

Élection du Best Paper AlgoTel 2012 : étude de la manipulabilité[†]

François Durand¹, Fabien Mathieu² et Ludovic Noirie²

¹Inria

²Alcatel-Lucent Bell Labs France

Les systèmes de vote interviennent dès qu'une décision collective doit être prise pour choisir une option parmi plusieurs, et peuvent se retrouver dans de nombreux contextes : élections politiques, sélection d'un candidat par un comité, décision dans un réseau [DMN13]. Un des problèmes à résoudre est celui de la *manipulation*, ou *vote tactique* : le résultat d'une élection peut-il dépendre d'un éventuel vote stratégique d'une partie des électeurs ? Il est connu depuis les années 1970 que tous les systèmes sauf la dictature sont susceptibles d'être manipulés [Gib73, Sat75]. Peut-être n'est-ce qu'un résultat théorique n'ayant pas beaucoup d'impact en pratique ? Dans cet article, nous répondons à cette question sur un cas concret qui intéressera certainement la communauté AlgoTel : l'élection du *Best Paper* AlgoTel 2012. Nous nous basons sur les bulletins exprimés pour fournir une étude quantitative de la manipulabilité du résultat en fonction du mode de scrutin. Nous montrons que même dans une situation où il existe *a priori* un vainqueur canonique, les possibilités de manipulation sont nombreuses et varient suivant le mode de scrutin choisi. Nous observons aussi qu'un mode de scrutin se démarque nettement des autres par sa faible manipulabilité : le vote à tours instantanés.

Keywords: Communauté AlgoTel ; Systèmes de vote ; Manipulabilité.

1 Collecte et prétraitement des bulletins

Lors de la conférence AlgoTel 2012[‡], le comité de programme a préselectionné 5 papiers, nommés ici arbitrairement *A*, *B*, *C*, *D* et *E*. Pour les départager, il a été demandé à chaque participant de voter par écrit en donnant une note entre 0 et 10 évaluant la qualité des articles et leur présentation. Les participants avaient été avertis que leurs bulletins seraient testés sur plusieurs modes de scrutin. Il était possible de ne noter qu'une partie des papiers, l'absence de note valant 0. Sur 72 participants, il y a eu 57 suffrages exprimés, 1 vote blanc et 2 votes nuls.

Par rapport aux bulletins bruts utilisés en 2012, nous avons ajouté aux notes un bruit aléatoire uniforme d'amplitude négligeable par rapport à 1. L'objectif est double : évaluer la cohérence des résultats sur un espace rendu plus riche que l'unique expérience initiale et casser les égalités pour simplifier l'analyse des modes de scrutin basés sur les ordres de préférence. Notons que par défaut, les résultats sont donnés en moyenne sur 10 000 réalisations des bulletins bruités.

Il est impossible de déterminer *a posteriori* si un bulletin correspond à une opinion sincère ou à une stratégie plus élaborée. Nous sommes donc obligés de supposer que les participants ont joué le jeu et que tous les bulletins (bruités) sont sincères. Sans faire cette hypothèse, il est très difficile d'analyser quantitativement l'impact des manipulations.

2 Systèmes de vote utilisés

Les résultats ont été évalués à partir de 16 modes de scrutin différents réalisables à partir des notes. Ces systèmes sont très brièvement décrits dans la table 1.

Pour des raisons de place, nous ne donnons pas d'explication complète sur chacun de ces systèmes. Pour plus de détails sur les différents systèmes, voir par exemple [Tid06]. Les notions suivantes aident à avoir une bonne compréhension de la table 1.

[†]Les travaux présentés ici ont été réalisés au *Laboratory of Information, Network and Communication Sciences* (LINCS).

