Stabilité Lp exponentielle d'un système d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion

Chen-Zhong Li, Abdoua Tchousso, Xiao-Dong Li, Gauthier Sallet

▶ **To cite this version:**

Chen-Zhong Li, Abdoua Tchousso, Xiao-Dong Li, Gauthier Sallet. Stabilité Lp exponentielle d'un système d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion. Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, 2008, Volume 9, 2007 Conference in Honor of Claude Lobry, 2008, pp.359-380. 10.46298/arima.1905 . hal-01277777

HAL Id: hal-01277777
https://inria.hal.science/hal-01277777

Submitted on 23 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2007 International Conference in Honor of Claude Lobry

Stabilité L^p exponentielle d'un système d'échangeurs thermiques avec diffusion et sans diffusion

Abdoua Tchousso[a] — Xiao-Dong Li[b] — Cheng-Zhong Xu[b,*] — Gauthier Sallet [c]

[a] Département de Mathématiques et Informatique
Université Abdou Moumouni de Niamey, BP 10662 Niamey - Niger
tchousso@yahoo.fr

[b] Université de Lyon, F-69622, Lyon, France - Université Lyon 1, Villeurbanne
CNRS, UMR5007, Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés
lix@lagep.cpe.fr — * Correspondind author : xu@lagep.univ-lyon1.fr

*** Laboratoire et Département de Mathématiques, CNRS, UMR 7122
Université de Metz, Bâtiment A, Île du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 01
sallet@loria.fr

ABSTRACT. In this paper we study exponential stability of a heat exchanger system with diffusion and without diffusion in the context of Banach spaces. The heat exchanger system is governed by hyperbolic partial differential equations (PDE) and parabolic PDEs, respectively, according to the diffusion impact ignored or not in the heat exchange. The exponential stability of the model with diffusion in the Banach space $(C[0,1])^4$ is deduced by establishing the exponential L^p stability of the considered system, and using the sectorial operator theory. The exponential decay rate of stability is also computed for the model with diffusion. Using the perturbation theory, we establish the exponential stability of the model without diffusion in the Banach space $(C[0,1])^4$ with the uniform topology. However the exponential decay rate of stability without diffusion is not exactly computed, since its associated semigroup is non analytic.

Indeed the purpose of our paper is to investigate the exponential stability of a heat exchanger system with diffusion and without diffusion in the real Banach space $X_\infty = (C[0,1])^4$ with the uniform norm. The exponential stability of these two models in the Hilbert space $X_2 = (L^2(0,1))^4$ has been proved in [31] by using Lyapunov's direct method. The first step consists to study the stability problem in the real Banach space $X_p = (L^p(0,1))^4$ equipped with the usual L^p norm, $p > 1$. By passing to the limit $(p \to \infty)$ we can extend some results of exponential stability from $X_p = (L^p(0,1))^4$ to the space $X_\infty = (C[0,1])^4$. In particular the dissipativity of the system in all the X_p spaces implies its dissipativity in X_∞ (see Lemma 3).

The section 1 is dedicated to recall the heat exchanger models. The process with diffusion is governed by a system of parabolic PDEs, and the process without diffusion is described by degenerate hyperbolic PDEs of first order. The section 2 deals with exponential stability of the parabolic system in the Lebesgue spaces $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$. Certain results can be extended to the X_∞ space. Unfortunately this study doesn't allow us to deduce the expected stability of the system in X_∞. In the section 3, the sectorial operator theory is made use of to get exponential stability results on the model with diffusion in X_p. Specifically the theory enables us to determine the exponential decay rate in $(C[0,1])^4$ by computing the spectrum bound. In the section 4, using a perturbation technique we show the exponential stability for the model without diffusion in all X_p spaces, $1 < p < \infty$. We then

take the limit, as p goes to ∞, to deduce the exponential stability of the system in the Banach space X_∞.

