



## Sur les éléments finis de Lagrange pyramidaux

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Sur les éléments finis de Lagrange pyramidaux. [Rapport de recherche] RR-8525, INRIA. 2014, pp.21. <hal-00982190>

**HAL Id: hal-00982190**

**<https://hal.inria.fr/hal-00982190>**

Submitted on 23 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Sur les éléments finis de Lagrange pyramidaux.

Paul Louis George, Houman Borouchaki

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8525**

Avril 2014

Project-Team Gamma3





## Sur les éléments finis de Lagrange pyramidaux.

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8525 — Avril 2014 — 21 pages

**Résumé :** Ce rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis classiques de Lagrange de degré 1 et 2. On revient ici sur le cas des pyramides. Plusieurs définitions existent pour obtenir un élément fini de ce type. Ces définitions sont peu évidentes et présentent des singularités, on se demande alors s'il n'est pas possible de trouver d'autres définitions *a priori* plus simples.

**Mots-clés :** Éléments finis de Lagrange. Pyramide de degré 1. Pyramides de degré 2.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

## About pyramids.

**Abstract:** Following our previous reports related to classical Lagrange finite elements of degree 1 and 2, we return to the case of pyramids. Various different definitions exist resulting in singularities, therefore we aim at finding a as simple as possible definition.

**Key-words:** Lagrange Finite Element. Degree 1 pyramid. Degree 2 pyramids.



FIG. 1 – Les pyramides de Gizeh.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Pyramide de Lagrange de degré 1</b>	<b>3</b>
2.1	Construction de l'élément fini . . . . .	3
2.2	Analyse du jacobien . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Pyramide de Lagrange de degré 2</b>	<b>8</b>
3.1	Construction de l'élément fini . . . . .	8
3.2	Analyse du jacobien . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Une pyramide à 17 nœuds</b>	<b>16</b>
4.1	Construction de l'élément, méthode 1 . . . . .	16
4.2	Construction de l'élément, méthode 2 . . . . .	17
4.3	Analyse du jacobien . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Une pyramide à 13 nœuds</b>	<b>19</b>
5.1	Construction de l'élément . . . . .	19
5.2	Analyse du jacobien . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>

## 1 Introduction

Les éléments pyramidaux sont utiles pour permettre la construction de maillages *conformes* mélangeant tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres utilisés avec plus ou moins de bonheur dans certains types de calculs.

En fait, plusieurs définitions sont proposées. Ainsi, dans le code **Aster** développé à l'EDF, on trouve une pyramide de degré 1 à 5 nœuds et une pyramide de degré 2 à 13 nœuds, cf. [1]. D'autres sources proposent également d'autres définitions. De manière bizarre, les polynômes de base ne sont pas Lagrangiens, diverses définitions utilisent en effet des fractions rationnelles.

Il nous a donc paru intéressant de regarder si l'on ne pouvait pas trouver des définitions nettement plus simples. On discute donc de ce type d'éléments pour le degré 1 et pour le degré 2. On exhibe les fonctions de formes et on indique comment s'assurer que le jacobien de ces éléments est positif partout en donnant l'expression de ce polynôme et de ses coefficients de contrôle. La condition obtenue est suffisante et porte sur la positivité de ces coefficients. Cette étude utilise les résultats (et notations) d'un papier précédent, [5], qui donne une synthèse

sur les éléments finis classiques de Lagrange de degré 1 et 2 et d'un rapport spécifique sur les éléments hexaédriques, [4].

## 2 Pyramide de Lagrange de degré 1

On propose une méthode de construction d'une pyramide de degré 1 puis on regarde son polynôme jacobien et ses coefficients de contrôle.

### 2.1 Construction de l'élément fini

L'idée est de dégénérer<sup>1</sup> un hexaèdre de Lagrange qui est défini par :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) B_k^1(w) P_{ijk},$$

où les  $P_{ijk}$  sont les points de contrôle qui ne sont autres que les sommets de l'élément, les  $B_i^1(u)$  notant les polynômes de Bernstein de degré 1 en  $u$ , etc. Pour construire une pyramide, en ouvrant en  $k$ , on écrit cette relation comme :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) B_0^1(w) P_{ij0} + \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) B_1^1(w) P_{ij1},$$

soit encore :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) (1-w) P_{ij0} + \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) w P_{ij1}.$$

Comme on impose  $P_{ij1} = P_{001}$ , pour tout  $i$  et tout  $j$ , ceci s'écrit également :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) (1-w) P_{ij0} + \left\{ \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \right\} w P_{001},$$

mais, par définition,  $\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) = 1$ , donc, il ne reste que :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) (1-w) P_{ij0} + w P_{001}.$$

On en déduit les 5 fonctions de forme de l'élément :

$$p_1(u, v, w) = (1-u)(1-v)(1-w)$$

$$p_2(u, v, w) = u(1-v)(1-w)$$

$$p_3(u, v, w) = uv(1-w)$$

$$p_4(u, v, w) = (1-u)v(1-w)$$

$$p_5(u, v, w) = w,$$

Fonctions de forme de la pyramide de degré 1 à 5 nœuds

en notant que ces expressions sont particulièrement simples et que les deux propriétés classiques sont satisfaites,  $\sum_{i=1,5} p_i(u, v, w) = 1$  et  $p_i(A_j) = \delta_{ij}$  où les  $A_j$  désignent les nœuds de

l'élément de référence. L'élément fini s'écrit en notation Bézier comme ci-dessus, soit :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) (1-w) P_{ij0} + w P_{001},$$

<sup>1</sup>en notant que ce procédé n'est pas valide pour, partant d'un quadrilatère, trouver un triangle.

tandis que dans le formalisme élément fini, il s'exprime classiquement par :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=1,5} p_i(u, v, w) A_i,$$

avec la correspondance entre les  $A_i$ , les nœuds de l'élément courant, et les  $P_{ijk}$  indiquée sur la Figure 2. L'élément de référence a pour base le carré unité et pour cinquième nœud le point  $(0, 0, 1)$ . La numérotation de l'élément courant doit être telle que le cinquième sommet est le point opposé à la base, voir le schéma ci-dessous (à gauche, la base ( $w = 0$ ), à droite, le sommet 5 ( $w = 1$ )).

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 \end{array}$$

## 2.2 Analyse du jacobien

Du mode de construction ci-dessus, on déduit que l'analyse portant sur le contrôle du jacobien est identique à celle effectuée pour l'hexaèdre en imposant la contrainte  $P_{ij1} = P_{001}$  pour tout  $i$  et tout  $j$ . On commence par rappeler les calculs conduisant à trouver l'expression du polynôme jacobien de l'hexaèdre, [4] et [5]. On a successivement :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Par la règle de dérivation des Bernstein, on a :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial u} = \sum_{i=0} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^0(u) B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{ijk}^{100} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{100} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1,j,k}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial v} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_j^0(v) B_k^1(w) \Delta_{ijk}^{010} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{010} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j+1,k}},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial w} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0} B_i^1(u) B_j^1(v) B_k^0(w) \Delta_{ijk}^{001} \text{ avec } \Delta_{ijk}^{001} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j,k+1}},$$

Ces expressions génériques se simplifient (à cause des  $B_*^0(*)$ ) et on trouve :

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial u} = \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{0jk}^{100},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial v} = \sum_{i=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_k^1(w) \Delta_{i0k}^{010},$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, w)}{\partial w} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001}.$$

