

## Carreaux Bézier-Serendip de degré arbitraire

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral. Carreaux Bézier-Serendip de degré arbitraire. [Rapport de recherche] RR-8624, INRIA Paris; INRIA. 2014, pp.43. <hal-01078461>

**HAL Id: hal-01078461**

**<https://hal.inria.fr/hal-01078461>**

Submitted on 29 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Carreaux Bézier-Serendip de degré arbitraire

Paul Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8624**

Octobre 2014

Project-Team Gamma3





## Carreaux Bézier-Serendip de degré arbitraire

Paul Louis George\*, Houman Borouchaki<sup>†</sup>, Nicolas Barral<sup>‡</sup>

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8624 — Octobre 2014 — 43 pages

**Résumé :** On définit des carreaux dits de Bézier-Serendip complètement symétriques pour les géométries quadrilatérales et hexaédriques. On montre comment les construire en travaillant directement sur une écriture dans la base des polynômes de Bernstein. On donne ainsi l'expression de leurs polynômes de base dans le monde Bézier. On indique que dès le degré 5, le problème de symétrie rencontré dans les éléments finis Serendip classiques se retrouve ici. On montre alors qu'en ajoutant judicieusement des points de contrôle supplémentaires, on peut retrouver une solution symétrique.

**Mots-clés :** Carreaux Bézier-Serendip. Quadrilatère. Hexaèdre. Bézier. Élément d'ordre élevé.

---

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

<sup>†</sup> UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, CS 42060, 10004 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

<sup>‡</sup> INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: nicolas.barral@inria.fr

**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

## Bézier-Serendipity patches of arbitrary degree

**Abstract:** We define Bézier-Serendipity patches for quads and hexes with full symmetry properties. We give a way of constructing those patches by considering the Bézier setting. We show that, since the degree 5, the lack of symmetry for the Serendipity Lagrange finite elements remains a point for our patches and we show that after adding an adequate number of additional control points, we can achieve this symmetry.

**Key-words:** Bézier-Serendipity Patch. Quadrilateral. Hexahedron. Bézier. High order element.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Définitions relatives à la Serendipité</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 2</b>	<b>4</b>
3.1	Caractérisation de l'espace polynomial . . . . .	4
3.2	Application à la construction du quadrilatère Serendip à 8 nœuds . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 3</b>	<b>8</b>
4.1	Caractérisation de l'espace polynomial . . . . .	8
4.2	Application à la construction du quadrilatère Serendip à 12 nœuds . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 4</b>	<b>11</b>
5.1	Caractérisation de l'espace polynomial . . . . .	12
5.2	Application à la construction du quadrilatère Serendip à 17 nœuds . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Carreau Bézier-Serendip de degré supérieur ?</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 5</b>	<b>20</b>
7.1	Caractérisation de l'espace polynomial . . . . .	20
7.2	Carreau Bézier-Serendip de degré supérieur ? . . . . .	34
<b>8</b>	<b>Validation d'un carreau de degré quelconque</b>	<b>34</b>
<b>9</b>	<b>Le cas de la trois dimensions</b>	<b>35</b>
9.1	Le carreau volumique de degré 2 . . . . .	35
9.2	Le carreau volumique de degré 3 . . . . .	38
9.3	Degrés supérieurs . . . . .	41
9.4	Validation d'un carreau tridimensionnel . . . . .	41
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

## 1 Introduction

On indique comment construire des carreaux quadrilatéraux et hexaédriques, dits Bézier-Serendip, complètement symétriques et on donne l'expression de leurs fonctions de base dans le formalisme Bézier. Dans [7], on trouve plusieurs façons pour construire des éléments finis Serendip qui nous ont inspiré pour "inventer" les carreaux discutés dans ce papier. On a vu que l'une des méthodes se base sur des développements de Taylor, qu'une autre consiste à utiliser l'analogie entre les éléments formulés dans le monde de Lagrange (nœuds et fonctions de forme) et dans le monde de Bézier (points de contrôle et polynômes de Bernstein) puis à utiliser cette relation pour répartir des fonctions de base classiques de l'élément complet et obtenir ainsi les fonctions de l'élément réduit. Une autre, enfin, repose sur la définition *a priori* de l'espace polynomial cherché (en donnant ses monômes) puis à poser la forme générique des fonctions de base afin de les obtenir via un système. C'est cette dernière approche que nous allons suivre ici pour construire, non pas des éléments finis, mais des carreaux en raisonnant directement dans le monde des courbes et surfaces de Bézier, autrement dit, sans recourir à des développements de Taylor et en ne considérant que les points de contrôle des carreaux (*i.e.*, sans utiliser leurs nœuds). On notera, au passage, que de ces carreaux, peuvent se déduire les éléments finis Serendip.

Par ailleurs, on indique comment valider géométriquement un carreau courbe d'un maillage donné dont les éléments sont ces carreaux définis de cette nouvelle façon. Cette validation se fait en raisonnant sur l'écriture des carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle) en remontant à la forme complète équivalente.

## 2 Définitions relatives à la Serendipité

Pour définir puis construire les carreaux Bézier-Serendip, on s'inspire de la définition de ce que sont les éléments finis Serendip. Les éléments Serendip de bas degré sont bien connus, ceux de degré plus élevé sont moins connus et présentent quelques difficultés quant à leur symétrie, voir [2], pour le degré 2, et [1] ou [4] pour tous les degrés.

Comme définition, nous choisissons de retenir l'approche qui se base sur la définition *a priori* de l'espace polynomial réduit. Par exemple, au degré 2, on impose la présence des monômes de  $P^2$  puis on les enrichit par les deux monômes  $u^2v$  et  $uv^2$ , ce qui correspond au schéma :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & & & \\
 & u & & & v \\
 & & & & \\
 u^2 & & uv & & v^2 \\
 & & & & \\
 & & \text{enrichi de} & & \\
 & & & & \\
 u^2v & & & & uv^2
 \end{array}$$

et cette dernière définition est valable pour tous les degrés, cf. [1] où on montre quelle est la dimension de l'espace et quels sont les nœuds de l'élément de référence tels que l'espace ainsi engendré ait les bonnes propriétés.

La base de notre idée consiste simplement à transposer cette contrainte pour définir puis construire les carreaux, naturellement dénommés Bézier-Serendip. En effet, comme les bases de Lagrange et de Bézier sont équivalentes, on va travailler directement sur les polynômes de base en Bézier (Bernstein) en leur imposant d'engendrer comme espace polynomial l'espace indiqué ci-dessus. Plus généralement, au degré  $n$ , on imposera  $P^n$  enrichi de  $u^nv$  et de  $uv^n$ .

Nous avons observé, pour des degrés élevés, par exemple au degré 5, que le nombre de nœuds internes est de 3 et que, par suite, ces nœuds ne peuvent pas former un motif géométrique symétrique vis-à-vis des arêtes. Cette non-symétrie a pour conséquence que la numérotation locale d'un élément courant d'un maillage influe sur l'expression des fonctions de forme, ce qui semble indésirable pour un élément de Lagrange, à tout le moins en trois dimensions. Comme le même phénomène reste présent pour nos carreaux, nous allons devoir trouver une solution.

Pour conclure sur cette notion de complète symétrie, on note comme conséquence qu'il suffit de trouver uniquement quelques fonctions de base (les fonctions *type*) pour les avoir toutes (2 pour le carreau quadrilatéral et hexaédrique de degré 2, 2 encore pour ces mêmes carreaux au degré 3, 3 pour le carreau quadrilatéral de degré 4, etc.).

## 3 Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 2

On utilise la notation à deux indices telle que montrée sur le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 02 & 12 & 22 & & 4 & 7 & 3 \\
 & & & & & & \\
 01 & 11 & 21 & & 8 & & 6 \\
 & & & & & & \\
 00 & 10 & 20 & & 1 & 5 & 2
 \end{array}$$

### 3.1 Caractérisation de l'espace polynomial

On impose la présence des monômes de l'espace de Serendipité puis on définit la forme générique des fonctions de base, ce qui permet de construire un système liant les coefficients de répartition (des fonctions complètes sur les fonctions réduites) cherchés.

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & u & & v \\
 & & & & u^2 & & uv & & v^2 \\
 & & & & u^2v & & & & uv^2
 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^2$  enrichi par les monômes  $u^2v$  et  $uv^2$ . Dans la suite, c'est cet espace que nous allons chercher.

**Écriture Bézier pour un carreau complet.** Ce carreau classique se formule simplement comme

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) P_{ij},$$

avec la base des polynômes de Bernstein et les neuf points de contrôle du carreau considéré.

**Écriture pour un carreau réduit.** Les fonctions de base d'un carreau réduit, notées  $B'_{ij}(u, v)$ , s'obtiennent comme combinaisons linéaires des fonctions complètes. On les cherche donc sous la forme

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^2(u) B_j^2(v) + \sum_{kl \in \mathcal{C}} \beta_{ij}^{kl} B_k^2(u) B_l^2(v),$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des indices des fonctions "centrales" que l'on répartit sur la fonction réduite d'indice  $ij$  via les coefficients  $\beta_{ij}^{kl}$ . Ainsi, le carreau réduit s'écrira :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v) P_{ij},$$

où les indices  $ij$  sont ceux des huit points de contrôle du bord du carreau.

**Caractérisation des fonctions via un système.** Par symétrie, il suffit d'examiner les deux fonctions *type* qui correspondent aux indices 00 et 10. Toujours par symétrie, on a :

$$\begin{aligned}
 B'_{00}(u, v) &= B_0^2(u) B_0^2(v) + \alpha B_1^2(u) B_1^2(v), \\
 B'_{10}(u, v) &= B_1^2(u) B_0^2(v) + \beta B_1^2(u) B_1^2(v),
 \end{aligned}$$

et des relations identiques pour les autres fonctions réduites. Il n'y a donc que deux valeurs possibles pour les coefficients de répartition.

La définition de l'espace réduit implique en premier la présence de  $u^2v$ . Comme on a :

$$\begin{aligned}
 u^2v &= u^2v(1-v+v) = B_2^2(u) \left\{ \frac{1}{2} B_1^2(v) + B_2^2(v) \right\} = \frac{1}{2} B_2^2(u) B_1^2(v) + B_2^2(u) B_2^2(v) \\
 &= \frac{1}{2} B'_{21}(u, v) + B'_{22}(u, v) - \frac{1}{2} \beta B_1^2(u) B_1^2(v) - \alpha B_1^2(u) B_1^2(v),
 \end{aligned}$$

imposer que  $u^2v$  soit obtenu par combinaison linéaire des  $B'_{ij}(u, v)$  implique que la contribution sur  $B_1^2(u) B_1^2(v)$  soit nulle, ce qui donne une première équation :

$$(E1) \quad \frac{1}{2} \beta + \alpha = 0.$$

Supposons que  $u^2v$  existe, alors, par symétrie,  $u^2(1-v)$  existe et, par suite,  $u^2$  existe aussi dans l'espace réduit. Pour couvrir  $P^2$ , il reste à imposer  $uv$ , puis  $u$ , puis la constante. Comme on a :

$$uv = \left( \frac{1}{2} B_1^2(u) + B_2^2(u) \right) \times \left( \frac{1}{2} B_1^2(v) + B_2^2(v) \right),$$



et que la contribution de  $B_1^2(u)B_1^2(v)$  vaut

$$\frac{1}{4} - \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4} - \alpha - \beta,$$

on obtient une seconde équation :

$$(E2) \quad \alpha + \beta = \frac{1}{4}.$$

Supposons, comme ci-dessus, que  $uv$  existe, alors, par symétrie,  $u(1-v)$  existe et, par suite,  $u$  existe aussi dans l'espace réduit. Comme  $u$  existe,  $1-u$  existe et la constante est trouvée.

Par suite, en imposant simplement  $u^2v$  et  $uv$  dans le monde Bézier, on a défini complètement et rapidement les paramètres permettant de construire les fonctions de formes de l'espace réduit.

Le système à résoudre est rappelé, à savoir :

$$\begin{cases} (E1) & \frac{1}{2}\beta + \alpha = 0 \\ (E2) & \alpha + \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et la solution est

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

**Expression des fonctions réduites en Bézier.** On repart de l'expression générique :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^2(u)B_0^2(v) + \alpha B_1^2(u)B_1^2(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^2(u)B_0^2(v) + \beta B_1^2(u)B_1^2(v),$$

et on porte la valeur des coefficients de répartition. Donc :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^2(u)B_0^2(v) - \frac{1}{4}B_1^2(u)B_1^2(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^2(u)B_0^2(v) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_1^2(v),$$

soit simplement :

$$\begin{aligned} B'_{00}(u, v) &= (1-u)(1-v) \{ (1-u)(1-v) - uv \} = (1-u)(1-v)(1-u-v) \\ &= B_0^2(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^2(v) - B_0^1(u)B_0^1(v), \end{aligned}$$

$$B'_{10}(u, v) = 2u(1-u)(1-v)^2 + 2uv(1-u)(1-v) = 2u(1-u)(1-v) = B_1^2(u)B_0^1(v),$$

et l'expression en Bernstein a un caractère générique (comme on le vérifiera pour les autres degrés), soit

1	1	$B'_{00}(u, v) = B_0^2(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^2(v) - B_0^1(u)B_0^1(v)$
2	5	$B'_{10}(u, v) = B_1^2(u)B_0^1(v)$

*Fonctions de base type du carreau de degré 2 à 8 points de contrôle.*

**Construire un carreau complet équivalent.** De la forme des fonctions réduites, on déduit que si l'on invente le point de contrôle

$$P_{11} = -\frac{1}{4} \sum_{ij \in \mathcal{S}} P_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ij \in \mathcal{A}} P_{ij},$$

où  $\mathcal{S}$  dénote l'ensemble des indices relatifs à un sommet tandis que  $\mathcal{A}$  correspond aux indices des points de contrôle des arêtes, alors on a :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v)P_{ij} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij},$$

pour  $ij$ , à gauche, les indices autres que 11. Autrement dit, on a construit un carreau complet équivalent au carreau réduit considéré.

### 3.2 Application à la construction du quadrilatère Serendip à 8 nœuds

À titre d'application et pour poursuivre, on va trouver explicitement les fonctions de forme de l'élément fini réduit associé à ce carreau Bézier-Serendip. On écrit :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B'_{ij}(u, v) P_{ij},$$

où  $\mathcal{F}$  désigne les indices des points de contrôle de la frontière, soit  $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ , donc tous les indices sauf l'indice "central" ( $i = j = 1$ ).

**Expression des fonctions de forme en Lagrange.** Par analogie avec les éléments complets qui s'écrivent indifféremment dans le monde Bézier (polynômes de Bernstein et points de contrôle) et dans le monde de Lagrange (fonctions de forme et nœuds), on va partir du carreau Bézier-Serendip pour trouver son élément fini réduit associé. Trouver les fonctions de forme se fait alors en exprimant les  $P_{ij}$  en fonction des  $A_{ij}$  ce qui va permettre de regrouper les polynômes réduits donc leurs expressions en fonction des polynômes de Bernstein. Par exemple, pour avoir  $q_{00}(u, v)$ , on traque  $A_{00}$  qui se cache dans  $P_{00}, P_{10}$  et  $P_{01}$  et on utilise les relations comme  $P_{10} = \frac{4A_{10} - A_{00} - A_{20}}{2}$  pour trouver la solution. Il vient :

$$\text{via } P_{00} : B'_{00}(u, v) = B_0^2(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^2(v) - B_0^1(u)B_0^1(v),$$

$$\text{via } P_{10} : -\frac{1}{2}B'_{10}(u, v) = -\frac{1}{2}B_1^2(u)B_0^1(v),$$

$$\text{via } P_{01} : -\frac{1}{2}B'_{01}(u, v) = -\frac{1}{2}B_0^1(u)B_1^2(v),$$

soit :

$$\begin{aligned} q_{00}(u, v) &= B_0^2(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^2(v) - B_0^1(u)B_0^1(v) - \frac{1}{2}B_1^2(u)B_0^1(v) - \frac{1}{2}B_0^1(u)B_1^2(v) \\ &= (1-u)^2(1-v) + (1-u)(1-v)^2 - (1-u)(1-v) - u(1-u)(1-v) - (1-u)v(1-v) \\ &= (1-u)(1-v) \{ (1-u) + (1-v) - 1 - u - v \}, \\ &= (1-u)(1-v)(1-2u-2v), \end{aligned}$$

qui est l'expression connue. Pour trouver  $q_{10}(u, v)$ , c'est immédiat, on a directement :

$$\text{via } P_{10} : 2B'_{10}(u, v) = 2B_1^2(u)B_0^1(v),$$

soit :

$$q_{10}(u, v) = 4u(1-u)(1-v),$$

comme attendu.

