

Suite d'ensembles partiellement ordonnés

Bachir Sadi

▶ To cite this version:

Bachir Sadi. Suite d'ensembles partiellement ordonnés. Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, 2006, Volume 4, 2006, pp.66-71. 10.46298/arima.1846 . hal-01262047

HAL Id: hal-01262047 https://inria.hal.science/hal-01262047

Submitted on 26 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Suite d'ensembles partiellement ordonnés

Bachir Sadi

Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Faculté des sciences, Département de Mathématiques Sadibach@yahoo.fr

Résumé : Ce travail porte sur le développement d'un o rdre D(P) sur les antichaînes maximales d'un o rdre donné. L'ordre développé D(P) est inclus dans le Treillis des antichaînes maximales AM(P), introduit par R.P. Dilworth, en 1960. Dans [1], T.Y. Kong et P. Ribenboim ont montré qu'il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne, où |, i fois. On note cdev(P) le plus petit i tel que $D^i(P)$ est une chaîne. Nous trouvons cdev(P) pour quelques classes particulières d'or dres et nous faisons une approche de ce paramètre dans le cas d'un o rdre quelconque.

Mots- clés: Antichaîne maximale, ordre, ordre partiel.

Abstract : This work is to study an order D(P) on maximal antichains of a given order. D(P) is an order included in the order which defines the Lattice of maximal antichains AM(P), introduced by R.P. Dilworth, in 1960. In [1], T.Y. Kong and P. Ribenboim have proved that there exists an integer i such that $D^i(P)$ is a chain, where i, i times. We find the smallest i, noted cdev(P) such that $D^i(P)$ is a chain for some particular classes of orders and we approximate this parameter in the general case of order.

Keywords: Maximal antichain, order, partial order.

Introduction – Définitions

Un ensemble ordonné est un couple (X, \leq_P) , où X est un ensemble et (X, \leq_P) , un ordre sur X, (X, e) c'est - à - dire, une relation binaire définie sur les éléments de (X, e), qui est réflexive, antisymétrique et transitive. On note (X, \leq_P) , l'ensemble ordonné. Il est dit aussi ensemble ordonné (X, e), ou ordre (X, e), on appelle *chaîne* de (X, e), un ensemble d'éléments de (X, e) comparables deux à deux. La *longueur* d'un e chaîne est le nombre de ses éléments. Une *antichaîne* de (X, e) est constituée d'éléments de (X, e) non comparables deux à deux. Une chaîne (resp. antichaîne) de (X, e) est maximale si elle n'est incluse dans aucune autre chaîne (resp. antichaîne) de (X, e).

Soit $P=(X,\leq)$, un ensemble partiellement ordonné. On considère l'ordre ainsi défini sur les antichaînes maximales de P: A,B deux antichaînes maximales de P, $A\leq B$ si et seulement si tel que $a\leq b$. Pour cet ordre, les antichaînes maximales de P forment un treillis appelé treillis des antichaînes maximales de P, noté AM(P), introduit par R.P. Dilworth, en 1960. L'o rdre strict (D,<), inclus dans le précédent ordre AM(P), est ainsi défini : A,B deux antichaînes maximales de P, A< B si et seulement si tel que a< b. On note cet ordre D(P). Par rapport à est un ordre inclus où l'on ne tolère plus que deux antichaînes maximales ayant une intersection non vide soient comparables. Il a été démontré dans [1] qu'il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne $(D^i(P)$ étant la $i^{\text{ème}}$ itération de D(P)), et que $i\leq 2d(P)-1$, où d(P) est la longueur de la plus longue chaîne de P.

On note par cdev(P), et on lit « chaîne – déviation » de P, le plus petit entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne ; soit lest une chaîne $\}$. On pose $Min(P) = \{x \in P/\Pr ed(x) = \emptyset\}$, où $\Pr ed(x)$ désigne l'ensemble des prédécesseurs de (x), n'incluant pas x. Soit l'application rang, notée rg, de P dans l'ensemble des entiers naturels, définie par :

$$x \in P, rg(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in Min(P) \\ \max\{rg(y)/y \in Pr \, ed(x)\} + 1 & si \quad x \notin Min(P) \end{cases}$$

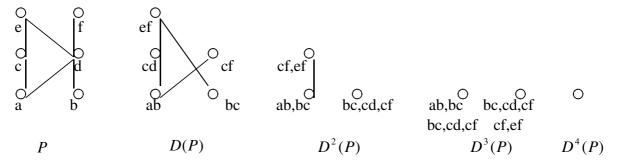
Appelons N_k , l'ensemble des éléments de P, de rang k. N_k est le niveau k de P. Si A est une antichaîne maximale de P, on appelle inclinaison de A, la quantité

$$I(A) = \max_{x,y \in A} \{rg(y) - rg(x)\}$$
. L'inclinaison de P est, A antichaîne maximale de P .