Par suite, le jacobien vaut :

$$\left| \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{0jk}^{100} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_k^1(w) \Delta_{i0k}^{010} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001} \right|,$$

soit encore

$$\sum_{j_1=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 B_{j_2}^1(v) B_{k_1}^1(w) B_{i_2}^1(u) B_{k_2}^1(w) B_{i_3}^1(u) B_{j_3}^1(v) \left| \Delta_{0j_2k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|,$$



et il suffit d'appliquer la règle de multiplication des Bernstein pour obtenir le résultat.

$$\mathcal{J} = \sum_{i_2+i_3=0}^2 \sum_{j_1+j_3=0}^2 \sum_{k_1+k_2=0}^2 B_{i_2+i_3}^2(u) B_{j_1+j_3}^2(v) B_{k_1+k_2}^2(w) \frac{C_{i_2}^1 C_{i_3}^1}{C_{i_2+i_3}^2} \frac{C_{j_1}^1 C_{j_3}^1}{C_{j_1+j_3}^2} \frac{C_{k_1}^1 C_{k_2}^1}{C_{k_1+k_2}^2} \left| \Delta_{0j_1k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|$$

$$\text{et au final } \mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0}^2 \sum_{J=0}^2 \sum_{K=0}^2 B_I^2(u) B_J^2(v) B_K^2(w) N_{IJK},$$

où, comme les produits des  $C^1$ , les  $C_i^j$  étant les coefficients du binôme, se simplifient, les coefficients de contrôle se réduisent à :

$$N_{IJK} = \sum_{i_2+i_3=I} \sum_{j_1+j_3=J} \sum_{k_1+k_2=K} \frac{1}{C_I^2 C_J^2 C_K^2} \left| \Delta_{0j_1k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|, \quad (1)$$

Pour passer à la pyramide, il suffit de fixer la contrainte  $P_{ij1} = P_{001}$  qui implique que

$$\Delta_{ijk}^{100} = 0 \quad \text{pour } k = 1,$$

$$\Delta_{ijk}^{010} = 0 \quad \text{pour } k = 1,$$

et, ainsi :

$$\left| \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B_j^1(v) B_k^1(w) \Delta_{jk}^{100} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{k=0,1} B_i^1(u) B_k^1(w) \Delta_{ik}^{010} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001} \right|,$$

se réduit à :

$$\left| \sum_{j=0,1} B_j^1(v) B_0^1(w) \Delta_{j0}^{100} \quad \sum_{i=0,1} B_i^1(u) B_0^1(w) \Delta_{i00}^{010} \quad \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \Delta_{ij0}^{001} \right|.$$

De même :

$$\sum_{j_1=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 B_{j_2}^1(v) B_{k_1}^1(w) B_{i_2}^1(u) B_{k_2}^1(w) B_{i_3}^1(u) B_{j_3}^1(v) \left| \Delta_{0j_2k_1}^{100} \quad \Delta_{i_20k_2}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|,$$

se simplifie en :

$$\sum_{j_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 B_{j_2}^1(v) B_0^1(w) B_{i_2}^1(u) B_0^1(w) B_{i_3}^1(u) B_{j_3}^1(v) \left| \Delta_{0j_20}^{100} \quad \Delta_{i_200}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|.$$

Partant de cette expression, par multiplication, on obtient :

$$\mathcal{J} = \sum_{i_2+i_3=0}^2 \sum_{j_1+j_3=0}^2 B_{i_2+i_3}^2(u) B_{j_1+j_3}^2(v) B_0^2(w) \frac{C_{i_2}^1 C_{i_3}^1}{C_{i_2+i_3}^2} \frac{C_{j_1}^1 C_{j_3}^1}{C_{j_1+j_3}^2} \left| \Delta_{0j_10}^{100} \quad \Delta_{i_200}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|$$

$$\text{et au final, pour la pyramide, on a } \mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0}^2 \sum_{J=0}^2 B_I^2(u) B_J^2(v) B_0^2(w) N_{IJ0},$$

où, en notant que les produits des  $C^1$  se simplifient, les coefficients de contrôle sont :

$$N_{IJ0} = \sum_{i_2+i_3=I} \sum_{j_1+j_3=J} \frac{1}{C_I^2 C_J^2} \left| \Delta_{0j_10}^{100} \quad \Delta_{i_200}^{010} \quad \Delta_{i_3j_30}^{001} \right|, \quad (2)$$

il y a donc 9 coefficients de contrôle. Le degré du polynôme jacobien est de 2 dans les trois directions mais ce polynôme s'annule pour  $w = 1$  à cause du terme  $B_0^2(w)$ .

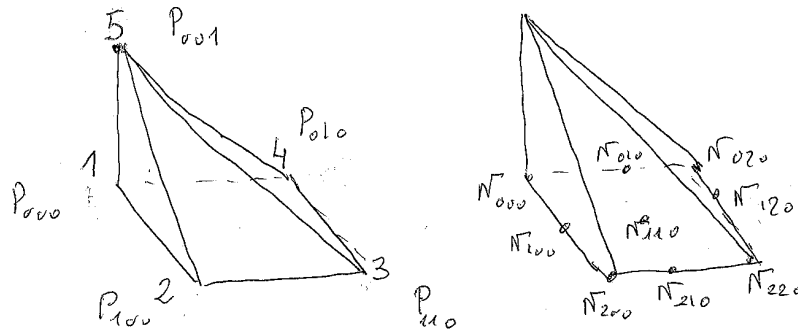


FIG. 2 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini pour les nœuds (qui sont les points de contrôle), numérotation logique des coefficients de contrôle.

Pour obtenir ces 9 coefficients, nous avons deux méthodes. On peut utiliser l'expression trouvée en (2) ou repartir des coefficients trouvés pour l'hexaèdre, c'est cette approche que nous adoptons.

On reprend alors les coefficients de contrôle de cet élément donc le troisième indice est nul, exprimés en fonction des nœuds  $A_i$ , en imposant  $A_5 = A_6 = A_7 = A_8$ . On part donc de la liste :

$$\begin{aligned}
 N_{000} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
 N_{100} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
 N_{200} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| \\
 N_{210} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
 N_{220} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| \\
 N_{120} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
 N_{020} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right|, \\
 N_{010} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_8} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_6} \right| \\
 N_{110} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_7} \right|,
 \end{aligned}$$

soit, au final, en confondant les 4 sommets du "haut" :

$$\begin{aligned}
 N_{000} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\
 N_{100} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_5} \right| \\
 N_{200} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_5} \right| \\
 N_{210} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_3 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| \\
 N_{220} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| \\
 N_{120} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\
 N_{020} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_5} \right|, \\
 N_{010} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_4 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_2 A_5} \right| \\
 N_{110} &= \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_4 A_3} \quad \overrightarrow{A_2 A_3} \quad \overrightarrow{A_1 A_5} \right| + \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{A_1 A_2} \quad \overrightarrow{A_1 A_4} \quad \overrightarrow{A_3 A_5} \right|.
 \end{aligned}$$

La Figure 2 montre la correspondance entre les notations en nœuds, les  $A_i$  et en points de contrôle, les  $P_{ijk}$ . Elle indique le schéma de principe des coefficients de contrôle. La Figure 3 visualise les volumes de contrôle associés aux trois types de coefficients présents (coins, arête et face).

