



# Des preuves formelles en Coq du théorème de Thalès pour les cercles

David Braun, Nicolas Magaud

► **To cite this version:**

David Braun, Nicolas Magaud. Des preuves formelles en Coq du théorème de Thalès pour les cercles. David Baelde; Jade Alglave. Vingt-sixièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2015), Jan 2015, Le Val d'Ajol, France. Actes des Vingt-sixièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2015), <<http://jfla.inria.fr/2015>>. <hal-01099132>

**HAL Id: hal-01099132**

**<https://hal.inria.fr/hal-01099132>**

Submitted on 31 Dec 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Des preuves formelles en Coq du théorème de Thalès pour les cercles

---

David Braun<sup>1</sup> & Nicolas Magaud<sup>1</sup>

*1: Laboratoire Icube, Équipe IGG, UMR 7357 CNRS Université de Strasbourg  
david.braun@etu.unistra.fr, magaud@unistra.fr*

## Abstract

Le théorème de Thalès pour les cercles et sa réciproque qui est plus connue sous le nom de théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle sont des propriétés de géométrie élémentaire enseignées dans les collèges français. Nous nous intéressons non seulement à différentes descriptions possibles de ces propriétés en Coq mais aussi aux preuves correspondantes. Nous étudions notamment comment le choix d'une représentation des objets géométriques contenus dans l'énoncé influencent les arguments de preuve. Nous présentons plusieurs approches, une basée sur des calculs d'angles, une autre basée sur la géométrie analytique et finalement deux démonstrations différentes dans l'axiomatique de Tarski en utilisant dans un cas le théorème de la droite des milieux et dans l'autre la notion de symétrie centrale et ses propriétés.

## 1. Introduction

De nombreux travaux s'intéressent à l'utilisation du système d'aide à la preuve Coq<sup>1</sup> [1, 4] dans le cadre de l'enseignement de l'informatique et des mathématiques à la fois au niveau universitaire [5, 7] et au niveau des collèges et lycées [6]. En informatique, Coq et d'autres systèmes de preuve sont d'ailleurs maintenant des outils largement utilisés dans les enseignements tels que la sémantique des langages de programmation. Du côté des mathématiques, Coq et la bibliothèque Coquelicot sur l'analyse réelle ont été utilisés avec succès pour décrire et résoudre les exercices d'analyse de l'épreuve de mathématiques du bac 2013 [8].

Un avantage majeur des assistants de preuve comme Coq est qu'ils permettent de décrire des théories mathématiques arbitrairement complexes tout en évitant de se retrouver bloqué par les limitations des outils de démonstration automatique associés. En effet, les démonstrations sont construites *interactivement* par l'utilisateur et le système vérifie automatiquement au fur et à mesure que la preuve construite démontre effectivement bien le théorème considéré.

Dans ce cadre, nous étudions le cas d'un théorème particulier de géométrie élémentaire enseigné dans le secondaire : le théorème de Thalès pour les cercles ainsi que sa réciproque qui est plus connue sous le nom de théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle.

**Théorème** (Thalès pour les cercles) : Si un triangle est inscrit dans un cercle, et qu'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle alors le triangle est rectangle.

La figure 1 illustre le cas général du théorème. Le côté AB du triangle ABC est un diamètre du cercle de centre O et on observe que quelque soit la position du point C sur le cercle (avec  $C \neq A$  et  $C \neq B$ ), le triangle ABC est rectangle en C.

---

<sup>1</sup>coq.inria.fr

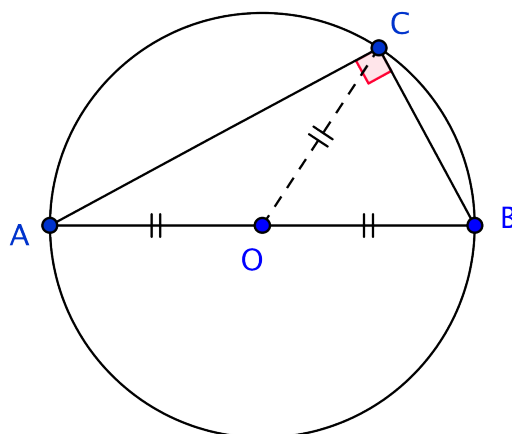


Figure 1: Le théorème de Thalès pour les cercles : cas général

L'objectif de ce travail est d'étudier la formalisation et la démonstration de ce théorème et de sa réciproque dans l'assistant de preuve Coq dans différents contextes mathématiques. La première étape consiste à lister les différents concepts nécessaires à l'énoncé du théorème, puis la seconde à rédiger une preuve du théorème en utilisant ces concepts. La troisième phase consiste à formaliser en Coq les notions mathématiques nécessaires (et/ou réutiliser les formalisations déjà existantes) et à en déduire une démonstration formelle du théorème et de sa réciproque. L'idée est d'avoir une preuve formelle en Coq aussi proche que possible de la preuve mathématique *informelle*.

Nous étudions la formalisation de ce théorème dans quatre contextes différents :

- en se basant sur la contribution de Frédérique Guilhot [6] sur les angles,
- en se basant sur des calculs de géométrie analytique,
- en se basant sur la géométrie de Tarski [9, 3] qui est actuellement développée à Strasbourg au sein de l'équipe IGG, en utilisant un théorème intermédiaire déjà formalisé : le théorème de la droite des milieux,
- et enfin, toujours dans le cadre de la géométrie de Tarski, en utilisant les propriétés géométriques du symétrique.

