

Problème de contrôle optimal frontière pour l'équation de la chaleur : Approche variationnelle et pénalisation

H. Metoui

▶ **To cite this version:**

H. Metoui. Problème de contrôle optimal frontière pour l'équation de la chaleur : Approche variationnelle et pénalisation. Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, 2006, Volume 5, Special Issue TAM TAM'05, november 2006, pp.272-288. 10.46298/arima.1868 . hal-01263432

HAL Id: hal-01263432
https://inria.hal.science/hal-01263432

Submitted on 27 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problème de contrôle optimal frontière pour l'équation de la chaleur: Approche variationnelle et pénalisation.

H. Metoui *

* ENIT-LAMSIN & ISI-EL MANAR
B.P.37, 1002 Tunis-Belvédère, Tunisie (hajer.metoui@enit.rnu.tn).

RÉSUMÉ. Notre objectif est d'analyser un problème de contrôle frontière de l'équation de la chaleur définie avec une condition de Dirichlet dans L^2. Nous proposons une approche variationnelle adéquate au problème de contrôle frontière. Afin de prendre en compte la condition de Dirichlet, nous adoptons une procédure de pénalisation et nous étudions la convergence de la solution optimale pénalisée vers celle du problème initial. Un test numérique est discuté pour valider la convergence.

ABSTRACT. Our goal is to give a detailed analysis of an optimal control problem where the control variable is a rather boundary condition of Dirichlet type in L^2. We focus on establishing an appropriate variationnel approach to the optimal problem. We use the penalization method for the boundary control problem and we study the convergence between the penalized and the non-penalized boundary control problem. A numerical result is reported on to validate the convergence.

MOTS-CLÉS : Contrôle optimal frontière, Condition de Dirichlet peu régulière, Méthode de pénalisation par Robin, approche variationnelle.

KEYWORDS : Boundary control, non smooth Dirichlet condition, Robin penalization, variational approach.

1. Introduction

Les problèmes de contrôle optimal occupent une place prépondérante dans plusieurs thèmes de la physique. En effet, agir sur une équation aux dérivées partielles à travers la minimisation d'une fonctionnelle coût afin d'amener l'état du système à un état prédéfini est un souci permanent dans l'ingénierie. Nous étudions dans ce travail, un problème de contrôle frontière qui consiste à minimiser une fonctionnelle critère, dépendant d'une observation terminale de la solution du problème de la chaleur avec une condition de Dirichlet peu régulière dans L^2(frontière). Ce problème a été étudié par I. Lasiecka et R. Triggiani [16] utilisant la théorie des semi-groupes et les opérateurs de Ricatti. L'apport de notre travail réside essentiellement en une analyse claire et simple développée dans la section 2, en se basant sur une approche variationnelle standard. Le but étant de généraliser cette approche à un problème de contrôle optimal régi par l'équation de Burgers [21]. Cette approche variationnelle nous semble mieux adaptée et surtout plus facile à généraliser au cas non linéaire. L'une des difficultés courantes lorsqu'on est confronté à des problèmes de contrôle optimal frontière où la variable contrôle est une donnée de Dirichlet, est la prise en compte efficace de celle-ci dans un code de calcul. La Transformer en une condition de type Robin par l'introduction d'un paramètre de pénalisation est un recours élégant pour surmonter la difficulté, en particulier pour des données au bord peu régulières. Cette technique de pénalisation à été introduite par Babuska [2]. Pour l'équation de Laplace, un résultat de convergence faible de la solution pénalisée vers la solution non pénalisée à été établi par ([2], [6] et [12]). Plus récemment, Costabel et Dauge [9] ont établi un développement asymptotique de la solution de l'équation de Laplace pénalisée lorsque la donnée de Dirichlet est peu régulière. D'autres travaux sur la technique de pénalisation ont été effectués comme par exemple ceux de [18] et [19] pour les équations hyperboliques et [4] pour les équations paraboliques linéaires. La méthode de pénalisation a été adoptée pour les problèmes de contrôle optimal frontière (de type Dirichlet) dans divers travaux comme ([13], [15], [1], [3],...) .

Ce travail traite les difficultés théoriques et numériques du problème de contrôle optimal de l'équation de la chaleur linéaire définie avec une condition de Dirichlet et de la méthode de pénalisation qui lui est associée. Le plan du papier s'articule comme suit : Dans la section 2, nous étudions le problème de contrôle Dirichlet en se basant sur le principe variationnel dû à [10] et nous proposons un cadre variationnel adéquat au système des conditions d'optimalité. Pour cela, nous écrivons en utilisant la méthode de l'adjoint les conditions d'optimalité dont dérive un système mixte que nous analysons grâce à la théorie de Brezzi-Fortin [8]. Dans la section 3, la condition de Dirichlet est pénalisée par une condition frontière Robin faisant intervenir un paramètre censé tendre vers zéro. Nous étudions le problème de contrôle pénalisé et nous écrivons un système mixte vérifié par l'état optimal et l'état adjoint à partir des conditions d'optimalité. Le coeur de cette section concerne l'étude de la convergence forte de la solution optimale pénalisée lorsque le paramètre de pénalisation tend vers zéro. Dans la section 4, un test numérique est illustré afin de conforter la méthode de pénalisation.

