

## Suite d'ensembles partiellement ordonnés

Bachir Sadi

► **To cite this version:**

Bachir Sadi. Suite d'ensembles partiellement ordonnés. Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, INRIA, 2006, 4, pp.66-71. hal-01262047

**HAL Id: hal-01262047**

**<https://hal.inria.fr/hal-01262047>**

Submitted on 26 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Suite d'ensembles partiellement ordonnés

Bachir Sadi

Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Faculté des sciences,  
Département de Mathématiques  
[Sadibach@yahoo.fr](mailto:Sadibach@yahoo.fr)

**Résumé :** Ce travail porte sur le développement d'un ordre  $D(P)$  sur les antichaînes maximales d'un ordre donné. L'ordre développé  $D(P)$  est inclus dans le Treillis des antichaînes maximales  $AM(P)$ , introduit par R.P. Dilworth, en 1960. Dans [1], T.Y. Kong et P. Ribenboim ont montré qu'il existe un entier naturel  $i$  tel que  $D^i(P)$  est une chaîne, où  $\lfloor, i$  fois. On note  $cdev(P)$  le plus petit  $i$  tel que  $D^i(P)$  est une chaîne. Nous trouvons  $cdev(P)$  pour quelques classes particulières d'ordres et nous faisons une approche de ce paramètre dans le cas d'un ordre quelconque.

**Mots- clés :** Antichaîne maximale, ordre, ordre partiel.

**Abstract :** This work is to study an order  $D(P)$  on maximal antichains of a given order.  $D(P)$  is an order included in the order which defines the Lattice of maximal antichains  $AM(P)$ , introduced by R.P. Dilworth, in 1960. In [1], T.Y. Kong and P. Ribenboim have proved that there exists an integer  $i$  such that  $D^i(P)$  is a chain, where  $\lfloor, i$  times. We find the smallest  $i$ , noted  $cdev(P)$  such that  $D^i(P)$  is a chain for some particular classes of orders and we approximate this parameter in the general case of order.

**Keywords :** Maximal antichain, order, partial order.

## Introduction – Définitions

Un ensemble ordonné est un couple  $(X, \leq_p)$ , où  $X$  est un ensemble et «  $\leq$  », un ordre sur  $X$ , c'est-à-dire, une relation binaire définie sur les éléments de  $X$ , qui est réflexive, antisymétrique et transitive. On note  $P = (X, \leq_p)$ , l'ensemble ordonné. Il est dit aussi ensemble ordonné  $P$ , ou ordre  $P$ . On appelle *chaîne* de  $P$ , un ensemble d'éléments de  $X$  comparables deux à deux. La *longueur* d'une chaîne est le nombre de ses éléments. Une *antichaîne* de  $P$  est constituée d'éléments de  $X$ , non comparables deux à deux. Une chaîne (resp. antichaîne) de  $P$  est maximale si elle n'est incluse dans aucune autre chaîne (resp. antichaîne) de  $P$ .

Soit  $P = (X, \leq)$ , un ensemble partiellement ordonné. On considère l'ordre ainsi défini sur les antichaînes maximales de  $P$ :  $A, B$  deux antichaînes maximales de  $P$ ,  $A \leq B$  si et seulement si tel que  $a \leq b$ . Pour cet ordre, les antichaînes maximales de  $P$  forment un treillis appelé *treillis des antichaînes maximales* de  $P$ , noté  $AM(P)$ , introduit par R.P. Dilworth, en 1960. L'ordre strict  $(D, <)$ , inclus dans le précédent ordre  $AM(P)$ , est ainsi défini:  $A, B$  deux antichaînes maximales de  $P$ ,  $A < B$  si et seulement si tel que  $a < b$ . On note cet ordre  $D(P)$ . Par rapport à  $D$  est un ordre inclus où l'on ne tolère plus que deux antichaînes maximales ayant une intersection non vide soient comparables. Il a été démontré dans [1] qu'il existe un entier naturel  $i$  tel que  $D^i(P)$  est une chaîne ( $D^i(P)$  étant la  $i^{\text{ème}}$  itération de  $D(P)$ ), et que  $i \leq 2d(P) - 1$ , où  $d(P)$  est la longueur de la plus longue chaîne de  $P$ .