Il est important de noter que le théorème de Thalès pour les cercles n'était jusqu'à présent démontré ni dans le développement formel de Frédérique Guilhot sur les angles, ni dans le développement formel basé sur l'axiomatique de Tarski. L'ensemble des démonstrations écrites en Coq ainsi que les figures sont visibles à l'adresse suivante : <http://ddbraun.free.fr>.

**Plan** Dans la section 2, nous présentons la formalisation de ce théorème en se basant sur les propriétés des angles. Dans la section 3, nous présentons une modélisation basée sur la géométrie analytique. Dans la section 4, nous présentons deux démonstrations qui s'appliquent sur la description axiomatique de la géométrie faite par Tarski [10]. Dans la section 5, nous présentons 2 approches différentes pour la preuve de la réciproque du théorème. Dans la section 6, nous présentons les conclusions de notre étude ainsi que les perspectives.

## 2. Démonstration en utilisant des propriétés sur les angles

Nous étudions la description du théorème dans ce contexte et construisons une preuve en se basant sur la notion d'angles. Rappelons l'énoncé du théorème considéré :

**Théorème** Si on a 3 points distincts  $A, B, C$  sur un cercle de centre  $O$  et si le segment  $AB$  est un diamètre de ce cercle alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

Exprimer ce théorème en termes géométriques nécessite de disposer des notions suivantes : point, triangle comme triplet de points distincts, angle, distance. La preuve s'appuie, quant à elle, sur les propriétés fondamentales suivantes :

- la somme des angles d'un triangle fait  $180^\circ$ ,
- les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.

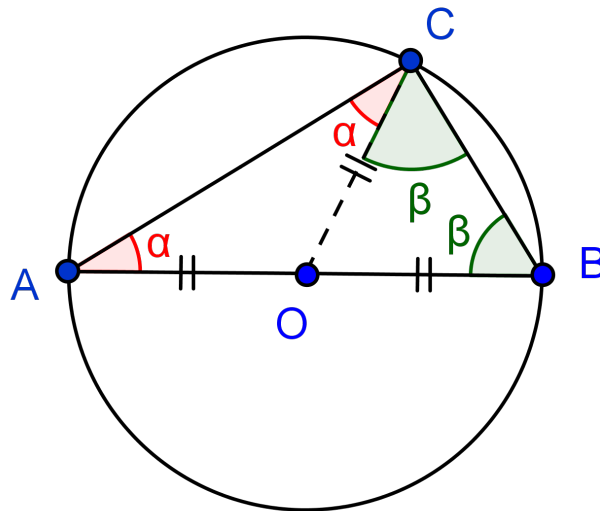


Figure 2: Illustration de la démonstration du théorème de Thalès pour les cercles avec une méthode basée sur les mesures d'angles

**Preuve** On sait que  $OA=OB=OC$ . On peut en déduire que  $OCA$  et  $OCB$  sont des triangles isocèles en  $O$ . Par ailleurs, on sait que les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure. On

appelle cet angle  $\alpha$  dans le triangle OCA et l'angle  $\beta$  dans le triangle OCB.

On sait que la somme des angles d'un triangle (ABC) fait  $180^\circ$  :

$$\begin{aligned}\alpha + (\alpha + \beta) + \beta &= 180^\circ \\ 2 * \alpha + 2 * \beta &= 180^\circ \\ 2 * (\alpha + \beta) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ\end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en C.

## 2.1. Formalisation en Coq de la géométrie basée sur la notion d'angles

Pour formaliser ces démonstrations à l'aide de l'assistant de preuve Coq, nous nous sommes intéressés aux travaux de Frédérique Guilhot [6] sur la formalisation en Coq des théorèmes de géométrie de niveau collège/lycée basée sur la notion d'angles.

Frédérique Guilhot est une professeure de mathématiques qui s'intéresse aux démonstrations interactives sur ordinateur et développe depuis 2002 dans le cadre du projet Lemme puis Marelle d'Inria Sophia Antipolis une contribution sur la formalisation de la théorie des angles. Elle y démontre notamment le théorème de Napoléon<sup>1</sup> ou le théorème de la droite de Simson<sup>2</sup>.

Afin de décrire en Coq la preuve ci-dessus, nous avons créé un formalisme de haut niveau et défini les axiomes qui seraient démontrables en repartant d'une axiomatique plus élémentaire comme celle de Tarski ou Hilbert en géométrie [3].

Parmi les concepts à modéliser, nous présentons la relation de Chasles qui, informellement, permet de décomposer un angle en 2 en utilisant un point intermédiaire. Cette relation est posée comme un axiome (qui serait démontrable si l'on choisissait de construire une axiomatique plus élémentaire).

```
Axiom Angle_Chasles : forall u v w y : Point,
forall H0 : Angle_exist u v w,
forall H1 : Angle_exist u v y,
forall H2 : Angle_exist y v w,
Angle_equal (Angle_cons u v w H0)
              (Angle_plus (Angle_cons u v y H1) (Angle_cons y v w H2)).
```

Dans cet axiome, on se donne 4 points  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $y$ . On prend comme hypothèses supplémentaires l'existence des angles  $\widehat{uvw}$ ,  $\widehat{uvy}$ , et  $\widehat{yvw}$  (cela revient à vérifier, dans le premier cas, que  $u \neq v$  et  $v \neq w$ ), l'axiome exprime alors que  $\widehat{uvw} = \widehat{uvy} + \widehat{yvw}$ .