2. Problème de Contrôle Dirichlet

Nous nous proposons de minimiser une fonctionnelle objectif J qui dépend de l'état y solution de l'équation de la chaleur avec une condition aux limites de type Dirichlet peu régulière qui représente la variable contrôle ($u \in L^2(\Sigma)$). Nous considérons un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ à frontière régulière Γ, T est un réel > 0 et le problème de contrôle frontière suivant :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}) : \min_{u \in V_{ad}} J(y,u) \qquad [1]$$

où y est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0,T[, \\ y & = & u & \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[, \\ y(0,.) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array} \right. \qquad [2]$$

avec J la fonction objectif définie par :

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(T) - y_T)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} u^2 \qquad [3]$$

et y_T est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$. L'espace V_{ad} intervenant dans (1) est défini par :

$$V_{ad} = \left\{ u \in L^2(\Sigma),\ y_u(T) \in L^2(\Omega) \right\} \qquad [4]$$

et est muni de la norme :

$$\|u\|_{V_{ad}} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|y_u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où y_u est l'unique solution de (2) associée à la commande u sur Σ. Avant d'entamer l'étude du problème de contrôle (1), nous nous intéressons aux équations qui constituent les contraintes de notre problème. Nous adoptons une formulation variationnelle qui donne un sens mathématique précis à l'équation de la chaleur lorsque u est dans $L^2(\Sigma)$. La fonction y est dite solution faible de l'équation de la chaleur si elle est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } y \in L^2(Q) \text{ telle que :} \\ \displaystyle\int_Q y \left(-\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z \right) dxdt = -\int_{\Sigma} u \frac{\partial z}{\partial n}\, d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}_T(Q), \end{array} \right. \qquad [5]$$

où $\mathcal{H}_T(Q) = \left\{ z \in \mathcal{H}(Q) \quad \text{avec} \quad z(T) = 0 \right\}$ et $\mathcal{H}(Q) = L^2(]0,T[; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap H^1(]0,T[; L^2(\Omega))$.
En s'appuyant sur la référence [20], l'opérateur $(-\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta)$ réalise un isomorphisme de l'espace $\mathcal{H}_T(Q)$

dans $L^2(Q)$. Grâce au lemme de Lax-Milgram, nous établissons l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution $y \in L^2(Q)$ du problème (5). De plus, $y \in \mathcal{C}([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ et vérifie (cf. [20]) :

$$\|y\|_{\mathcal{C}([0,T];H^{-1}(\Omega))} + \|y\|_{L^2(Q)} \leq C\|u\|_{L^2(\Sigma)}, \qquad [6]$$

où C est une constante > 0.

La particularité du problème optimal $(\mathcal{P}_\mathcal{T})$ est étroitement liée à l'expression de la fonction objectif. Dans le cas qui nous intéresse l'expression de J fait apparaître la norme $L^2(\Omega)$ de $y(T)$. Cette régularité n'est pas forcément acquise pour u quelconque dans $L^2(\Sigma)$, puisque la solution y de l'équation (5) n'est pas nécessairement dans $C([0,T]; L^2(\Omega))$ (cf. [20]). Ceci nous amène à restreindre l'espace des contrôles admissibles à V_{ad} défini par (4).

2.1. Conditions d'Optimalité

Le problème de minimisation $(\mathcal{P}_\mathcal{T})$ est strictement convexe et coercif, il admet une unique solution $\bar{u} \in V_{ad}$, vérifiant :

$$\int_\Omega (\bar{y}(T) - y_T) y_v(T)\ dx + \int_\Sigma \bar{u} v\ d\Sigma = 0, \qquad \forall v \in V_{ad}, \qquad [7]$$

où $\bar{y}$ (resp. y_v) désigne la solution de (5) associée à $\bar{u}$ (resp. v).
En utilisant par exemple le lagrangien du problème $(\mathcal{P}_\mathcal{T})$, nous pouvons déduire le système d'optimalité associé à $(\mathcal{P}_\mathcal{T})$ vérifié par le couple état optimal et état adjoint $(\bar{y}, \bar{p})$ avec $\bar{u} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$. En éliminant $\bar{u}$, le couple $(\bar{y}, \bar{p})$ est solution du problème mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher} \quad (\bar{y}, \bar{p}) \in L^2(Q) \times W(Q) \quad \text{telle que} \\ (\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \dfrac{\partial z}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}(T), z(T))_{L^2(\Omega)} + (-\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z, \bar{y})_{L^2(Q)} = -(y_T, z(T))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in \mathcal{H}(Q) \\ (-\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \Delta \bar{p}, q)_{L^2(Q)} = 0, \quad \forall q \in L^2(Q), \end{array} \right. \qquad [8]$$

où, $W(Q) = \left\{ z \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(]0,T[; H^{-1}(\Omega));\ \dfrac{\partial z}{\partial n} \in L^2(\Sigma),\ \dfrac{\partial z}{\partial t} + \Delta z \in L^2(Q) \right\}$, muni de la norme suivante :

$$\|z\|^2_{W(Q)} = \|z(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial z}{\partial n}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|\frac{\partial z}{\partial t} + \Delta z\|^2_{L^2(Q)}.$$

Remarque 1 *Le problème mixte (8) peut être écrit formellement sous la forme :*

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \Delta \bar{p} & = & 0 & \textit{dans} \quad Q, \\ \bar{p} & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \bar{p}(T,.) & = & \bar{y}(T) - y_T & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial n} & = & \bar{u} & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} & = & 0, & \textit{dans} \quad Q, \\ \bar{y} & = & \bar{u} & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \bar{y}(0,.) & = & 0. & \textit{dans} \quad \Omega. \end{array} \qquad [9]$$

Notons qu'il n'est pas admis que le problème (8) admette une solution unique. Pour cela, nous proposons dans ce qui suit un nouveau cadre fonctionnel en modifiant l'espace des fonctions test dans le système (8). En effet, afin de garantir l'existence et l'unicité, l'espace $\mathcal{H}(Q)$ est remplacé par $W(Q)$. Nous construisons une solution du problème (8) que nous notons par $(\bar{y}, \bar{p})$. L'étude de ce nouveau problème est traitée au théorème 1. Une question naturelle qui se pose, est de savoir si le couple $(\bar{y}, \bar{p})$ ainsi construit nous conduit à retrouver le contrôle optimal $\bar{u}$ solution de (7), en choisissant $\bar{u} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$. La réponse à cette question reste à notre connaissance ouverte. Une réponse partielle sera donnée dans la suite (voir Lemme 1).