En ouvrant  $\overrightarrow{A_1 A_5}$  en  $A_2$  et  $\overrightarrow{A_2 A_5}$  en  $A_1$  dans le coefficient  $N_{100}$  on observe que  $N_{100} = \frac{N_{000}}{2} + \frac{N_{200}}{2}$ , cette propriété étant vérifiée pour les 3 autres coefficients similaires. Par suite la

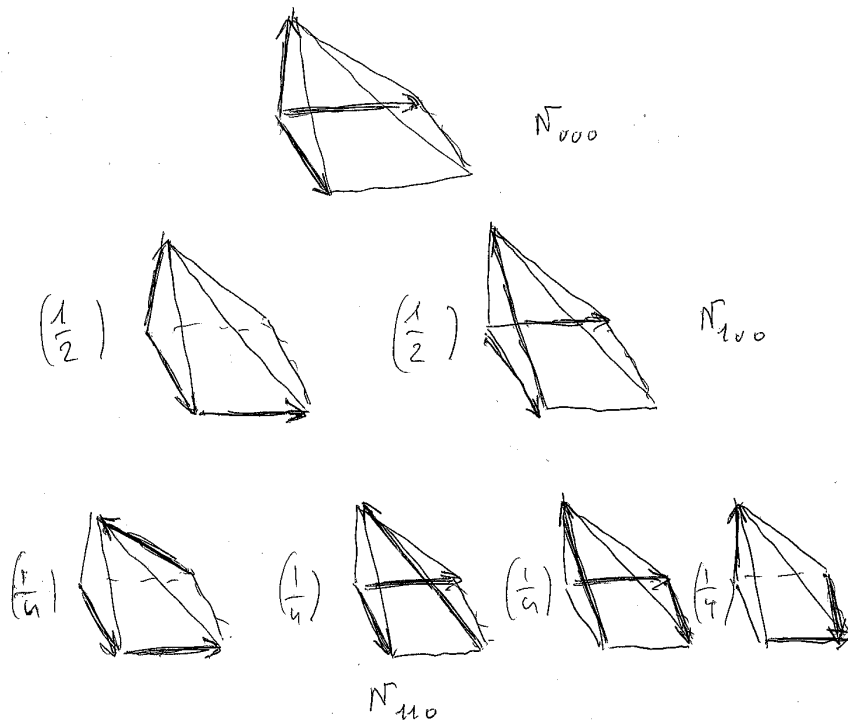


FIG. 3 – Exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici  $N_{000}$ ), deux termes pour un coefficient attaché à une arête horizontale (ici  $N_{100}$ ) et quatre termes pour le coefficient attaché à une face (ici  $N_{110}$ ).

condition de positivité (hormis pour  $w = 1$ ) n'invoque que 5 coefficients, les quatre coefficients « coins » et le seul terme  $N_{110}$  (qui mesure la torsion,  $A_5$  fixe, on tourne la base) en notant, de plus, que si la base est plane, ce coefficient est la somme des quatre coefficients « coins » et n'apporte rien.

En conclusion, cette pyramide a des fonctions de forme très simples, son jacobien s'annule pour  $w = 1$  et est contrôlé par 5 coefficients. Dans un calcul, il faudra utiliser des nœuds de quadrature autres que les sommets. Il reste néanmoins à comparer cet élément dans cette écriture avec ceux qui existent par ailleurs, étude qui sort du cadre de ce rapport.

Pour valider l'élément, il faut s'assurer (conditions nécessaires) de la positivité stricte des (4) coefficients associés aux jacobiens coins et de la non négativité du seul autre coefficient pertinent restant.

### 3 Pyramide de Lagrange de degré 2

Pour trouver une pyramide de degré 2, on va suivre la même approche, dégénérer un hexaèdre à 27 nœuds.

#### 3.1 Construction de l'élément fini

On définit les trois fonctions de forme suivantes :

$$\lambda_0(u) = (1 - u)(1 - 2u),$$

$$\lambda_1(u) = 4u(1 - u),$$

$$\lambda_2(u) = -u(1 - 2u).$$

Pour 3 nœuds, notés  $A_i$ , la fonction  $\theta(u) = \sum_{i=0}^2 \lambda_i(u) A_i$  décrit un arc de parabole. Pour un

réseau de  $3 \times 3$  points,  $A_{ij}$ , la fonction  $\theta(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \lambda_i(u) \lambda_j(v) A_{ij}$  définit un carreau de

surface si les  $A_{ij}$  sont dans  $\mathbb{R}^3$  et le quadrilatère à 9 nœuds si les  $A_{ij}$  sont dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour un réseau de  $3 \times 3 \times 3$  points,  $A_{ijk}$ , la fonction

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) A_{ijk} \quad (3)$$

définit l'hexaèdre à 27 nœuds dans le formalisme élément fini classique tandis que

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk} \quad (4)$$

avec, maintenant, les  $P_{ijk}$  les points de contrôle associés aux  $A_{ijk}$ , définit ce même hexaèdre dans le formalisme Bézier.

L'écriture donnée en (3) va nous permettre de trouver les fonctions de forme de la pyramide de degré 2. Celle donnée en (4) sera utilisée plus tard pour trouver le jacobien et exhiber ses coefficients de contrôle.

On part de

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) A_{ijk},$$

que l'on écrit comme :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) A_{ijk} + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_2(w) A_{ij2},$$

mais, comme  $A_{ij2} = A_{002}$ , on trouve :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) A_{ijk} + \lambda_2(w) A_{002},$$

et les 19 fonctions de forme sont

$$p_{ijk}(u, v, w) = \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) \quad \text{pour } i = 0, 2, j = 0, 2, k = 0, 1$$

$$p_{002}(u, v, w) = \lambda_2(w).$$

Fonctions de forme de la pyramide de degré 2 à 19 nœuds

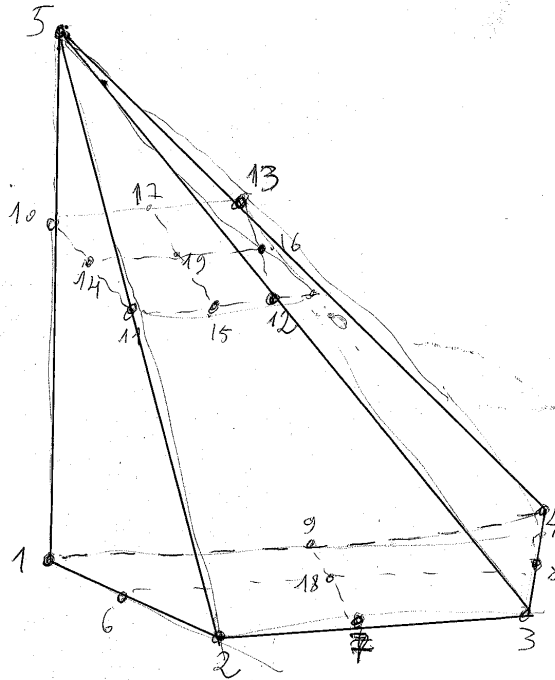


FIG. 4 – Numérotation élément fini pour les nœuds de la pyramide complète à 19 nœuds.