L'écriture de tous ces axiomes et propriétés reprend l'approche utilisée dans la contribution sur les angles de Frédérique Guilhot qui formalise toute la théorie sur les angles en géométrie plane en Coq. Grâce à ces sources, nous avons défini tous les prérequis mathématiques dont nous avons besoin dans la démonstration, à savoir la notion de point, d'angle, de triangle, de distance et de colinéarité (une des hypothèses du théorème est que A, B et O sont collinéaires).

## 2.2. Preuve en Coq du théorème de Thalès pour les cercles

Nous avons ensuite énoncé le théorème en utilisant le formalisme créé. La construction de la démonstration en Coq nous a permis de vérifier que cette axiomatique était suffisante (et sans doute

---

<sup>1</sup>Théorème de Napoléon : Si nous construisons trois triangles équilatéraux à partir des côtés d'un triangle quelconque, tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur, les centres de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral.

<sup>2</sup><http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoPlane/Cocyclik/SimpSteG.htm>

également nécessaire) pour modéliser notre problème. La mise en œuvre en Coq de l'axiomatique est présenté partiellement dans l'annexe A.

Le déroulement de la preuve du théorème reste assez proche de l'approche mathématique. Néanmoins certains objets mathématiques sont assez délicats à manipuler dans Coq. Par exemple, en mathématiques, lorsqu'on fait référence à un angle  $ABC$  défini par trois point  $A$ ,  $B$  et  $C$ , le fait que  $B \neq A$  et  $B \neq C$  est implicite et passé sous silence. En Coq, il faut non seulement le dire, mais en plus en fournir systématiquement des preuves de ces propriétés.

Cette démarche est assez automatique et répétitive, pour ne pas dire fastidieuse. Néanmoins, nous avons pu facilement développer une (petite) tactique qui prouve automatiquement l'existence d'un angle si les hypothèses nécessaires sont présentes (voir annexe B).

En résumé, cette première preuve a nécessité un important travail de modélisation visant à se conformer au mieux aux connaissances mathématiques scolaires de niveau collège. La preuve du théorème a permis de s'assurer que l'axiomatique définie était suffisante. Cette preuve suit le déroulement usuel de la preuve mathématique, même si cela n'est visible que pour l'œil avisé d'un spécialiste des preuves formelles.

Cette première démonstration, basée sur une axiomatique de très haut niveau est composée de 15 axiomes, 3 définitions, 10 lemmes, 1 tactique, soit au total 350 lignes de démonstrations.

### 3. Démonstrations en géométrie analytique

Une autre approche consiste à se placer dans le cadre de la géométrie analytique. Dans ce cas, un version restrictive du théorème s'énonce ainsi :

**Théorème** Posons 3 points distincts  $O$ ,  $A$ ,  $B$  avec  $O = (0,0)$ ,  $A (-1,0)$  et  $B(1,0)$  et le point  $C$  est sur le cercle de centre  $O$  de diamètre  $AB$ . Alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

On peut généraliser ce théorème en montrant que la propriété est invariante par des déplacements (rotations, translations) ou même d'autres transformations comme les homothéties.

Pour faire une preuve s'appuyant sur la trigonométrie, il faut disposer des notions de point et de cercle trigonométrique ainsi que des propriétés suivantes :

- le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est égal à  $-1$ ,
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ .

**Preuve** Le point  $C$  est sur le cercle unitaire, donc ses coordonnées sont  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Pour prouver que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ , il suffit de montrer que  $AC$  et  $CB$  sont perpendiculaires, c'est-à-dire que le produit de leur pente est égal à  $-1$ .

$$\text{Calcul de la pente de } AC : \text{pente}_{AC} = (y_c - y_a) / (x_c - x_a) = \sin \theta / (\cos \theta + 1)$$

$$\text{Calcul de la pente } BC : \text{pente}_{BC} = (y_c - y_b) / (x_c - x_b) = \sin \theta / (\cos \theta - 1)$$

Calcul du produit  $\text{pente}_{AC} * \text{pente}_{BC}$  :

$$(\sin \theta / (\cos \theta + 1)) * (\sin \theta / (\cos \theta - 1)) = \sin^2(\theta) / (\cos^2(\theta) - 1) = \sin^2(\theta) / -\sin^2(\theta) = -1$$

Une variante consiste à utiliser la notion de produit scalaire et vérifier que le produit scalaire des 2 vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  est nul.

La mise en œuvre dans Coq nécessite d'utiliser la bibliothèque sur les réels et notamment les tactiques comme `ring` et `field` pour décider des égalités sur les réels. Globalement cela conduit à des preuves extrêmement calculatoires et donc peu lisibles. L'énoncé du théorème et sa preuve ne sont qu'une succession de formules arithmétiques à vérifier sur les nombres réels. Ces preuves sont sans doute largement automatisables. Elles pourraient être produites par un système de calcul formel et ensuite simplement vérifiées par Coq. En tout cas, elles sont assez éloignées des démonstrations mathématiques usuelles. Le raisonnement est pratiquement intégralement occulté par le calcul, alors que nous souhaitons produire des preuves lisibles, *rédigées* dans un style proche que possible de celui des mathématiciens.