On note par  $cdev(P)$ , et on lit « chaîne – déviation » de  $P$ , le plus petit entier naturel  $i$  tel que  $D^i(P)$  est une chaîne; soit  $\{ \text{chaîne} \}$ . On pose  $Min(P) = \{x \in P / Pred(x) = \emptyset\}$ , où  $Pred(x)$  désigne l'ensemble des prédécesseurs de  $(x)$ , n'incluant pas  $x$ . Soit l'application rang, notée  $rg$ , de  $P$  dans l'ensemble des entiers naturels, définie par :

$$x \in P, rg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Min(P) \\ \max\{rg(y) / y \in Pred(x)\} + 1 & \text{si } x \notin Min(P) \end{cases}$$

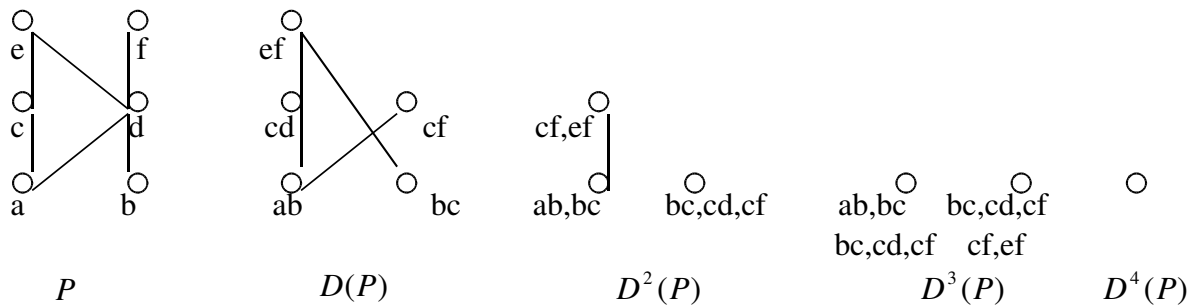
Appelons  $N_k$ , l'ensemble des éléments de  $P$ , de rang  $k$ .  $N_k$  est le niveau  $k$  de  $P$ . Si  $A$  est une antichaîne maximale de  $P$ , on appelle *inclinaison* de  $A$ , la quantité

$$I(A) = \max_{x, y \in A} \{rg(y) - rg(x)\}. \text{ L'inclinaison de } P \text{ est } \{, A \text{ antichaîne maximale de } P.$$

**Etude de  $D(P)$**

Il existe un entier naturel  $i$  tel que  $D^i(P)$  est une chaîne et que  $i \leq 2d(P) - 1$ , donc  $\downarrow$ . Nous déterminons  $cdev(P)$  pour quelques classes d'ordres et nous utilisons  $I(P)$  pour approcher le paramètre dans le cas d'un ordre quelconque.

Pour commencer, voyons sur un exemple, comment se forme la suite  $\downarrow$ , avec  $i = cdev(P)$ .



Ici,  $cdev(P) = 4$ .  $D^4(P)$  est une chaîne réduite à un seul élément.

**Proposition 1:** Pour tout ordre  $P = (X, \leq)$ , non connexe,  $cdev(P) \leq 3$ .

Tout d'abord, notons le fait 1 suivant :

Soit  $P$  un ordre et soit  $(C_i)_{i \in I}$ , la famille de ses composantes connexes.

Alors,  $\forall A \in AM(P)$  et  $\forall i \in I$ , on a  $A \cap C_i \neq \emptyset$ .

**Preuve :** Supposons qu'il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\downarrow$ . Pour tout  $\downarrow$  est une antichaîne. Or,  $A$  est maximale.

**Preuve de la Proposition 1 :** Soit  $P$  un ordre non connexe et soit  $(C_i)_{i \in I}$ , la famille de ses composantes connexes. Notons que  $|I| \geq 2$  et qu'ainsi, il existe  $A \in AM(P)$  tel que  $Min_p(C_1) \cup Max_p(C_2) \subseteq A$ . Montrons, maintenant, que  $\forall B \in AM(P)$ , on a  $A$  et  $B$  qui sont incomparables dans  $D(P)$ . En effet, d'après le fait 1, il existe  $b_1 \in B \cap C_1$  et  $b_2 \in B \cap C_2$ .

Comme il existe  $\downarrow$  tel que  $c_1 \leq_P b_1$  et comme il existe  $\downarrow$  tel que  $b_2 \leq_P c_2$ , l'on obtient, respectivement, que  $B$  n'est pas strictement inférieure à  $A$ , dans  $D(P)$ , et  $A$  n'est pas strictement inférieure à  $B$ , dans  $D(P)$ . Ainsi,  $A$  est un élément isolé de  $D(P)$ , et il est donc présent dans toute antichaîne maximale de  $D(P)$ . Ceci implique que  $D(D(P))$  est une antichaîne, donc que  $\downarrow$ ; ce qui achève la preuve.