[‡]. <http://algotel2012.ens-lyon.fr/>

Système de vote	Principe
Assentiment	Élit qui a le plus de notes au-dessus de la moyenne.
Vote par valeurs	Élit qui a la meilleure moyenne.
Coombs	Élimine récursivement qui est classé dernier par le plus d'électeurs.
Vote par valeurs normalisées	Élit qui a la meilleure moyenne (bulletins normalisés).
Jugement majoritaire	Élit qui a la meilleure médiane.
Uninominal	Élit qui est classé en tête par le plus d'électeurs.
Borda	Élit qui a le plus grand score de Borda.
Nanson	Élimine récursivement ceux avec un score de Borda inférieur à la moyenne.
Kemeny	Calcule le maximum de vraisemblance des classements. Élit le premier dans le résultat.
Véto	Élit qui est classé dernier par le moins d'électeurs.
Bucklin	Élit qui a le meilleur classement médian.
Baldwin	Élimine récursivement qui a le plus petit score de Borda.
Uninominal à deux tours	Élit le préféré parmi les deux candidats le plus classés en tête.
Maximin	Élit qui a le plus grand score minimal dans la matrice majoritaire.
Ranked Pairs	Élit le supremum d'un graphe acyclique construit à partir de la matrice majoritaire.
Schulze	Élit le vainqueur de Condorcet dans une matrice majoritaire modifiée basée sur des flots maximum.
Vote à tours instantanés	Élimine récursivement qui est classé en tête par le moins d'électeurs.

TABLE 1: Brève description des systèmes de vote évalués. **En gras** : modes de scrutin Condorcet.

Une *élimination récursive* est constituée de plusieurs tours de dépouillement. À chaque tour, un critère d'élimination est calculé à partir des candidats encore en lice.

Un *bulletin normalisé* est modifié par transformation affine pour que sa pire note soit -1 et sa meilleure 1 . Une telle transformation est introduite pour augmenter le contraste des opinions.

La *matrice majoritaire* est une matrice dont l'entrée (i, j) est le nombre de voix qu'aurait obtenu le candidat i dans un duel contre j . Par convention, les termes diagonaux sont nuls.

Le *score de Borda* d'un candidat est la somme de sa ligne dans la matrice majoritaire (d'autres définitions existent, toutes équivalentes).

Quand un candidat remporte tous ses duels contre les autres candidats, il est appelé *vainqueur de Condorcet*. Un mode de scrutin est dit *Condorcet* s'il élit un vainqueur de Condorcet quand il en existe un (en gras dans la table 1).

Tous les systèmes présentés ici ne sont pas basés sur des notes, mais le dépouillement peut être émulé à partir de ces dernières. Ainsi, pour le système uninominal à deux tours, nous avons considéré que chaque électeur avait voté à chaque tour pour l'article (parmi deux au deuxième tour) avec la meilleure note.

3 Résultats

Résultats sincères La table 2 donne la matrice majoritaire, le score de Borda, et le nombre de bulletins où chaque candidat est classé en tête, en moyenne observée sur les bulletins bruités. On observe en particulier que A remporte tous ses duels, suivi de B qui ne perd que contre A , puis C , D et E . A est donc vainqueur de Condorcet (il l'est en fait sur toutes les réalisations que nous avons testées), et on a plus généralement un *ordre strict total de Condorcet* $A > B > C > D > E$.

On aurait envie de dire que A devrait être élu, et c'est ce qui se passe dans la quasi-totalité des cas. La principale exception est le mode de scrutin uninominal, qui élit B dans 17,8% des cas : B est classé en tête presque autant de fois que A , et le bruit peut donc changer le résultat. De manière beaucoup plus marginale, les autres exceptions concernent les modes de scrutin Bucklin, uninominal à deux tours et le vote à tours

	A	B	C	D	E	Score de Borda	Têtes de bulletin
A	—	35,5	36,0	36,5	39,0	147,0	16,5
B	21,5	—	29,5	33,0	33,0	117,0	14,7
C	21,0	27,5	—	32,0	31,5	111,9	9,8
D	20,5	24,0	25,0	—	29,5	99,0	10,3
E	18,0	24,0	25,5	27,5	—	95,1	5,7

TABLE 2: Matrice majoritaire moyenne, score de Borda et nombre de têtes de bulletin.