We call the diffusion model the heat exchanger model with diffusion taken into account and the convection model the heat exchanger without diffusion, respectively. We use the analyticity property of the semigroup associated to the diffusion model in order to determine its exponential decay rate. However the semigroup associated to the convection model is not analytic. In the latter case we have not yet found an efficient method to compute exactly the exponential decay rate.

The main tools we use for our investigations are the notion of dissipativity in the Banach spaces, specifically in the L^p spaces, and the sectorial operator theory. As the reader will see our work presents some extensions of the Lyapunov's direct method to a context of Banach spaces.

We will denote the system operator associated to the diffusion model by $A_{d,p}$, and that of the convection model by $A_{c,p}$, respectively. The index p indicates the $L^p(\Omega)$ space in which the system evolves and the operator $A_{d,p}$ or $A_{c,p}$ is considered. Thus $A_{d,p}$ (resp. $A_{c,p}$) indicates the diffusive (resp. convective) operator in the X_p space.

RÉSUMÉ. L'objectif de cet article est d'étudier la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques, respectivement, avec diffusion et sans diffusion, dans le cadre de l'espace de Banach réel $X_\infty = (C[0,1])^4$ muni de la norme uniforme. La stabilité exponentielle de ces deux modèles dans l'espace de Hilbert $X_2 = (L^2(0,1))^4$ a été établie dans [31] en utilisant la méthode de Lyapunov directe.

La démarche entreprise ici consiste à étudier le problème de la stabilité dans les espaces de Banach réels $X_p = (L^p(0,1))^4$ muni de la norme L^p avec $p > 1$. Par passage à la limite ($p \to +\infty$) on peut dans certains cas étendre les résultats de stabilité exponentielle de $X_p = (L^p(0,1))^4$ à l'espace $X_\infty = (C[0,1])^4$. En effet la dissipativité du système étudié dans tous les espaces X_p entraîne sa dissipativité dans X_∞ (voir le Lemme 3).

La première section est consacrée au rappel des modèles des échangeurs thermiques. Le processus avec diffusion se modélise par un système d'équations aux dérivées partielles du type parabolique, tandis que le processus sans diffusion est décrit par un système hyperbolique du premier ordre. La deuxième section traite de la stabilité exponentielle du système parabolique dans le cadre des espaces $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$. On en déduit des résultats pour l'espace X_∞. Néanmoins cette étude ne permet pas de déduire la stabilité du système dans X_∞.

Les résultats de stabilité exponentielle dans X_p pour le modèle avec diffusion sont établis dans la troisième section en utilisant la théorie des opérateurs sectoriels. Mieux, cette théorie permet de prouver la stabilité exponentielle dans l'espace $(C^1[0,1])^4$. Dans la quatrième section, en utilisant un résultat de perturbation on démontre la stabilité exponentielle pour le modèle sans diffusion dans tous les espaces X_p, $1 < p < \infty$. En utilisant le passage à la limite évoqué plus haut, on déduit la stabilité exponentielle du système dans le Banach X_∞.

KEYWORDS : Partial differential equations, exponential stability, Lyapunov's direct method, semigroup theory

MOTS-CLÉS : Équations aux dérivées partielles, stabilité exponentielle, Méthode de Lyapunov directe, théorie du semi-groupe

1. Introduction

L'objectif de cet article est d'étudier la stabilité exponentielle des systèmes d'échangeurs thermiques, respectivement, avec diffusion et sans diffusion, dans le cadre de l'espace de Banach réel $X_\infty = (C[0,1])^4$ muni de la norme uniforme. La stabilité exponentielle de ces deux modèles dans l'espace de Hilbert $X_2 = (L^2(0,1))^4$ a été établie dans [31] en utilisant la méthode de Lyapunov directe.