Ces fonction satisfont aux deux propriétés, somme à 1 et valeur 0 ou 1 aux nœuds de référence. L'élément a pour base le carré unité et pour cinquième nœud le point  $(0, 0, 1)$ . La numérotation de l'élément courant doit être telle que le cinquième sommet est le point opposé à la base, voir le schéma ci-dessous (à gauche, la base ( $w = 0$ ), au milieu les nœuds pour  $w = \frac{1}{2}$ , à droite, le sommet 5 ( $w = 1$ )).

1	9	4	10	17	13	5
6	18	8	14	19	16	
2	7	3	11	15	12	

### 3.2 Analyse du jacobien

En partant de l'expression (4), on calcule le jacobien de l'hexaèdre et ses coefficients de contrôle, soit :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0,5} \sum_{J=0,5} \sum_{K=0,5} B_I^5(u) B_J^5(v) B_K^5(w) N_{IJK},$$

avec

$$N_{IJK} = 8 \sum_{(i_1, i_2, i_3), i_1+i_2+i_3=I} \sum_{(j_1, j_2, j_3), j_1+j_2+j_3=J} \sum_{(k_1, k_2, k_3), k_1+k_2+k_3=K} \frac{C_{i_2}^2 C_{i_3}^2}{C_{i_1+i_2+i_3}^5} \frac{C_{j_1}^2 C_{j_3}^2}{C_{j_1+j_2+j_3}^5} \frac{C_{k_1}^2 C_{k_2}^2}{C_{k_1+k_2+k_3}^5} |\Delta_{i_1, j_1, k_1}^{1,0,0} \quad \Delta_{i_2, j_2, k_2}^{0,1,0} \quad \Delta_{i_3, j_3, k_3}^{0,0,1}|, \quad (5)$$

où

$$\Delta_{i,j,k}^{1,0,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1,jk}}, \quad \Delta_{i,j,k}^{0,1,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j+1,k}}, \quad \text{et} \quad \Delta_{i,j,k}^{0,0,1} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j,k+1}},$$

et les  $C_i^j$  sont les coefficients du binôme. Comme  $\Delta_{i,j,2}^{1,0,0} = \Delta_{i,j,2}^{0,1,0} = 0$ , de nombreux coefficients  $N_{IJK}$  s'annulent. A priori  $K$  varie de 0 à 5, tandis que  $k_1 = 0, 1$ ,  $k_2 = 0, 1$  et  $k_3 = 0, 1$  et on a  $K = k_1 + k_2 + k_3$ . On en déduit que, pour tout couple  $(I, J) : :$

$$\begin{aligned}
N_{IJ0} & \text{ existe pour } (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0), \\
N_{IJ1} & \text{ existe pour } (k_1, k_2, k_3) = (1, 0, 0) \text{ ou } (0, 1, 0) \text{ ou } (0, 0, 1), \\
N_{IJ2} & \text{ existe pour } (k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 0) \text{ ou } (1, 0, 1) \text{ ou } (0, 1, 1), \\
N_{IJ3} & \text{ existe pour } (k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 1), \\
N_{IJ4} & = 0, \\
N_{IJ5} & = 0.
\end{aligned}$$

Par suite le jacobien s'écrit :

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{I=0,5} \sum_{J=0,5} \sum_{K=0,3} B_I^5(u) B_J^5(v) B_K^5(w) N_{IJK},$$

et, ainsi, le terme  $(1-w)^2$  se factorise donnant la même propriété qu'au degré 1, le polynôme jacobien est nul pour  $w = 1$ .

Pour expliciter la nature des coefficients de ce jacobien, on va exhiber un coefficient de chacun des types possibles, coin, arête, face et interne.

- Coefficients coins : il y a 4 tels coefficients, un par sommet,  $N_{000}$ ,  $N_{500}$ ,  $N_{550}$  et  $N_{050}$ . Ces coefficients sont identiques à ceux d'un hexaèdre, ainsi :

$$N_{000} = 8 \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right|$$

qui est le résultat habituel, le coefficient est, à un facteur près, le volume du tétraèdre de sommets le sommet et les trois points de contrôle adjacents. Les autres coefficients coins ont la même forme.

Dans ce qui suit, les coefficients sont calculés au facteur 8 près.

- Coefficients pour une arête horizontale : il y a 16 tels coefficients, 4 par arête, par exemple  $N_{100}$ ,  $N_{200}$ ,  $N_{300}$  et  $N_{400}$  pour l'arête  $P_{000}P_{200}$ . Ici,  $j_1 = j_2 = j_3 = 0$  et  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ . Pour  $N_{100}$ , l'un, parmi  $i_1$ ,  $i_2$  ou  $i_3$  vaut 1, ce qui donne 3 termes :

$$\begin{aligned}
N_{100} &= \frac{1}{5} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right| + \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right| \\
&+ \frac{2}{5} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}} \right|.
\end{aligned}$$

Pour  $N_{200}$ , les combinaisons possibles en  $i$  sont :  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  et  $(0, 0, 2)$ , soit 5 termes :

$$\begin{aligned}
N_{200} &= \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right| + \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}} \right| \\
&+ \frac{4}{10} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}} \right| \\
&+ \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{210}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{201}} \right|.
\end{aligned}$$

Pour  $N_{300}$ , les combinaisons possibles en  $i$  sont :  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 0)$ , soit 5 termes :

$$\begin{aligned}
N_{300} &= \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{201}} \right| + \frac{2}{10} \left| \overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{210}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}} \right| \\
&+ \frac{4}{10} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}} \right| \\
&+ \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{201}} \right| + \frac{1}{10} \left| \overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{210}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}} \right|.
\end{aligned}$$

Pour  $N_{400}$ , les combinaisons possibles en  $i$  sont :  $(0, 2, 2)$ ,  $(1, 1, 2)$  et  $(1, 2, 1)$ , soit 3 termes :

$$N_{400} = \frac{2}{5} |\overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{110}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{201}}| + \frac{2}{5} |\overrightarrow{P_{100}P_{200}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{210}} \quad \overrightarrow{P_{100}P_{101}}| \\ + \frac{1}{5} |\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{210}} \quad \overrightarrow{P_{200}P_{201}}|.$$

- Coefficients pour une arête verticale : par exemple pour l'arête  $P_{000}P_{002}$ , on trouve  $N_{001}$ ,  $N_{002}$  et  $N_{003}$ , soit 3 coefficients par arête et donc 12 coefficients au total. Ici,  $i_1 = i_2 = i_3 = 0$  et  $j_1 = j_2 = j_3 = 0$ . Pour  $N_{001}$ , l'un, parmi  $k_1, k_2$  ou  $k_3$  vaut 1, ce qui donne 3 termes :

$$N_{001} = \frac{2}{5} |\overrightarrow{P_{001}P_{101}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}}| + \frac{2}{5} |\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{011}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}}| \\ + \frac{1}{5} |\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{002}}|.$$

Pour  $N_{002}$ , deux, parmi  $k_1, k_2$  ou  $k_3$  valent 1, ce qui donne 3 termes :

$$N_{002} = \frac{2}{10} |\overrightarrow{P_{001}P_{101}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{002}}| + \frac{2}{10} |\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{011}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{002}}| \\ + \frac{4}{10} |\overrightarrow{P_{001}P_{101}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{011}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}}|,$$

au lieu de 5 termes! Notons aussi que la somme des pondérations est inférieure à 1. Pour  $N_{003}$ , les 3  $k_i$  valent 1, ce qui donne un seul terme (au lieu de 3) :

$$N_{003} = \frac{4}{10} |\overrightarrow{P_{001}P_{101}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{011}} \quad \overrightarrow{P_{001}P_{002}}|.$$

Ces coefficients sont donc de nature différente (par rapport à ceux des arêtes horizontales).