Système de vote	Taux de manipulation					
	Total	Pour A	Pour B	Pour C	Pour D	Pour E
Assentiment	100,0%	0,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Vote par valeurs	100,0%	0,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Coombs*	100,0%	0,0%	95,5%	98,1%	37,1%	80,6%
Vote par valeurs normalisées	99,9%	0,0%	74,6%	99,7%	0,7%	3,6%
Jugement majoritaire	99,1%	0,0%	17,7%	98,9%	0,0%	0,43%
Uninominal	99,0%	17,8%	77,8%	92,3%	95,1%	67,6%
Borda	98,9%	0,0%	94,1%	86,8%	39,0%	19,6%
Nanson*	72,2%	0,0%	56,4%	41,8%	31,5%	6,1%
Kemeny*	72,0%	0,0%	57,3%	37,5%	22,0%	5,3%
Véto	71,6%	0,0%	26,5%	54,3%	0,03%	1,1%
Bucklin*	26,9%	0,14%	11,9%	16,8%	0,06%	0,03%
Baldwin*	25,4%	0,0%	17,4%	9,4%	7,0%	0,42%
Uninominal à deux tours	23,5%	0,08%	12,1%	21,5%	13,8%	3,8%
Maximin	23,3%	0,0%	16,4%	13,3%	0,9%	0,02%
Ranked Pairs*	16,8%	0,0%	9,1%	9,0%	0,3%	0,0%
Schulze*	16,0%	0,0%	8,3%	8,9%	0,1%	0,1%
Vote à tours instantanés	0,14%	0,05%	0,07%	0,08%	0,01%	0,01%
Moyenne	61,4%	1,1%	45,6%	52,2%	26,3%	22,9%

TABLE 3: Taux de manipulation, en faveur d'un candidat non élu et au total. * : estimation inférieure.

instantanés, qui peuvent élire *B* ou *C* avec une probabilité très faible (moins de 1%).

Ces résultats inattendus § montrent que si les bulletins sont sincères, *A* semble être un vainqueur canonique qui atteste un choix clair des participants.

Étude de la manipulabilité Nous voyons dans la table 2 que *A* est classé en tête en moyenne par 16,5 personnes. Cela veut également dire qu'en moyenne 40,5 personnes auraient préféré un autre vainqueur. Plus précisément, on peut lire sur la matrice majoritaire combien de personnes auraient préféré que chaque autre candidat gagne : 21,5 pour *B* ; 21,0 pour *C* ; 20,5 pour *D* ; 18,0 pour *E*.

Une situation est *manipulable* si un ensemble d'électeurs préférant au vainqueur sincère un candidat *X* peuvent, en modifiant leurs bulletins et en supposant que les autres bulletins restent sincères, faire élire *X*. Nous avons testé pour chaque réalisation si elle était manipulable, et si oui en faveur de quel(s) candidat(s). Les résultats en termes de taux de manipulabilité sont présentés dans la table 3.

Il faut noter qu'il n'est pas toujours facile de déterminer si une manipulation est possible. Le problème est même connu comme étant NP-difficile pour certains modes de scrutin [BO91]. Lorsque nous ne donnons pas la réponse exacte, nous testons la manipulabilité à l'aide de quelques heuristiques simples, ce qui nous fournit une borne inférieure de la manipulabilité réelle (lignes indiquées par le symbole étoile dans la table 3).

§. Nous pensions initialement qu'il y aurait plus de diversité dans les vainqueurs possibles.

Commentaires Sans nous livrer à une analyse exhaustive, un certain nombre d'observations nous semblent pertinentes sur les résultats de la table 3.