Théorème 1 *Pour $y_T \in L^2(\Omega)$, le problème mixte suivant : chercher $(\bar{y}, \bar{p}) \in L^2(Q) \times W(Q)$ tel que :*

$$\begin{array}{l} (\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \dfrac{\partial z}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}(T), z(T))_{L^2(\Omega)} + (\, -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z, \bar{y})_{L^2(Q)} = -(y_T, z(T))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in W(Q) \\ (-\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \Delta \bar{p}, q)_{L^2(Q)}, \quad \forall q \in L^2(Q) = 0, \end{array} \qquad [10]$$

admet une solution unique vérifiant :

$$\|\bar{y}\|_{L^2(Q)} + \|\bar{p}\|_{W(Q)} \leq C \|y_T\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante > 0.

Preuve: Nous notons par $a(.,.)$ et $b(.,.)$ les deux formes bilinéaires qui apparaissent dans le problème mixte (10) définies respectivement sur $W(Q) \times W(Q)$, $W(Q) \times L^2(Q)$,

$$\begin{array}{rcl} a(p,z) & = & (\dfrac{\partial p}{\partial n}, \dfrac{\partial z}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (p(T), z(T))_{L^2(\Omega)}, \\ b(p,q) & = & (-\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p, q)_{L^2(Q)}. \end{array}$$

Ainsi, le problème mixte s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{chercher } (\bar{y},\bar{p}) \in L^2(Q)\times W(Q), \text{ tel que :}\\ &a(\bar{p},z)+b(z,\bar{y}) = -(y_T, z(T))_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, z\in W(Q),\\ &b(\bar{p},q)=0, \qquad \forall\, q\in L^2(Q). \end{aligned} \tag{11}$$

En suivant la référence [8], nous avons besoin de vérifier la condition *inf-sup* suivante sur $b(.,.)$:

$$\sup_{z\in W(Q)} \frac{b(z,q)}{\|z\|_{W(Q)}} \geq C\|q\|_{L^2(Q)}. \tag{12}$$

L'espace $\mathcal{H}_T(Q)$ s'injecte dans $W(Q)$. Alors, on a :

$$\sup_{z\in W(Q)} \frac{b(z,q)}{\|z\|_{W(Q)}} \geq C \sup_{z\in W(Q)} \frac{b(z,q)}{\|z\|_{\mathcal{H}_T(Q)}} \tag{13}$$

L'inégalité (12) découle en choisissant $q = \dfrac{\partial z}{\partial t} + \Delta z$ dans l'expression de la forme bilinéaire $b(.,.)$ et du fait que l'opérateur : $\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta$ réalise un isomorphisme de l'espace $\mathcal{H}_T(Q)$ vers $L^2(Q)$. Ainsi, nous remarquons une équivalence entre les normes : $\|\dfrac{\partial \cdot}{\partial t} + \Delta \cdot\|_{L^2(Q)}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_T(Q)}$ sur l'espace $\mathcal{H}_T(Q)$.

$$\sup_{z\in W(Q)} \frac{b(z,q)}{\|z\|_{W(Q)}} \geq C\frac{\|q\|^2_{L^2(Q)}}{\|z\|_{\mathcal{H}_T(Q)}} \geq C\|q\|_{L^2(Q)}.$$

Par ailleurs, soit l'espace $W_0(Q)$ défini par :

$$W_0(Q) = \left\{ z\in W(Q), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + \Delta z = 0 \right\} \tag{14}$$

muni de la norme :

$$\|z\|^2_{W_0(Q)} = \|z(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial z}{\partial n}\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Nous remarquons que l'espace qui représente le noyau de la forme bilinéaire $b(.,.)$ est tel que :

$$Ker\ \mathrm{b}\ = W_0(Q).$$

Ainsi, la forme bilinéaire a est une forme définie positive sur $W_0(Q)$, celle ci représente le produit scalaire sur $W_0(Q)$.

De plus, le noyau de la forme transposée de b est tel que :

$$Ker\ \mathrm{b}^t = \Big\{ q \in L^2(Q), \qquad b(z,q) = 0 \qquad \forall z \in W(Q) \Big\} = \Big\{ 0 \Big\}.$$

En se basant sur la référence [8], le problème mixte admet une solution unique $(\bar{y}, \bar{p}) \in L^2(Q) \times W(Q)$. □

Nous donnons à présent un problème variationnel en $\bar{p}$, en éliminant $\bar{y}$ du système mixte (10), qui sera utile dans la suite pour la convergence de la méthode de pénalisation.

$$\begin{aligned} &\textit{chercher } \bar{p} \in W_0(Q) \text{tel que} \\ &(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \frac{\partial z}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}(T), z(T))_{L^2(\Omega)} = -(y_T, z(T))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in W_0(Q), \end{aligned} \tag{15}$$

où $W_0(Q)$ est l'espace donné par la relation (14).
Ce problème admet trivialement une solution unique par simple application du lemme de Lax-Milgram. De plus $\bar{p}$ vérifie :

$$\|\bar{p}\|_{W_0(Q)} \leq C \|y_T\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 2 *Notons qu'un résultat d'unicité de la solution $(\bar{y}, \bar{p})$ du problème (8) permetterait de retrouver le contrôle optimal $\bar{u} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ et par suite une équivalence entre le problème des conditions d'optimalité (7) et le système mixte (8). Toutefois, nous avons le résultat suivant :*

Lemme 1 *Soit $(\bar{y}, \bar{p})$ la solution du problème (10). Alors $\tilde{u} = \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ est dans V_{ad} et vérifie :*

$$\int_\Omega (\bar{y}(T) - y_T) y_v(T)\ dx + \int_\Sigma \tilde{u} v\ d\Sigma = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Sigma), \tag{16}$$

où $\mathcal{D}(\Sigma)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ à support compact.