La démarche entreprise ici consiste à étudier le problème de la stabilité dans les espaces de Banach réels $X_p = (L^p(0,1))^4$ muni de la norme L^p avec $p > 1$. Par passage à la limite ($p \to +\infty$) on peut dans certains cas étendre les résultats de stabilité exponentielle de $X_p = (L^p(0,1))^4$ à l'espace $X_\infty = (C[0,1])^4$. En effet la dissipativité du système étudié dans tous les espaces X_p entraîne sa dissipativité dans X_∞ (voir le Lemme 3).

La première section est consacrée au rappel des modèles des échangeurs. Le processus avec diffusion se modélise par un système d'équations aux dérivées partielles du type parabolique, tandis que le processus sans diffusion est un système hyperbolique d'ordre un du type dégénéré. La deuxième section traite de la stabilité exponentielle du système parabolique dans le cadre des espaces $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$. On en déduit des résultats pour l'espace X_∞. Néanmoins cette étude ne permet pas de déduire la stabilité du système dans X_∞.

Les résultats de stabilité exponentielle dans X_p pour le modèle avec diffusion sont établis dans la troisième section en utilisant la théorie des opérateurs sectoriels. Mieux, cette théorie permet de prouver la stabilité exponentielle dans l'espace $(C^1[0,1])^4$.

Dans la quatrième section, en utilisant un résultat de perturbation on démontre la stabilité exponentielle pour le modèle sans diffusion dans tous les espaces X_p, $1 < p < \infty$. On utilise alors le passage à la limite évoqué plus haut pour déduire la stabilité exponentielle du système dans le Banach X_∞.

Dans la suite on appelle modèle de diffusion le modèle d'échangeurs thermiques avec diffusion et, de même, modèle de convection le modèle d'échangeurs thermiques sans diffusion. Nous nous servirons de l'analyticité du semi-groupe associé au modèle de diffusion pour estimer son taux de décroissance exponentielle. Or le semi-groupe associé au modèle de convection n'est pas analytique. Pour ce dernier cas nous n'avons pas encore trouvé de méthode efficace permettant de déterminer exactement le taux de décroissance exponentielle.

Les principaux outils que l'on utilise pour cette étude sont la notion de la dissipativité dans les espaces de Banach, plus particulièrement dans les espaces L^p, et la théorie des opérateurs sectoriels. Cet article présente une extension de la méthode de Lyapunov directe pour un contexte des espaces de Banach.

Dans la suite on notera par $A_{d,p}$ l'opérateur associé au modèle de diffusion, et par $A_{c,p}$ celui de convection, respectivement. L'indice p indique l'espace $L^p(\Omega)$ dans lequel le système évolue et l'opérateur $A_{d,p}$ est étudié. Ainsi $A_{d,p}$ (resp. $A_{c,p}$) désignera l'opérateur diffusive (resp. convective) dans l'espace X_p.

2. Présentation des modèles

Le dispositif du réseau d'échangeurs thermiques que l'on étudie est présenté à la Figure 1,