On appelle *hauteur* d'un ordre  $P$ , la quantité  $\downarrow$ . Les ordres de hauteur 1 sont les ordres bipartis. Un ordre faible (weak order) est un ordre obtenu par composition séries d'antichaînes.

**Proposition 2 :** Pour tout ordre faible  $P$ , on a  $cdev(P) = 1$ .

**Preuve :** Les seules antichaînes de l'ordre  $P$  sont ses niveaux. A tout niveau de  $P$  correspond un élément de  $D(P)$  et inversement. Les sommets de  $D(P)$  forment un ordre total.  $D(P)$  est donc, une chaîne.

**Proposition 3 :** Pour tout ordre connexe  $P$ , de hauteur 1, et qui ne soit pas un ordre faible, on a  $cdev(P) = 3$ .

**Preuve :** Soient  $N_1$  et  $N_2$ , les niveaux de  $P$ . Comme  $P$  n'est pas un ordre faible, il existe  $x \in N_1$  et  $y \in N_2$  tels que  $x$  et  $y$  appartiennent à la même antichaîne maximale  $A$  de  $P$ .  $A$  est un élément de  $D(P)$ , comparable à aucun autre dans  $D(P)$ . Comme  $P$  est connexe,  $N_1$  et  $N_2$  sont deux antichaînes maximales de  $P$ , donc deux éléments comparables dans  $D(P)$ ;  $D(P)$  ne peut donc être une antichaîne. L'élément  $A$  de  $D(P)$  appartiendra à toute antichaîne maximale de  $D(P)$ , donc à tout élément de  $D^2(P)$ .  $D^2(P)$  est, alors, une antichaîne maximale; ce qui implique que  $D^3(P)$  est une chaîne.

**Corollaire :** Si  $P$  est un ensemble ordonné, représenté par un graphe qui est un arbre,  $cdev(P) \leq 3$ .

Tout arbre est un graphe biparti. En effet, on peut toujours colorier les sommets de  $P$  avec deux couleurs différentes de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

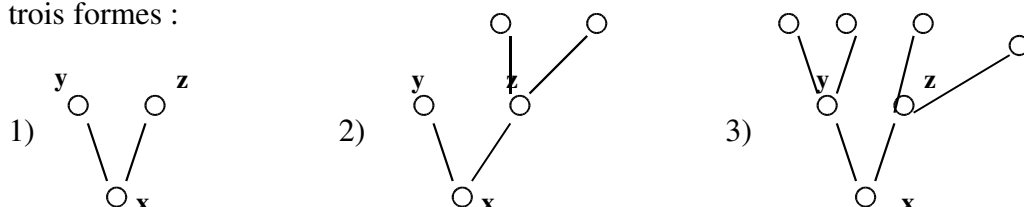
Soient  $\downarrow$ , les niveaux d'un ordre  $P$ , tels que  $(N_1, N_2)$  soit un biparti complet du graphe représentant  $P$ . On considère  $P'$ , l'ordre  $P$  diminué de  $N_1$ .

**Lemme :**  $\downarrow$ .

En effet, l'antichaîne maximale  $N_1$  est un élément minimal dans  $\downarrow$ , où  $i = cdev(P)$ .  $N_1$  et  $N_2$  sont comparables dans  $\downarrow$ ; en particulier dans  $D^i(P)$ .

**Proposition 4:** Soit  $P$ , un ensemble ordonné, représenté par un graphe sans cycle, ayant  $k$  niveaux  $\mathbb{I}$ , avec  $|N_1| = 1$ . Alors,  $cdev(P) \leq 3$ .

**Preuve :** Soit  $N_1 = \{x\}$ .  $x$  est comparable à tous les éléments de  $P$ .  $(N_1, N_2)$  forme, donc, un biparti complet du graphe représentant  $P$ . Posons  $P' = P - N_1$ . Pour un tel ordre, il existe trois formes :



Dans 1),  $P'$  est une antichaîne maximale, donc  $D(P)$  est une chaîne ;  $\downarrow$

Dans 2),  $P'$  est un ordre non connexe, avec un élément isolé  $y$ . Tout élément de  $D(P)$  contient  $y$ .  $D(P)$  est donc, une antichaîne maximale ;  $D^2(P)$  est une chaîne. Ensuite,  $\downarrow$

Dans le cas 3),  $P'$  est un ordre non connexe. D'après la Proposition 1,  $\downarrow$