- Coefficients internes pour la face horizontale : il s'agit des coefficients en  $N_{IJO}$  avec  $I$  et  $J$  différents de 0 et de 5, il y a 16 tels coefficients. Ainsi  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  tandis que  $i_1 = 0, 1, i_2 = 0, 2, i_3 = 0, 2$  et  $j_1 = 0, 2, j_2 = 0, 1, j_3 = 0, 2$  et  $I = i_1 + i_2 + i_3$  et  $J = j_1 + j_2 + j_3$ , ce qui donne les combinaisons suivantes :

en I :

$$\begin{aligned} \text{I} &= 1 \quad (100) \quad (010) \quad (001) \\ \text{I} &= 2 \quad (011) \quad (002) \quad (020) \quad (110) \quad (101) \\ \text{I} &= 3 \quad (012) \quad (021) \quad (111) \quad (120) \quad (102) \\ \text{I} &= 4 \quad (022) \quad (112) \quad (121) \end{aligned}$$

en J :

$$\begin{aligned} \text{J} &= 1 \quad (100) \quad (010) \quad (001) \\ \text{J} &= 2 \quad (011) \quad (002) \quad (110) \quad (101) \quad (200) \\ \text{J} &= 3 \quad (012) \quad (102) \quad (111) \quad (201) \quad (210) \\ \text{J} &= 4 \quad (112) \quad (202) \quad (211) \end{aligned}$$

Par exemple  $N_{110}$  comprend 9 termes,  $N_{120}$  comprend 15 termes,  $N_{220}$  comprend 25 termes etc.

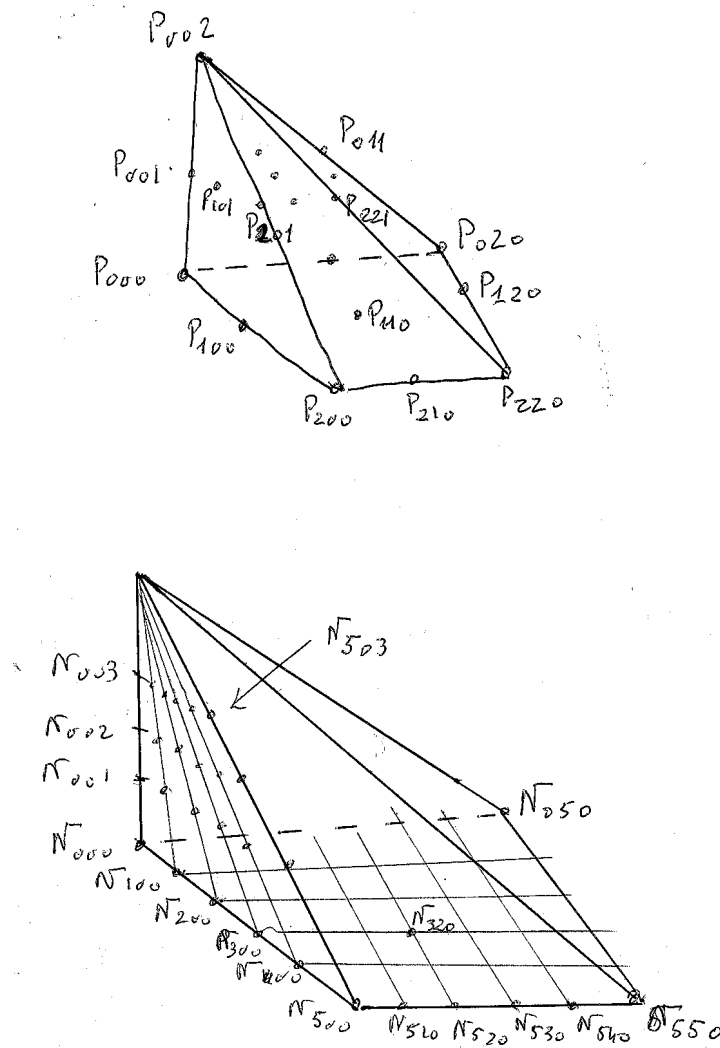


FIG. 5 – Correspondance entre les numérotations Bézier et élément fini (figure précédente) pour les nœuds et les points de contrôle et numérotation logique des coefficients de contrôle dont seuls certains sont montrés.

- Coefficients internes pour une face verticale : par exemple la face  $P_{000}P_{200}P_{002}$ , il s'agit des coefficients en  $N_{IJK}$  avec  $I$  différent de 0 et de 5 et  $J = 0$  avec  $K$  variant de 1 à 3, il y a 12 tels coefficients. On a  $j_1 = j_2 = j_3 = 0$  et les combinaisons sont :

en I :

$$\begin{aligned} I = 1 & (100) (010) (001) \\ I = 2 & (011) (002) (020) (110) (101) \\ I = 3 & (012) (021) (111) (120) (102) \\ I = 4 & (022) (112) (121) \end{aligned}$$

en K :

$$\begin{aligned} K = 1 & (100) (010) (001) \\ K = 2 & (011) (101) (110) \\ K = 3 & (111) \end{aligned}$$

Le coefficient  $N_{101}$  comprend 9 termes, le coefficient  $N_{202}$  comprend 15 termes, etc.

- Coefficients internes : il s'agit des coefficients en  $N_{IJK}$  avec  $I$  et  $J$  variant de 1 à 4 et  $K$  variant de 1 à 3, il y a 48 tels coefficients. Les combinaisons sont :

en I :



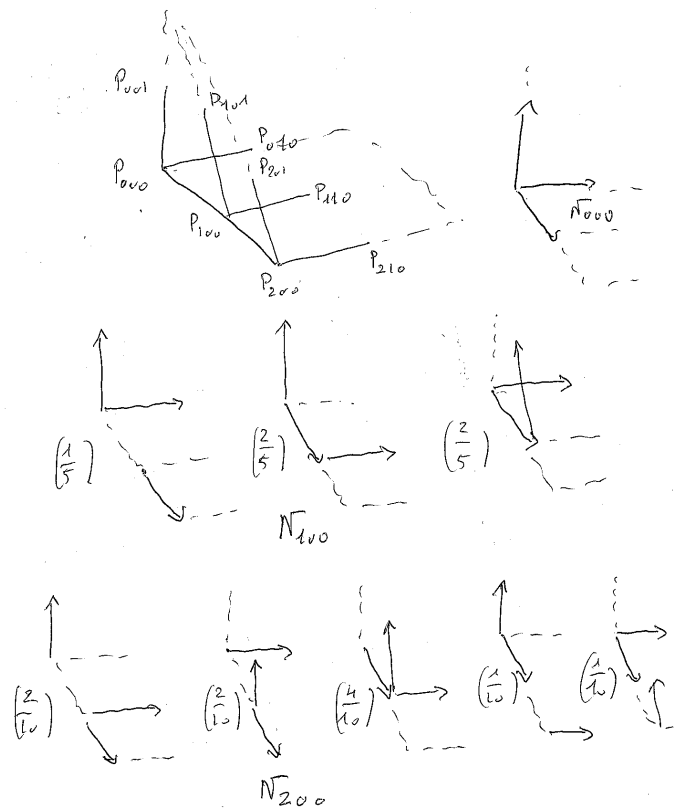


FIG. 6 – Exemple d'un coefficient de chaque type, un terme pour un coefficient attaché à un sommet (ici  $N_{000}$ ), trois ou cinq termes pour un coefficient attaché à une arête horizontale (ici  $N_{100}, N_{200}$  ( $N_{300}, N_{400}$  étant symétriques)).