- Tout d'abord, la faible manipulabilité pour A exprime juste le fait que A est quasiment toujours le vainqueur sincère et que ses partisans n'ont rien à faire. Les cas de manipulabilité correspondent aux cas où B , voire C est le vainqueur sincère. Il existe alors toujours une manipulation qui élit A .
- Remarquons ensuite que globalement, beaucoup de situations sont manipulables : 61% en moyenne sur les modes de scrutins testés. Même le perdant de Condorcet, E , a une stratégie de manipulation dans près de 23% des cas. La manipulabilité n'est donc pas qu'un épiphénomène théorique.
- Les pires résultats sont pour deux modes de scrutins relativement naturels, le vote par valeurs et l'assentiment, qui sont manipulables en faveur des quatre rivaux de A dans toutes les situations !
- Pour le vote par valeurs, normaliser les bulletins limite les dégâts, et réduit de beaucoup les chances de manipulations par D ou E . Intuitivement, en augmentant le contraste des bulletins sincères, il est plus difficile pour une manipulation de contrer l'effet de ces bulletins.
- Le jugement majoritaire (basé sur la médiane) a été introduit pour exprimer des opinions intensives tout en réduisant les risques de manipulation en utilisant les propriétés de la médiane [BL10]. Ce mode de scrutin est assez efficace par rapport à B , D et E , mais son effet est très faible par rapport à C . Au final, du point de vue de la manipulabilité, le jugement majoritaire se comporte moins bien que le scrutin uninominal, pourtant connu comme étant assez mauvais (ce qui se vérifie ici).
- On sait que, dans tous les modes de scrutin considérés ici sauf Véto, si le gagnant n'est pas vainqueur de Condorcet (parce qu'il n'y en a pas ou que le mode de scrutin ne l'élit pas), la situation est forcément manipulable, car il existe alors une majorité d'électeurs qui préférerait un autre candidat. On peut donc penser que les modes de scrutin Condorcet sont moins manipulables que les autres. Si cela semble globalement se vérifier sur la table 3, il faut nuancer. Tout d'abord, pour 5 d'entre eux, seule une borne inférieure est disponible. Ensuite, il y a une grande disparité : Nanson, mode de scrutin basé sur Borda, est très manipulable à 72%, alors qu'une variante extrêmement proche, Baldwin, ne l'est qu'à 25%.
- Enfin, on remarque qu'un mode de scrutin se détache nettement du lot : le vote à tours instantanés, avec un taux de 0,14% (calcul exact). Pourtant, le vote à tours instantanés *n'est pas Condorcet*.

4 Conclusion

Tout en étant conscients que les résultats présentés reposent sur une seule observation expérimentale réalisée à une échelle modeste, nous y voyons la confirmation de tendances observées par ailleurs [DMN13], à savoir : la manipulabilité n'est pas qu'un concept théorique, mais une réalité concrète susceptible d'apparaître même dans un contexte où le résultat semble a priori évident ; le choix du mode de scrutin est crucial. En particulier, le vote à tours instantanés semble nettement plus robuste que les autres modes de scrutin connus.

Références

- [BL10] L. Balinski and R. Laraki. *Majority Judgment : Measuring, Ranking, and Electing*. MIT Press, 2010.
- [BO91] John J. Bartholdi and James B. Orlin. Single transferable vote resists strategic voting. *Social Choice and Welfare*, 8 :341–354, 1991.
- [DMN13] François Durand, Fabien Mathieu, and Ludovic Noirie. On the Manipulability of Voting Systems : Application to Multi-Operator Networks. In *9th CNSM 2013 : Workshop ICQT 2013*, pages 292–297, Zurich, Switzerland, October 2013.
- [Gib73] Allan Gibbard. Manipulation of voting schemes : A general result. *Econometrica*, 41(4) :587–601, July 1973.
- [Sat75] Mark Allen Satterthwaite. Strategy-proofness and Arrow's conditions : Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2) :187–217, April 1975.
- [Tid06] N. Tideman. *Collective Decisions And Voting : The Potential for Public Choice*. Ashgate, 2006.