



# Le problème d'échantillonnage compressif avec permutation des capteurs et une solution de type branch-and-bound

Valentin Emiya, Antoine Bonnefoy, Laurent Daudet, Rémi Gribonval

## ► To cite this version:

Valentin Emiya, Antoine Bonnefoy, Laurent Daudet, Rémi Gribonval. Le problème d'échantillonnage compressif avec permutation des capteurs et une solution de type branch-and-bound. Congrès ROADEF de la société Française de Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision, Feb 2015, Marseille, France. 2015. <hal-01100265>

HAL Id: hal-01100265

<https://hal.inria.fr/hal-01100265>

Submitted on 6 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le problème d'échantillonnage compressif avec permutation des capteurs et une solution de type *branch-and-bound*

Valentin Emiya<sup>1</sup>, Antoine Bonnefoy<sup>1</sup>, Laurent Daudet<sup>2</sup>, Rémi Gribonval<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Aix-Marseille Université, CNRS UMR 7279 LIF {prenom.nom}@lif.univ-mrs.fr

<sup>2</sup> Institut Langevin, CNRS UMR 7587, Univ. Paris Diderot, ESPCI {prenom.nom}@espci.fr

<sup>3</sup> Inria {prenom.nom}@inria.fr

**Mots-clés** : *optimisation combinatoire, branch-and-bound, permutation, traitement du signal, échantillonnage compressif.*

## 1 Introduction

Lors d'un enregistrement, un ingénieur du son s'est trompé dans le câblage des nombreux microphones et s'en aperçoit bien après la séance. Peut-il retrouver le bon appariement à partir de l'enregistrement seul ? Plus généralement, peut-on retrouver automatiquement une permutation inconnue de capteurs à partir des seuls signaux enregistrés par ces capteurs ?

Nous nous intéressons à ce nouveau problème qui fait intervenir conjointement une optimisation sur l'ensemble des permutations et la modélisation de signaux numériques enregistrés par des capteurs, c'est-à-dire échantillonnés dans le temps et l'espace, selon une technique dite d'échantillonnage compressif [1, 3]. Pour ce faire, nous introduisons une méthode de type *branch-and-bound* dans un problème de traitement du signal, discipline qui a tendance à ne recourir que très rarement à l'optimisation combinatoire. L'ensemble de ces résultats a été présenté dans une conférence de traitement de signal [4] où le défi était d'introduire des méthodes d'optimisation combinatoire auprès d'un public peu averti et de lui montrer leur utilité dans un contexte de traitement du signal. Réciproquement, la présente proposition vise à montrer à des spécialistes d'optimisation combinatoire le potentiel inexploité d'utilisation de leurs méthodes dans des problèmes de traitement du signal, et à recueillir son intérêt et ses retours critiques.

## 2 Formulation du problème

On considère un système d'acquisition composé de  $M$  capteurs, tels que des microphones ou les pixels d'une caméra, le signal numérique enregistré par chaque capteur étant un vecteur de taille  $N$ . Les données enregistrées forment ainsi une matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ . On suppose que l'on connaît une matrice  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{M \times K}$ ,  $K \geq M$ , telle que, lorsque les capteurs n'ont pas été permutés, ces données peuvent se modéliser sous la forme  $\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X}^\circ$  où  $\mathbf{X}^\circ$  est tel que

$$\mathbf{X}^\circ = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_1 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X} \\ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{K \times N} \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N |\mathbf{X}_{kn}|$ . La matrice  $\mathbf{D}$  ne dépend que du système et pas de l'instance particulière des données  $\mathbf{Y}$ . La minimisation de la norme  $\|\mathbf{X}\|_1$  contraint  $\mathbf{X}^\circ$  à avoir un faible nombre de coefficients non-nuls :  $\mathbf{X}^\circ$  est une solution dite parcimonieuse parmi toutes les solutions du système  $\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X}$ . Ce problème de minimisation est en réalité une relaxation convexe du problème NP-difficile  $\arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_0$  s.c.  $\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X}$ , qui fournit la solution la plus parcimonieuse [2], c'est-à-dire celle pour laquelle le nombre  $\|\mathbf{X}\|_0$  de coefficients non-nuls est minimum. Ce modèle se retrouve dans de nombreuses applications. Par exemple, dans le cas