**Validation d'un quadrilatère courant d'un maillage donné.** Dans le carreau réduit

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v) P_{ij}$$

on remplace les  $B'$  en fonction des  $B^2$ . Soit

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij} + (\alpha P_{00} + \beta P_{10} + \alpha P_{20} + \beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{12} + \alpha P_{02} + \beta P_{01})B_1^2(u)B_1^2(v),$$

et il suffit de poser (voir ci-dessus) :

$$P_{11} = \alpha P_{00} + \beta P_{10} + \alpha P_{20} + \beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{12} + \alpha P_{02} + \beta P_{01},$$

pour retrouver le carreau complet, ainsi inventé, à savoir :

$$\sigma(u, v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij}.$$



a4	a5	a6	a7	a7	a6	a5	a4	a1	a2	a3	a4	a4	a3	a2	a1
a3			a6	a6			a3	a2	[12]		a5	a5		[22]	a2
a2	[11]		a5	a5		[21]	a2	a3			a6	a6			a3
a1	a2	a3	a4	a4	a3	a2	a1	a4	a5	a6	a7	a7	a6	a5	a4

L'espace cherché doit contenir  $P^3$ ,  $u^3v$  et  $uv^3$ . On impose en premier  $u^3v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^3v &= u^3v(1-v+v)^2 = B_3^3(u) \left\{ \frac{1}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) + B_3^3(v) \right\}, \\ &= \frac{1}{3}B_3^3(u)B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_3^3(u)B_2^3(v) + B_3^3(u)B_3^3(v), \end{aligned}$$

et, en  $B_1^3(u)B_1^3(v)$ , il vient :

$$-\frac{1}{3}\alpha_{31} - \frac{2}{3}\alpha_{32} - \alpha_{33} = -\frac{1}{3}a_5 - \frac{2}{3}a_6 - a_7 = 0,$$

donc une première équation :

$$(E1) \quad a_5 + 2a_6 + 3a_7 = 0.$$

Les contributions aux indices 21, 12 et 22 donnent les trois équations qui suivent :

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0,$$

$$(E3) \quad 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0,$$

$$(E4) \quad 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$

L'existence de  $u^3v$  impliquant celle de  $u^3(1-v)$  donne celle de  $u^3$ . On impose maintenant  $u^2v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^2v &= u^2(1-u+u)v(1-v+v)^2 = \{u^2(1-u) + u^3\} \{v(1-v)^2 + 2v^2(1-v) + v^3\}, \\ &= \left\{ \frac{1}{3}B_2^3(u) + B_3^3(u) \right\} \left\{ \frac{1}{3}B_1^3(v) + \frac{2}{3}B_2^3(v) + B_3^3(v) \right\}. \\ &= \frac{1}{9}B_2^3(u)B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_3^3(u)B_1^3(v) + \frac{2}{9}B_2^3(u)B_2^3(v) + \frac{2}{3}B_3^3(u)B_2^3(v) + \frac{1}{3}B_2^3(u)B_3^3(v) + B_3^3(u)B_3^3(v), \end{aligned}$$

expression dans laquelle on remplace les Bernstein en fonction des  $B'$  en exprimant les coefficients des fonctions centrales, soit :

$$\text{en } B_1^3(u)B_1^3(v) : -\frac{1}{3}a_5 - \frac{2}{3}a_6 - \frac{1}{3}a_6 - a_7,$$

$$\text{en } B_2^3(u)B_1^3(v) : \frac{1}{9} - \frac{1}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_3 - \frac{1}{3}a_5 - a_4,$$

$$\text{en } B_1^3(u)B_2^3(v) : -\frac{1}{3}a_6 - \frac{2}{3}a_5 - \frac{1}{3}a_3 - a_4,$$

$$\text{en } B_2^3(u)B_2^3(v) : -\frac{1}{3}a_3 - \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3}a_2 - a_1,$$

donc un jeu de quatre équations :

$$(E5) \quad a_5 + 3a_6 + 3a_7 = 0,$$

$$(E6) \quad 3a_2 + 6a_3 + 9a_4 + 3a_5 = 1,$$

$$(E7) \quad a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0,$$

$$(E8) \quad 9a_1 + 9a_2 + 3a_3 = 2.$$

L'existence de  $u^2v$  impliquant celle de  $u^2(1-v)$  donne celle de  $u^2$ . À ce stade, on a  $u^3, (1-u)^3, u^2, (1-u)^2$  qui forment une base donc on a aussi  $1, u, u^2, u^3$ . De plus comme  $u^2v$  implique  $(1-u)^2v = v - 2uv + u^2v$ ,  $uv$  tombe aussi.

Le système précédent est rappelé ici, soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (E1) & a_5 + 2a_6 + 3a_7 = 0 \\ (E2) & a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0 \\ (E3) & 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0 \\ (E4) & 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ (E5) & a_5 + 3a_6 + 3a_7 = 0 \\ (E6) & 3a_2 + 6a_3 + 9a_4 + 3a_5 = 1 \\ (E7) & a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 = 0 \\ (E8) & 9a_1 + 9a_2 + 3a_3 = 2 \end{array} \right.$$

Ce système admet une solution qui est représentée sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \text{a4} & \text{a5} & \text{a6} & \text{a7} & & -2/9 & 1/3 & 0 & -1/9 \\ & \text{a3} & & \text{a6} & & 0 & & & 0 \\ & & & & = & & & & \\ \text{a2} & [11] & & \text{a5} & & 2/3 & [11] & & 1/3 \\ \text{a1} & \text{a2} & \text{a3} & \text{a4} & & -4/9 & 2/3 & 0 & -2/9 \end{array}$$

**Expression des fonctions réduites en Bézier.** On repart de l'expression générique :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^3(u)B_0^3(v) + \alpha_{00}B_1^3(u)B_1^3(v) + \beta_{00}B_2^3(u)B_1^3(v) + \gamma_{00}B_1^3(u)B_2^3(v) + \delta_{00}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^3(u)B_0^3(v) + \alpha_{10}B_1^3(u)B_1^3(v) + \beta_{10}B_2^3(u)B_1^3(v) + \gamma_{10}B_1^3(u)B_2^3(v) + \delta_{10}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

et on porte la valeur des coefficients de répartition. Donc :

$$B'_{00}(u, v) = B_0^3(u)B_0^3(v) - \frac{4}{9}B_1^3(u)B_1^3(v) - \frac{2}{9}B_2^3(u)B_1^3(v) - \frac{2}{9}B_1^3(u)B_2^3(v) - \frac{1}{9}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = B_1^3(u)B_0^3(v) + \frac{2}{3}B_1^3(u)B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_1^3(u)B_2^3(v),$$

soit simplement :

$$B'_{00}(u, v) = (1-u)(1-v) \{ (1-u)^2(1-v)^2 - 4uv(1-u)(1-v) - 2u^2v(1-v) - 2u(1-u)v^2 - u^2v^2 \}$$

$$= (1-u)(1-v)(1-2u-2v+u^2+v^2) = B_0^3(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^3(v) - B_0^1(u)B_0^1(v),$$

$$B'_{10}(u, v) = 3u(1-u)^2 \{ (1-v)^3 + 2v(1-v)^2 + v^2(1-v) \} = 3u(1-u)^2(1-v) = B_1^3(u)B_0^1(v),$$

et l'expression en Bernstein a un caractère générique, soit

1	1	$B'_{00}(u, v) = B_0^3(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^3(v) - B_0^1(u)B_0^1(v)$
2	5	$B'_{10}(u, v) = B_1^3(u)B_0^1(v)$

*Fonctions de base type du carreau de degré 3 à 12 points de contrôle.*

**Construire un carreau complet équivalent.** De la forme des fonctions réduites, on déduit que si l'on invente les quatre points de contrôle

$$P_{11} = -\frac{4}{9}P_{00} - \frac{2}{9}P_{30} - \frac{1}{9}P_{33} - \frac{2}{9}P_{03} + \frac{2}{3}P_{10} + \frac{1}{3}P_{13} + \frac{2}{3}P_{01} + \frac{1}{3}P_{31},$$

et, par analogie :

$$P_{21} = -\frac{2}{9}P_{00} - \frac{4}{9}P_{30} - \frac{2}{9}P_{33} - \frac{1}{9}P_{03} + \frac{2}{3}P_{20} + \frac{1}{3}P_{23} + \frac{1}{3}P_{01} + \frac{2}{3}P_{31},$$

$$P_{12} = -\frac{2}{9}P_{00} - \frac{1}{9}P_{30} - \frac{2}{9}P_{33} - \frac{4}{9}P_{03} + \frac{1}{3}P_{10} + \frac{2}{3}P_{13} + \frac{2}{3}P_{02} + \frac{1}{3}P_{32},$$

$$P_{22} = -\frac{1}{9}P_{00} - \frac{2}{9}P_{30} - \frac{4}{9}P_{33} - \frac{2}{9}P_{03} + \frac{1}{3}P_{20} + \frac{2}{3}P_{23} + \frac{1}{3}P_{02} + \frac{2}{3}P_{32},$$

alors on a :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v) P_{ij} = \sum_{i=0,3} \sum_{j=0,3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij},$$

pour  $ij$ , à gauche, les indices autres que 11, 21, 12, 22. Autrement dit, on a construit un carreau complet équivalent au carreau réduit considéré.

## 4.2 Application à la construction du quadrilatère Serendip à 12 nœuds

À titre d'application et pour poursuivre, on va trouver explicitement les fonctions de forme de l'élément fini réduit associé à ce carreau Bézier-Serendip. On écrit :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B'_{ij}(u, v) P_{ij},$$

où  $\mathcal{F}$  désigne les indices des points de contrôle de la frontière, soit tous les indices sauf les indices "centraux".

**Expression des fonctions de forme en Lagrange.** Trouver les fonctions se fait en exprimant les  $P_{ij}$  en fonction des  $A_{ij}$  ce qui va permettre de regrouper les polynômes réduits donc leurs expressions en fonction des polynômes de Bernstein. Par exemple, on va se contenter de trouver  $q_{10}(u, v)$  en traquant  $A_{10}$  qui se cache dans  $P_{10}$  et  $P_{20}$  et on utilise les relations comme  $P_{10} = \frac{-5A_{00}+18A_{10}-9A_{20}+2A_{30}}{6}$  et  $P_{20} = \frac{2A_{00}-9A_{10}+18A_{20}-5A_{30}}{6}$ , pour trouver la solution. Il vient :

$$\text{via } P_{10} : 3B'_{10}(u, v) = 3B_1^3(u)B_0^1(v),$$

$$\text{via } P_{20} : \frac{3}{2}B'_{01}(u, v) = \frac{3}{2}B_2^3(u)B_0^1(v),$$

soit :

$$q_{10}(u, v) = 9u(1-u)^2(1-v) - \frac{9}{2}u^2(1-u)(1-v)$$

$$= \frac{9}{2}u(1-u)(1-v) \{2(1-u) - u\} = \frac{9}{2}u(1-u)(1-v)(2-3u),$$

comme attendu.

## 5 Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 4

On utilise la notation à deux indices telle que montrée sur le schéma suivant :

04	14	24	34	44	4	13	12	11	3
03	13	23	33	43	14				10
02	12	22	32	42	15	17			9
01	11	21	31	41	16				8
00	10	20	30	40	1	5	6	7	2



$$(E3) \quad 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E4) \quad 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 = 0.$$

L'existence de  $u^4v$  implique successivement celles de  $u^4(1-v)$ ,  $u^4$  et  $(1-u)^4$ . Pour continuer à trouver des relations entre les paramètres, on impose  $u^3v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^3v &= u^3(1-u+u)v(1-v+v)^3 = \{u^3(1-u) + u^4\} \{v(1-v)^3 + 3v^2(1-v)^2 + 3v^3(1-v) + v^4\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4}B_3^4(u) + B_4^4(u) \right\} \left\{ \frac{1}{4}B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_3^4(v) + B_4^4(v) \right\} \\ &= \frac{1}{16}B_3^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{8}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{16}B_3^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_4^4(v) \\ &\quad + \frac{1}{4}B_4^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_4^4(u)B_3^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v), \end{aligned}$$

d'où on va déduire quatre relations.

$$\text{en } B_1^4(u)B_1^4(v) : -\frac{1}{4}a_8 - \frac{1}{4}a_6 - \frac{1}{2}a_7 - \frac{3}{4}a_8 - a_9,$$

$$\text{en } B_3^4(u)B_1^4(v) : \frac{1}{16} - \frac{1}{4}a_6 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{3}{4}a_4 - a_5,$$

$$\text{en } B_1^4(u)B_3^4(v) : -\frac{1}{4}a_4 - \frac{1}{4}a_8 - \frac{1}{2}a_7 - \frac{3}{4}a_6 - a_5,$$

$$\text{en } B_3^4(u)B_3^4(v) : -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_4 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{3}{4}a_2 - a_1,$$

soit quatre équations :

$$(E5) \quad a_6 + 2a_7 + 4a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$(E6) \quad 4a_2 + 8a_3 + 12a_4 + 16a_5 + 4a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_4 + 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E8) \quad 16a_1 + 16a_2 + 8a_3 + 4a_4 = 3.$$

L'existence de  $u^3v$  implique successivement celles de  $u^3(1-v)$ ,  $u^3$  et  $(1-u)^3$ . Pour continuer à trouver des relations, on impose  $u^2v^2$  dans l'espace. Comme on a :

$$\begin{aligned} u^2v^2 &= u^2(1-u+u)^2v^2(1-v+v)^2 = (u^2(1-u)^2 + u^4 + 2u^3(1-u))(v^2(1-v)^2 + v^4 + 2v^3(1-v)) \\ &= \left\{ \frac{1}{6}B_2^4(u) + B_4^4(u) + \frac{1}{2}B_3^4(u) \right\} \left\{ \frac{1}{6}B_2^4(v) + B_4^4(v) + \frac{1}{2}B_3^4(v) \right\} \\ &= \frac{1}{36}B_2^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{12}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_2^4(u)B_4^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v) \\ &\quad + \frac{1}{2}B_3^4(u)B_4^4(v) + \frac{1}{12}B_2^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_3^4(v), \end{aligned}$$

ce qui donne quatre autres relations :

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_7 + \frac{1}{6}a_7 + a_9 + \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_8 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{6}a_7 + a_5 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{1}{2}a_4 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_7 + \frac{1}{6}a_3 + a_5 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_6 = 0,$$

$$\frac{1}{36}a_{10} + \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{6}a_3 + a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{4},$$

soit les trois (deux lignes sont redondantes) équations :

$$(E9) \quad 12a_7 + 36a_8 + 36a_9 + a_{10} = 0,$$



$$(E10) \quad 6a_3 + 18a_4 + 36a_5 + 18a_6 + 6a_7 + a_{10} = 0,$$

$$(E11) \quad 36a_1 + 36a_2 + 12a_3 + a_{10} = 9.$$

L'existence de  $u^2v^2$  implique successivement celles de  $u^2(1-v)^2$ ,  $(1-u)^2v^2$ ,  $(1-u)^2(1-v)^2$ , il manque un élément dans la base, on impose donc la relation :

$$a_1 + 2 \sum_{i=2,8} a_i + a_9 + a_{10} = 1.$$

Par suite, on a 10 paramètres et les 12 équations :

$$(E1) \quad a_6 + 2a_7 + 3a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 = 0,$$

$$(E3) \quad 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E4) \quad 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 = 0,$$

$$(E5) \quad a_6 + 2a_7 + 4a_8 + 4a_9 = 0,$$

$$(E6) \quad 4a_2 + 8a_3 + 12a_4 + 16a_5 + 4a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_4 + 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8 = 0,$$

$$(E8) \quad 16a_1 + 16a_2 + 8a_3 + 4a_4 = 3,$$

$$(E9) \quad 12a_7 + 36a_8 + 36a_9 + a_{10} = 0,$$

$$(E10) \quad 6a_3 + 18a_4 + 36a_5 + 18a_6 + 6a_7 + a_{10} = 0,$$

$$(E11) \quad 36a_1 + 36a_2 + 12a_3 + a_{10} = 9,$$

$$(E12) \quad a_1 + 2 \sum_{i=2,8} a_i + a_9 + a_{10} = 1.$$

Ce système admet une solution (Maple) qui est représentée sur le diagramme suivant (au facteur  $\frac{1}{64}$  près) :

a5	a6	a7	a8	a9	=	-3	16	-18	0	5
a4			a8			0				0
a3		a10		a7		-18		36		-18
a2	[11]			a6		48	[11]			16
a1	a2	a3	a4	a5		-27	48	-18	0	-3

et des diagrammes symétriques pour les 3 autres indices de ce type.