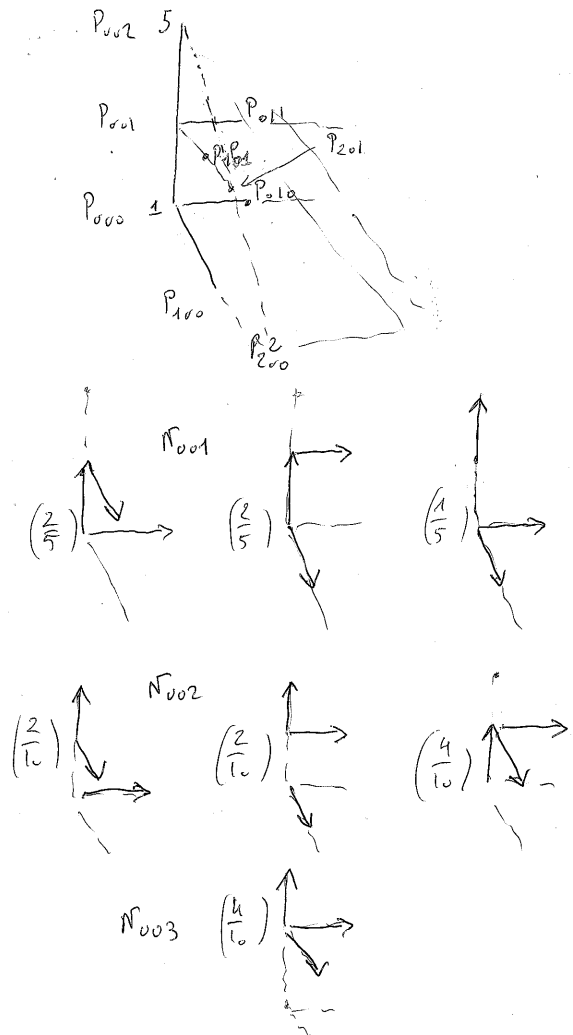


FIG. 7 – Exemple d'un coefficient de chaque type, trois ou un termes pour un coefficient attaché à une arête verticale (ici  $N_{001}$ ,  $N_{002}$ ,  $N_{003}$ ), les autres coefficients ne sont pas montrés.

- I = 1 (100) (010) (001)
  - I = 2 (011) (002) (020) (110) (101)
  - I = 3 (012) (021) (111) (120) (102)
  - I = 4 (022) (112) (121)
- en J :
- J = 1 (100) (010) (001)
  - J = 2 (011) (002) (110) (101) (200)
  - J = 3 (012) (102) (111) (201) (210)
  - J = 4 (112) (202) (211)
- en K :
- K = 1 (100) (010) (001)
  - K = 2 (011) (101) (110)
  - K = 3 (111)

Le coefficient  $N_{111}$  comprend 27 termes, le coefficient  $N_{222}$  comprend 75 termes, etc.

Le nombre de coefficients de contrôle est 148. En effet, il y a quatre coins avec un coefficient, quatre arêtes avec 4 coefficients, 4 arêtes avec 3 coefficients, une face avec 16 coefficients, 4 faces avec 12 coefficients et  $3 \times 16$  coefficients internes, voir la figure.

En conclusion, cette pyramide complète à 19 nœuds a des fonctions de forme très simples.

Son jacobien s'annule pour  $w = 1$  et est contrôlé par 148 coefficients. Dans un calcul, il faudra utiliser des nœuds de quadrature autres que les sommets. Il reste néanmoins à comparer cet élément dans cette écriture avec ceux qui existent par ailleurs, étude qui sort du cadre de ce rapport.

Pour valider l'élément, il faut s'assurer (conditions nécessaires) de la positivité stricte des coefficients associés aux jacobiens coins et de la non négativité des autres coefficients, un programme est à écrire pour automatiser cette vérification.

## 4 Une pyramide à 17 nœuds

On va construire une pyramide à 17 nœuds en utilisant deux méthodes différentes.

### 4.1 Construction de l'élément, méthode 1

On part du quadrilatère réduit à 8 nœuds dont les fonctions de forme sont :

$$p_1(u, v) = (1 - u)(1 - v)(1 - 2u - 2v)$$

$$p_2(u, v) = u(1 - v)(-1 + 2u - 2v)$$

$$p_3(u, v) = uv(-3 + 2u + 2v)$$

$$p_4(u, v) = (1 - u)v(-1 - 2u + 2v)$$

$$p_5(u, v) = 4u(1 - u)(1 - v)$$

$$p_6(u, v) = 4uv(1 - v)$$

$$p_7(u, v) = 4u(1 - u)v$$

$$p_8(u, v) = 4(1 - u)v(1 - v).$$

On peut en déduire, au moins formellement, un hexaèdre à 24 nœuds via :

$$p_{i0}(u, v, w) = p_i(u, v)(1 - 2w)(1 - w) \quad i = 1, 8$$

$$p_{i1}(u, v, w) = 4p_i(u, v)w(1 - w) \quad i = 1, 8$$

$$p_{i2}(u, v, w) = -p_i(u, v)w(1 - 2w) \quad i = 1, 8.$$

Comme la somme des 8  $p_i(u, v)$  vaut 1, l'astuce utilisée conduit, toujours formellement, à une pyramide à 17 nœuds dont les fonctions de forme sont :

$$p_{i0}(u, v, w) = p_i(u, v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$p_{i1}(u, v, w) = 4p_i(u, v)w(1 - w)$$

$$p_{12}(u, v, w) = -w(1 - 2w).$$

Avec des notations évidentes, l'élément comprend 17 nœuds et s'écrit :

$$\sum_{i=1}^8 \sum_{j=0}^1 p_{i0}(u, v, w)A_{ij} + p_{12}A_{12},$$

soit, *in extenso* :

$$p_1 = p_{10}(u, v, w) = (1 - u)(1 - v)(1 - 2u - 2v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$p_2 = p_{20}(u, v, w) = u(1 - v)(-1 + 2u - 2v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$p_3 = p_{30}(u, v, w) = uv(-3 + 2u + 2v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$p_4 = p_{40}(u, v, w) = (1 - u)v(-1 - 2u + 2v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$p_6 = p_{50}(u, v, w) = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - 2w)(1 - w)$$

$$\begin{aligned}
p_7 &= p_{60}(u, v, w) = 4uv(1-v)(1-2w)(1-w) \\
p_8 &= p_{70}(u, v, w) = 4u(1-u)v(1-2w)(1-w) \\
p_9 &= p_{80}(u, v, w) = 4(1-u)v(1-v)(1-2w)(1-w) \\
p_{10} &= p_{11}(u, v, w) = 4(1-u)(1-v)(1-2u-2v)w(1-w) \\
p_{11} &= p_{21}(u, v, w) = 4u(1-v)(-1+2u-2v)w(1-w) \\
p_{12} &= p_{31}(u, v, w) = 4uv(-3+2u+2v)w(1-w) \\
p_{13} &= p_{41}(u, v, w) = 4(1-u)v(-1-2u+2v)w(1-w) \\
p_{14} &= p_{51}(u, v, w) = 16u(1-u)(1-v)w(1-w) \\
p_{15} &= p_{61}(u, v, w) = 16uv(1-v)w(1-w) \\
p_{16} &= p_{71}(u, v, w) = 16u(1-u)v(1-w) \\
p_{17} &= p_{81}(u, v, w) = 16(1-u)v(1-v)w(1-w) \\
p_5 &= p_{12}(u, v, w) = -w(1-2w).
\end{aligned}$$