## 4. Démonstrations basées sur l'axiomatique de Tarski

Nous nous intéressons maintenant à une formalisation laissant plus de place au raisonnement et ignorant les aspects calculatoires : l'axiomatique de Tarski.

### 4.1. Géométrie de Tarski

Les travaux d'Alfred Tarski permet de construire la géométrie Euclidienne à partir d'une axiomatique minimale. Il définit un seul type d'objet : (le point) puis deux relations (la congruence entre couples de bipoints - même longueur - et la relation ternaire *between*). Cette relation exprime qu'un point  $A$  se situe entre deux points  $B$  et  $C$  au sens large (c'est-à-dire que le point  $A$  en question peut être confondu avec  $B$  ou  $C$ ). En partant de cette axiomatique, Julien Narboux et Gabriel Braun ont démontré formellement [9, 3] grâce à l'assistant de preuve Coq l'ensemble des théorèmes énoncés dans le livre de Tarski [10], en complétant avec des bibliothèques consacrées aux quadrilatères, projections et vecteurs. Ce projet a commencé il y a plus de trois ans et il reste encore deux chapitres à démontrer sur les seize chapitres du livre.

### 4.2. Démonstrations en utilisant la bibliothèque Tarski

Les deux démonstrations en Coq du théorème que nous avons réalisées en utilisant l'axiomatique de Tarski utilisent respectivement le théorème de la droite des milieux et les propriétés de la symétrie centrale. En complément de ces deux démonstrations, nous avons également démontré en Coq la réciproque en utilisant les mêmes concepts. Par exemple, l'annexe C présente un extrait de la preuve du théorème utilisant la symétrie et les propriétés des parallélogrammes. Les notions de colinéarité, symétrie, parallèle, congruence entre deux distances (égalité) et perpendicularité sont rassemblées dans les douze premiers chapitres de la géométrie de Tarski. A cela, on rajoute quelques modules complémentaires contenant des tactiques et des lemmes sur les quadrilatères.

Pour donner une idée, voici quelques données sur la taille de la bibliothèque sur l'axiomatique de Tarski que nous avons réutilisée pour nos démonstrations. Elle contient 11 axiomes (l'axiomatique élémentaire de Tarski), 237 définitions, 1500 lemmes, 175 tactiques et un total de 70 000 lignes de démonstrations.

On peut noter que l'axiomatique que nous avons définie dans la section précédente pour la démonstration du théorème de Thalès pour les cercles en se basant sur les angles est plus longue que celle utilisée par toute la géométrie de Tarski.

Comme dans les formalisations déjà présentées, il faut d'abord formaliser l'énoncé du théorème et de sa réciproque, puis identifier dans la bibliothèque les lemmes nécessaires à la démonstration.

La difficulté est d'avoir une bonne vision d'ensemble pour trouver le lemme utile dans chaque circonstance. Certaines tâches un peu fastidieuses (essentiellement la prise en compte des cas dégénérés où plusieurs points sont confondus par exemple) se prouvent assez facilement à l'aide de tactiques. Les grandes étapes de démonstrations suivent parfaitement les preuves mathématiques. Cependant entre chaque pas, il faut souvent quelques dizaines de lignes pour effectuer la preuve d'un petit résultat intermédiaire. En posant des axiomes de haut niveau dans la première formalisation, on n'est pas du tout confronté à ce problème. En termes de preuves Coq, il a fallu *seulement* 700 lignes pour démontrer les deux théorèmes et les deux réciproques.

### 4.3. Démonstration à l'aide du théorème de la droite des milieux

**Théorème** Si on a 3 points distincts  $A, B, C$  sur un cercle de centre  $O$  et si le segment  $AB$  est un diamètre de ce cercle alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

Dans ce contexte, les concepts nécessaires sont les suivants :

- Notion de point
- Notion de distance
- Notion de médiatrice
- Théorème de la droite des milieux : si une droite  $d$  est parallèle à un côté  $x$  d'un triangle et qu'elle coupe un côté  $y$  du triangle en son milieu, alors elle coupe le troisième côté  $z$  en son milieu.
- Si une droite  $d_1$  est perpendiculaire à une droite  $d_2$  et si la droite  $d_1$  est parallèle à une droite  $d_3$ , alors  $d_2$  est aussi perpendiculaire à  $d_3$ .

**Preuve** On sait que  $O$  est le centre du cercle et le milieu du segment  $AB$ . Soit  $l$  la droite parallèle à  $BC$  passant par  $O$ . D'après le théorème de la droite des milieux, elle coupe  $AC$  en son milieu  $M$ . La droite  $OM$  est la médiatrice du segment  $AC$  car  $OA=OC$ . Comme  $OM$  est perpendiculaire à  $AC$  et  $OM$  parallèle à  $BC$  alors on a  $AC$  perpendiculaire à  $BC$ . On en conclue que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

### 4.4. Démonstration en utilisant la symétrie

**Théorème** Si on a 3 points distincts  $A, B, C$  sur un cercle de centre  $O$  et si le segment  $AB$  est un diamètre de ce cercle alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

Nous avons besoin des notions et propriétés suivantes :

- points distance entre 2 points
- symétrie centrale
- parallélogramme (si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors le quadrilatère est parallélogramme)
- rectangle (si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu et ont la même longueur alors le quadrilatère est un rectangle) et de la propriété suivante :
- Si un quadrilatère est un rectangle alors ce quadrilatère a 4 angles droits.