**Détermination des coefficients  $b_i$ .** Pour poursuivre, on va calculer la valeur des paramètres  $b_i$ . Imposer  $u^4v$  donnent les 4 équations :

$$(E1) \quad b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E2) \quad 4b_1 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad 2b_7 + 2b_8 + b_9 = 0,$$

$$(E4) \quad 2b_1 + 2b_2 + b_3 = 0.$$

Imposer  $u^3v$  revient à considérer à nouveau l'expression

$$\frac{1}{16}B_3^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{8}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{16}B_3^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_4^4(v)$$

$$+ \frac{1}{4}B_4^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{3}{4}B_4^4(u)B_3^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v),$$

ce qui donnent les 4 relations aux indices 21, 23, 12 et 32 :

$$\frac{1}{4}b_8 + \frac{1}{4}b_4 + \frac{1}{2}b_5 + \frac{3}{4}b_6 + b_7 = 0,$$

$$\frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_6 + \frac{1}{2}b_5 + \frac{3}{4}b_4 + b_1 = 0,$$

$$\frac{1}{4}b_6 + \frac{1}{4}b_8 + \frac{1}{2}b_9 + \frac{3}{4}b_8 + b_7 = 0,$$

$$\frac{1}{4}b_4 + \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{2}b_3 + \frac{3}{4}b_2 + b_1 = \frac{1}{8},$$

donc les 4 équations :

$$(E5) \quad b_8 + b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E6) \quad b_2 + b_6 + 2b_5 + 3b_4 + 4b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_6 + b_8 + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 = 0,$$

$$(E8) \quad 2b_4 + 2b_2 + 4b_3 + 6b_2 + 8b_1 = 1.$$

Imposer  $u^2v^2$  revient à considérer à nouveau l'expression

$$\frac{1}{36}B_2^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_4^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{12}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{6}B_2^4(u)B_4^4(v) + B_4^4(u)B_4^4(v)$$

$$+ \frac{1}{2}B_3^4(u)B_4^4(v) + \frac{1}{12}B_2^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{2}B_4^4(u)B_3^4(v) + \frac{1}{4}B_3^4(u)B_3^4(v),$$

ce qui donne quatre autres relations aux indices 21, 23, 12 et 32 :

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_5 + \frac{1}{6}b_9 + b_7 + \frac{1}{2}b_8 + \frac{1}{2}b_6 = 0,$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_5 + \frac{1}{6}b_3 + b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_4 = \frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_9 + \frac{1}{6}b_5 + b_7 + \frac{1}{2}b_6 + \frac{1}{2}b_8 = 0,$$

$$\frac{1}{36}b_{10} + \frac{1}{6}b_3 + \frac{1}{6}b_5 + b_1 + \frac{1}{2}b_4 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{12},$$

donc les 2 équations :

$$(E9) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_9 + 36b_7 + 18b_8 + 18b_6 = 0,$$

$$(E10) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_3 + 36b_1 + 18b_2 + 18b_4 = 3.$$

Comme ci-dessus. il faut rajouter la relation

$$2b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 2b_7 + 2b_8 + b_9 + b_{10} = 1.$$

On a donc le système suivant (11 équations pour 10 inconnues) :

$$(E1) \quad b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E2) \quad 4b_1 + 3b_4 + 2b_5 + b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad 2b_7 + 2b_8 + b_9 = 0,$$

$$(E4) \quad 2b_1 + 2b_2 + b_3 = 0,$$

$$(E5) \quad b_8 + b_4 + 2b_5 + 3b_6 + 4b_7 = 0,$$

$$(E6) \quad b_2 + b_6 + 2b_5 + 3b_4 + 4b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_6 + b_8 + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 = 0,$$

$$(E8) \quad 2b_4 + 2b_2 + 4b_3 + 6b_2 + 8b_1 = 1,$$

$$(E9) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_9 + 36b_7 + 18b_8 + 18b_6 = 0,$$

$$(E10) \quad b_{10} + 6b_5 + 6b_3 + 36b_1 + 18b_2 + 18b_4 = 3,$$

$$(E11) \quad 2b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + 2b_5 + 2b_6 + 2b_7 + 2b_8 + b_9 + b_{10} = 1.$$

Ce système admet une solution (Maple) qui est représentée sur le diagramme suivant (au facteur  $\frac{1}{16}$  près) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{b7} & \text{b8} & \text{b9} & \text{b8} & \text{b7} & & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
 \text{b6} & & & & \text{b6} & & 0 & & & & 0 \\
 \text{b5} & & \text{b10} & & \text{b5} & = & -6 & & 12 & & -6 \\
 \text{b4} & & [21] & & \text{b4} & & 8 & & [21] & & 8 \\
 \text{b1} & \text{b2} & \text{b3} & \text{b2} & \text{b1} & & -3 & 0 & 6 & 0 & -3
 \end{array}$$

et des diagrammes symétriques pour les 3 autres indices de ce type.

**Expression des fonctions réduites en Bézier.** On repart de la forme générique des fonctions, soit :

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^4(u)B_j^4(v) + \sum_{kl \in \mathcal{C}} \alpha_{ij}^{kl} B_k^4(u)B_l^4(v),$$

et on exprime les quatre fonctions type.

$$\bullet B'_{00}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
 B'_{00}(u, v) &= B_0^4(u)B_0^4(v) - \frac{27}{64}B_1^4(u)B_1^4(v) - \frac{3}{64}B_3^4(u)B_1^4(v) - \frac{3}{64}B_1^4(u)B_3^4(v) + \frac{5}{64}B_3^4(u)B_3^4(v) \\
 &\quad - \frac{3}{16}B_2^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{16}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{1}{16}B_2^4(u)B_3^4(v) - \frac{3}{16}B_1^4(u)B_2^4(v) \\
 &= (1-u)^4(1-v)^4 - \frac{27}{4}u(1-u)^3v(1-v)^3 - \frac{3}{4}u^3(1-u)v(1-v)^3 - \frac{3}{4}u(1-u)^3v^3(1-v) + \frac{5}{4}u^3(1-u)v^3(1-v) \\
 &\quad - \frac{9}{2}u^2(1-u)^2v(1-v)^3 + \frac{3}{2}u^3(1-u)v^2(1-v)^2 + \frac{3}{2}u^2(1-u)^2v^3(1-v) - \frac{9}{2}u(1-u)^3v^2(1-v)^2 \\
 &= (1-u)(1-v) \\
 &\quad \left\{ (1-u)^3(1-v)^3 - \frac{27}{4}u(1-u)^2v(1-v)^2 - \frac{3}{4}u^3v(1-v)^2 - \frac{3}{4}u(1-u)^2v^3 + \frac{5}{4}u^3v^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{9}{2}u^2(1-u)v(1-v)^2 + \frac{3}{2}u^3v^2(1-v) + \frac{3}{2}u^2(1-u)v^3 - \frac{9}{2}u(1-u)^2v^2(1-v) \right\} \\
 &= (1-u)(1-v)(1-3u-3v+3u^2+3v^2-u^3-v^3+\frac{9}{4}uv) \\
 &= (1-u)(1-v)(1-u)^3 + (1-u)(1-v)(1-3v+3v^2-v^3-1+\frac{9}{4}uv) \\
 &= (1-u)(1-v)(1-u)^3 + (1-u)(1-v)(1-3v+3v^2-v^3) - (1-u)(1-v) + (1-u)(1-v)\frac{9}{4}uv \\
 &= B_0^4(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^4(v) - B_0^1(u)B_0^1(v) + \frac{9}{16}B_1^2(u)B_1^2(v)
 \end{aligned}$$

$$\bullet B'_{10}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
B'_{10}(u, v) &= B_1^4(u)B_0^4(v) + \frac{48}{64}B_1^4(u)B_1^4(v) + \frac{16}{64}B_1^4(u)B_3^4(v) + \frac{8}{16}B_1^4(u)B_2^4(v) \\
&= B_1^4(u)B_0^4(v) + \frac{3}{4}B_1^4(u)B_1^4(v) + \frac{1}{4}B_1^4(u)B_3^4(v) + \frac{2}{4}B_1^4(u)B_2^4(v) \\
&= 4u(1-u)^3(1-v)^4 + 12u(1-u)^3v(1-v)^3 + 4u(1-u)^3v^3(1-v) + 12u(1-u)^3v^2(1-v)^2 \\
&= 4u(1-u)^3(1-v) \{ (1-v)^3 + 3v(1-v)^2 + v^3 + 3v^2(1-v) \} = 4u(1-u)^3(1-v) = B_1^4(u)B_0^1(v).
\end{aligned}$$

$$\bullet B'_{20}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
B'_{20}(u, v) &= B_2^4(u)B_0^4(v) - \frac{18}{64}B_1^4(u)B_1^4(v) - \frac{18}{64}B_3^4(u)B_1^4(v) - \frac{18}{64}B_1^4(u)B_3^4(v) - \frac{18}{64}B_3^4(u)B_3^4(v) \\
&\quad + \frac{6}{16}B_2^4(u)B_1^4(v) - \frac{6}{16}B_3^4(u)B_2^4(v) - \frac{2}{16}B_2^4(u)B_3^4(v) - \frac{6}{16}B_1^4(u)B_2^4(v) \\
&= 6u^2(1-u)^2(1-v)^4 - \frac{9}{2}u(1-u)^3v(1-v)^3 - \frac{9}{2}u^3(1-u)v(1-v)^3 - \frac{9}{2}u(1-u)^3v^3(1-v) - \frac{9}{2}u^3(1-u)v^3(1-v) \\
&\quad + 9u^2(1-u)^2v(1-v)^3 - 9u^3(1-u)v^2(1-v)^2 - 3u^2(1-u)^2v^3(1-v) - 9u(1-u)^3v^2(1-v)^2 \\
&= 3u(1-u)(1-v) \times \\
&\quad \left\{ 2u(1-u)(1-v)^3 - \frac{3}{2}(1-u)^2v(1-v)^2 - \frac{3}{2}u^2v(1-v)^2 - \frac{3}{2}(1-u)^2v^3 - \frac{3}{2}u^2v^3 \right. \\
&\quad \left. + 3u(1-u)v(1-v)^2 - 3u^2v^2(1-v) - u(1-u)v^3 - 3(1-u)^2v^2(1-v) \right\} \\
&= 3u(1-u)(1-v)(2u - 2u^2 - \frac{3}{2}v) = 6u^2(1-u)^2(1-v) - \frac{9}{2}u(1-u)v(1-v) \\
&= B_2^4(u)B_0^1(v) - \frac{9}{8}B_1^2(u)B_1^2(v).
\end{aligned}$$

$$\bullet B'_{22}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
B'_{22}(u, v) &= B_2^4(u)B_2^4(v) + \frac{36}{64}B_1^4(u)B_1^4(v) + \frac{36}{64}B_3^4(u)B_1^4(v) + \frac{36}{64}B_1^4(u)B_3^4(v) + \frac{36}{64}B_3^4(u)B_3^4(v) \\
&\quad + \frac{12}{16}B_2^4(u)B_1^4(v) + \frac{12}{16}B_3^4(u)B_2^4(v) + \frac{12}{16}B_2^4(u)B_3^4(v) + \frac{12}{16}B_1^4(u)B_2^4(v) \\
&= 36u^2(1-u)^2v^2(1-v)^2 \\
&\quad + 9u(1-u)^3v(1-v)^3 + 9u^3(1-u)v(1-v)^3 + 9u(1-u)^3v^3(1-v) + 9u^3(1-u)v^3(1-v) \\
&\quad + 18u^2(1-u)^2v(1-v)^3 + 18u^3(1-u)v^2(1-v)^2 + 18u^2(1-u)^2v^3(1-v) + 18u(1-u)^3v^2(1-v)^2 \\
&= 9u(1-u)v(1-v) \{ 4u(1-u)v(1-v) + (1-u)^2(1-v)^2 + u^2(1-v)^2 + (1-u)^2v^2 + u^2v^2 \\
&\quad + 2u(1-u)(1-v)^2 + 2u^2v(1-v) + 2u(1-u)v^2 + 2(1-u)^2v(1-v) \} \\
&= 9u(1-u)v(1-v) = \frac{9}{4}B_1^2(u)B_1^2(v).
\end{aligned}$$

Les quatre fonctions de base type sont rappelées dans le tableau qui suit

1	1	$B'_{00}(u, v) = B_0^4(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^4(v) - B_0^1(u)B_0^1(v) + \frac{9}{16}B_1^2(u)B_1^2(v)$
2	5	$B'_{10}(u, v) = B_1^4(u)B_0^1(v)$
3	6	$B'_{20}(u, v) = B_2^4(u)B_0^1(v) - \frac{9}{8}B_1^2(u)B_1^2(v)$
4	17	$B'_{22}(u, v) = \frac{9}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)$

Fonctions de base type du carreau de degré 4 à 17 points de contrôle.

**Construire un carreau complet équivalent.** De la forme des fonctions réduites, on déduit que si l'on invente les huit points de contrôle

$$64 P_{11} = -27P_{00} + 48P_{10} + 48P_{01} - 3P_{40} + 16P_{41} + 16P_{14} + 5P_{44} - 3P_{04} \\ -18P_{20} - 18P_{02} + 36P_{22} - 18P_{42} - 18P_{24},$$

et des expression symétriques pour  $P_{31}, P_{33}$  Et  $P_{13}$  puis

$$16 P_{21} = -3P_{00} + 6P_{20} + 8P_{01} - 6P_{02} + 12P_{22} - 3P_{40} + 8P_{41} - 6P_{42} \\ -2P_{24} + P_{44} + P_{04}$$

et des expressions symétriques pour  $P_{23}, P_{12}$  et  $P_{32}$ , alors on a :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v)P_{ij} = \sum_{i=0,4} \sum_{j=0,4} B_i^4(u)B_j^4(v)P_{ij},$$

pour  $ij$ , à gauche, les indices autres que 11, 21, 31, 12, 32, 13, 23, 33. Autrement dit, on a construit un carreau complet équivalent au carreau réduit considéré.

## 5.2 Application à la construction du quadrilatère Serendip à 17 nœuds

À titre d'application et pour poursuivre, on va trouver explicitement les fonctions de forme de l'élément fini réduit associé à ce carreau Bézier-Serendip. On écrit :

$$\sigma(u, v) = \sum_{ij \in \mathcal{F}} B'_{ij}(u, v)P_{ij},$$

où  $\mathcal{F}$  désigne les indices des points de contrôle de la frontière, soit tous les indices sauf les indices "centraux" tout en gardant l'indice 22.

**Expression des fonctions de forme en Lagrange.** Trouver les fonctions se fait en exprimant les  $P_{ij}$  en fonction des  $A_{ij}$  ce qui va permettre de regrouper les polynômes réduits donc leurs expressions en fonction des polynômes de Bernstein. Par exemple, on va se contenter de trouver  $q_{10}(u, v)$  en traquant  $A_{10}$  qui se cache dans  $P_{10}, P_{20}, P_{30}$  et  $P_{22}$  et, pour trouver la solution, on utilise les relations comme

$$P_{10} = \frac{-13A_{00} + 48A_{10} - 36A_{20} + 16A_{30} - 3A_{40}}{12} \\ P_{20} = \frac{13A_{00} - 64A_{10} + 120A_{20} - 64A_{30} + 13A_{40}}{18} \\ P_{30} = \frac{-3A_{00} + 16A_{10} - 36A_{20} + 48A_{30} - 13A_{40}}{12},$$

puis pour voir l'incidence de  $P_{22}$ , on exprime  $A_{22}$ . Il vient :

$$A_{22} = \sum_{ij} B'_{ij}(u, v)P_{ij} \quad \text{pour } u = v = \frac{1}{2},$$

soit

$$A_{22} = -\frac{3}{64}P_{00} + \frac{1}{8}P_{10} - \frac{3}{32}P_{20} + \frac{1}{8}P_{30} + \dots + \frac{9}{16}P_{22},$$

d'où on déduit :

$$P_{22} = \frac{16}{9} \left\{ \frac{3}{64}P_{00} - \frac{1}{8}P_{10} + \frac{3}{32}P_{20} - \frac{1}{8}P_{30} + \dots \right\}.$$

On en tire les contributions sur  $A_{10}$ , soit

$$\text{via } P_{10} : 4B'_{10}(u, v),$$

$$\text{via } P_{20} : -\frac{32}{9}B'_{20}(u, v),$$

$$\text{via } P_{30} : \frac{16}{12}B'_{30}(u, v),$$

$$\text{via } P_{22} : \frac{16}{9} \left\{ -\frac{1}{8} \frac{48}{12} + \frac{3}{32} \frac{-64}{18} - \frac{1}{8} \frac{16}{12} \right\} B'_{22}(u, v) = -\frac{16}{9} B'_{22}(u, v),$$

soit :

$$\begin{aligned} q_{10}(u, v) &= 4B_1^4(u)B_0^1(v) - \frac{32}{9}(B_2^4(u)B_0^1(v) - \frac{9}{8}B_1^2(u)B_1^2(v)) + \frac{16}{12}B_3^4(u)B_0^1(v) - \frac{16}{9} \frac{9}{4}B_1^2(u)B_1^2(v) \\ &= 4B_1^4(u)B_0^1(v) - \frac{32}{9}(B_2^4(u)B_0^1(v) + \frac{32}{9} \frac{9}{8}B_1^2(u)B_1^2(v) + \frac{16}{12}B_3^4(u)B_0^1(v) - \frac{16}{9} \frac{9}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)) \\ &= 4B_1^4(u)B_0^1(v) - \frac{32}{9}B_2^4(u)B_0^1(v) + \frac{16}{12}B_3^4(u)B_0^1(v) \\ &= (4B_1^4(u) - \frac{32}{9}B_2^4(u) + \frac{4}{3}B_3^4(u))(1-v) \\ &= \left\{ 16u(1-u)^3 - \frac{32}{9}6u^2(1-u)^2 + \frac{4}{3}4u^3(1-u) \right\} (1-v) \\ &= 16u(1-u) \left\{ (1-u)^2 - \frac{4}{3}u(1-u) + \frac{1}{3}u^2 \right\} (1-v) \\ &= 16u(1-u) \left\{ (1-u)^2 - \frac{4}{3}u(1-u) + \frac{1}{3}u^2 \right\} (1-v) \\ &= \frac{16}{3}u(1-u) \{3(1-u)^2 - 4u(1-u) + u^2\} (1-v) = \frac{16}{3}u(1-u)(1-v)(3-10u+8u^2) \end{aligned}$$

comme attendu.