Etude de D(P)

Il existe un entier naturel i tel que $D^i(P)$ est une chaîne et que $i \le 2d(P) - 1$, donc l. Nous déterminons cdev(P) pour quelques classes d'ordres et nous utilisons I(P) pour approcher le paramètre dans le cas d'un o rdre quelconque.

Pour commencer, voyons sur un exemple, comment se forme la suite |, avec i = cdev(P).



Ici, cdev(P) = 4. $D^4(P)$ est une chaîne réduite à un seul élément.

Proposition 1: Pour tout ordre $P = (X, \leq)$, non connexe, $cdev(P) \leq 3$.

Tout d'abord, notons le fait 1 suivant :

Soit P un ordre et soit $(C_i)_{i \in I}$, la famille de ses composantes connexes.

Alors, $\forall A \in AM(P)$ et $\forall i \in I$, on a $A \cap C_i \neq \emptyset$.

Preuve : Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que |. Pour tout | est une antichaîne. Or, A est maximale.

Preuve de la Proposition 1 : Soit P un ordre non connexe et soit $(C_i)_{i \in I}$, la famille de ses composantes connexes. Notons que $|I| \ge 2$ et qu'ainsi, il existe $A \in AM(P)$ tel que $Min_P(C_1) \cup Max_P(C_2) \subseteq A$. Montrons, maintenant, que $\forall B \in AM(P)$, on a A et B qui sont incomparables dans D(P). En effet, d'après le fait 1, il existe $b_1 \in B \cap C_1$ et $b_2 \in B \cap C_2$.

Comme il existe | tel que $c_1 \leq_P b_1$ et comme il existe | tel que $b_2 \leq_P c_2$, l'on obtient, respectivement, que B n'est pas strictement inférieure à A, dans D(P), et A n'est pas strictement inférieure à B, dans D(P). Ainsi, A est un élément isolé de D(P), et il est donc présent dans toute antichaîne maximale de D(P). Ceci implique que D(D(P)) est une antichaîne, donc que | ; ce qui achève la preuve.

On appelle hauteur d'un ordre P, la quantité l. Les ordres de hauteur 1 sont les ordres bipartis. Un ordre faible (weak order) est un ordre obtenu par composition séries d'antichaînes.

Proposition 2 : Pour tout ordre faible P, on a cdev(P) = 1.

Preuve : Les seules antichaînes de l'or dre P sont ses niveaux. A tout niveau de P correspond un élément de D(P) et inversement . Les sommets de D(P) forment un ordre total. D(P) est donc, une chaîne.

Proposition 3 : Pour tout ordre connexe P, de hauteur 1, et qui ne soit pas un ordre faible, on a cdev(P) = 3.

Preuve: Soient N_1 et N_2 , les niveaux de P. Comme P n'est pas un ordre faible, il existe $x \in N_1$ et $y \in N_2$ tels que x et y appartiennent à la même antichaîne maximale A de P. A est un élément de D(P), comparable à aucun autre dans D(P). Comme P est connexe, N_1 et N_2 sont deux antichaînes maximales de P, donc deux éléments comparables dans D(P); D(P) ne peut donc être une antichaîne. L'élément A de D(P) appartiendra à toute antichaîne maximale de D(P), donc à tout élément de $D^2(P)$. $D^2(P)$ est, alors, une antichaîne maximale ; ce qui implique que $D^3(P)$ est une chaîne.

Corollaire : Si P est un ensemble ordonné, représenté par un graphe qui est un arbre, $cdev(P) \le 3$.

Tout arbre est un graphe biparti. En effet, on peut toujours colorier les sommets de P avec deux couleurs différentes de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

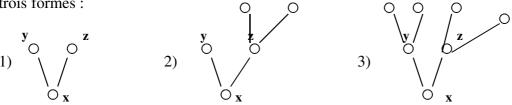
Soient \mid , les niveaux d'un ordre P, tels que (N_1, N_2) soit un biparti complet du graphe représentant P. On considère P', l'or dre P diminué de N_1 .

Lemme:

En effet, l'antichaîne maximale N_1 est un élément minimal dans I, où i = cdev(P). N_1 et N_2 sont comparables dans I; en particulier dans $D^i(P)$.