**Théorème :** Pour tout ordre partiel  $P$ , différent d'un ordre total,  $cdev(P) \leq 2d(P) - 2I(P) + 1$ .

Pour la démonstration de ce théorème, utilisons le lemme suivant :

**Lemme :** Pour tout ensemble partiellement ordonné différent d'un ordre total, d'inclinaison  $I(P)$ ,  $\downarrow$

**Preuve :** Soit  $I(P)$ , l'inclinaison de l'ordre  $P$ , obtenue pour deux éléments  $x$  et  $y$  d'une antichaîne maximale de  $P$ , tels que  $x \in N_i$  et  $y \in N_k$ , où  $N_i$  et  $N_k$  sont deux niveaux de  $P$ , avec  $i < k$ .  $I(P) = k - i$ . Ceci implique qu'il existe une suite d'éléments de  $P$ ,  $\mathbb{I}$ , tels que  $\downarrow$ , où  $\downarrow$ .  $x$  est incomparable à  $\downarrow$  car, sinon,  $x$  serait comparable à  $y$ . Comme les éléments  $a_j$  ne sont pas seuls dans les niveaux  $\mathbb{I}$ , il existe des éléments  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_k$  tels que  $\downarrow$ . Jusqu'au niveau  $N_k$ , on sait que  $a_j < b_{j+1}, j = i, i+1, \dots, k-1$  et que  $b_j$  est incomparable à  $y$ , pour  $\downarrow$ .

Dans  $D(P)$ , jusqu'au niveau  $N_k$ , les antichaînes  $\downarrow$  et  $x = b_i$ ,

$b_{i+1}a_j (j = i+1, i+2, \dots, k), \dots, b_{k-1}a_j (j = k-1, k), b_k a_k$  sont telles que  $b_i a_k$  sont incomparables à  $b_j a_t (j = i, i+1, \dots, k; t = i, i+1, \dots, k)$ , ou bien  $xy$  est incomparable à  $b_j a_t$ . Comme les éléments d'un même niveau sont incomparables, on aura :

Dans  $D^2(P)$ ,  $xy$  est incomparable aux niveaux  $\mathbb{I}$ , de  $D(P)$ . Dans  $D^2(P)$ ,

$xy \cup N_j, xy \cup N_{i+1}, \dots, xy \cup N_k$  sont des antichaînes. Il y aura alors, dans  $D^2(P)$ ,  $(k - i)$

niveaux de moins que dans  $D(P)$ . Comme  $k - i = I(P)$ , on aura  $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P) \leq d(P) - I(P)$  (d'après le corollaire 2.5, dans [1]).

**Preuve du théorème :** Considérons les deux cas suivants :

1)  $D^2(P)$  est un ordre total : Dans ce cas,  $\downarrow$  et  $cdev(P) = 2$  ;  $\downarrow$ .  $D^2(P)$  étant un ordre, on peut lui appliquer le résultat de [1] et écrire  $cdev(D^2(P)) \leq 2d(D^2(P)) - 1$ . D'après le lemme précédent,  $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P)$ . Le corollaire 2.5, dans [1], nous permet d'écrire  $d(D^2(P)) \leq d(D(P)) - I(P) \leq d(P) - I(P)$ . On aura, alors :

$$cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 1 \leq 2d(D^2(P)) - 1 + 1 \leq 2[d(P) - I(P)] < 2d(P) - 2I(P) + 1.$$

2)  $D^2(P)$  n'est pas un ordre total : Dans ce cas,  $\downarrow$ . Pour les mêmes raisons utilisées dans 1), on peut écrire

$$cdev(P) = cdev(D^2(P)) + 2 \leq 2d(D^2(P)) - 1 + 2 \leq 2[d(P) - I(P)] + 1 = 2d(P) - 2I(P) + 1.$$

**Discussion autour des deux bornes :** Pour un ensemble ordonné  $P$  donné, considérons les deux bornes de  $cdev(P)$  ; soient la borne  $\downarrow$ , utilisée dans [1], et la borne  $\downarrow$ , que nous proposons.  $b_1 \geq b_2 \Rightarrow I(P) \geq 1$ . Nous pouvons dire que pour tout ordre partiel  $P$ ,  $b_2$  est meilleure que  $b_1$ . Ceci montre aussi que, pour un ordre total,  $b_1$  est meilleure que  $b_2$ .

### Bibliographie :

- [1] T.Y. Kong and P. Ribenboim, Channing of partially ordered sets, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 533-537, 1994.