## 6 Carreau Bézier-Serendip de degré supérieur ?

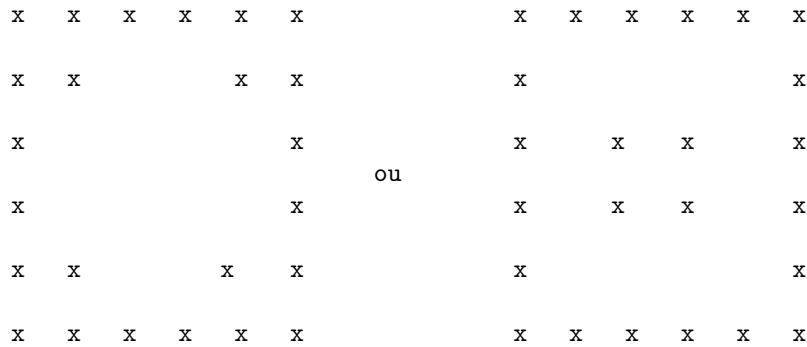
Avant de discuter du cas des carreaux, on revient sur les éléments finis Serendip. On trouve dans la littérature sur les éléments finis les éléments de Lagrange Serendip à tout ordre mais, dès le degré 5, ils ne sont pas complètement symétriques comme le montre le tableau suivant qui indique la dimension de l'espace  $P^n$ , soit  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , la dimension de l'espace de serendipité, le nombre de nœuds internes associés à cet espace et le nombre de nœuds à ajouter pour créer un élément avec des fonctions de forme symétriques et des nœuds, sur l'élément de référence, complètement symétriques.

$n$	$\dim(P^n)$	$\dim(P^n) + x^n y + xy^n$	$\#noeuds$	$+$
2	6	8	0	0
3	10	12	0	0
4	15	17	1	0
5	21	23	3	1
6	28	30	6	2
7	36	38	10	2

*Dimension des espaces polynomiaux et nombre de nœuds internes et manquants.*

En effet, cf. [1] entre autres, un quadrilatère de degré 5 existe avec 3 nœuds internes, mais il est non symétrique et ne peut pas être de Lagrange. Cet élément possède 23 nœuds ( $4 \times 5 + 3$ ). De manière générale, on trouve aussi les éléments d'ordre supérieur mais ils sont non symétriques.

**Une construction possible.** Nous pensons qu'il est possible de trouver des éléments finis, que nous pourrions continuer à appeler, peut être par abus de langage, Serendip, complètement symétriques à tous les degrés. L'idée, par exemple pour le degré 5, est d'ajouter un nœud interne supplémentaire. Par suite, on passe de 3 à 4 nœuds internes qu'il est immédiat de positionner pour avoir une symétrie géométrique parfaite. La symétrie des nœuds devrait alors permettre de construire les fonctions de forme désirées en posant le système d'équations correspondant. Ainsi, cet élément aura 24 nœuds ( $4 \times 5 + 4$ ). On peut, dans ce cas précis, définir deux éléments ayant les bonnes propriétés géométriques car il y a deux façons de choisir les nœuds internes comme l'indique le schéma suivant :

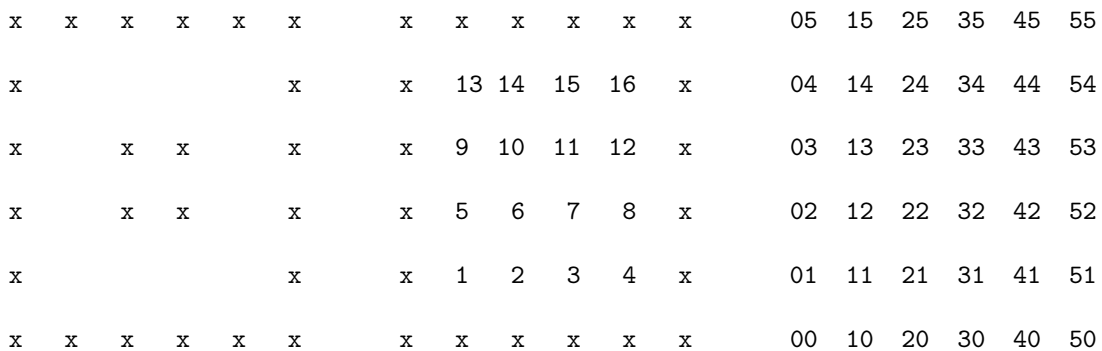


Ce problème de non symétrie se retrouve, tel quel, dans le cas qui nous préoccupe, un carreau de degré 5 avec seulement 23 points de contrôle ne peut pas être symétrique.

La section suivante discute en détail du cas du carreau de degré 5 afin de vérifier s'il est possible de lui ajouter un point de contrôle supplémentaire (passant ainsi de 23 à 24 points) et de voir quelle incidence cela a au niveau de l'espace polynomial engendré.

## 7 Construction du carreau Bézier-Serendip de degré 5

Parmi les deux choix possibles, on considère celui de droite dans lequel les quatre points centraux sont plus près du centre du carreau. Ce choix qui est illustré par les diagrammes suivants qui indiquent également la correspondance entre la numérotation séquentielle et la numérotation naturelle à deux indices.



### 7.1 Caractérisation de l'espace polynomial

On impose la présence des monômes de l'espace de Serendipité puis on définit la forme générique des fonctions de base, ce qui permet de construire un système liant les coefficients de répartition (des fonctions complètes sur les fonctions réduites) cherchés. La non-symétrie initiale ayant motivé l'ajout d'un point de contrôle va se retrouver dans le fait qu'une famille de solution va, *a priori*, être trouvée.

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & u & & & v \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & u^2 & & uv & & v^2 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & u^3 & & u^2v & & uv^2 & & v^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & u^4 & & u^3v & & u^2v^2 & & uv^3 & & v^4 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & u^5 & & u^4v & & u^3v^2 & & u^2v^3 & & uv^4 & & v^5 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & u^5v & & & & & & & & & & uv^5
 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^5$  enrichi par les monômes  $u^5v$  et  $uv^5$ . Dans la suite, c'est cet espace que nous allons chercher.

**Caractérisation des fonctions via un système.** Par symétrie, on garde les contributions aux indices 22, 32, 23 et 33 et on pose *a priori* :

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^5(u)B_j^5(v) + \sum_{kl} \alpha_{ij}^{kl} B_k^5(u)B_l^5(v),$$

où  $B'_{ij}$  désigne une fonction réduite et les  $kl$  sont les indices des fonctions "centrales".

Par symétrie, toujours, les coefficients de répartition, les  $\alpha_{ij}^{kl}$ , prennent leurs valeurs dans deux ensembles (indépendants) de 14 et de 24 paramètres qui correspondent aux schémas qui suivent (lire  $a_i$  comme  $a_i$  et  $b_i$  comme  $b_i$ ) :

a6	a7	a8	a9	a10	a11		b16	b15	b14	b13	b12	b11
					a10		b17					b10
		a13	a14		a9		b18		b23	b24		b9
		a12	a13		a8		b19		b21	b22		b8
	[11]				a7		b20		[21]			b7
a1	a2	a3	a4	a5	a6		b1	b2	b3	b4	b5	b6

Les  $a_i$  indiquent (avec les symétries voulues) la répartition pour les contributions en 11, 41, 14 et 44, les  $b_i$  donnent (idem) la répartition pour les contributions en 21, 31, 24, 34, 42, 43, 12 et 13.

**Détermination des coefficients  $a_i$ .** On impose  $u^5v$ . On a

$$\begin{aligned}
 u^5v &= u^5v(1-v+v)^4 = u^5 \{ v(1-v)^4 + 4v^2(1-v)^3 + 6v^3(1-v)^2 + 4v^4(1-v) + v^5 \} \\
 &= B_5^5(u) \left\{ \frac{1}{5} B_1^5(v) + \frac{2}{5} B_2^5(v) + \frac{3}{5} B_3^5(v) + \frac{4}{5} B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\
 &= \frac{1}{5} B_5^5(u) B_1^5(v) + \frac{2}{5} B_5^5(u) B_2^5(v) + \frac{3}{5} B_5^5(u) B_3^5(v) + \frac{4}{5} B_5^5(u) B_4^5(v) + B_5^5(u) B_5^5(v).
 \end{aligned}$$

Ceci donnent 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5} a_7 + \frac{2}{5} a_8 + \frac{3}{5} a_9 + \frac{4}{5} a_{10} + a_{11} &= 0, \\
 \frac{1}{5} a_2 + \frac{2}{5} a_3 + \frac{3}{5} a_4 + \frac{4}{5} a_5 + a_6 &= 0,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 &= 0.\end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 = 0,$$

$$(E3) \quad a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E4) \quad a_5 + 2a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 5a_1 = 0.$$

On impose  $u^4v$ . On a :

$$\begin{aligned}u^4v &= u^4(1-u+u) \{v(1-v)^4 + 4v^2(1-v)^3 + 6v^3(1-v)^2 + 4v^4(1-v) + v^5\} \\ &= \left\{ \frac{1}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{5}B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\ &= \frac{1}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v).\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}a_{10} + \frac{1}{5}a_7 + \frac{2}{5}a_8 + \frac{3}{5}a_9 + \frac{4}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\ \frac{1}{5}a_7 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 &= \frac{1}{25}, \\ \frac{1}{5}a_5 + \frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 &= \frac{4}{25}, \\ \frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 &= 4.\end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E5) \quad a_{10} + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E6) \quad 5a_7 + 5a_2 + 10a_3 + 15a_4 + 20a_5 + 25a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_5 + a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E8) \quad 5a_2 + 5a_5 + 10a_4 + 15a_3 + 20a_2 + 25a_1 = 4.$$

On impose  $u^3v^2$ . On a :

$$\begin{aligned}u^3v^2 &= u^3(1-u+u)^2v^2(1-v+v)^3 \\ &= \{u^3(1-u)^2 + 2u^4(1-u) + u^5\} \{v^2(1-v)^3 + 3v^3(1-v)^2 + 3v^4(1-v) + v^5\} \\ &= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\}, \\ &= \frac{1}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v).\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{3}{10}a_9 + \frac{3}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{12} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{10}a_3 + \frac{3}{10}a_4 + \frac{3}{5}a_5 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{14} + \frac{3}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{10}a_9 + \frac{3}{10}a_8 + \frac{3}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\ \frac{1}{100}a_{13} + \frac{3}{100}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{10}a_4 + \frac{3}{10}a_3 + \frac{3}{5}a_2 + a_1 &= \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E9) \quad a_{13} + 3a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_8 + 30a_9 + 60a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad a_{12} + 3a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 100a_6 = 0,$$

$$(E11) \quad a_{14} + 3a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E12) \quad a_{13} + 3a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_4 + 30a_3 + 60a_2 + 100a_1 = 24.$$

On impose  $u^3v$ . On a :

$$\begin{aligned} u^3v &= u^3(1-u+u)^2v(1-v+v)^4 \\ &= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{5}B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\ &= \frac{1}{50}B_3^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{50}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{8}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ &\quad + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v). \end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned} \frac{2}{50}a_{13} + \frac{3}{50}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{5}a_7 + \frac{2}{5}a_8 + \frac{3}{5}a_9 + \frac{4}{5}a_{10} + a_{11} &= 0. \\ \frac{2}{50}a_{12} + \frac{3}{50}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 &= \frac{2}{25}. \\ \frac{2}{50}a_{14} + \frac{3}{50}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{5}a_{10} + \frac{2}{5}a_9 + \frac{3}{5}a_8 + \frac{4}{5}a_7 + a_6 &= 0. \\ \frac{2}{50}a_{13} + \frac{3}{50}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{5}a_5 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{3}{5}a_3 + \frac{4}{5}a_2 + a_1 &= \frac{8}{25}. \end{aligned}$$

Il en découle les 4 équations :

$$(E13) \quad 2a_{13} + 3a_{14} + 5a_9 + 20a_{10} + 10a_7 + 20a_8 + 30a_9 + 40a_{10} + 50a_{11} = 0.$$

$$(E14) \quad 2a_{12} + 3a_{13} + 5a_8 + 20a_7 + 10a_2 + 20a_3 + 30a_4 + 40a_5 + 50a_6 = 4,$$

$$(E15) \quad 2a_{14} + 3a_{13} + 5a_4 + 20a_5 + 10a_{10} + 20a_9 + 30a_8 + 40a_7 + 50a_6 = 0,$$

$$(E16) \quad 2a_{13} + 3a_{12} + 5a_3 + 20a_2 + 10a_5 + 20a_4 + 30a_3 + 40a_2 + 50a_1 = 16.$$

On impose  $u^2v^2$ . On a :

$$\begin{aligned} u^2v^2 &= u^2(1-u+u)^3v^2(1-v+v)^3 \\ &= \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(u) + \frac{3}{10}B_3^5(u) + \frac{3}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\ &= \frac{1}{100}B_2^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_2^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_2^5(u)B_5^5(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{100} B_3^5(u) B_2^5(v) + \frac{9}{100} B_3^5(u) B_3^5(v) + \frac{9}{50} B_3^5(u) B_4^5(v) + \frac{3}{10} B_3^5(u) B_5^5(v) \\
& + \frac{3}{50} B_4^5(u) B_2^5(v) + \frac{9}{50} B_4^5(u) B_3^5(v) + \frac{9}{25} B_4^5(u) B_4^5(v) + \frac{3}{5} B_4^5(u) B_5^5(v) \\
& + \frac{1}{10} B_5^5(u) B_2^5(v) + \frac{3}{10} B_5^5(u) B_3^5(v) + \frac{3}{5} B_5^5(u) B_4^5(v) + B_5^5(u) B_5^5(v).
\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100} a_{12} + \frac{3}{100} a_{13} + \frac{3}{100} a_{13} + \frac{9}{100} a_{14} + \frac{1}{10} a_8 + \frac{3}{10} a_9 + \frac{3}{5} a_{10} + \frac{1}{10} a_8 + \frac{3}{10} a_9 + \frac{3}{5} a_{10} + a_{11} &= 0, \\
\frac{1}{100} a_{13} + \frac{3}{100} a_{14} + \frac{3}{100} a_{12} + \frac{9}{100} a_{13} + \frac{1}{10} a_9 + \frac{3}{10} a_8 + \frac{3}{5} a_7 + \frac{1}{10} a_3 + \frac{3}{10} a_4 + \frac{3}{5} a_5 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100} a_{13} + \frac{3}{100} a_{12} + \frac{3}{100} a_{14} + \frac{9}{100} a_{13} + \frac{1}{10} a_3 + \frac{3}{10} a_4 + \frac{3}{5} a_5 + \frac{1}{10} a_9 + \frac{3}{10} a_8 + \frac{3}{5} a_7 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100} a_{14} + \frac{3}{100} a_{13} + \frac{3}{100} a_{13} + \frac{9}{100} a_{12} + \frac{1}{10} a_4 + \frac{3}{10} a_3 + \frac{3}{5} a_2 + \frac{1}{10} a_4 + \frac{3}{10} a_3 + \frac{3}{5} a_2 + a_1 &= \frac{9}{25}.
\end{aligned}$$

Il en découle les 3 équations (deux lignes sont identiques) :

$$(E17) \quad a_{12} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{14} + 20a_8 + 60a_9 + 120a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad a_{13} + 3a_{12} + 3a_{14} + 9a_{13} + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E19) \quad a_{14} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{12} + 20a_4 + 60a_3 + 120a_2 + 100a_1 = 36.$$

On résoud alors le système obtenu, à savoir :

$$(E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 = 0,$$

$$(E3) \quad a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E4) \quad a_5 + 2a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 5a_1 = 0,$$

$$(E5) \quad a_{10} + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

$$(E6) \quad 5a_7 + 5a_2 + 10a_3 + 15a_4 + 20a_5 + 25a_6 = 1,$$

$$(E7) \quad a_5 + a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 = 0,$$

$$(E8) \quad 5a_2 + 5a_5 + 10a_4 + 15a_3 + 20a_2 + 25a_1 = 4.$$

$$(E9) \quad a_{13} + 3a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_8 + 30a_9 + 60a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad a_{12} + 3a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 100a_6 = 0,$$

$$(E11) \quad a_{14} + 3a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E12) \quad a_{13} + 3a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_4 + 30a_3 + 60a_2 + 100a_1 = 24,$$

$$(E13) \quad 2a_{13} + 3a_{14} + 5a_9 + 20a_{10} + 10a_7 + 20a_8 + 30a_9 + 40a_{10} + 50a_{11} = 0,$$

$$(E14) \quad 2a_{12} + 3a_{13} + 5a_8 + 20a_7 + 10a_2 + 20a_3 + 30a_4 + 40a_5 + 50a_6 = 4,$$

$$(E15) \quad 2a_{14} + 3a_{13} + 5a_4 + 20a_5 + 10a_{10} + 20a_9 + 30a_8 + 40a_7 + 50a_6 = 0,$$

$$(E16) \quad 2a_{13} + 3a_{12} + 5a_3 + 20a_2 + 10a_5 + 20a_4 + 30a_3 + 40a_2 + 50a_1 = 16,$$

$$(E17) \quad a_{12} + 6a_{13} + 9a_{14} + 20a_8 + 60a_9 + 120a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad a_{13} + 3a_{12} + 3a_{14} + 9a_{13} + 10a_3 + 30a_4 + 60a_5 + 10a_9 + 30a_8 + 60a_7 + 100a_6 = 0,$$

$$(E19) \quad a_{14} + 3a_{13} + 3a_{13} + 9a_{12} + 20a_4 + 60a_3 + 120a_2 + 100a_1 = 36.$$