Proposition 4: Soit P, un ensemble ordonné, représenté par un graphe sans cycle, ayant k niveaux |, avec $|N_1| = 1$. Alors, $cdev(P) \le 3$.

Preuve : Soit $N_1 = \{x\}$. x est comparable à tous les éléments de P . $\left(N_1, N_2\right)$ forme, donc, un biparti complet du graphe représentant P. Posons $P' = P - N_1$. Pour un tel ordre, il existe trois formes:



Dans 1), P' est une antichaîne maximale, donc D(P) est une chaîne ; . Dans 2), P' est un ordre non connexe, avec un élément isolé Y. Tout élément de D(P)contient y. D(P) est donc, une antichaîne maximale; $D^2(P)$ est une chaîne. Ensuite, l. Dans le cas 3), P' est un ordre non connexe. D'ap rès la Proposition 1, l.

Théorème : Pour tout ordre partiel P, différent d'un ordre total, $cdev(P) \le 2d(P) - 2I(P) + 1$.

Pour la démonstration de ce théorème, utilisons le lemme suivant :

Lemme: Pour tout ensemble partiellement ordonné différent d'un o rdre total, d'inclinaison I(P),

Preuve : Soit I(P), l'in clinaison de l'ordre P, obtenue pour deux éléments x et y d'un e antichaîne maximale de P, tels que $x \in N_i$ et $y \in N_k$, où N_i et N_k sont deux niveaux de P, avec $i \ k$. I(P) = k - i. Ceci implique qu'il existe une suite d'éléments de P, |, tels que |, où | x | est incomparable à | x | car, sinon, | x | serait comparable à | x | . Comme les éléments | a | ne sont pas seuls dans les niveaux , il existe des éléments b_i, b_{i+1}, \dots, b_k tels que . Jusqu'au niveau N_k , on sait que $a_j < b_{j+1}$, $j=i,i+1,\cdots,k-1$ et que b_j est incomparable à $\mathcal Y$, pour

Dans D(P), jusqu'au niveau N_k , les antichaînes et $x = b_i$,

 $b_{i+1}a_{j}$ $(j = i+1, i+2,...,k),...,b_{k-1}a_{j}$ $(j = k-1,k),b_{k}a_{k}$ sont telles que $b_{i}a_{k}$ sont incomparables à $b_i a_i$ (j = i, i + 1, ..., k; t = i, i + 1, ..., k), ou bien xy est incomparable à $b_i a_i$. Comme les éléments d'un même niveau sont incomparables, on aura :

Dans $D^2(P)$, xy est incomparable aux niveaux, de D(P). Dans $D^2(P)$, $xy \cup N_i, xy \cup N_{i+1}, ..., xy \cup N_k$ sont des antichaînes. Il y aura alors, dans $D^2(P)$, (k-i) niveaux de moins que dans D(P). Comme k-i=I(P), on aura $d(D^2(P)) \le d(D(P)) - I(P) \le d(P) - I(P)$ (d'a près le corollaire 2.5, dans [1]).

Preuve du théorème : Considérons les deux cas suivants :

- 1) $D^2(P)$ est un ordre total : Dans ce cas, | et cdev(P) = 2 ; |. $D^2(P)$ étant un ordre, on peut lui appliquer le résultat de [1] et écrire $cdev(D^2(P)) \le 2d(D^2(P)) 1$. D'après le lemme précèdent, $d(D^2(P)) \le d(D(P)) I(P)$. Le corollaire 2.5, dans [1], nous permet d'écrire $d(D^2(P)) \le d(D(P)) I(P) \le d(P) I(P)$. On aura, alors : $cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 1 \le 2d(D^2(P)) 1 + 1 \le 2[d(P) I(P)] < 2d(P) 2I(P) + 1$.
- 2) $D^2(P)$ n'est pas un ordre total : Dans ce cas, l. Pour les mêmes raisons utilisées dans 1), on peut écrire $cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 2 \le 2d(D^2(P)) 1 + 2 \le 2[d(P) I(P)] + 1 = 2d(P) 2I(P) + 1$.

Discussion autour des deux bornes : Pour un ensemble ordonné P donné, considérons les deux bornes de cdev(P); soient la borne |, utilisée dans [1], et la borne |, que nous proposons. $b_1 \ge b_2 \implies I(P) \ge 1$. Nous pouvons dire que pour tout ordre partiel P, b_2 est meilleure que b_1 . Ceci montre aussi que, pour un ordre total, b_1 est meilleure que b_2 .

Bibliographie:

[1] T.Y. Kong and P. Ribenboim, Channing of partially ordered sets, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 533-537, 1994.