Fonctions de forme de la pyramide de degré 2 réduite à 17 nœuds

Il est facile de voir que  $p_i(A_j) = \delta_{ij}$ , les  $A_j$  étant les nœuds de l'élément de référence, et que  $\sum_{i=1,17} p_i(u, v, w) = 1$ . En effet :

$$\sum_{i=1,17} p_i(u, v, w) = (1-2w)(1-w) + 4w(1-w) - w(1-w) = 1.$$

L'élément de référence a pour base le carré unité et pour cinquième nœud le point  $(0, 0, 1)$ . La numérotation de l'élément courant doit être telle que le cinquième sommet est le point opposé à la base, voir le schéma ci-dessous (à gauche, la base ( $w = 0$ ), au milieu les nœuds pour  $w = \frac{1}{2}$  à droite, le sommet 5 ( $w = 1$ )).

1	9	4	10	17	13	5
6		8	14		16	
2	7	3	11	15	12	

## 4.2 Construction de l'élément, méthode 2

On part de l'élément complet et on supprime les nœuds des faces. Cette manière traditionnelle de construction des éléments réduit revient à imposer que :

$$A_{19} = \frac{1}{4}(C_{14} + C_{15} + C_{16} + C_{17})$$

$$A_{18} = \frac{1}{4}(C_6 + C_7 + C_8 + C_9),$$

où les  $C_i$  sont les points de contrôle, autres que les extrémités, relatifs aux arêtes des faces considérées. Pour fixer les idées, on va définir la première fonction de forme. On prend l'élément complet :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 \lambda_i(u) \lambda_j(v) \lambda_k(w) A_{ijk} + \lambda_2(w) A_{002},$$

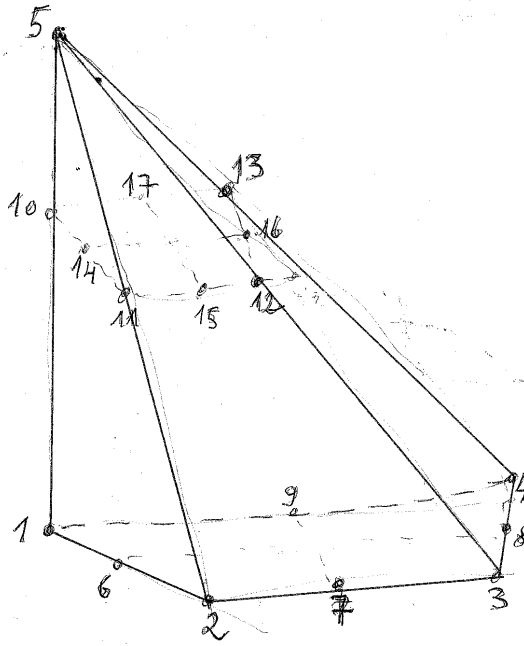


FIG. 8 – Numérotation élément fini pour les nœuds de la pyramide réduite à 17 nœuds.

la première fonction de forme correspond à  $A_1$  alias  $A_{000}$ . Les termes qui contribuent viennent donc de  $A_1$  et de la contribution de  $A_{18}$  via  $C_6$  et  $C_9$ . Comme  $C_6 = \frac{4A_6 - A_1 - A_2}{2}$  et comme  $C_9 = \frac{4A_9 - A_1 - A_4}{2}$ , le polynôme cherché est :

$$p_{000}(u, v, w) = \frac{1}{8}(p_{110}(u, v, w) + p_{110}(u, v, w)),$$

soit, pas à pas :

$$\begin{aligned} & \lambda_0(u)\lambda_0(v)\lambda_0(w) - \frac{1}{4}\lambda_1(u)\lambda_1(v)\lambda_0(w) \\ & \lambda_0(w) \left\{ \lambda_0(u)\lambda_0(v) - \frac{1}{4}\lambda_1(u)\lambda_1(v) \right\} \\ & (1-w)(1-2w) \{ (1-u)(1-2u)(1-v)(1-2v) - 4u(1-u)v(1-v) \} \\ & (1-u)(1-v)(1-w)(1-2w) \{ (1-2u)(1-2v) - 4uv \} \\ & (1-u)(1-v)(1-2u-2v)(1-w)(1-2w), \end{aligned}$$

ce qui termine cette vérification, on retrouve bien  $p_1$ .

### 4.3 Analyse du jacobien

- Pour contrôler le signe du jacobien, on reprend la méthode exposée dans [3]. Par suite :
- on construit un élément complet en évaluant les points de contrôle absents, ici  $C_{18}$  et  $C_{19}$ , pour ce faire<sup>2</sup>.
- pour  $C_{18}$  on calcule l'image du triplet  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  par la fonction  $\theta(u, v, w)$  de l'élément réduit :

$$A_{18} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=0}^1 p_{i0}(u, v, w) A_{ij} + p_{12} A_{12} = \sum_{i=1}^8 p_{i0}(u, v, w) A_{i0}.$$

Puis on exprime ce même point  $A_{18}$  dans l'élément complet :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk}, \quad P_{ij2} = P_{002},$$

<sup>2</sup>attention aux correspondances entre les différentes manières de noter les indices qui, ici, sont mélangées

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,1} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) P_{ijk} + w^2 P_{002}.$$

On a

$$A_{18} = \theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$A_{18} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij0}$$

pour le triplet ci-dessus. La seule inconnue dans cette relation est le point de contrôle  $P_{110}$  alias  $C_{18}$  qui ne dépend que des  $P_{ij0}$  et que l'on peut donc évaluer.

- pour  $C_{19}$  on procède de même avec le triplet  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . La méthode est identique, mais  $C_{19}$ , alias  $P_{111}$ , dépend de tous les autres points de contrôle, dont  $P_{110}$  que l'on vient de calculer. La relation complète permet donc d'évaluer  $C_{19}$ .
- ceci fait, on utilise les résultats relatifs à cet élément complet (section précédente).

La Figure 8 indique les conventions de numérotations utilisées. Notons qu'il faut d'abord évaluer  $C_{18}$  avant de pouvoir déterminer  $C_{19}$ .

## 5 Une pyramide à 13 nœuds

On va construire une pyramide à 13 nœuds en partant de l'hexaèdre à 20 nœuds.