d'un enregistrement sonore où  $\mathbf{Y}_{mn}$  est la valeur de l'enregistrement à l'instant  $n$  au capteur  $m$ ,  $\mathbf{D}_{mk}$  caractérise la propagation du son d'un point  $k$  de l'espace – préalablement discrétisé – jusqu'au capteur  $m$  et  $\mathbf{X}_{kn}$  est le son émis au point  $k$  à l'instant  $n$ . La parcimonie de  $\mathbf{X}$  se traduit par le fait que peu de sources sonores sont actives simultanément dans l'espace.

Dans le cas d'une permutation inconnue des capteurs, le problème à résoudre s'écrit

$$\arg \min_{\mathbf{P}, \mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_1 \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{Y} &= \mathbf{D}\mathbf{X} \\ \mathbf{X} &\in \mathbb{R}^{K \times N} \\ \mathbf{P} &\in \mathcal{P}_M \end{cases} = \arg \min_{\mathbf{P}, \mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_1 \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{Y} &= \mathbf{D}\mathbf{X} \\ \mathbf{P}\mathbf{1}_M &= \mathbf{1}_M \\ \mathbf{P}^T\mathbf{1}_M &= \mathbf{1}_M \\ \mathbf{X} &\in \mathbb{R}^{K \times N} \\ \mathbf{P} &\in \{0, 1\}^{M \times M} \end{cases} \quad (2)$$

où  $\mathcal{P}_M$  est l'ensemble des matrices de permutation de taille  $M \times M$ , avec  $|\mathcal{P}_M| = M!$ . Ce nouveau problème d'optimisation repose sur l'hypothèse que seule la bonne permutation permet d'atteindre le minimum ; autrement dit, que la parcimonie est un bon critère pour retrouver la permutation, hypothèse qui sera vérifiée expérimentalement.

### 3 Résolution

L'algorithme proposé résout le problème linéaire à variables mixtes (2) via une approche de type *branch-and-bound* dont les principales caractéristiques sont :

- on considère des sous-problèmes du problème original (2), en partant de celui-ci ;
- un sous-problème est construit à partir d'un (sous-)problème précédemment considéré en ajoutant une contrainte d'égalité à 1 sur un coefficient de la matrice de permutation ;
- un encadrement de la valeur objective optimale de chaque sous-problème est établi : pour la borne inférieure, via une relaxation convexe de  $\{0, 1\}$  en  $[0, 1]$  pour les coefficients de  $\mathbf{P}$  ; et pour la borne supérieure, via l'algorithme hongrois en projetant la solution non-entière de la relaxation sur l'ensemble des permutations ;
- le processus est répété tant que la plus petite borne inférieure ne coïncide pas avec la plus petite borne supérieure ;
- lorsque l'algorithme s'arrête, on obtient la solution de (2).

L'algorithme converge vers la solution de (2), en parcourant dans le pire cas la totalité de l'ensemble des permutations possibles. En pratique, la série d'expériences proposées illustre le comportement typique de l'algorithme en fonction de grandeurs caractéristiques telles que le nombre de capteurs, la taille des enregistrements, la parcimonie. Il apparaît que la proportion de sous-problèmes explorés est faible – par exemple  $2.10^{-5}\%$  pour  $M = 14$  capteurs dans des conditions expérimentales particulières [4]. Par ailleurs, la permutation originale est identifiée dans toutes les expériences, validant ainsi la pertinence de la formulation du problème (2).

Le détail de l'algorithme et des expériences sont disponibles dans [4].

### Références

- [1] E.J. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(2) :489–509, February 2006.
- [2] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1) :33–61, 1998.
- [3] D.L. Donoho. Compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(4) :1289–1306, April 2006.
- [4] V. Emiya, A. Bonnefoy, L. Daudet, and R. Gribonval. Compressed sensing with unknown sensor permutation. In *Proc. of ICASSP*, Florence, Italy, May 2014.