Preuve: *Soit $\bar{y}$ solution du problème (10), alors elle est solution de :*

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} & = & 0 & \textit{dans } Q = \Omega \times]0, T[, \\ \bar{y} & = & \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial n} & \textit{sur } \Sigma, \\ \bar{y}(0, .) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \end{array}$$

et par suite pour tout $z \in \mathcal{H}(Q)$ vérifiant $-\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0$ dans Q, nous avons :

$$(\bar{y}(T), z(T))_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \frac{\partial z}{\partial n})_{L^2(\Sigma)}. \tag{17}$$

Par ailleurs de la formulation faible (15)*, nous obtenons :*

$$(\bar{y}(T), z(T))_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (y_T + \bar{p}(T))z(T), \qquad \forall z \in \mathcal{H}(Q) \cap W_0(Q).$$

Ainsi, grâce à l'isomorphisme que réalise l'application trace à l'instant final de l'espace $\mathcal{H}(Q) \cap W_0(Q)$ *à valeurs dans* $H_0^1(\Omega)$*, nous déduisons que :*

$$\bar{y}(T) = y_T + \bar{p}(T), \qquad \textit{dans} \quad L^2(\Omega),$$

ce qui prouve que $\tilde{u} \in V_{ad}$.
Il nous reste à montrer (16)*. Soit* $v \in \mathcal{D}(\Sigma)$ *et* y_v *la solution du problème :*

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y_v}{\partial t} - \Delta y_v & = & 0 & \textit{dans } Q = \Omega\times]0,T[, \\ y_v & = & v & \textit{sur } \Sigma, \\ y_v(0,.) & = & 0 & \textit{dans } \Omega. \end{array}$$

En multipliant la première équation du problème ci-dessus et en intégrant par parties, nous obtenons la relation (16)*.* □

3. Problème de Contrôle pénalisé (ou Robin)

La méthode de pénalisation que nous utilisons est plus adaptée à l'implémentation numérique de la condition de type Dirichlet lorsque nous utilisons la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de contrôle optimal frontière auquel nous nous intéressons. Cette technique de pénalisation consiste à remplacer la condition de Dirichlet par une condition limite de type Robin faisant intervenir un paramètre ε censé tendre vers zéro. Le problème de contrôle pénalisé que nous considérons est donné par :

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon,\mathcal{T}}) \begin{cases} \min\limits_{u\in L^2(\Sigma)} J(y_\varepsilon, u) & & & & \\ \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon & = & 0 & \text{dans} & Q = \Omega\times]0,T[, \\ \varepsilon\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial n} + y_\varepsilon & = & u & \text{sur} & \Sigma = \Gamma\times]0,T[, \\ y_\varepsilon(0,.) & = & 0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases} \qquad [18]$$

L'approche de pénalisation permet de régulariser la solution de l'équation d'état : Pour tout $u \in L^2(\Sigma)$, $y_\varepsilon \in L^2(]0,T[; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. Ainsi, en utilisant des outils classiques d'analyse convexe, nous montrons que le problème (18) admet une solution unique $\bar{u}_\varepsilon \in L^2(\Sigma)$. L'existence de solution pour le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\mathcal{T}})$ est donné dans le Théorème suivant. Nous introduisons les espaces $W_\varepsilon(Q)$ donné par : $W_\varepsilon(Q) = \{z_\varepsilon \in L^2(]0,T[; H^1(\Omega)) \cap H^1(]0,T[; H^{-1}(\Omega)),\ \varepsilon\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + z_\varepsilon = 0,\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + \Delta z_\varepsilon \in L^2(Q)\}$, muni de la norme :

$$\|z_\varepsilon\|^2_{W_\varepsilon(Q)} = \|z_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + \Delta z_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}.$$

et $W_{\varepsilon,0}(Q)$ tel que : $W_{\varepsilon,0}(Q) = \{z_\varepsilon \in W_\varepsilon(Q), \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + \Delta z_\varepsilon = 0\}$, muni de la norme suivante :

$$\|z_\varepsilon\|^2_{W_{\varepsilon,0}(Q)} = \|z_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n}\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Théorème 2 *Le système d'optimalité associé au problème* $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\mathcal{T}})$ *est donné par : chercher* $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon) \in L^2(Q) \times W_\varepsilon(Q)$ *tel que* $(q, z_\varepsilon) \in L^2(Q) \times W_\varepsilon(Q)$*, vérifiant :*

$$\begin{array}{l}(\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}, \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}_\varepsilon(T), z_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)} + (-\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \Delta z_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon)_{L^2(Q)} = -(y_T, z_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)}, \\ (-\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \bar{p}_\varepsilon, q)_{L^2(Q)} = 0,\end{array} \quad [19]$$

il admet une solution unique $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$ *et le contrôle optimal est donné par :* $\bar{u}_\varepsilon = \dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$.

Le couple $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$ vérifie :

$$\|\bar{y}_\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \ \|\bar{p}_\varepsilon\|_{W_\varepsilon(Q)} \leq C_\varepsilon \|y_T\|_{L^2(\Omega)}, \quad [20]$$

où C_ε est une constante qui dépend de ε. De plus, nous avons :

$$\|\bar{p}_\varepsilon\|_{W_{\varepsilon,0}(Q)} \leq C\|y_T\|_{L^2(\Omega)}, \quad [21]$$

avec $C > 0$ est une constante indépendante de ε.