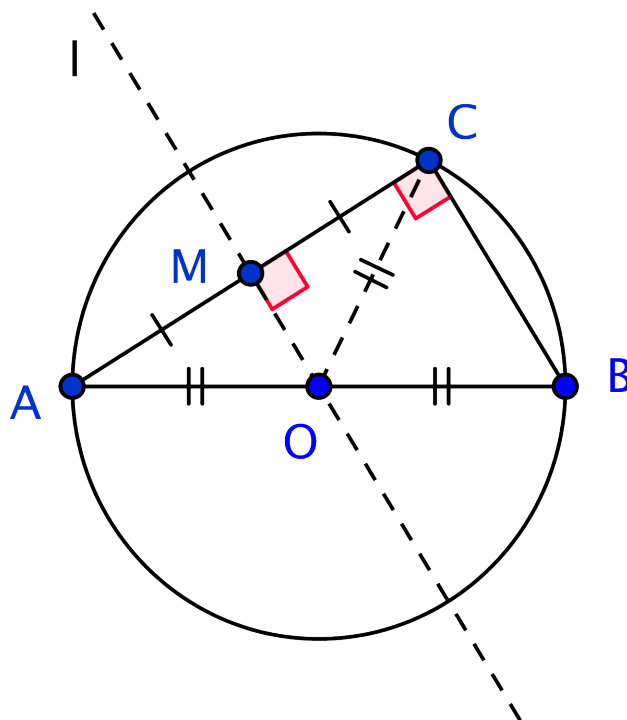


Figure 3: Illustration de la démonstration du théorème de Thalès pour les cercles, basée sur l'axiomatique de Tarski et le théorème de la droite des milieux

**Preuve** Soit  $M$  le symétrique du point  $C$  par rapport à  $O$ , montrons que le quadrilatère  $ACBM$  est un rectangle :

$O$  est le milieu de  $AB$  ( $AB$  est le diamètre du cercle de centre  $O$ ).  $O$  est le milieu de  $CM$  ( $M$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $O$ ). Les diagonales  $AB$  et  $CM$  se coupent en leur milieu  $O$  donc le quadrilatère  $ACBM$  est un parallélogramme. De plus, on sait que (1)  $OA=OC=OB$  étant donné que les trois points sont sur le cercle de centre  $O$  et que (2)  $OC=OM$  étant donné que  $M$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $O$ . On en déduit que les diagonales du quadrilatère  $ACBM$  se coupent en leur milieu et ont même longueur, donc le quadrilatère est un rectangle.

En conclusion le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

## 5. Étude de la réciproque

Nous nous intéressons maintenant à la preuve de la réciproque du théorème de Thalès pour les cercles. Cette réciproque, souvent appelée également théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle s'énonce ainsi :

**Théorème** Si un triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ , alors son hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

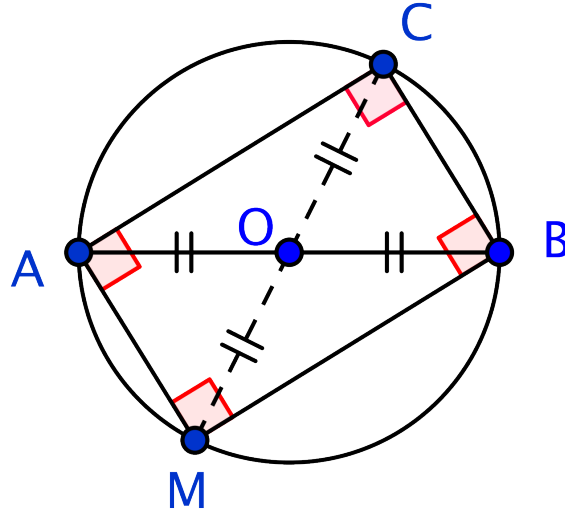


Figure 4: Illustration de la démonstration du théorème de Thalès pour les cercles, basée sur l'axiomatique de Tarski et la symétrie centrale

### 5.1. Démonstration à l'aide du théorème de la droite des milieux

Cet énoncé peut être reformulé de manière équivalente ainsi :

**Théorème** Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets du triangle.

Les concepts nécessaires pour construire une preuve sont les suivants :

- Notion de point
- Théorème de la droite des milieux : si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.
- Si une droite  $d_1$  est perpendiculaire à une droite  $d_2$  et si la droite  $d_1$  est parallèle à une droite  $d_3$ , alors  $d_2$  est aussi perpendiculaire à  $d_3$ .

On peut noter qu'il s'agit d'une seule notion géométrique (celle de point) et de *seulement* deux lemmes d'assez haut niveau disponibles dans la bibliothèque sur Tarski formalisée à Strasbourg.