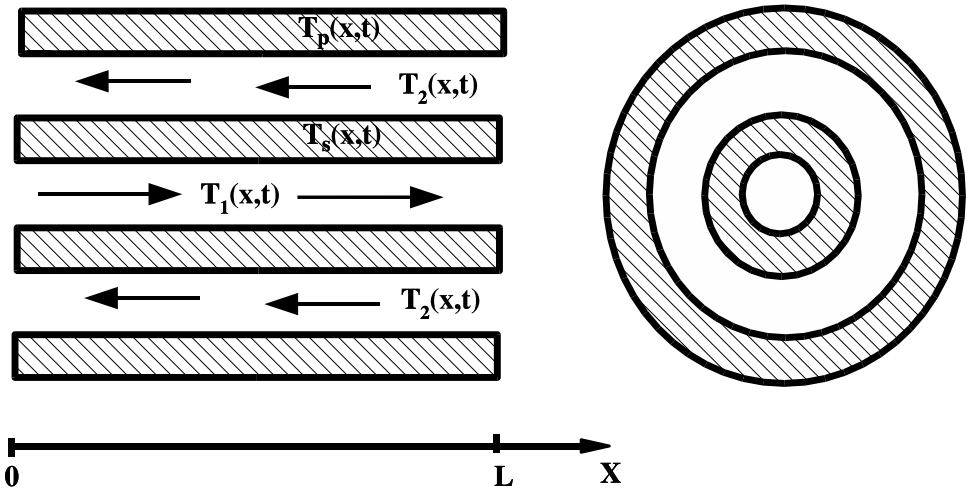

Figure 1. *réseau d'échangeurs thermiques*

où
- T_1 est la température du fluide à chauffer,
- T_2 est la température du fluide chauffant,
- T_p est la température de la paroi isolatrice,
- T_s est la température de la paroi séparatrice.

Il s'agit d'un dispositif d'échange de chaleur constitué de deux cylindres coaxiaux séparés entre eux par la paroi du milieu et isolés de l'extérieur par la seconde parois. Deux fluides de caractéristiques différentes circulent à contre-courant dans les cylindres. Ces fluides échangent de la chaleur à travers la paroi du milieu. Il existe deux modèles permettant de décrire ce procédé :
- Le premier modèle qui tient compte de la diffusion de la chaleur dans les différents corps, i.e., le modèle avec diffusion. Dans ce cas le modèle est du type parabolique (appelé modèle de diffusion).
- Le second modèle dans lequel la diffusion de la chaleur est négligée par rapport au phénomène du transport (de la convection). On obtient le modèle sans diffusion (appelé aussi modèle de convection). Dans ce dernier cas le modèle est décrit par des équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) du type hyperbolique d'ordre un, mais dégénéré.

Pour plus de détails sur la modélisation des échangeurs thermiques, on peut se rapporter à [31] et à la littérature citée dans [31].

On pose $u_1 = T_1, u_2 = T_s, u_3 = T_2, u_4 = T_p$. Le système d'échangeurs diffusives se modélise comme suit:

$$(\Sigma_d) \ : \ \begin{cases} \partial_t u_1 = \alpha_1 \, \partial_{xx} u_1 - F_1 \, \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1), \ \ \forall \, (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ \partial_t u_2 = \alpha_2 \, \partial_{xx} u_2 + h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = \alpha_3 \, \partial_{xx} u_3 + F_2 \, \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = \alpha_4 \, \partial_{xx} u_4 + h_6(u_3 - u_4), \\ u_1(0,t) = 0, \, \partial_x u_1(1,t) = 0, \\ \partial_x u_2(0,t) = 0, \, \partial_x u_2(1,t) = 0, \\ \partial_x u_3(0,t) = 0, u_3(1,t) = 0, \\ \partial_x u_4(0,t) = 0, \, \partial_x u_4(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \ \ \forall \, x \in (0,1), \end{cases}$$

où α_i, $i = 1, ..., 4$, h_j, $j = 1, ..., 6$, et F_k, $k = 1, 2$, sont des constantes positives. Les EDP (Σ_d) permettent de décrire la dynamique des variations de températures par rapport au point d'équilibre défini par les températures constantes d'entrée à l'échangeur des fluides. Les gradients nuls à la frontière expriment le fait que le flux de chaleur vers l'extérieur est nul.

Le modèle de convection est gouverné par les EDP hyperboliques suivantes :

$$(\Sigma_c) \ : \ \begin{cases} \partial_t u_1 = -F_1 \, \partial_x u_1 + h_1(u_2 - u_1), \quad \forall \, (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ \partial_t u_2 = h_2(u_1 - u_2) + h_3(u_3 - u_2), \\ \partial_t u_3 = F_2 \, \partial_x u_3 + h_4(u_2 - u_3) + h_5(u_4 - u_3), \\ \partial_t u_4 = h_6(u_3 - u_4), \\ u_1(0,t) = 0, \ \ u_3(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in (0,1). \end{cases}$$

De même que dans le modèle de diffusion, les constantes sont réelles et positives.