Preuve: L'existence, l'unicité et l'estimation (20) se fait d'une façon analogue à celle déjà adoptée pour le problème mixte (10) en se basant sur la référence [8]. De plus, soit $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$ solution de (19). Alors $\bar{p}_\varepsilon$ est l'unique solution de :

$$\begin{array}{l}\textit{chercher } \bar{p}_\varepsilon \in W_{\varepsilon,0}(Q) \textit{ tel que :} \\ (\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}, \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}_\varepsilon(T), z_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)} = -(y_T, z_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z_\varepsilon \in W_{\varepsilon,0}(Q)\end{array} \quad [22]$$

Par application du Lemme de Lax-Milgram, le problème (22) admet une solution unique $\bar{p}_\varepsilon \in W_{\varepsilon,0}(Q)$. Soit $z_\varepsilon = \bar{p}_\varepsilon$ dans la formulation (22), nous obtenons l'estimation (21). □

Enfin, nous montrons le résultat de convergence suivant :

Théorème 3 *Soient* $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$ *solution de* (19) *et* $(\bar{y}, \bar{p})$ *solution de* (10)*. Alors,* $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{p}_\varepsilon)$ *converge faiblement vers* $(\bar{y}, \bar{p})$ *dans* $L^2(Q) \times L^2(]0,T[; H^1(\Omega))$ *lorsque* ε *tend vers zéro.*

Preuve: La preuve de la convergence faible s'articule en trois étapes :
1-Convergence de l'état adjoint : Grâce au problème vérifié par l'état adjoint, nous montrons l'inégalité suivante :

$$\|\bar{p}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\|y_T\|_{L^2(\Omega)}. \qquad [23]$$

avec C désigne une constante indépendante de ε.
En effet, nous avons :

$$\begin{array}{rlll} -\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \bar{p}_\varepsilon & = 0, & \text{dans} & Q, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n} + \bar{p}_\varepsilon, & = 0, & \text{sur} & \Sigma, \\ \bar{p}_\varepsilon(T) & = \bar{y}_\varepsilon(T) - y_T, & \text{dans} & \Omega. \end{array} \qquad [24]$$

En intégrant en temps et en espace, nous obtenons :

$$\|\nabla \bar{p}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\bar{p}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{1}{2}\|\bar{p}_\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|\bar{p}_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\|\bar{p}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\|\bar{p}_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, l'inégalité (23) se déduit de (21). En faisant tendre ε vers zéro, nous avons :
$i)$ La relation (23) indique la convergence faible de $\bar{p}_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ vers une limite faible notée $\psi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.
$ii)$ L'application : $\bar{p}_\varepsilon \longmapsto \bar{p}_\varepsilon(T)$ est continue $W_\varepsilon(Q)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $\bar{p}_\varepsilon(T)$ converge faiblement vers $\psi(T)$ dans $L^2(\Omega)$.
$iii)$ L'estimation (21) montre que $\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$ est bornée dans $L^2(\Sigma)$ indépendamment de ε. Alors, $\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$ converge faiblement vers $\dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ dans $L^2(\Sigma)$.
$iv)$ Sachant que $\bar{p}_\varepsilon = -\varepsilon \dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$, sur Σ et que $\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$ est bornée indépendamment de ε, il s'ensuit que $\bar{p}_\varepsilon$ converge fortement vers zéro sur Σ quand ε tend vers zéro.
Ainsi, la limite faible ψ de $\bar{p}_\varepsilon$ satisfait le problème limite suivant :

$$\begin{array}{rll} -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi & = 0, & \text{dans} \quad Q, \\ \psi & = 0, & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \psi(T) & \in L^2(\Omega), & \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n} & \in L^2(\Sigma). & \end{array} \qquad [25]$$

2-*Convergence de l'état optimal* Soit $\bar{y}_\varepsilon$ la solution optimale du problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\mathcal{T}})$ vérifiant le problème de Robin suivant :

$$\begin{array}{rll} \dfrac{\partial \bar{y}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \bar{y}_\varepsilon &= 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \varepsilon \dfrac{\partial \bar{y}_\varepsilon}{\partial n} + \bar{y}_\varepsilon &= \dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}, & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \bar{y}_\varepsilon(0,.) &= 0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{array} \qquad [26]$$

En se basant sur la référence [4], $\bar{y}_\varepsilon$ vérifie la stabilité qui suit :

$$\|\bar{y}_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C \|\frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}\|_{L^2(\Sigma)},$$

avec C est une constante indépendante de ε.
En faisant tendre ε vers zéro, nous avons les assertions suivantes :
i)En se basant sur l'estimation (21), $\dfrac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}$ est une fonction dans $L^2(\Sigma)$ bornée indépendamment de ε, il existe une limite faible z de la suite $\bar{y}_\varepsilon$ tel que $z \in L^2(Q)$.
ii) La limite faible $z \in L^2(Q)$ est solution du problème suivant :

$$\begin{array}{rll} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= 0 & \text{dans} \quad Q, \\ z &= \dfrac{\partial \psi}{\partial n}, & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(0,.) &= 0, & \text{dans} \quad \Omega, \\ z(T) &= \psi(T) + y_T & \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \qquad [27]$$

En effet, en multipliant le problème (26) par une fonction test $z_\varepsilon \in \mathcal{H}(Q)$, tel que :

$$\begin{array}{rll} -\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \Delta z_\varepsilon &\in L^2(Q) & \text{dans} \quad Q, \\ \varepsilon \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + z_\varepsilon &= 0, & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z_\varepsilon(T,.) &\in H_0^1(\Omega). & \end{array} \qquad [28]$$

Nous obtenons la formulation faible suivante :

$$(\bar{y}_\varepsilon, -\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \Delta z_\varepsilon)_{L^2(Q)} + (\frac{\partial \bar{p}_\varepsilon}{\partial n}, \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\bar{p}_\varepsilon(T) + y_T, z_\varepsilon(T))_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Nous introduisons à présent une fonction auxiliaire $\tilde{z}$ satisfaisant le problème :

$$\begin{array}{rll} -\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial t} - \Delta \tilde{z} &= -\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \Delta z_\varepsilon & \text{dans} \quad Q, \\ \tilde{z} &= 0, & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \tilde{z}(T,.) &= z_\varepsilon(T,.) & \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \qquad [29]$$