**Preuve** Soit  $d_1$  la droite passant par le milieu  $O$  du segment  $AB$  et le milieu  $M_1$  du segment  $BC$ . D'après le théorème de la droite des milieux, elle est parallèle à la droite  $AC$ . Or la droite  $AC$  et la droite  $BC$  sont perpendiculaires. Donc la droite  $d_1$  passant par  $O$  et  $M_1$  est perpendiculaire à  $BC$ . Comme elle passe par le milieu de  $BC$  et qu'elle est perpendiculaire,  $d_1$  est la médiatrice du segment  $BC$ .

Soit  $d_2$  la droite passant par le milieu  $O$  du segment  $AB$  et le milieu  $M_2$  du segment  $AC$ . D'après le

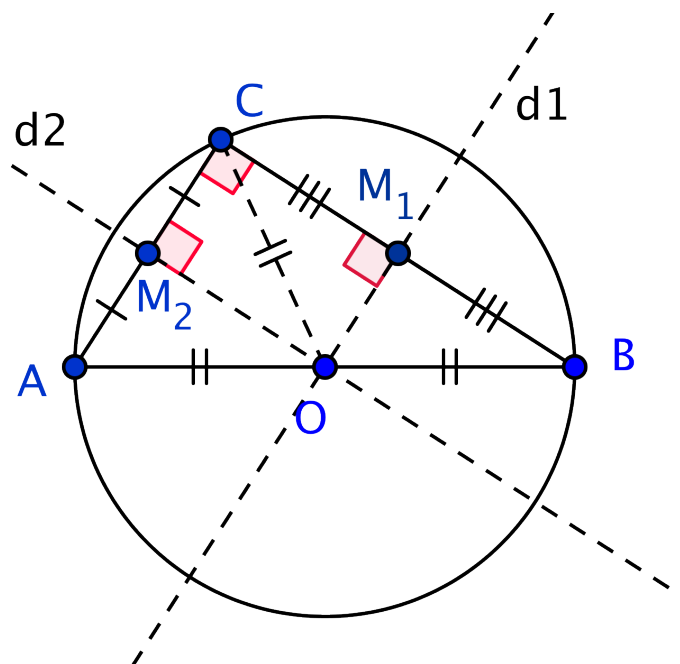


Figure 5: Illustration de la démonstration de la réciproque du théorème de Thalès pour les cercles basée sur l'axiomatique de Tarski et le théorème de la droite des milieux

théorème de la droite des milieux, elle est parallèle à la droite BC. Or la droite AC et la droite BC sont perpendiculaires. Donc la droite d2 passant par O et M2 est perpendiculaire à AC. Comme elle passe par le milieu de AC et qu'elle est perpendiculaire, d2 est la médiatrice du segment AC. Ces deux médiatrices se coupent en O qui est donc le milieu du cercle circonscrit au triangle ABC. Or les points A, O et B sont alignés et  $OA=OB$ . Par conséquent, le segment AB est bien le diamètre de ce cercle.

## 5.2. Démonstration à l'aide des parallélogrammes

Dans la méthode utilisant la notion de parallélogrammes, nous reprenons l'énoncé de la réciproque donné au début de la section.

**Théorème** Si un triangle ABC est rectangle en C, alors son hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Nous avons besoin des notions et propriétés suivantes pour énoncer et démontrer le théorème :

- Notion de point
- Notion de parallèle
- Si dans un quadrilatère les côtés opposés sont parallèles deux à deux, alors le quadrilatère est un parallélogramme.
- Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

- Si un quadrilatère est un rectangle, alors les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu et ont même mesure.
- Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors ce quadrilatère est un rectangle.

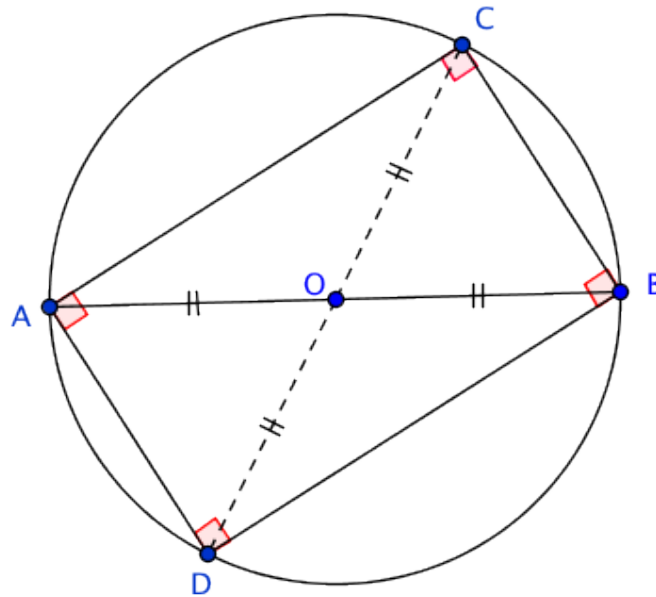


Figure 6: Illustration de la démonstration de la réciproque du théorème de Thalès pour les cercles, basée sur les propriétés des parallélogrammes

**Preuve** On trace  $d_1$  la droite parallèle à  $BC$  passant par  $A$ . On trace  $d_2$  la droite parallèle  $CA$  passant par  $B$ . Les droites  $d_1$  et  $d_2$  se coupent au point  $D$ . Les côtés  $AC$  et  $DB$  sont opposés et parallèles. Les côtés  $BC$  et  $DA$  sont opposés et parallèles. Alors le quadrilatère  $ACBD$  est un parallélogramme. De plus, on sait que l'angle  $ACB$  est un angle droit par hypothèse. Comme les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires, tout les angles du parallélogramme forment un angle droit. Si un quadrilatère a 4 angles droits alors ce quadrilatère est un rectangle. Donc les diagonales  $AB$  et  $CD$  se coupent en leur milieu  $O$  et ont la même mesure, c'est-à-dire que  $OA=OB=OC$ . On en déduit la propriété recherchée, à savoir que  $AB$  est le diamètre du cercle de centre  $O$  passant par  $C$  et  $D$ .