À ce stade, on a une solution avec un paramètre (Maple donne la solution en exhibant  $a_6$  comme paramètre et nous notons ce paramètre  $\alpha$ ), cette solution est la suivante :

$$a_1 = -4/9 - \alpha, a_2 = 4/5, a_3 = -4/15 + 5 * \alpha, a_4 = -4/45 - 5 * \alpha, a_5 = 0, a_6 = \alpha, a_7 = 1/5,$$

$$a_8 = -28/45 - 5 * \alpha, a_9 = 8/15 + 5 * \alpha, a_{10} = 0, a_{11} = -1/9 - \alpha, a_{12} = -25 * \alpha - 4/9,$$

$$a_{13} = 25 * \alpha + 4/3, a_{14} = -25 * \alpha - 16/9$$

soit le diagramme suivant ( $\alpha$  étant noté  $a$ ) :

a	9/45	-28/45-5a	24/45+5a	0	-5/45-a	6	7	8	9	10	11
0					0	5					10
-4/45-5a		60/45+25a	-80/45-25a		24/45+5a	4		13	14		9
-12/45+5a		-20/45-25a	60/45+25a		-28/45-5a	3		12	13		8
36/45 [11]					9/45	2					7
-20/45-a	36/45	-12/45+5a	-4/45-5a	0	a	1	2	3	4	5	6

Diagramme des  $a_i$

**Trouver une valeur intéressante pour le paramètre ?** Voir plus bas.

**Détermination des coefficients  $b_i$ .** On reprend les expressions obtenues en les  $a_i$  pour établir les relations liant les  $b_i$ . Ainsi pour  $u^5v$ , on avait

$$(E1) \quad a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} = 0,$$

et 3 autres relations qui, par symétries, se déclinent ici, respectivement pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13 en :

$$(E1) \quad b_7 + 2b_8 + 3b_9 + 4b_{10} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad b_{10} + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 + 5b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad b_{20} + 2b_{19} + 3b_{18} + 4b_{17} + 5b_{16} = 0,$$

$$(E4) \quad b_{17} + 2b_{18} + 3b_{19} + 4b_{20} + 5b_1 = 0,$$

$$(E5) \quad b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 + 5b_6 = 0,$$

$$(E6) \quad b_5 + 2b_4 + 3b_3 + 4b_2 + 5b_1 = 0,$$

$$(E7) \quad b_{15} + 2b_{14} + 3b_{13} + 4b_{12} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E8) \quad b_{12} + 2b_{13} + 3b_{14} + 4b_{15} + 5b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^4v$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_4^5(u)B_1^5(v) + 2B_4^5(u)B_2^5(v) + 3B_4^5(u)B_3^5(v) + 4B_4^5(u)B_4^5(v) + 5B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 5B_5^5(u)B_1^5(v) + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 15B_5^5(u)B_3^5(v) + 20B_5^5(u)B_4^5(v) + 25B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{41} + 2c_{42} + 3c_{43} + 4c_{44} + 5c_{45} + 5c_{51} + 10c_{52} + 15c_{53} + 20c_{54} + 25c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E9) \quad 5b_{12} + 5b_7 + 10b_8 + 15b_9 + 20b_{10} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E10) \quad 5b_5 + 5b_{10} + 10b_9 + 15b_8 + 20b_7 + 25b_6 = 0,$$

$$(E11) \quad 5b_{15} + 5b_{20} + 10b_{19} + 15b_{18} + 20b_{17} + 25b_{16} = 0,$$

$$(E12) \quad 5b_2 + 5b_{17} + 10b_{18} + 15b_{19} + 20b_{20} + 25b_1 = 0,$$

$$(E13) \quad 5b_7 + 5b_2 + 10b_3 + 15b_4 + 20b_5 + 25b_6 = 2,$$

$$(E14) \quad 5b_{20} + 5b_5 + 10b_4 + 15b_3 + 20b_2 + 25b_1 = 3,$$

$$(E15) \quad 5b_{10} + 5b_{15} + 10b_{14} + 15b_{13} + 20b_{12} + 25b_{11} = 0,$$

$$(E16) \quad 5b_{17} + 5b_{12} + 10b_{13} + 15b_{14} + 20b_{15} + 25b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^3v^2$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_3^5(u)B_2^5(v) + 3B_3^5(u)B_3^5(v) + 6B_3^5(u)B_4^5(v) + 10B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 4B_4^5(u)B_2^5(v) + 12B_4^5(u)B_3^5(v) + 24B_4^5(u)B_4^5(v) + 40B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 60B_5^5(u)B_4^5(v) + 100B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{32} + 3c_{33} + 6c_{34} + 10c_{35} + 4c_{42} + 12c_{43} + 24c_{44} + 40c_{45} + 10c_{52} + 30c_{53} + 60c_{54} + 100c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E17) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 40b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E18) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 40b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 0,$$

$$(E19) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 40b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E20) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 40b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 6,$$

$$(E21) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 40b_7 + 10b_3 + 30b_4 + 60b_5 + 100b_6 = 4,$$

$$(E22) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 40b_{20} + 10b_4 + 30b_3 + 60b_2 + 100b_1 = 12,$$

$$(E23) \quad b_{24} + 3b_{23} + 10b_9 + 40b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E24) \quad b_{23} + 3b_{24} + 10b_{18} + 40b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^3v$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{50}B_3^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{50}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{50}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{2}{25}B_4^5(u)B_1^5(v) + \frac{4}{25}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{6}{25}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{8}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{5}B_5^5(u)B_1^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{4}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_3^5(u)B_1^5(v) + 2B_3^5(u)B_2^5(v) + 3B_3^5(u)B_3^5(v) + 4B_3^5(u)B_4^5(v) + 5B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 4B_4^5(u)B_1^5(v) + 8B_4^5(u)B_2^5(v) + 12B_4^5(u)B_3^5(v) + 16B_4^5(u)B_4^5(v) + 20B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_1^5(v) + 20B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 40B_5^5(u)B_4^5(v) + 50B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{31} + 2c_{32} + 3c_{33} + 4c_{34} + 5c_{35} + 4c_{41} + 8c_{42} + 12c_{43} + 16c_{44} + 20c_{45} + 10c_{51} + 20c_{52} + 30c_{53} + 40c_{54} + 50c_{55},$$

ce qui donne :

$$(E25) \quad 2b_{22} + 3b_{23} + 5b_{13} + 20b_{12} + 10b_7 + 20b_8 + 30b_9 + 40b_{10} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E26) \quad 2b_{23} + 3b_{22} + 5b_4 + 20b_5 + 10b_{10} + 20b_9 + 30b_8 + 40b_7 + 50b_6 = 0,$$

$$(E27) \quad 2b_{21} + 3b_{24} + 5b_{14} + 20b_{15} + 10b_{20} + 20b_{19} + 30b_{18} + 40b_{17} + 50b_{16} = 1,$$

$$(E28) \quad 2b_{24} + 3b_{21} + 5b_3 + 20b_2 + 10b_{17} + 20b_{18} + 30b_{19} + 40b_{20} + 50b_1 = 4,$$

$$(E29) \quad 2b_{21} + 3b_{22} + 5b_8 + 20b_7 + 10b_2 + 20b_3 + 30b_4 + 40b_5 + 50b_6 = 8,$$

$$(E30) \quad 2b_{22} + 3b_{21} + 5b_{19} + 20b_{20} + 10b_5 + 20b_4 + 30b_3 + 40b_2 + 50b_1 = 12,$$

$$(E31) \quad 2b_{24} + 3b_{23} + 5b_9 + 20b_{10} + 10b_{15} + 20b_{14} + 30b_{13} + 40b_{12} + 50b_{11} = 0,$$

$$(E32) \quad 2b_{23} + 3b_{24} + 5b_{18} + 20b_{17} + 10b_{12} + 20b_{13} + 30b_{14} + 40b_{15} + 50b_{16} = 0.$$

Pour trouver les relations liées à  $u^2v^2$ , on repart de l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100}B_2^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{100}B_2^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{50}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_2^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{100}B_3^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{3}{50}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{9}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{9}{25}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_2^5(v) + \frac{3}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) + \frac{3}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

vue comme

$$\begin{aligned} & B_2^5(u)B_2^5(v) + 3B_2^5(u)B_3^5(v) + 6B_2^5(u)B_4^5(v) + 10B_2^5(u)B_5^5(v) \\ & + 3B_3^5(u)B_2^5(v) + 9B_3^5(u)B_3^5(v) + 18B_3^5(u)B_4^5(v) + 30B_3^5(u)B_5^5(v) \\ & + 6B_4^5(u)B_2^5(v) + 18B_4^5(u)B_3^5(v) + 36B_4^5(u)B_4^5(v) + 60B_4^5(u)B_5^5(v) \\ & + 10B_5^5(u)B_2^5(v) + 30B_5^5(u)B_3^5(v) + 60B_5^5(u)B_4^5(v) + 100B_5^5(u)B_5^5(v), \end{aligned}$$

soit, pour les indices 21, 24, 31, 34, 42, 43, 12 et 13, un ensemble de 8 équations dont le modèle est :

$$c_{22} + 3c_{23} + 6c_{24} + 10c_{25} + 3c_{32} + 9c_{33} + 18c_{34} + 30c_{35} + 6c_{42} + 18c_{43} + 36c_{44} + 60c_{45} + 10c_{52} + 30c_{53} + 60c_{54} + 100c_{55},$$

ce qui donne (il y a deux redondances) :

$$(E33) \quad b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 3b_{22} + 9b_{23} + 30b_{13} + 60b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E34) \quad b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 3b_{23} + 9b_{22} + 30b_4 + 60b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 6,$$

$$(E35) \quad b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 3b_{21} + 9b_{24} + 30b_{14} + 60b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0,$$

$$(E36) \quad b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 3b_{24} + 9b_{21} + 30b_3 + 60b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 18,$$

$$(E39) \quad b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 3b_{24} + 9b_{23} + 30b_9 + 60b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0,$$

$$(E40) \quad b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 3b_{17} + 9b_{24} + 30b_{18} + 60b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.$$

Soit le système au complet :

$$(E1) \quad b_7 + 2b_8 + 3b_9 + 4b_{10} + 5b_{11} = 0,$$

$$(E2) \quad b_{10} + 2b_9 + 3b_8 + 4b_7 + 5b_6 = 0,$$

$$(E3) \quad b_{20} + 2b_{19} + 3b_{18} + 4b_{17} + 5b_{16} = 0,$$

$$(E4) \quad b_{17} + 2b_{18} + 3b_{19} + 4b_{20} + 5b_1 = 0,$$

$$(E5) \quad b_2 + 2b_3 + 3b_4 + 4b_5 + 5b_6 = 0,$$

$$(E6) \quad b_5 + 2b_4 + 3b_3 + 4b_2 + 5b_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
(E7) \quad & b_{15} + 2b_{14} + 3b_{13} + 4b_{12} + 5b_{11} = 0, \\
(E8) \quad & b_{12} + 2b_{13} + 3b_{14} + 4b_{15} + 5b_{16} = 0, \\
(E9) \quad & 5b_{12} + 5b_7 + 10b_8 + 15b_9 + 20b_{10} + 25b_{11} = 0, \\
(E10) \quad & 5b_5 + 5b_{10} + 10b_9 + 15b_8 + 20b_7 + 25b_6 = 0, \\
(E11) \quad & 5b_{15} + 5b_{20} + 10b_{19} + 15b_{18} + 20b_{17} + 25b_{16} = 0, \\
(E12) \quad & 5b_2 + 5b_{17} + 10b_{18} + 15b_{19} + 20b_{20} + 25b_1 = 0, \\
(E13) \quad & 5b_7 + 5b_2 + 10b_3 + 15b_4 + 20b_5 + 25b_6 = 2, \\
(E14) \quad & 5b_{20} + 5b_5 + 10b_4 + 15b_3 + 20b_2 + 25b_1 = 3, \\
(E15) \quad & 5b_{10} + 5b_{15} + 10b_{14} + 15b_{13} + 20b_{12} + 25b_{11} = 0, \\
(E16) \quad & 5b_{17} + 5b_{12} + 10b_{13} + 15b_{14} + 20b_{15} + 25b_{16} = 0, \\
(E17) \quad & b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 40b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0, \\
(E18) \quad & b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 40b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 0, \\
(E19) \quad & b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 40b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0, \\
(E20) \quad & b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 40b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 6, \\
(E21) \quad & b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 40b_7 + 10b_3 + 30b_4 + 60b_5 + 100b_6 = 4, \\
(E22) \quad & b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 40b_{20} + 10b_4 + 30b_3 + 60b_2 + 100b_1 = 12, \\
(E23) \quad & b_{24} + 3b_{23} + 10b_9 + 40b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0, \\
(E24) \quad & b_{23} + 3b_{24} + 10b_{18} + 40b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0, \\
(E25) \quad & 2b_{22} + 3b_{23} + 5b_{13} + 20b_{12} + 10b_7 + 20b_8 + 30b_9 + 40b_{10} + 50b_{11} = 0, \\
(E26) \quad & 2b_{23} + 3b_{22} + 5b_4 + 20b_5 + 10b_{10} + 20b_9 + 30b_8 + 40b_7 + 50b_6 = 0, \\
(E27) \quad & 2b_{21} + 3b_{24} + 5b_{14} + 20b_{15} + 10b_{20} + 20b_{19} + 30b_{18} + 40b_{17} + 50b_{16} = 1, \\
(E28) \quad & 2b_{24} + 3b_{21} + 5b_3 + 20b_2 + 10b_{17} + 20b_{18} + 30b_{19} + 40b_{20} + 50b_1 = 4, \\
(E29) \quad & 2b_{21} + 3b_{22} + 5b_8 + 20b_7 + 10b_2 + 20b_3 + 30b_4 + 40b_5 + 50b_6 = 8, \\
(E30) \quad & 2b_{22} + 3b_{21} + 5b_{19} + 20b_{20} + 10b_5 + 20b_4 + 30b_3 + 40b_2 + 50b_1 = 12, \\
(E31) \quad & 2b_{24} + 3b_{23} + 5b_9 + 20b_{10} + 10b_{15} + 20b_{14} + 30b_{13} + 40b_{12} + 50b_{11} = 0, \\
(E32) \quad & 2b_{23} + 3b_{24} + 5b_{18} + 20b_{17} + 10b_{12} + 20b_{13} + 30b_{14} + 40b_{15} + 50b_{16} = 0, \\
(E33) \quad & b_{21} + 3b_{24} + 10b_{14} + 3b_{22} + 9b_{23} + 30b_{13} + 60b_{12} + 10b_8 + 30b_9 + 60b_{10} + 100b_{11} = 0, \\
(E34) \quad & b_{24} + 3b_{21} + 10b_3 + 3b_{23} + 9b_{22} + 30b_4 + 60b_5 + 10b_9 + 30b_8 + 60b_7 + 100b_6 = 6, \\
(E35) \quad & b_{22} + 3b_{23} + 10b_{13} + 3b_{21} + 9b_{24} + 30b_{14} + 60b_{15} + 10b_{19} + 30b_{18} + 60b_{17} + 100b_{16} = 0, \\
(E36) \quad & b_{23} + 3b_{22} + 10b_4 + 3b_{24} + 9b_{21} + 30b_3 + 60b_2 + 10b_{18} + 30b_{19} + 60b_{20} + 100b_1 = 18, \\
(E39) \quad & b_{21} + 3b_{22} + 10b_8 + 3b_{24} + 9b_{23} + 30b_9 + 60b_{10} + 10b_{14} + 30b_{13} + 60b_{12} + 100b_{11} = 0, \\
(E40) \quad & b_{22} + 3b_{21} + 10b_{19} + 3b_{17} + 9b_{24} + 30b_{18} + 60b_{17} + 10b_{13} + 30b_{14} + 60b_{15} + 100b_{16} = 0.
\end{aligned}$$

Et la solution est (elle est sans paramètre) :

$$b_1 = -4/25, b_{10} = 0, b_{11} = -2/75, b_{12} = 0, b_{13} = 0, b_{14} = 1/15, b_{15} = 0,$$

$$b_{16} = -1/25, b_{17} = 0, b_{18} = 2/5, b_{19} = -4/5, b_2 = 0, b_{20} = 3/5,$$

$$b_{21} = 4/3, b_{22} = 0, b_{23} = 0, b_{24} = -2/3,$$

$$b_3 = 4/15, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = -8/75, b_7 = 2/5, b_8 = -8/15, b_9 = 4/15,$$

ce qui donne le diagramme suivant (en  $1/75$ ) :

-3	0	5	0	0	-2	16	15	14	13	12	11
0					0	17					10
30	-50	0			20	18	24	23			9
-60	100	0			-40	19	21	22			8
45	[21]				30	20	[21]				7
-12	0	20	0	0	-8	1	2	3	4	5	6

Diagramme des  $b_i$ 

En conclusion, on a une famille de solutions avec un paramètre ( $\alpha$  qui porte sur les  $a_i$ ) que l'on va essayer de choisir judicieusement pour exhiber une solution particulière ayant quelques propriétés (par exemple la simplicité). À partir de ce choix, on pourra obtenir les fonctions de base en suivant la méthode déjà décrite pour les éléments de degrés plus faibles.