### 5.1 Construction de l'élément

On part donc de l'élément hexaédrique à 20 nœuds dont les fonctions de base sont les suivantes :

- $p_1 = (1 - 2u - 2v - 2w)(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_2 = (-1 + 2u - 2v - 2w)u(1 - v)(1 - w)$
- $p_3 = (-3 + 2u + 2v - 2w)uv(1 - w)$
- $p_4 = (-1 - 2u + 2v - 2w)(1 - u)v(1 - w)$
- $p_9 = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_{10} = 4uv(1 - v)(1 - w)$
- $p_{11} = 4u(1 - u)v(1 - w)$
- $p_{12} = 4(1 - u)v(1 - v)(1 - w)$
- $p_{13} = 4(1 - u)(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{14} = 4u(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{15} = 4uvw(1 - w)$
- $p_{16} = 4(1 - u)vw(1 - w)$
- $p_5 = (-1 - 2u - 2v + 2w)(1 - u)(1 - v)w$
- $p_6 = (-3 + 2u - 2v + 2w)u(1 - v)w$
- $p_7 = (-5 + 2u + 2v + 2w)uvw$
- $p_8 = (-3 - 2u + 2v + 2w)(1 - u)vw$
- $p_{17} = 4u(1 - u)(1 - v)w$
- $p_{18} = 4uv(1 - v)w$
- $p_{19} = 4u(1 - u)vw$
- $p_{20} = 4(1 - u)v(1 - v)w$ .

L'élément s'écrit :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^{20} p_i(u, v, w) A_i.$$

Pour dégénérer cet hexaèdre en une pyramide on fusionne les nœuds relatifs à la face  $w = 1$  en le seul nœud noté 5. Après cette fusion, on calcule la somme

$$p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20}$$

en regroupant les polynômes de la manière suivante :

$$(p_5 + p_6 + p_{17}) + (p_7 + p_8 + p_{19}) + (p_{18} + p_{20})$$

un simple calcul montre que cette somme vaut

$$-w(1 - 2w).$$

Par un jeu d'indice les polynôme restants :

- $p_1 = (1 - 2u - 2v - 2w)(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_2 = (-1 + 2u - 2v - 2w)u(1 - v)(1 - w)$
- $p_3 = (-3 + 2u + 2v - 2w)uv(1 - w)$
- $p_4 = (-1 - 2u + 2v - 2w)(1 - u)v(1 - w)$
- $p_9 = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_{10} = 4uv(1 - v)(1 - w)$
- $p_{11} = 4u(1 - u)v(1 - w)$
- $p_{12} = 4(1 - u)v(1 - v)(1 - w)$
- $p_{13} = 4(1 - u)(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{14} = 4u(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{15} = 4uvw(1 - w)$
- $p_{16} = 4(1 - u)vw(1 - w)$
- $p_5 = -w(1 - 2w)$

sont renumérotés comme suit :

- $p_1 = (1 - 2u - 2v - 2w)(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_2 = (-1 + 2u - 2v - 2w)u(1 - v)(1 - w)$
- $p_3 = (-3 + 2u + 2v - 2w)uv(1 - w)$
- $p_4 = (-1 - 2u + 2v - 2w)(1 - u)v(1 - w)$
- $p_6 = 4u(1 - u)(1 - v)(1 - w)$
- $p_7 = 4uv(1 - v)(1 - w)$
- $p_8 = 4u(1 - u)v(1 - w)$
- $p_9 = 4(1 - u)v(1 - v)(1 - w)$
- $p_{10} = 4(1 - u)(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{11} = 4u(1 - v)w(1 - w)$
- $p_{12} = 4uvw(1 - w)$
- $p_{13} = 4(1 - u)vw(1 - w)$
- $p_5 = -w(1 - 2w)$

Fonctions de forme de la pyramide de degré 2 réduite à 13 nœuds

et, en renumérotant les nœuds en accord, la pyramide de degré 2 à 13 nœuds s'écrit :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{i=0}^{13} p_i(u, v, w) A_i,$$

L'élément de référence a pour base le carré unité et pour cinquième nœud le point  $(0, 0, 1)$ . La numérotation de l'élément courant doit être telle que le cinquième sommet est le point opposé à la base, voir le schéma ci-dessous (à gauche, la base  $(w = 0)$ , au milieu les nœuds pour  $w = \frac{1}{2}$ , à droite, le sommet  $5 (w = 1)$ ).

1	9	4	10	13	5
6	8				
2	7	3	11	12	

## 5.2 Analyse du jacobien

Pour contrôler le signe du jacobien, on reprend la méthode exposée dans [3]. Par suite :

- on construit un élément complet en évaluant les points de contrôle absents.
- la fonction  $\theta(u, v, w)$  réduite permet de trouver les nœuds manquants, ceux des faces triangulaires,  $A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}$ , celui de la face base,  $A_{18}$ , et le nœud interne,  $A_{19}$ ,

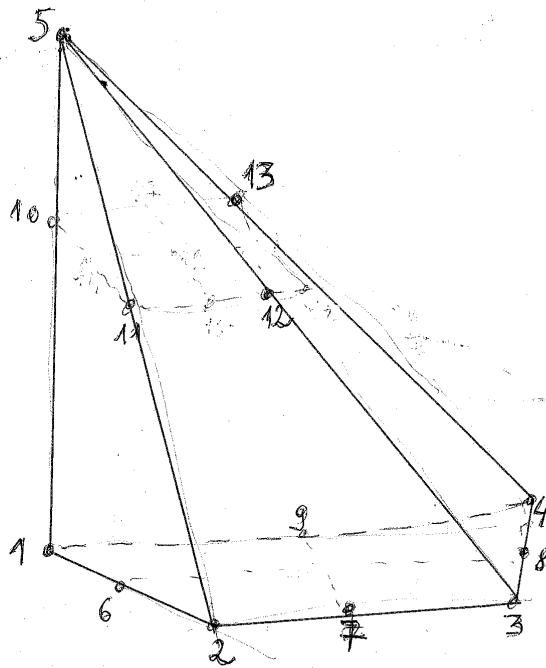


FIG. 9 – Numérotation élément fini pour les nœuds de la pyramide réduite à 13 nœuds.

- $C_{18}$  s’obtient exactement comme pour la pyramide à 17 nœuds,
- les points de contrôle  $C_{14}$  à  $C_{17}$  s’obtiennent, un à un, par une simple relation,
- on peut alors trouver le seul point manquant,  $C_{19}$ , qui dépend de tous les autres.
- ceci fait, pour analyser le jacobien, on utilise les résultats relatifs à l’élément complet (comme à la section précédente).

## 6 Conclusion

Dans cette étude, on a étudié les pyramides de degré 1 et 2. Au degré 1 on a un élément à 5 nœuds dont le jacobien, nul « au » sommet (le point opposé à la base) de la pyramide, s’analyse via 5 coefficients. Au degré 2, on a construit un élément complet à 19 nœuds dont le jacobien a la même propriété et s’analyse via 148 coefficients. On a également construit un élément Serendip<sup>3</sup> à 17 nœuds et un élément Serendip à 13 nœuds en indiquant comment analyser le signe de leur jacobien respectif. Il reste à valider par des calculs (en mécanique du solide, par exemple) tous ces éléments finis.

## Références

- [1] CODE\_ASTER, *Fonctions de forme et points d’intégration des éléments finis*, Fascicule r3.01, Révision 4261, 2010.
- [2] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, 4, Hermès, Paris, 1986.
- [3] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2, version 2, *RR INRIA* 7964, 2012.
- [4] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* 8039, 2012.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, *RR INRIA* 8376, 2013.

<sup>3</sup>On peut oser ce qualificatif puisque l’hexaèdre à 20 nœuds est un élément Serendip. Sinon, pour les puristes, on dirait plutôt, réduit.





**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399