## 6. Conclusion et perspectives

**Conclusion** Ce travail a permis de démontrer dans différents formalismes un théorème de la géométrie du niveau collège à l'aide de l'assistant de preuve Coq. Ce but a bien été atteint selon trois approches différentes.

Dans un premier temps, nous avons formalisé une géométrie simple (à partir des notions de point, d'angle, de triangle, de distance) qu'un collégien arriverait à comprendre. La preuve de ce théorème sous cette forme est très proche de l'énoncé mathématique, les pas de démonstrations sont directement visibles dans la preuve.

Dans un deuxième temps, nous avons exploré les aspects calculatoires de ces problèmes. La géométrie analytique permet en effet de ramener les problèmes géométriques à des problèmes de calcul sur les réels. Cela rend moins évident le raisonnement et rend la preuve moins compréhensible, mais plus facilement automatisable.

Dans un troisième temps, nous sommes partis de la formalisation de la géométrie basée sur l'axiomatique de Tarski et nous avons prouvé le théorème et sa réciproque de deux manières différentes. Ces preuves vont d'ailleurs être intégrées dans la bibliothèque sur la géométrie de Tarski développée à Strasbourg. Cette formalisation basée sur l'axiomatique de Tarski est nettement plus technique, l'axiomatique étant de beaucoup plus bas niveau. Elle présente l'énorme avantage de fournir une preuve basée sur un tout petit nombre d'axiomes (11 seulement) et largement automatisée. Par contre, cela conduit à des démonstrations dont les grandes étapes de raisonnement sont moins visibles.

L'ensemble des scripts de preuve Coq sont disponibles sur le site web : <http://ddbraun.free.fr>.

**Perspectives** La première idée serait de relier l'axiomatique (de haut niveau) proposée sur les angles à l'axiomatique de Tarski. Pour cela, il faudrait étudier s'il est possible de formaliser et prouver dans l'axiomatique de Tarski les propriétés énoncées sous forme d'axiomes dans l'axiomatique sur les angles.

La deuxième perspective intéressante sera d'utiliser les résultats de [2] pour améliorer la structure (et donc la lisibilité) des preuves effectuées. En utilisant les tactiques développées par Pierre Boutry et Julien Narboux, il est possible d'obtenir des démonstrations plus courtes et plus simples. Cela permettrait de se rapprocher des mathématiques usuelles et d'avoir des preuves mieux adaptées au public (collégiens et lycéens et leurs enseignants) supposé les produire ou tout au moins les lire et les comprendre.

## References

- [1] Y. Bertot and P. Castéran. *Interactive Theorem Proving and Program Development, Coq'Art: The Calculus of Inductive Constructions*. Springer, 2004.
- [2] P. Boutry, J. Narboux, P. Schreck, and G. Braun. Using Small Scale Automation to Improve Both Accessibility and Readability of Formal Proofs in Geometry. In F. Botana and P. Quaresma, editors, *Automated Deduction in Geometry 2014*, pages 1–19, Coimbra, Portugal, July 2014.
- [3] G. Braun and J. Narboux. From Tarski to Hilbert. In *Automated Deduction in Geometry, ADG'2012. Revised Selected Papers*, volume 7993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 89–109. Springer, 2012.
- [4] Coq development team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, Version 8.4.pl4*. LogiCal Project, 2014.
- [5] D. Delahaye, M. Jaume, and V. Prevosto. Coq, un outil pour l'enseignement. une expérience avec les étudiants du DESS développement de logiciels srs. *Technique et Science Informatiques*, 24(9):1139–1160, 2005.
- [6] F. Guilhot. Formalisation en Coq et visualisation d'un cours de géométrie pour le lycée. *Technique et Science Informatiques*, 24(9):1113–1138, 2005.
- [7] M. Jaume and T. Laurent. Teaching Formal Methods and Discrete Mathematics. In C. Dubois, D. Giannakopoulou, and D. Méry, editors, *Proceedings 1st Workshop on Formal Integrated Development Environment, F-IDE'2014*, volume 149 of *EPTCS*, pages 30–43, 2014.
- [8] C. Lelay. Coquelicot passe le bac. In *Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA)*, 2014. Exposé invité, disponible à <https://www.lri.fr/~lelay/Bac2013/Rapport.pdf>.

- [9] J. Narboux. Mechanical Theorem Proving in Tarski's Geometry. In F. Botana and T. Recio, editors, *Automated Deduction in Geometry, ADG 2006. Revised Papers*, volume 4869 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 139–156. Springer, 2007.
- [10] W. Schwabhauser and W. Szmielew and A. Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Springer Verlag, 1983.