En se basant sur la référence [4] (Théorème 5.1), nous avons la convergence forte de $\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n}$ vers $\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial n}$ dans $L^2(\Sigma)$ lorsque ε tend vers zéro. Ainsi, en passant à la limite nous obtenons le problème faible suivant :

$$\begin{array}{l}\text{Chercher } z \in L^2(Q) \text{ telle que} \\ (z, -\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial t} - \Delta \tilde{z})_{L^2(Q)} + (\dfrac{\partial \psi}{\partial n}, \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial n})_{L^2(\Sigma)} + (\psi(T) + y_T, \tilde{z}(T))_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad \forall \tilde{z} \quad \text{solution de (29).}\end{array} \quad [30]$$

L'identité (30) représente la formualtion faible du problème (27).

3-Convergence de la solution optimale. La limite faible $(z, \psi) \in L^2(Q) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$ vérifie en utilisant (25) et (30), le problème limite qui suit :

$$\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi &=& 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \psi &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \psi(T,.) &=& z(T) - y_T & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &=& 0 & \text{dans} \quad Q, \\ z &=& \dfrac{\partial \psi}{\partial n} & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(0,.) &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \quad [31]$$

d'après la résolution du système mixte modifié (10), il existe une solution unique $(z, \psi) \in L^2(Q) \times W(Q)$ du problème (31). Donc (z, ψ) n'est autre que la solution $(\bar{y}, \bar{p})$ du système mixte (10). Ainsi, s'achève la preuve. □

Lemme 2 *$\|\bar{p}_\varepsilon\|_{W_{\varepsilon,0}(Q)}$ converge fortement vers $\|\bar{p}\|_{W_0(Q)}$ lorsque le paramètre de pénalisation ε tend vers zéro.*

Preuve: En choisissant respectivement dans les deux formulations (15) et (22) ($z = p$ et $z_\varepsilon = p_\varepsilon$), on a :

$$\|\bar{p}_\varepsilon\|^2_{W_{\varepsilon,0}(Q)} - \|\bar{p}\|^2_{W_0} = -\int_\Omega y_T(\bar{p}_\varepsilon(T) - \bar{p}(T)).$$

Le résultat découle en injectant dans la relation ci-dessus la convergence faible de $\bar{p}_\varepsilon(T)$ vers $p(T)$ dans $L^2(\Omega)$ (voir Théorème (3)). □

Théorème 4 *Convergence du contrôle optimal pénalisé. On a :*

$$\bar{u}_\varepsilon \longrightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \qquad \textit{dans} \qquad L^2(\Sigma), \qquad \textit{lorsque} \quad \varepsilon \to 0.$$

avec, $\bar{u}_\varepsilon$ désigne le contrôle optimal pénalisé, solution du problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\mathcal{T}})$ donné par (18).

Preuve: Le résultat découle directement du Théorème 3 et de Lemme 2. □

4. Résultat Numérique

Nous illustrons dans cette section deux tests numériques concernant la convergence de la solution optimale pénalisée vers celle de Dirichlet, lorsque ε tend vers zéro. Nous considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u\in L^2(\Sigma)} \{J(y,u), y \text{ solution de (33)}\} \qquad [32]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 \text{ dans } Q, \quad y = u \text{ sur } \Sigma, \quad y(0) = y_0 \text{ dans } \Omega \qquad [33]$$

avec J est la fonctionnelle objectif donnée par (3) et $y_T \in L^2(\Omega)$.

Nous considérons la solution exacte du problème de contrôle donnée par :

$$\bar{y}(x_1,x_2,t) = 4\pi exp^{(x_1+x_2+2t)} + r^{\frac{2}{3}} sin\frac{2\theta}{3} \quad \text{et} \quad \bar{u}(x_1,x_2,t) = (\bar{y}(x_1,x_2,t))_{|\Sigma} \qquad [34]$$

sur le domaine $Q = \Omega\times]0,1[$ où $\Omega = [0,1]^2 \setminus [0,\frac{1}{2}]^2$. Les coordonnées (r,θ) désignent les coordonnées polaires. Le minimum de la fonctionnelle objective est atteint en zéro, lorsque $\bar{y}(T) = y_T$. Nous nous proposons de calculer une approximation de la solution optimale en utilisant la procédure de pénalisation. La solution optimale pénalisée $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)$ est calculée au moyen d'une discrétisation standard, utilisant le schéma d'Euler Implicite, pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis affines pour la discrétisation spatiale. La solution optimale approchée ainsi calculée est notée $(\bar{y}^{\Delta t}_{\varepsilon,h}, \bar{u}^{\Delta t}_{\varepsilon,h})$ où Δt et h désignent respectivement le pas de temps et le pas d'espace.

Le maillage est construit à partir d'une triangulation régulière du domaine Ω (voir figure 1).

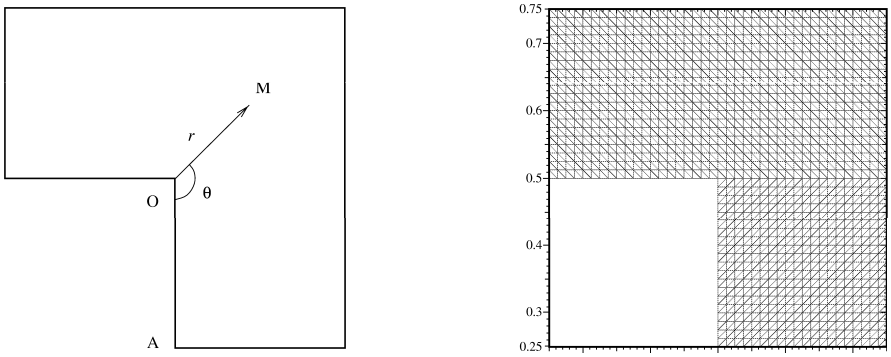


FIGURE 1– Domaine non convexe considéré Ω et le maillage.

