé! (2)

En fait, il est de notoriété publique que Patou dit quelquefois des bêtises, et il y a **une chance sur deux** pour que le savant se soit trompé dans ses codes nucléaires! Les Gourlus et les Kirlis le savent bien!

Heureusement, votre village des Gourlus est mondialement connu pour la qualité de ses chercheurs en physique nucléaire. Vous avez donc pu vérifier l'exactitude des codes de Patou et savez si le secret du nucléaire est révélé ou non!

Le village des Kirlis, lui, est célèbre pour ses mathématiciens. Malheureusement, cela ne lui permet pas de savoir si le secret du nucléaire est percé. ☹

Que décidez vous?

Village des Kirlis - Patou s'est peut être trompé! (2)

En fait, il est de notoriété publique que Patou dit quelquefois des bêtises, et il y a **une chance sur deux** pour que le savant se soit trompé dans ses codes nucléaires! Les Gourlus et les Kirlis le savent bien!

Le village des Gourlus est mondialement connu pour la qualité de ses chercheurs en physique nucléaire. Il a donc pu vérifier l'exactitude des codes de Patou et sait si le secret du nucléaire est révélé ou non!

Votre village des Kirlis, lui, est célèbre pour ses mathématiciens. Malheureusement, cela ne vous permet pas de savoir si le secret du nucléaire est percé. ☹

Que décidez vous?

Le traitement de ce cas est assez difficile, et les élèves ont généralement besoin d'être guidés. Les représentations précédentes ne s'appliquent pas et il faut donc raisonner un peu différemment. Cela peut se faire en deux étapes.

Étape 1: La stratégie des Gourlus. On reprend ce que l'on a vu dans les rounds 1 et 2. Ainsi, si les codes sont faux, qu'importe l'action des Kirlis, les Gourlus ont toujours intérêt à attaquer. Inversement, si les codes sont justes, les Gourlus ont intérêt dans tous les cas à être pacifique.

Étape 2: La stratégie des Kirlis. Les Kirlis ne peuvent vérifier les codes et donc ne peuvent adapter leur stratégie en fonction du résultat du tirage du dé. Ils doivent décider soit de toujours attaquer, soit de toujours être pacifiques. (Ils pourraient également tirer au sort leur décision, mais nous allons voir que dans ce cas, ceci ne serait pas une bonne stratégie.)

- **Si les Kirlis attaquent toujours**, alors avec probabilité 0.5 les codes sont justes et les Gourlus jouent donc "pacifique", et avec probabilité 0.5 les codes sont faux et les Gourlus attaquent: le gain moyen des Kirlis est donc de: $\frac{10-4}{2} = 3$.
- **Si les Kirlis défendent toujours**, alors le même raisonnement conduit à un gain moyen de $\frac{14-10}{2} = 2$.

Ainsi la meilleure stratégie pour les Kirlis est de toujours attaquer, ce qui leur donne un gain moyen de 3 points. On peut voir avec les élèves qu'une stratégie aléatoire pour les Kirlis est forcément moins bonne car si on note p la probabilité d'attaquer, alors le gain des Kirlis devient $3.p + 2(1-p) = 2 + p$. Or comme p est une probabilité alors $p \leq 1$.

On en déduit le gain moyen des Gourlus étant donné leur stratégie vue en première étape: $\frac{-4-10}{2} = -7$ points. Ainsi en moyenne **les Kirlis gagnent 3 points alors que les Gourlus en perdent 7**.

Ce résultat est contre-intuitif: les Gourlus, qui ont plus d'information que les Kirlis sont pénalisés par cette information, ou plus exactement ils sont pénalisés par le fait que les Kirlis savent que les Gourlus ont l'information et donc les Kirlis jouent en conséquence en attaquant plutôt qu'en défendant comme ils le faisaient au round précédent. C'est ce changement d'attitude des Kirlis qui est néfaste aux Gourlus et qui leur enlève l'avantage que leur procurait l'information.

5 Cinquième round: Les deux villages ont l'information

On termine alors avec ce dernier scénario dans lequel les deux villages savent si les codes nucléaires sont justes. Le gain moyen des villages est alors la moyenne des gains des villages dans les deux premiers rounds. En effet:

- **Soit les codes sont faux**, alors tout se passe comme au round 1 et les deux villages attaquent: ils perdent chacun 4 points.
- **Soit les codes sont justes** et tout se passe comme au round 2 : les deux villages gagnent 14 points.

Comme l'occurrence des deux événements est de probabilité 1/2 alors le gain moyen est de $\frac{14-4}{2} =$ **5 points pour chaque village**.

Le résultat est paradoxal: en effet quand les deux villages ont l'information, ils ne gagnent chacun que 5 points alors que quand ils étaient ignorants (round 3) leur gain était de 11 points! L'information a donc été néfaste à tous les deux.