**Trouver une valeur intéressante pour le paramètre.** Comme les  $b_i$  sont parfaitement déterminés, on se penche sur les  $a_i$  pour trouver une valeur intéressante pour le paramètre  $\alpha$ . Pour ce faire, on impose  $u^3v^3$ . Soit :

$$\begin{aligned}
u^3v^3 &= \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(u) + \frac{2}{5}B_4^5(u) + B_5^5(u) \right\} \left\{ \frac{1}{10}B_3^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(v) + B_5^5(v) \right\} \\
&= \frac{1}{100}B_3^5(u)B_3^5(v) + \frac{2}{50}B_4^5(u)B_3^5(v) + \frac{1}{10}B_5^5(u)B_3^5(v) \\
&+ \frac{2}{50}B_3^5(u)B_4^5(v) + \frac{4}{15}B_4^5(u)B_4^5(v) + \frac{2}{5}B_5^5(u)B_4^5(v) + \frac{1}{10}B_3^5(u)B_5^5(v) + \frac{2}{5}B_4^5(u)B_5^5(v) + B_5^5(u)B_5^5(v)
\end{aligned}$$

Ceci donne 4 relations pour les indices 11, 41, 14 et 44 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100}a_{14} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + \frac{1}{10}a_9 + \frac{2}{5}a_{10} + a_{11} &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{13} + \frac{1}{10}a_8 + \frac{2}{5}a_7 + \frac{1}{10}a_4 + \frac{2}{5}a_5 + a_6 &= 0, \\
\frac{1}{100}a_{12} + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{10}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + a_1 &= \frac{4}{25}.
\end{aligned}$$

Ceci, à son tour, donne les 4 nouvelles équations :

$$\begin{aligned}
(E20) \quad a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_9 + 40a_{10} + 100a_{11} &= 0, \\
(E21) \quad a_{13} + 10a_4 + 40a_5 + 10a_8 + 40a_7 + 100a_6 &= 0, \\
(E22) \quad a_{13} + 10a_8 + 40a_7 + 10a_4 + 40a_5 + 100a_6 &= 0, \\
(E23) \quad a_{12} + 10a_3 + 40a_2 + 10a_3 + 40a_2 + 100a_1 &= 16.
\end{aligned}$$

Le système complet (23 équations) donne comme solution :

$$\begin{aligned}
a_1 &= -16/45, a_2 = 4/5, a_3 = -32/45, a_4 = 16/45, a_5 = 0, a_6 = -4/45, a_7 = 1/5, \\
a_8 &= -8/45, a_9 = 4/45, a_{10} = 0, a_{11} = -1/45, a_{12} = 16/9, a_{13} = -8/9, a_{14} = 4/9.
\end{aligned}$$

Et ainsi  $\alpha = -\frac{4}{45}$ .

En fait, il suffit de ne rajouter qu'une seule équation et de résoudre le système résultant.



Plus subtil, on a la solution à la main, on prend la relation

$$a_{14} + 10a_9 + 40a_{10} + 10a_9 + 40a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

soit

$$a_{14} + 20a_9 + 80a_{10} + 100a_{11} = 0,$$

et on remplace les coefficients en fonction de  $\alpha$ , il vient :

$$-\frac{80}{25} - 25\alpha + \frac{20 \times 24}{45} + 100\alpha + 0 - \frac{100 \times 5}{45} - 100\alpha = 0,$$

et la solution est  $\alpha = -\frac{4}{45}$ .

Le diagramme des coefficients pour cette valeur du paramètre s'écrit comme (en  $\frac{1}{45}$ )

-4	9	-8	4	0	-1	6	7	8	9	10	11
0					0	5					10
16		-40	20		4	4		13	14		9
-32		80	-40		-8	3		12	13		8
36	[11]				9	2					7
-16	36	-32	16	0	-4	1	2	3	4	5	6

Diagramme mis a jour pour les ai

**Expression des fonctions réduites en Bézier.** On repart de la forme générique des fonctions, soit :

$$B'_{ij}(u, v) = B_i^5(u)B_j^5(v) + \sum_{kl \in \mathcal{C}} \alpha_{ij}^{kl} B_k^5(u)B_l^5(v),$$

et on exprime les quatre fonctions type.

$$\bullet B'_{00}(u, v)$$

$$\begin{aligned} B'_{00}(u, v) &= B_0^5(u)B_0^5(v) - \frac{16}{45}B_1^5(u)B_1^5(v) - \frac{4}{45}B_4^5(u)B_1^5(v) - \frac{4}{45}B_1^5(u)B_4^5(v) - \frac{1}{45}B_4^5(u)B_4^5(v) \\ &\quad - \frac{12}{75}B_2^5(u)B_1^5(v) - \frac{8}{75}B_3^5(u)B_1^5(v) - \frac{3}{75}B_2^5(u)B_4^5(v) - \frac{2}{75}B_3^5(u)B_4^5(v) \\ &\quad - \frac{3}{75}B_4^5(u)B_2^5(v) - \frac{2}{75}B_4^5(u)B_3^5(v) - \frac{12}{75}B_1^5(u)B_2^5(v) - \frac{8}{75}B_1^5(u)B_3^5(v), \end{aligned}$$

seul  $(1-u)(1-v)$  se factorise, il vient

$$\begin{aligned} &= (1-u)(1-v) \times \{(1-u)^4(1-v)^4 \\ &\quad - \frac{16}{45}25u(1-u)^3v(1-v)^3 - \frac{4}{45}25u^4v(1-v)^3 - \frac{4}{45}25u(1-u)^3v^4 - \frac{1}{45}25u^4v^4 \\ &\quad - \frac{12}{75}50u^2(1-u)^2v(1-v)^3 - \frac{8}{75}50u^3(1-u)v(1-v)^3 - \frac{3}{75}50u^2(1-u)^2v^4 - \frac{2}{75}50u^3(1-u)v^4 \\ &\quad - \frac{3}{75}50u^4v^2(1-v)^2 - \frac{2}{75}50u^4v^3(1-v) - \frac{12}{75}50u(1-u)^3v^2(1-v)^2 - \frac{8}{75}50u(1-u)^3v^3(1-v)\}, \\ &= (1-u)(1-v) \times \{(1-u)^4(1-v)^4 \\ &\quad - \frac{80}{9}u(1-u)^3v(1-v)^3 - \frac{20}{9}u^4v(1-v)^3 - \frac{20}{9}u(1-u)^3v^4 - \frac{5}{9}u^4v^4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -8u^2(1-u)^2v(1-v)^3 - \frac{16}{3}u^3(1-u)v(1-v)^3 - 2u^2(1-u)^2v^4 - \frac{4}{3}u^3(1-u)v^4 \\ & -2u^4v^2(1-v)^2 - \frac{4}{3}u^4v^3(1-v) - 8u(1-u)^3v^2(1-v)^2 - \frac{16}{3}u(1-u)^3v^3(1-v) \end{aligned} \right\},$$

et le crochet, évalué par un logiciel de calcul formel, donne :

$$4u^2v^2 - 4v^3 + 6v^2 - 4u^3 + 6u^2 + v^4 + u^4 - 4u - 4v + \frac{64uv}{9} - 16/3u^2v - 16/3uv^2 + 1$$

que l'on écrit comme :

$$(1 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4) + (-4v + 6v^2 - 4v^3 + v^4) + 4u^2v^2 + \frac{64}{9}uv - \frac{16}{3}u^2v - \frac{16}{3}uv^2$$

soit :

$$(1-u)^4 + (1-v)^4 - 1 + 4u^2v^2 + \frac{64}{9}uv - \frac{16}{3}u^2v - \frac{16}{3}uv^2$$

d'où le résultat :

$$\begin{aligned} B'_{00}(u, v) &= B_0^5(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^5(v) - B_0^1(v)B_0^1(v) \\ &+ \frac{16}{9}B_1^2(u)B_1^2(v) - \frac{8}{9}B_1^2(u)B_2^3(v) + \frac{4}{9}B_2^3(u)B_2^3(v) - \frac{8}{9}B_2^3(u)B_1^2(v). \end{aligned}$$

$$\bullet B'_{10}(u, v)$$

$$\begin{aligned} B'_{10}(u, v) &= B_1^5(u)B_0^5(v) + \frac{36}{45}B_1^5(u)B_1^5(v) + \frac{9}{45}B_1^5(u)B_4^5(v) + \frac{45}{75}B_1^5(u)B_2^5(v) + \frac{30}{75}B_1^5(u)B_3^5(v) \\ &= B_1^5(u)B_0^5(v) + \frac{4}{5}B_1^5(u)B_1^5(v) + \frac{1}{5}B_1^5(u)B_4^5(v) + \frac{3}{5}B_1^5(u)B_2^5(v) + \frac{2}{5}B_1^5(u)B_3^5(v) \\ &= B_1^5(u) \left\{ B_0^5(v) + \frac{4}{5}B_1^5(v) + \frac{1}{5}B_4^5(v) + \frac{3}{5}B_2^5(v) + \frac{2}{5}B_3^5(v) \right\} \\ &= B_1^5(u)(1-v) \{ (1-v)^4 + 4v(1-v)^3 + v^4 + 6v^2(1-v)^2 + 4v^3(1-v) \} \\ &= B_1^5(u)(1-v) \{ (1-v) + v \}^4 = B_1^5(u)(1-v) = B_1^5(u)B_0^1(v), \end{aligned}$$

la même expression que pour les carreaux déjà vus.

$$\bullet B'_{20}(u, v)$$

$$\begin{aligned} B'_{20}(u, v) &= B_2^5(u)B_0^5(v) - \frac{32}{45}B_1^5(u)B_1^5(v) + \frac{16}{45}B_4^5(u)B_1^5(v) - \frac{8}{45}B_1^5(u)B_4^5(v) + \frac{4}{45}B_4^5(u)B_4^5(v) \\ &+ \frac{20}{75}B_2^5(u)B_1^5(v) + \frac{5}{75}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{30}{75}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{20}{75}B_4^5(u)B_3^5(v) - \frac{60}{75}B_1^5(u)B_2^5(v) - \frac{40}{75}B_1^5(u)B_3^5(v) \\ &= B_2^5(u)B_0^5(v) - \frac{32}{45}B_1^5(u)B_1^5(v) + \frac{16}{45}B_4^5(u)B_1^5(v) - \frac{8}{45}B_1^5(u)B_4^5(v) + \frac{4}{45}B_4^5(u)B_4^5(v) \\ &+ \frac{4}{15}B_2^5(u)B_1^5(v) + \frac{1}{15}B_2^5(u)B_4^5(v) + \frac{6}{15}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{4}{15}B_4^5(u)B_3^5(v) - \frac{12}{15}B_1^5(u)B_2^5(v) - \frac{8}{15}B_1^5(u)B_3^5(v) \\ &= 10u^2(1-u)^3(1-v)^5 - \frac{160}{9}u(1-u)^4v(1-v)^4 + \frac{80}{9}u^4(1-u)v(1-v)^4 - \frac{40}{9}u(1-u)^4v^4(1-v) + \frac{20}{9}u^4(1-u)v^4(1-v) \\ &\quad + \frac{40}{3}u^2(1-u)^3v(1-v)^4 + \frac{10}{3}u^2(1-u)^3v^4(1-v) + 20u^4(1-u)v^2(1-v)^3 \\ &\quad + \frac{40}{3}u^4(1-u)v^3(1-v)^2 - 40u(1-u)^4v^2(1-v)^3 - \frac{80}{3}u(1-u)^4v^3(1-v)^2, \end{aligned}$$

le facteur 10 vient ainsi que  $u(1-u)(1-v)$ , donc :

$$= 10u(1-u)(1-v) \times$$

$$\left\{ u(1-u)^2(1-v)^4 - \frac{16}{9}(1-u)^3v(1-v)^3 + \frac{8}{9}u^3v(1-v)^3 - \frac{4}{9}(1-u)^3v^4 + \frac{2}{9}u^3v^4 \right. \\ \left. + \frac{4}{3}u(1-u)^2v(1-v)^3 + \frac{1}{3}u(1-u)^2v^4 + 2u^3v^2(1-v)^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{3}u^3v^3(1-v) - 4(1-u)^3v^2(1-v)^2 - \frac{8}{3}(1-u)^3v^3(1-v) \right\},$$

la simplification à la main reste raisonnable, on regarde les facteurs venant sur  $v^4, v^3, v^2, v, u^3, u^2, u$  et la constante, et, pour le crochet, il ne reste que

$$\left\{ u - 2u^2 + u^3 + (2u(1-u)^2 + \frac{4}{3}(1-u)^3 - \frac{2}{3}u^3)v^2 + (-\frac{8}{3}u(1-u)^2 - \frac{16}{9}(1-u)^3 + \frac{8}{9}u^3)v \right\},$$

ici intervient l'astuce suivante, on écrit

$$u - 2u^2 + u^3 = u(1-u)^2,$$

par suite, on découvre le terme :

$$10u(1-u)(1-v)u(1-u)^2 = 10u^2(1-u)^3(1-v) = B_2^5(u)B_0^1(v),$$

et il reste à examiner :

$$\left\{ (2u(1-u)^2 + \frac{4}{3}(1-u)^3 - \frac{2}{3}u^3)v^2 + (-\frac{8}{3}u(1-u)^2 - \frac{16}{9}(1-u)^3 + \frac{8}{9}u^3)v \right\},$$

on factorise globalement  $2v$  et localement  $-\frac{4}{3}$ , il vient :

$$2v \left\{ \left\{ u(1-u)^2 + \frac{2}{3}(1-u)^3 - \frac{1}{3}u^3 \right\} v - \frac{4}{3} \left\{ u(1-u)^2 + \frac{2}{3}(1-u)^3 - \frac{1}{3}u^3 \right\} \right\},$$

et le miracle s'accomplit, on trouve simplement

$$2v \left\{ u(1-u)^2 + \frac{2}{3}(1-u)^3 - \frac{1}{3}u^3 \right\} \left\{ v - \frac{4}{3} \right\} = 2v \left\{ \frac{2}{3} - u \right\} \left\{ v - \frac{4}{3} \right\},$$

soit, au total, l'expression

$$20u(1-u)(1-v)v \left\{ \frac{2}{3} - u \right\} \left\{ v - \frac{4}{3} \right\},$$

donc

$$\frac{20}{9}u(1-u)(1-v)v \{2-3u\} \{3v-4\},$$

ce qui donne les 4 termes suivants :

$$-\frac{20}{9}u(1-u)(1-v)v9uv = -\frac{20}{9}B_2^3(u)B_2^3(v),$$

$$\frac{20}{9}u(1-u)(1-v)v12u = \frac{40}{9}B_2^3(u)B_1^2(v),$$

$$\frac{20}{9}u(1-u)(1-v)v6v = \frac{20}{9}B_1^2(u)B_2^3(v),$$

$$\frac{20}{9}u(1-u)(1-v)v(-8) = -\frac{40}{9}B_1^2(u)B_1^2(v),$$

et la solution finale compren 5 termes, soit :

$$B'_{20}(u, v) = B_2^5(u)B_0^1(v) + \frac{20}{9} \left\{ -B_2^3(u)B_2^3(v) + 2B_2^3(u)B_1^2(v) + B_1^2(u)B_2^3(v) - 2B_1^2(u)B_1^2(v) \right\}.$$

$$\bullet B'_{22}(u, v)$$

$$B'_{22}(u, v) = B_2^5(u)B_2^5(v) + \frac{16}{9}B_1^5(u)B_1^5(v) - \frac{8}{9}B_4^5(u)B_1^5(v) - \frac{8}{9}B_1^5(u)B_4^5(v) + \frac{4}{9}B_4^5(u)B_4^5(v) \\ + \frac{4}{3}B_2^5(u)B_1^5(v) - \frac{2}{3}B_2^5(u)B_4^5(v) - \frac{2}{3}B_4^5(u)B_2^5(v) + \frac{4}{3}B_1^5(u)B_2^5(v),$$

on voit immédiatement que  $u(1-u)v(1-v)$  se factorise, donc :

$$= u(1-u)v(1-v) \times \left\{ 100u(1-u)^2v(1-v)^2 \right. \\ \left. + \frac{16}{9}25(1-u)^3(1-v)^3 - \frac{8}{9}25u^3(1-v)^3 - \frac{8}{9}25(1-u)^3v^3 + \frac{4}{9}25u^3v^3 \right. \\ \left. + \frac{4}{3}50u(1-u)^2(1-v)^3 - \frac{2}{3}50u(1-u)^2v^3 - \frac{2}{3}50u^3v(1-v)^2 + \frac{4}{3}50(1-u)^3v(1-v)^2 \right\}, \\ = 100u(1-u)v(1-v) \times \left\{ u(1-u)^2v(1-v)^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{9}(1-u)^3(1-v)^3 - \frac{2}{9}u^3(1-v)^3 - \frac{2}{9}(1-u)^3v^3 + \frac{1}{9}u^3v^3 \right. \\ \left. + \frac{2}{3}u(1-u)^2(1-v)^3 - \frac{1}{3}u(1-u)^2v^3 - \frac{1}{3}u^3v(1-v)^2 + \frac{2}{3}(1-u)^3v(1-v)^2 \right\},$$

ici, également, la simplification à la main reste raisonnable, on regarde les facteurs venant sur  $v^3, v^2, v, u^2, u$  et la constante, et, pour le crochet, il ne reste que

$$\left\{ -u(1-u)^2 - \frac{2}{3}(1-u)^3 + \frac{1}{3}u^3 \right\}v + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}u \quad \text{qui (!) se simplifie en} \quad \left\{ \left(u - \frac{2}{3}\right)v + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}u \right\},$$

donc, au total, on a

$$100u(1-u)v(1-v) \left\{ \left(u - \frac{2}{3}\right)v + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}u \right\}$$

et la solution finale est immédiate et comprend 4 termes :

$$100u(1-u)v(1-v)uv = \frac{100}{9}B_2^3(u)B_2^3(v) \\ 100u(1-u)v(1-v)\left(-\frac{2}{3}\right)v = -\frac{100}{9}B_1^2(u)B_2^3(v) \\ 100u(1-u)v(1-v)\frac{4}{9} = \frac{100}{9}B_1^2(u)B_1^2(v) \\ 100u(1-u)v(1-v)\left(-\frac{2}{3}\right)u = -\frac{100}{9}B_2^3(u)B_1^2(v)$$

donc :

$$B'_{22}(u, v) = \frac{100}{9} \left\{ B_2^3(u)B_2^3(v) - B_1^2(u)B_2^3(v) - B_2^3(u)B_1^2(v) + B_1^2(u)B_1^2(v) \right\}.$$

**Remarque.** Une autre méthode pour trouver cette formule nous a donné l'expression :

$$B'_{22}(u, v) = \frac{100}{81} \left\{ B_2^3(u)B_2^3(v) - 2B_1^3(u)B_2^3(v) - 2B_2^3(u)B_1^3(v) + 4B_1^3(u)B_1^3(v) \right\},$$

et ces deux écritures sont identiques, il suffit, dans la première formule, de constater que

$$B_1^2(u) = \frac{2}{3}B_1^3(u) + \frac{2}{3}B_2^3(u),$$

et de remplacer.