Nous évaluons les normes $L^2(Q)$ et $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ pour l'état optimal et de la norme $L^2(\Sigma)$ pour le contrôle optimal.

$$\varepsilon \mapsto \frac{||\bar{y}^{\Delta t}_{\varepsilon,h} - \overline{y}||}{||\overline{y}||}, \qquad \varepsilon \mapsto \frac{||\bar{u}^{\Delta t}_{\varepsilon,h} - \overline{u}||}{||\overline{u}||} \qquad [35]$$

où $\Delta t = 0.01$ et $h = 0.0125$, nous illustrons dans une échelle logarithmique, les courbes d'erreurs relatives modélisant l'écart entre les solutions approchées associées au problème de contrôle Robin et les solutions excates Dirichlet, ceci respectivement sur l'état et le contrôle.

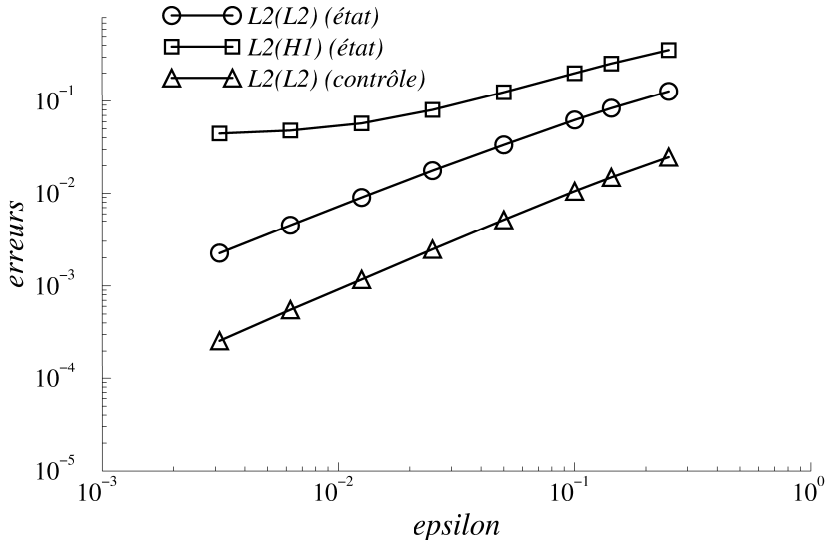


FIGURE 2–

La figure 2 montre la décroissance des erreurs à chaque fois que le paramètre de pénalisation ε décroit, ce qui conforte bien la convergence de la solution optimale pénalisée.

Nous donnons dans la suite un deuxième exemple avec cette fois-ci une fonctionnelle coût définie comme suit :

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_Q (y - y_d)^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_\Sigma (u - u_d)^2\, d\Sigma. \qquad [36]$$

où $y_d \in L^2(Q)$. Il s'agit de considérer le problème de contrôle Dirichlet (32) où J désigne à présent la fonction définie par (36).
Notons que pour cette fonction coût, nous avons pu établir un résultat de convergence forte de la solution optimale pénalisée vers celle du problème de Dirichlet en exhibant un taux de convergence en fonction du paramètre de pénalisation ε (voir Théorème 5).

Théorème 5 [21]
Soit $y_d \in L^2(Q)$, $(\bar{y}, \bar{u})$ (resp $(\bar{y}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)$) la solution optimale du problème de contrôle (32)-(33) et J est la fonction côut donnée par (36) (resp la solution optimale du problème de contrôle obtenu par pénalisation de (32)-(33)). Nous avons :

$$\|\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|y_d\|_{L^2(Q)}. \qquad [37]$$

De plus, une estimation similaire est donnée sur l'état optimal :

$$||\bar{y}_\varepsilon - \bar{y}||_{L^2(Q)} \leq C\varepsilon||y_d||_{L^2(Q)}. \qquad [38]$$

Nous souhaitons approcher par le procédé de pénalisation, la solution optimale analytique donné dans le premier test par la relation (34). Pour $y_d = \bar{y}$ et $u_d = y_{d|\Sigma}$, nous pouvons facilement vérifier que le minimum de J est atteint en (y_d, u_d) et vaut zéro. Notons que nous adoptons les notations et les méthodes numériques déja détaillées dans le cas précédent. Nous représentons les erreurs données par la relation (35).

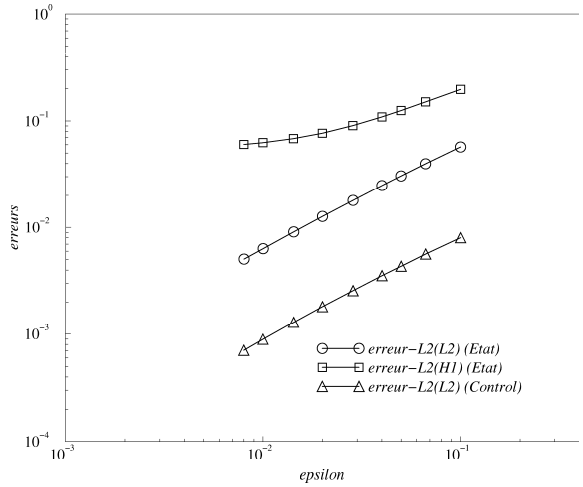


FIGURE 3–

Nous avons représenté sur la figure 3, en échelle logarithmique, les courbes d'évolution de ces erreurs en fonction de ε. Pour $\Delta t = 0.01$ et $h = 0.0125$, le calcul de la régression linéaire des différentes courbes conduit aux résultats attendus suivants : la pente de la courbe de convergence des normes $L^2(Q)$ sur l'état optimal et $L^2(\Sigma)$ sur le contrôle sont approximativement égales à $0.97(\approx 1)$ et $0.98(\approx 1)$ respectivement, signifiant que l'erreur tend vers zéro linéairement en ε. La pente de la courbe de convergence de la norme $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ sur l'état optimal, est évaluée à $0.59(\approx 2/3)$.