## Annexes

### A. Axiomatique sur les angles

```
(* ----- Notion de point ----- *)
Parameter Point : Set.
Definition Point_equal := @eq Point.
Parameter Point_col : Point -> Point -> Point -> Prop.

Axiom Point_col_permut2 : forall a b c : Point, Point_col a b c -> Point_col b a c.

(* ----- Notion d'angle ----- *)
Definition Angle_exist a b c := ~Point_equal a b /\ ~Point_equal c b.

Parameter Angle : Type.
Parameter Angle_cons : forall a b c : Point, Angle_exist a b c -> Angle.
Definition Angle_equal := (@eq Angle).

Parameter zero : Angle.
Parameter pi : Angle.
Parameter pi2 : Angle.

(* Axiome Angle abc = angle cba *)
Axiom Angle_equal_def :
  forall a b c, forall H:Angle_exist a b c, forall H1:Angle_exist c b a,
    Angle_equal (Angle_cons a b c H) (Angle_cons c b a H1).

(* Axiome addition entre deux angles *)
Parameter Angle_plus : Angle -> Angle -> Angle.
Axiom pi2_pi : (Angle_equal (Angle_plus pi2 pi2) pi).

(* Axiomes associativité et commutativité de l'addition de deux angles *)
Axiom Angle_plus_assoc :
  forall x y z, Angle_plus x (Angle_plus y z) = Angle_plus (Angle_plus x y) z.
Axiom Angle_plus_comm : forall x y, Angle_plus x y = Angle_plus y x.

(* Axiome antisymétrie forte *)
Axiom strong_regularity : forall a b, Angle_plus a a=Angle_plus b b -> a =b.

(* Axiome sur la relation de Chasles sur un angle uvw *)
Axiom Angle_Chasles :
  forall u v w y, forall H0: Angle_exist u v w,
```

```

forall H1 : Angle_exist u v y, forall H2 : Angle_exist y v w,
  Angle_equal (Angle_cons u v w H0) (Angle_plus (Angle_cons u v y H1) (Angle_cons y v w H2)).

(* Axiomes egalite d'angle et colinearite *)
Axiom Angle_col1 :
  forall a b c d : Point,
  forall H0: Angle_exist a c d,forall H1 : Angle_exist b c d,
  Point_col a b c -> Angle_equal (Angle_cons a c d H0) (Angle_cons b c d H1).

Axiom Angle_col2 :
  forall a b c d : Point,
  forall H0: Angle_exist a b c,forall H1: Angle_exist a b d,
  Point_col b c d -> Angle_equal (Angle_cons a b c H0) (Angle_cons a b d H1).

(* ----- triangle ----- *)
Parameter Triangle : Set.
Parameter Triangle_cons : forall a b c : Point, ~Point_equal a b ->
~Point_equal a c -> ~Point_equal b c -> Triangle.

(* Axiome somme des angles d'un triangle = pi *)
Axiom Triangle_somme_pi :
  forall a b c, forall H0 : Angle_exist a b c,
  forall H1 : Angle_exist b c a, forall H2 : Angle_exist c a b,
  Angle_equal
  (Angle_plus
   (Angle_cons a b c H0)
   (Angle_plus (Angle_cons b c a H1)(Angle_cons c a b H2)))
  pi.

```

## B. Théorème, réciproque et tactique dans l'axiomatique de Tarksi

```

Lemma midpoint_thales : forall o a b c : Tpoint,
  all_distincts o a b c ->
  is_midpoint o a b -> Cong o a o c -> Per a c b.

Lemma midpoint_thales_reci : forall a b c o: Tpoint,
  all_distincts a b c o -> Per a c b ->
  is_midpoint o a b -> Cong o a o b /\ Cong o b o c.

```

```

(* Tactique qui prouve l'existence d'un angle *)
Ltac solve_angle :=
  unfold Angle_exist in *; intuition;
  match goal with [H: Point_equal ?X ?Y -> False|_ ] =>
    (apply H; (assumption || apply Point_equal_symetrique; assumption)) end.

```

## C. Exemple de démonstration

```

Lemma symmetric_thales_reci : forall a b c o: Tpoint,
  all_distincts a b c o ->
  Per a c b -> -> is_midpoint o a b ->
  Cong o a o b /\ Cong o b o c.
Proof.
intros; split.

(* Demonstration Cong o a o b *)
destruct H1.
Cong.

(* Construction du symétrique *)
assert( HH := segment_construction c o c o).
destruct HH.
spliter.

(* Preuve is_midpoint o c x *)
assert( is_midpoint o c x ).
unfold is_midpoint.
split.
assumption.
Cong.

(* Preuve qu'on a un parallélogramme ACBX dont O est le milieu *)
assert( Plg a c b x ).
unfold Plg.
split.
left.
unfold all_distincts in H.
spliter.
assumption.
exists o.
split; assumption.

(* Preuve qu'on a un rectangle ACBX dont O est le milieu *)
assert( Rectangle a c b x ).
apply plg_per_rect2.
assumption.
apply l8_2.
assumption.
unfold Rectangle in H6.
spliter.
clear H6.

(* Preuve que les demi diagonales du rectangle sont égales *)
assert( HH := cong_cong_half_2 a o b c o x H1 H4 H7 ).
apply (cong_transitivity _ _ x o _ ); Cong.
Qed.

```