Les quatre fonctions de base type sont rappelées dans le tableau qui suit

1	1	$B'_{00}(u, v) = B_0^5(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^5(v) - B_0^1(v)B_0^1(v)$ $+ \frac{16}{9}B_1^2(u)B_1^2(v) - \frac{8}{9}B_1^2(u)B_2^3(v) + \frac{4}{9}B_2^3(u)B_2^3(v) - \frac{8}{9}B_2^3(u)B_1^2(v)$
2	5	$B'_{10}(u, v) = B_1^5(u)B_0^1(v)$
3	6	$B'_{20}(u, v) = B_2^5(u)B_0^1(v) + \frac{20}{9} \left\{ -B_2^3(u)B_2^3(v) + 2B_2^3(u)B_1^2(v) + B_1^2(u)B_2^3(v) - 2B_1^2(u)B_1^2(v) \right\}$
4	17	$B'_{22}(u, v) = \frac{100}{9} \left\{ B_2^3(u)B_2^3(v) - B_1^2(u)B_2^3(v) - B_2^3(u)B_1^2(v) + B_1^2(u)B_1^2(v) \right\}$

Fonctions de base type du carreau choisi de degré 5 à 24 nœuds.

**Construire un carreau complet équivalent.** De la forme des fonctions réduites, on déduit que si l'on invente les douze points de contrôle en se basant sur  $P_{11}$  et  $P_{21}$  simplement avec les symétries voulues. Pour  $P_{11}$  on prend les coefficients  $a_i$ , pour  $P_{21}$ , on prend les coefficients  $b_i$  et on obtient un carreau complet équivalent.

**Une autre solution pour la configuration alterne.** On a proposé une solution particulière de la famille se déduisant du choix initial des points. L'autre choix symétrique possible, en gardant, cette fois,  $P_{11}, P_{41}, P_{14}$  et  $P_{44}$ , doit conduire à une autre famille de solutions et à un choix pertinent du paramètre.

**Application à la construction d'un quadrilatère Serendip à 24 nœuds.** On suit l'approche vue pour les degrés déjà vus.

## 7.2 Carreau Bézier-Serendip de degré supérieur ?

Dans le principe et sous réserve d'ajouter des points afin de pouvoir définir une configuration symétrique, on peut construire de tels carreaux. Néanmoins, exhiber les systèmes liant les coefficients de répartition se révèle fastidieux. Ceci nous pousse à essayer de trouver une autre méthode plus simple, ce qui fera l'objet d'une autre étude.

## 8 Validation d'un carreau de degré quelconque

**Carreau en deux dimensions.** Ayant reconstruit un carreau complet, on le valide comme vu dans diverses références, par exemple [5], en utilisant la condition suffisante, jacobien strictement positif aux sommets et autres coefficients non négatifs. En effet, comme la fonction de définition du carreau, notée  $\sigma(u, v)$ , est :

$$\sum_{i=0,n} \sum_{j=0,n} B_i^n(u) B_j^n(v) P_{ij},$$

son jacobien est le polynôme (de Bézier) suivant :

$$\mathcal{J}(u, v) = n^2 \sum_{i=0,n-1} \sum_{j=0,n} \sum_{k=0,n} \sum_{l=0,n-1} B_i^{n-1}(u) B_j^n(v) B_k^n(u) B_l^{n-1}(v) | \Delta_{i,j}^{1,0} \quad \Delta_{k,l}^{0,1} \quad \vec{n} |,$$

avec  $\vec{n} = {}^t(0, 0, 1)$ ,  $\Delta_{i,j}^{1,0} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$  et  $\Delta_{k,l}^{0,1} = \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}$ . Ceci s'écrit également :

$$\mathcal{J}(u, v) = n^2 \sum_{I=0,2n-1} \sum_{J=0,2n-1} B_I^{2n-1}(u) B_J^{2n-1}(v) N_{IJ}, \quad (1)$$

avec, pour  $i_1 = 0, n-1, i_2 = 0, n, j_1 = 0, n, j_2 = 0, n-1$  :

$$N_{IJ} = \sum_{i_1+i_2=I} \sum_{j_1+j_2=J} \frac{C_{i_1}^{n-1} C_{i_2}^n}{C_{i_1+i_2}^{2n-1}} \frac{C_{j_1}^n C_{j_2}^{n-1}}{C_{j_1+j_2}^{2n-1}} | \Delta_{i_1,j_1}^{1,0} \quad \Delta_{i_2,j_2}^{0,1} \quad \vec{n} |. \quad (2)$$

avec  $\vec{n} = {}^t\{0, 0, 1\}$ . Il y a  $4n^2$  tels coefficients de contrôle. Chaque coefficient est une somme pondérée de différents termes, hormis les coefficients coin qui ne possède qu'un seul terme (qui mesure la surface du triangle de sommets le coin et ses deux points de contrôle adjacents et, ainsi, contrôle l'angle entre les tangentes aux deux arêtes (courbes) incidentes, voir par exemple  $N_{00}$ ).

**Carreau surfacique.** Ici les  $P_{ij}$  sont des points de  $R^3$  et la notion de jacobien (afin d'avoir une méthode de validation géométrique d'un carreau donné) n'a pas de sens. Par suite, on propose de construire le déterminant suivant :

$$\det \left( \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} \Big|_{\Pi} \quad \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} \Big|_{\Pi} \quad \vec{n} \right)$$

avec  $\Pi$  un plan moyen approchant les 4 sommets du carreaux,  $\vec{n}$  la normale unitaire à ce plan et  $|_{\Pi}$ , les projections des dérivées sur ce plan. Ainsi, les coefficients de contrôle sont :

$$N_{IJ} = \sum_{i_1+i_2=I} \sum_{j_1+j_2=J} \frac{C_{i_1}^{n-1} C_{i_2}^n}{C_{i_1+i_2}^{2n-1}} \frac{C_{j_1}^n C_{j_2}^{n-1}}{C_{j_1+j_2}^{2n-1}} \det( \Delta_{i_1, j_1}^{1,0} |_{\Pi} \quad \Delta_{i_2, j_2}^{0,1} |_{\Pi} \quad \vec{n} ). \quad (3)$$

## 9 Le cas de la trois dimensions

On traite le cas du degré 2 puis on esquisse le cas du degré 3.

### 9.1 Le carreau volumique de degré 2

On utilise la notation à trois indices telle que montrée, pour la face  $w = 0$ , sur le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} 020 & 120 & 220 & & 4 & 11 & 3 \\ 010 & 110 & 210 & & 12 & & 10 \\ 000 & 100 & 200 & & 1 & 9 & 2 \end{array}$$

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & u & v & w \\ & & & & u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 \\ & & & u^2v & u^2w & uvw & uv^2 & v^2w & uw^2 & vw^2 \\ & u^2vw & & & & & uv^2w & & & & uvw^2 \end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^2$  enrichi des monômes  $u^2vw$ ,  $uv^2w$  et  $uvw^2$ .

Les fonctions de base du carreau réduit sont cherchées sous la forme habituelle :

$$B'_{ijk}(u, v, w) = B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) + \sum_{lmn \in \mathcal{C}} \beta_{ijk}^{lmn} B_l^2(u) B_m^2(v) B_n^2(w),$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des indices des fonctions "centrales", une par face et une interne, que l'on répartit sur la fonction réduite d'indice  $ijk$  via les coefficients  $\beta_{ijk}^{lmn}$ . Ainsi, le carreau réduit s'écrira :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{ijk} B'_{ijk}(u, v, w) P_{ijk},$$

où les indices  $ijk$  sont ceux des 20 points de contrôle du bord du carreau.

Par symétrie, il suffit d'examiner les deux fonctions *type* qui correspondent aux indices 000 et 100. Toujours par symétrie, on a :

$$\begin{aligned} B'_{000}(u, v, w) &= B_0^2(u) B_0^2(v) B_0^2(w) \\ &+ \alpha \{ B_1^2(u) B_1^2(v) B_0^2(w) + B_1^2(u) B_0^2(v) B_1^2(w) + B_0^2(u) B_1^2(v) B_1^2(w) \} + \beta B_1^2(u) B_1^2(v) B_1^2(w), \end{aligned}$$

qui fait intervenir les indices des trois faces incidentes en  $P_{000}$  et l'indice central 111 et

$$\begin{aligned} B'_{100}(u, v, w) &= B_1^2(u) B_0^2(v) B_0^2(w) \\ &+ \gamma \{ B_1^2(u) B_1^2(v) B_0^2(w) + B_1^2(u) B_0^2(v) B_1^2(w) \} + \delta B_1^2(u) B_1^2(v) B_1^2(w), \end{aligned}$$

qui fait intervenir les indices des deux faces incidentes en  $P_{100}$  et l'indice central 111. Comme les relations pour les autres fonctions réduites sont similaires, il n'y a que quatre valeurs possibles pour les coefficients de répartition.

La définition de l'espace réduit implique en premier la présence de  $u^2vw$ . Comme on a :

$$\begin{aligned}
u^2vw &= u^2v(1-v+v)w(1-w+w) = B_2^2(u) \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v) \right\} \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(w) + B_2^2(w) \right\} \\
&= \frac{1}{4}B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_2^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w) + B_2^2(u)B_2^2(v)B_2^2(w) \\
&= \frac{1}{4}B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B'_{221}(u, v, w) + \frac{1}{2}B'_{212}(u, v, w) + B'_{222}(u, v, w) \\
&- \alpha \{ B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + B_1^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w) + B_1^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w) \} - \beta \{ B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) \} \\
&- \gamma \left\{ \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w) \right\} \\
&\quad - \delta \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) \right\}
\end{aligned}$$

Imposer que  $u^2vw$  soit obtenu par combinaison linéaire des  $B'_{ijk}(u, v, w)$  implique que les contributions sur  $B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w)$ ,  $B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w)$ ,  $B_1^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w)$  et  $B_1^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w)$ , soient nulles, ce qui donne trois équations :

$$(E1) \quad \beta + \delta = 0.$$

$$(E2) \quad \alpha + \gamma = \frac{1}{4}.$$

$$(E3) \quad 2\alpha + \gamma = 0,$$

et on a immédiatement  $\alpha = -\frac{1}{4}$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$  (comme en deux dimensions).

De  $u^2vw$ , on obtient  $u^2v = u^2vw + u^2v(1-w)$ , puis  $u^2 = u^2v + u^2(1-v)$ , par suite, on impose maintenant  $uvw$ . Comme :

$$\begin{aligned}
uvw &= u(1-u+u)v(1-v+v)w(1-w+w) = \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(u) + B_2^2(u) \right\} \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v) \right\} \left\{ \frac{1}{2}B_1^2(w) + B_2^2(w) \right\} \\
&= \frac{1}{8}B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{4}B_2^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{4}B_1^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w) + \frac{1}{2}B_2^2(u)B_2^2(v)B_1^2(w) \\
&\quad + \frac{1}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w) + \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v)B_2^2(w) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_2^2(v)B_2^2(w) + B_2^2(u)B_2^2(v)B_2^2(w),
\end{aligned}$$

et les équations en résultant sont redondantes pour  $\alpha$  et  $\gamma$  (il y a trois telles équations) et pour les deux autres inconnues (une seule équation), on trouve :

$$(E4) \quad -3\delta - 2\beta + \frac{1}{4} = 0$$

soit  $\beta = -\frac{1}{4}$  et  $\delta = \frac{1}{4}$ .

**Les fonctions de base type.** En reportant les valeurs, on trouve :

$$\begin{aligned}
B'_{100}(u, v, w) &= B_1^2(u)B_0^2(v)B_0^2(w) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ B_1^2(u)B_1^2(v)B_0^2(w) + B_1^2(u)B_0^2(v)B_1^2(w) \} + \frac{1}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w), \\
&= B_1^2(u) \left\{ B_0^2(v)B_0^2(w) + \frac{1}{2} \{ B_1^2(v)B_0^2(w) + B_0^2(v)B_1^2(w) \} + \frac{1}{4}B_1^2(v)B_1^2(w) \right\},
\end{aligned}$$

et, tout calcul fait :

$$B'_{100}(u, v, w) = B_1^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w),$$

qui a la même forme qu'en deux dimensions.

$$B'_{000}(u, v, w) = B_0^2(u)B_0^2(v)B_0^2(w)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \{B_1^2(u)B_1^2(v)B_0^2(w) + B_1^2(u)B_0^2(v)B_1^2(w) + B_0^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w)\} - \frac{1}{4}B_1^2(u)B_1^2(v)B_1^2(w) \\
& = (1-u)(1-v)(1-w) \times \{(1-u)(1-v)(1-w) - \{uv(1-w) + u(1-v)w + (1-u)vw\} - 2uvw\} \\
& \quad = (1-u)(1-v)(1-w)(1-u-v-w) \\
& \quad = (1-u)(1-v)(1-w) \{(1-u) + (1-v) - 1 + (1-w) - 1\} \\
& = (1-u)^2(1-v)(1-w) + (1-u)(1-v)^2(1-w) - (1-u)(1-v)(1-w) - 2(1-u)(1-v)(1-w), \\
& \text{soit, au final :}
\end{aligned}$$

$$B'_{000}(u, v, w) = B_0^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^2(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^2(w) - 2B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(w),$$

qui, *ceteris paribus*, a la même forme qu'en deux dimensions.

1	1	$B'_{000}(u, v, w) = B_0^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^2(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^2(w) - 2B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(w)$
2	9	$B'_{100}(u, v, w) = B_1^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w)$

Fonctions de base type du carreau volumique de degré 2 à 20 points de contrôle.

**Vérification via les fonctions de base des éléments finis Serendip.** On cherche le nœud d'indice 100 et on trouve :

$$q_{100}(u, v, w) = 2B'_{100}(u, v, w) = 2B_1^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w) = 4u(1-u)(1-v)(1-w),$$

qui est l'expression attendue. On cherche le nœud d'indice 000, il vient :

$$\begin{aligned}
q_{000}(u, v, w) & = B'_{000}(u, v, w) - \frac{1}{2}B'_{100}(u, v, w) - \frac{1}{2}B'_{010}(u, v, w) - \frac{1}{2}B'_{001}(u, v, w) \\
& = B_0^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^2(v)B_0^1(w) + B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^2(w) - 2B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(w) \\
& \quad - \frac{1}{2}B_1^2(u)B_0^1(v)B_0^1(w) - \frac{1}{2}B_0^1(u)B_1^2(v)B_0^1(w) - \frac{1}{2}B_0^1(u)B_0^1(v)B_1^2(w),
\end{aligned}$$

Le produit  $(1-u)(1-v)(1-w)$  se factorise et il reste :

$$(1-u) + (1-v) + (1-w) - u - v - w - 2 = 1 - 2u - 2v - 2w,$$

soit

$$q_{000}(u, v, w) = (1-u)(1-v)(1-w)(1-2u-2v-2w),$$

qui est également l'expression attendue.

**Validation en inventant les points "manquants".** À partir des points de contrôle sommet et de ceux des arêtes, on invente les points de contrôle des faces (avec les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$ ), puis le point central (avec les coefficients  $\beta$  et  $\delta$ ). Ainsi

$$P_{110} = -\frac{P_{000} + P_{200} + P_{220} + P_{020}}{4} + \frac{P_{100} + P_{210} + P_{120} + P_{010}}{2},$$

et des expressions similaires pour les autres points des faces et

$$\begin{aligned}
P_{111} & = -\frac{P_{000} + P_{200} + P_{220} + P_{020} + P_{002} + P_{202} + P_{222} + P_{022}}{4} \\
& \quad + \frac{P_{100} + P_{210} + P_{120} + P_{010} + P_{102} + P_{212} + P_{122} + P_{012} + P_{001} + P_{201} + P_{221} + P_{021}}{4},
\end{aligned}$$

pour le point central. On utilise alors la Relation (4), donnée plus bas, pour la validation géométrique d'un carreau d'un maillage.