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons adopté une approche variationnelle adéquate au problème de contrôle optimal frontière considéré. L'objectif étant d'étendre cette approche au cas d'un problème de contrôle optimal frontière régi par une équation de type Burgers. Pour des raisons de prise en compte efficace de la condition

de Dirichlet peu régulière, nous avons considéré le problème pénalisé. Nous avons étudié la convergence de la solution optimale pénalisée vers celle de Dirichlet. Les premiers résultats numériques obtenus nous ont permis de valider le résulat de convergence du procédé de pénalisation.

Remerciements

Ce travail a bénéficié du soutien du Ministère de la Recherche Scientifique, de la Technologie et du Développement des Compétences (MRSTDC, Tunisie) dans le cadre du programme LAB-STI-02 et du de programme coopération avec les chercheurs tunisiens résidents à l'étranger. Je tiens à exprimer à mes directeurs de thèse F. Ben Belgacem (MIP, Toulouse), H. El Fekih (ENIT-LAMSIN) et J-P. Raymond (MIP-Toulouse) ma profonde gratitude. C'est grâce à leur conseils judicieux que j'ai pu mener à terme ce travail.

6. Bibliographie

[1] N. ARADA , H. EL FEKIH, J-P. RAYMOND, « Asymptotic analysis of some control problems », *Asymptot. Anal, 24, 343-366, 2000.*

[2] I. BABUSKA , « The finite element method with penalty », *Math. Comp, 27, p. 221-228, 1973.*

[3] F. BEN BELGACEM , H. EL FEKIH , H. METOUI , « Singular perturbation for Dirichlet boundary control of elliptic problems », *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, M2AN, 37 (2003) p. 833-850.*

[4] F. BEN BELGACEM , H. EL FEKIH, J.P. RAYMOND, « A penalized Robin approch for solving a parabolic equation with nonsmooth dirichlet boundary conditions », *Asymptotic analysis, 34 (2), 121-136, 2003.*

[5] J.F. BONNANS, J.C. GILBERT, C.LEMARÉCHAL, C. SAGASTISABAL« Optimisation numérique. Aspects théoriques et pratiques », *Springer, SMAI-Maths. Applied, 27, 1997.*

[6] A. BOSSAVIT, « Approximation régularisée d'un problème aux limites non homogène », *In Séminaire Lions, 1, (1968/1969), Analyse numérique, Exp.- 12, page 14. Secrétariat Math, Paris, 1969..*

[7] H. BREZIS, « Analyse fonctionnelle Théorie et applications », *Masson, 1983.*

[8] F. BREZZI , M. FORTIN , « Mixed and Hybrid Finite Element Methods », *Springer, Verlag, 1991 .*

[9] M. COSTABEL, M. DAUGE, « A singulary perturbed Mixed Boundary Value-Problem », *Commun. In partial differential equations, 21, 11, 1919-1949, 1996.*

[10] I. EKELAND, R.TEMAM, « Analyse convexe et problèmes variationnels », *Bordas, 1974.*

[11] A. V. FURSIKOV, « Optimal Control of Distributed systems. Theory and applications »,*American Mathematical Society, 187, 1999.*

[12] P. COLLI FRANZONI, « Approssimazione mediante il metodo de penalizzazione de problemi misti di Dirichlet-Neumann pe operatori lineari ellitici del secondo ordine. »*Bolletino U.M.I, 4(7) 229-250, 1973.*

[13] P. COLLI FRANZONI, « Approximation of optimal control problems of systems described by boundary value mixed problems of Dirichlet-Neumann type »*In 5th IFIP Conderence on Optimization Techniques, Lecture Notes in Computer Science* 3*, Springer, Berlin, 152-162, 1973*

[14] G. JI , M. CLYDE, « Optimal boundary control of the heat equation with target function at terminal time », *Applied Mathematics and Computation, 127, 334-345, 2002.*

[15] L.S. HOU, S.S. RAVINDRAN, « Numerical approximation of optimal flow control problems by a penalty method : error estimates and numerical results », *SIAM Control Optim, 20, 1795-1814, 1998.*

[16] I. LASIECKA , R. TRIGGIANI , « Dirichlet boundary control problem for parabolic equations with quadratic cost analyticity and Ricatti's feedback synthesis », *SIAM J. Math. Optim, 21 (1983) 41.*

[17] I. LASIECKA , R. TRIGGIANI , « The Regulator Problem for Parabolic Equations with Diruchlet Boundary Control », *SIAM J. Math. Optim, 16 (1987) 21.*

[18] I. LASIECKA , J. SOKOLOWSKI , « Regularity and strong convergence of a variational approximation to a nonhomogeneous Dirichlet hyperbolic boundary value problem », *SIAM J. Math. Anal, 19(3), 528-540, 1988.*

[19] I. LASIECKA , J. SOKOLOWSKI , « Semidiscrete approximations of hyperbolic boundary value problem with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions », *SIAM J. Math. Anal, 20, 1366-1387, 1989.*

[20] J.L. LIONS , E. MAGENES , « Problèmes aux limites non homogènes et application », *Springer, Vol 1, 1972.*

[21] H. METOUI , « Thèse de Doctorat », *ENIT, Tunis* (en préparation).