## 9.2 Le carreau volumique de degré 3

On utilise la notation à trois indices telle que montrée, pour la face  $w = 0$ , sur le schéma suivant :

030	130	230	330	4	14	13	3
020	120	220	320	15	35	36	12
010	110	210	310	16	33	34	11
000	100	200	300	1	9	10	2

**L'espace de Serendipité.** Les monômes de cet espace sont représentés dans le schéma

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & & \\
& u & v & w & & & & & \\
& & u^2 & uv & uw & v^2 & vw & w^2 & \\
& & & u^3 & u^2v & u^2w & uv^2 & uvw & uw^2 & v^3 & v^2w & vv^2 & vw^3 & \\
& & & & u^3v & u^3w & u^2vw & uw^2w & uvw^2 & uv^3 & uw^3 & v^3w & uw^3 & \\
& & & & & u^3vw & & & uv^3w & & & & & uvw^3 & 
\end{array}$$

où l'on retrouve l'espace  $P^3$  enrichi des monômes  $u^3vw$ ,  $uv^3w$  et  $uvw^3$ .

Les fonctions de base du carreau réduit sont cherchées sous la forme habituelle :

$$B'_{ijk}(u, v, w) = B_i^3(u)B_j^3(v)B_k^3(w) + \sum_{lmn \in \mathcal{C}} \beta_{ijk}^{lmn} B_l^3(u)B_m^3(v)B_n^3(w),$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des indices des fonctions "centrales", quatre par face et huit internes, que l'on répartit sur la fonction réduite d'indice  $ijk$  via les coefficients  $\beta_{ijk}^{lmn}$ . Ainsi, le carreau réduit s'écrira :

$$\theta(u, v, w) = \sum_{ijk} B'_{ijk}(u, v, w)P_{ijk},$$

où les indices  $ijk$  sont ceux des 32 points de contrôle du bord du carreau.

Pour simplifier les notations, on note :

$$B_{ijk}(u, v, w) = B_i^3(u)B_j^3(v)B_k^3(w),$$

et par symétrie, il suffit d'examiner les deux fonctions *type* qui correspondent aux indices 000 et 100. Toujours par symétrie, on a :

$$\begin{aligned}
& B'_{000}(u, v, w) = B_0^3(u)B_0^3(v)B_0^3(w) \\
& + \{a_{110}B_{110}(u, v, w) + a_{210}B_{210}(u, v, w) + a_{120}B_{120}(u, v, w) + a_{220}B_{220}(u, v, w)\} \\
& + \{a_{110}B_{011}(u, v, w) + a_{210}B_{021}(u, v, w) + a_{120}B_{012}(u, v, w) + a_{220}B_{022}(u, v, w)\} \\
& + \{a_{110}B_{101}(u, v, w) + a_{210}B_{201}(u, v, w) + a_{120}B_{102}(u, v, w) + a_{220}B_{202}(u, v, w)\} \\
& + \{a_{111}B_{111}(u, v, w) + a_{211}B_{211}(u, v, w) + a_{121}B_{121}(u, v, w) + a_{221}B_{221}(u, v, w) \\
& + a_{112}B_{112}(u, v, w) + a_{212}B_{212}(u, v, w) + a_{122}B_{122}(u, v, w) + a_{222}B_{222}(u, v, w)\},
\end{aligned}$$

qui fait intervenir les indices des trois faces incidentes en  $P_{000}$  et les 8 indices centraux. Ceci donne, *a priori*, 12 coefficients, et

$$B'_{100}(u, v, w) = B_1^3(u)B_0^3(v)B_0^3(w)$$

$$\begin{aligned}
& + \{b_{110}B_{110}(u, v, w) + b_{210}B_{210}(u, v, w) + b_{120}B_{120}(u, v, w) + b_{220}B_{220}(u, v, w)\} \\
& + \{b_{110}B_{101}(u, v, w) + b_{210}B_{201}(u, v, w) + b_{120}B_{102}(u, v, w) + b_{220}B_{202}(u, v, w)\} \\
& + \{b_{111}B_{111}(u, v, w) + b_{211}B_{211}(u, v, w) + b_{121}B_{121}(u, v, w) + b_{221}B_{221}(u, v, w) \\
& + b_{112}B_{112}(u, v, w) + b_{212}B_{212}(u, v, w) + b_{122}B_{122}(u, v, w) + b_{222}B_{222}(u, v, w)\} ,
\end{aligned}$$

qui fait intervenir les indices des deux faces incidentes en  $P_{100}$  et les 8 indices centraux. Ceci donne, *a priori*, 12 coefficients.

Et on a des relations identiques pour les autres fonctions réduites Il y a donc 24 valeurs possibles pour les coefficients de répartition.

La définition de l'espace réduit implique en premier la présence de  $u^3vw$ . Comme on a :

$$\begin{aligned}
u^3vw &= u^3v(1-v+v)^2w(1-w+w)^2 \\
&= u^3 \{v(1-v)^2 + 2v^2(1-v) + v^3\} \{w(1-w)^2 + 2w^2(1-w) + w^3\}
\end{aligned}$$

donc on trouve :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{9}B_{311}(u, v, w) + \frac{2}{9}B_{312}(u, v, w) + \frac{1}{3}B_{313}(u, v, w) \\
& + \frac{2}{9}B_{321}(u, v, w) + \frac{4}{9}B_{322}(u, v, w) + \frac{2}{3}B_{323}(u, v, w) \\
& + \frac{1}{3}B_{331}(u, v, w) + \frac{2}{3}B_{332}(u, v, w) + B_{333}(u, v, w) .
\end{aligned}$$

Les indices à "supprimer" sont : 311, 312, 321 et 322, ce qui va donner quatre relations. Pour la fonction d'indice 311 :

311 ds 313 comme 120 ds 100 : b120  
311 ds 331 comme 120 ds 100 : b120  
311 ds 323 comme 220 ds 100 : b220  
311 ds 332 comme 220 ds 100 : b220  
311 ds 333 comme 220 ds 000 : a220

soit la relation :

$$\frac{1}{3}b_{120} + \frac{1}{3}b_{120} + \frac{2}{3}b_{220} + \frac{2}{3}b_{220} + a_{220} = \frac{1}{9}, \quad \text{ou (E1)} \quad 6b_{120} + 12b_{220} + 9a_{220} = 1 .$$

Pour la fonction d'indice 312 :

312 ds 313 comme 101 ds 100 : b110  
312 ds 331 comme 202 ds 100 : b220  
312 ds 323 comme 201 ds 100 : b210  
312 ds 332 comme 102 ds 100 : b120  
312 ds 333 comme 210 ds 000 : a210

soit la relation :

$$\frac{1}{3}b_{110} + \frac{1}{3}b_{220} + \frac{2}{3}b_{210} + \frac{2}{3}b_{120} + a_{210} = \frac{2}{9}, \quad \text{ou (E2)} \quad 3b_{110} + 3b_{220} + 6b_{210} + 6b_{120} + 9a_{210} = 2 .$$

Pour la fonction d'indice 321 :

321 ds 313 comme 202 ds 100 : b220  
321 ds 331 comme 101 ds 100 : b110  
321 ds 323 comme 102 ds 100 : b120  
321 ds 332 comme 201 ds 100 : b210  
321 ds 333 comme 120 ds 000 : a120

soit la relation :

$$\frac{1}{3}b_{220} + \frac{1}{3}b_{110} + \frac{2}{3}b_{120} + \frac{2}{3}b_{210} + a_{120} = \frac{2}{9}, \quad \text{ou (E3)} \quad 3b_{220} + 3b_{110} + 6b_{120} + 6b_{210} + 9a_{120} = 2 .$$

Pour la fonction d'indice 322 :

322 ds 313 comme 201 ds 100 : b210  
 322 ds 331 comme 201 ds 100 : b210  
 322 ds 323 comme 101 ds 100 : b110  
 322 ds 332 comme 101 ds 100 : b110  
 322 ds 333 comme 101 ds 000 : a110

soit la relation :

$$\frac{1}{3}b_{210} + \frac{1}{3}b_{210} + \frac{2}{3}b_{110} + \frac{2}{3}b_{110} + a_{110} = \frac{4}{9}, \quad \text{ou (E4)} \quad 6b_{210} + 12b_{110} + 9a_{110} = 4.$$

Le premier jeu de quatre équations est donc :

$$(E1) \quad 6b_{120} + 12b_{220} + 9a_{220} = 1.$$

$$(E2) \quad 3b_{110} + 3b_{220} + 6b_{210} + 6b_{120} + 9a_{210} = 2.$$

$$(E3) \quad 3b_{220} + 3b_{110} + 6b_{120} + 6b_{210} + 9a_{120} = 2.$$

$$(E4) \quad 6b_{210} + 12b_{110} + 9a_{110} = 4.$$

On en déduit (en fait on le savait déjà)  $a_{120} = a_{210}$ .

La présence de  $u^3vw$  implique celles de  $u^3v$  et de  $u^3w$ , donc le monôme suivant à considérer est  $u^2vw$ . On écrit :

$$\begin{aligned} u^2vw &= u^2(1-u+u)v(1-v+v)^2w(1-w+w)^2 \\ &= \{u^2(1-u) + u^3\} \{v(1-v)^2 + 2v^2(1-v) + v^3\} \{w(1-w)^2 + 2w^2(1-w) + w^3\} \end{aligned}$$

donc on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{27}(B_{211}(u, v, w) + B_{231}(u, v, w) + B_{233}(u, v, w)) \\ &+ \frac{2}{27}(B_{212}(u, v, w) + B_{221}(u, v, w) + B_{232}(u, v, w)) \\ &+ \frac{1}{9}(B_{213}(u, v, w)) + \frac{4}{27}(B_{222}(u, v, w)) + \frac{2}{9}(B_{223}(u, v, w)) \\ &+ \frac{1}{9}(B_{311}(u, v, w) + B_{331}(u, v, w) + B_{333}(u, v, w)) \\ &+ \frac{2}{9}(B_{312}(u, v, w) + B_{321}(u, v, w) + B_{332}(u, v, w)) \\ &+ \frac{1}{3}(B_{313}(u, v, w)) + \frac{4}{9}(B_{322}(u, v, w)) + \frac{2}{3}(B_{323}(u, v, w)). \end{aligned}$$

Les indices à "supprimer" sont : 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 311, 312, 321 et 322, ce qui va donner 12 relations.

La présence de  $u^2vw$  implique celles de  $u^2v$  et de  $u^2w$ , donc le monôme suivant à considérer est  $uvw$ . On écrit :

$$\begin{aligned} uvw &= u(1-u+u)^2v(1-v+v)^2w(1-w+w)^2 \\ &= \{u(1-u)^2 + 2u^2(1-u) + u^3\} \{v(1-v)^2 + 2v^2(1-v) + v^3\} \{w(1-w)^2 + 2w^2(1-w) + w^3\} \end{aligned}$$

donc on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{27}B_{111}(u, v, w) + \frac{1}{9}B_{131}(u, v, w) + \frac{1}{3}B_{133}(u, v, w) \\ &+ \frac{2}{27}(B_{112}(u, v, w) + B_{121}(u, v, w)) + \frac{2}{9}B_{132}(u, v, w) \\ &+ \frac{1}{9}(B_{113}(u, v, w)) + \frac{4}{27}(B_{122}(u, v, w)) + \frac{2}{9}(B_{123}(u, v, w)) \\ &+ \frac{2}{27}B_{211}(u, v, w) + \frac{2}{9}B_{231}(u, v, w) + \frac{2}{3}B_{233}(u, v, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{27}(B_{212}(u, v, w) + B_{221}(u, v, w)) + \frac{4}{9}B_{232}(u, v, w) \\
& + \frac{2}{9}(B_{213}(u, v, w)) + \frac{8}{27}(B_{222}(u, v, w)) + \frac{4}{9}(B_{223}(u, v, w)) \\
& + \frac{1}{9}B_{311}(u, v, w) + \frac{1}{3}B_{331}(u, v, w) + B_{333}(u, v, w) \\
& + \frac{2}{9}(B_{312}(u, v, w) + B_{321}(u, v, w)) + \frac{2}{3}B_{332}(u, v, w) \\
& + \frac{1}{3}(B_{313}(u, v, w)) + \frac{4}{9}(B_{322}(u, v, w)) + \frac{2}{3}(B_{323}(u, v, w)).
\end{aligned}$$

Les indices à "supprimer" sont : 111, 112, 113, 121, 122, 123, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 311, 312, 321 et 322, ce qui va donner 18 relations.

La présence de  $uvw$  implique celles de  $uv$  et de  $uw$ , donc de  $u$  puis de  $1 - u$  donc de la constante, il n'y a pas d'autres relations intéressantes. On a ainsi 34 relations pour 24 inconnues.

Comme vu en deux dimensions, exhiber ces relations est fastidieux et nous arrivons à la même conclusion, essayer de trouver une autre méthode plus simple, ce qui fera l'objet d'une autre étude.

### 9.3 Degrés supérieurs

Même commentaire que ci-dessus.

### 9.4 Validation d'un carreau tridimensionnel

Ayant reconstruit un carreau complet, on le valide comme vu dans diverses références, par exemple [5], en utilisant la condition suffisante, jacobien strictement positif aux sommets et autres coefficients non négatifs. Ainsi, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\theta(u, v, w) &= \sum_{i=0, n} \sum_{j=0, n} \sum_{k=0, n} B_i^n(u) B_j^n(v) B_k^n(w) P_{ijk}, \\
\mathcal{J}(u, v, w) &= \sum_{I=0, 3n-1} \sum_{J=0, 3n-1} \sum_{K=0, 3n-1} B_I^{3n-1}(u) B_J^{3n-1}(v) B_K^{3n-1}(w) N_{IJK},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_{IJK} &= n^3 \sum_{i_1+i_2+i_3=I} \sum_{j_1+j_2+j_3=J} \sum_{k_1+k_2+k_3=K} \frac{C_{i_1}^{n-1} C_{i_2}^n C_{i_3}^n}{C_{i_1+i_2+i_3}^{3n-1}} \frac{C_{j_1}^n C_{j_2}^{n-1} C_{j_3}^n}{C_{j_1+j_2+j_3}^{3n-1}} \frac{C_{k_1}^n C_{k_2}^n C_{k_3}^{n-1}}{C_{k_1+k_2+k_3}^{3n-1}} \\
& \quad \left| \Delta_{i_1, j_1, k_1}^{1,0,0} \quad \Delta_{i_2, j_2, k_2}^{0,1,0} \quad \Delta_{i_3, j_3, k_3}^{0,0,1} \right|, \tag{4}
\end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned}
i_1 &= 0, n-1, j_1 = 0, n, k_1 = 0, n \\
i_2 &= 0, n, j_2 = 0, n-1, k_2 = 0, n \\
i_3 &= 0, n, j_3 = 0, n, k_3 = 0, n-1
\end{aligned}$$

et avec

$$\Delta_{i,j,k}^{1,0,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i+1,j,k}}, \quad \Delta_{i,j,k}^{0,1,0} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j+1,k}}, \quad \text{et} \quad \Delta_{i,j,k}^{0,0,1} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i,j,k+1}}.$$

Le degré du polynôme jacobien est donc  $3n - 1$  dans chaque direction, le nombre de coefficients de contrôle est  $27n^3$ . Chaque coefficient est une somme pondérée de différents termes, hormis les coefficients coin qui ne possède qu'un seul terme (qui mesure le volume du tétraèdre de sommets le coin et ses trois points de contrôle adjacents et, ainsi, contrôle l'angle entre les plans tangents aux trois faces (courbes) incidentes, voir par exemple  $N_{000}$ ).

## 10 Conclusion

On a indiqué comment construire des carreaux quadrilatéraux et hexaédriques, dits Bézier-Serendip, complètement symétriques et on a donné l'expression de leurs fonctions de base dans le formalisme Bézier. Les cas explicitement traités sont, en deux dimensions, les degrés 2, 3 et 4 puis le degré 5 pour lequel on a rencontré le même problème que pour les éléments finis Serendip, à savoir, la nécessité de rajouter un point de contrôle pour permettre de construire une configuration complètement symétrique. Pour les degrés supérieurs, nous avons considéré que la méthode de construction s'applique mais se trouve être fastidieuse. En trois dimensions, et pour la même raison, nous n'avons explicité que le degré 2.

On a également montré que de ces carreaux pouvaient se déduire les éléments finis Serendip classiques.

Par ailleurs, on a indiqué comment valider géométriquement un carreau courbe d'un maillage donné dont les éléments sont des carreaux définis de cette nouvelle façon. Cette validation se fait en raisonnant sur l'écriture des carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle) en remontant à la forme complète équivalente.

La suite logique de cette étude est donc de trouver une méthode alternative plus simple à mettre en œuvre lorsque le degré est élevé ou, en trois dimensions, dès le degré 3.

## Références

- [1] D.L. ARNOLD AND G. AWANOU, The Serendipity Family of Finite Elements, *Found Comput Math*, **11**, 337-344, 2011.
- [2] C. BERNADI, Y. MADAY ET F. RAPETTI, *Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Collection Mathématiques et Applications, **45**, Springer, 2004.
- [3] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.
- [4] M.S. FLOATER AND A. GILLETTE, Nodal bases for the serendipity family of finite elements, *preprint*, 2014.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8376**, 2013.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Construction et validation des éléments réduits associés à un carreau simplicial de degré arbitraire, *RR INRIA* **8571**, 2014.
- [7] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire, *RR INRIA* **8572**, 2014.
- [8] M. LENOIR, Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques, éditions de l'ENSTA, Paris, 2006.





**RESEARCH CENTRE  
PARIS – ROCQUENCOURT**

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt  
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399