3. Stabilité du modèle avec diffusion dans $X_p = (L^p(0,1))^4$

3.1. Rappels de la dissipativité dans les espaces L^p

Considérons l'espace de Banach réel $L^p(0,1)$, avec $p \in (1, +\infty)$. Les propriétés suivantes sont classiques:

– $L^p(0,1)$ est un espace réflexif et séparable.

– Le dual de $L^p(0,1)$ est identifié à $L^q(0,1)$ (via un isomorphisme de Banach), avec $q = \dfrac{p}{p-1} \in (1, +\infty)$.

– Le produit $< \cdot, \cdot >_{q,p}$ de la dualité sur $L^p \times L^q$ s'écrit:

$$\forall f \in L^p(0,1), g \in L^q(0,1); \quad < g, f >_{q,p} = \int_0^1 g(x) f(x) dx.$$

Pour les espaces produits $X_p = (L^p(0,1))^n$, $p \in (1,+\infty)$ et $n \geq 1$, les propriétés similaires sont vraies :

– X_p est un espace de Banach pour la norme suivante

$$\forall f \in X_p, \quad ||f||_p = (\sum_{i=1}^{n} ||f_i||_p^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

où $||f_i||_p = (\int_0^1 |f_i(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$.

– X_p est un espace Banach réflexif et séparable.

– Le dual topologique de $(L^p(0,1))^n$ est identifié à $(L^q(0,1))^n$ (via un isomorphisme de Banach), avec $q = \dfrac{p}{p-1} \in (1,+\infty)$.

– Le produit de la dualité sur $X_p \times X_q$ s'écrit:

$$\forall\ f \in X_p,\ \forall\ g \in X_q, \quad < g, f >_{q,p} = \int_0^1 g(x) \cdot f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 g_i(x) f_i(x)dx.$$

La notion de la dissipativité d'un opérateur linéaire A dans un Hilbert H est bien connue. A est dissipatif si et seulement si $\forall f \in D(A), < Af, f >_H \leq 0$. Par contre dans un espace de Banach, il faut avoir recours à la notion d'ensemble de dualité pour définir la dissipativité.

Définition 1. *Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual topologique.*

– Pour $f \in X$, l'ensemble de dualité de f, noté $J(f)$, est défini par:

$$J(f) = \{g \in X^* : ||g||_{X^*} = ||f||_X,\ < g, f >_{X^*,X} = ||f||_X^2\}.$$

– Un opérateur linéaire A sur X est dit dissipatif si

$$\forall f \in D(A),\ \ \exists\ g \in J(f)\ /\ < g, Af >_{X^*,X} \leq 0.$$

On a aussi la caractérisation suivante des opérateurs dissipatifs.

Proposition 1. *Un opérateur linéaire A sur un Banach X est dissipatif si et seulement si*

$$\forall f \in D(A),\ \forall \lambda > 0, \quad ||(\lambda I - A)f||_X \geq \lambda ||f||_X.$$

Preuve. Voir le Théorème 1-4.2 in [22]. ■

Revenons aux espaces $L^p(0,1)$ et $X_p = (L^p(0,1))^n$, $p \in (1,+\infty)$ et $n \geq 1$.
Dans le Banach $L^p(0,1)$, on caractérise complètement l'ensemble de dualité.

Lemme 1. *Soit $f \in L^p(0,1)$. Alors l'ensemble de dualité de f dans $L^p(0,1)$ est le singleton*

$$J_p(f) = \left\{ f^* = \frac{|f|^{p-2} f}{||f||_p^{p-2}} \right\}.$$

Pour le Banach $X_p = (L^p(0,1))^n$, l'ensemble de dualité pour chaque élément est aussi un singleton.

Lemme 2 *Soit $f \in X_p$. Alors l'ensemble de dualité $J(f)$ de f dans X_p est constitué d'un seul élément $g = (g_1, \ldots, g_n)^T$ défini par*

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{||f_i||_p^{p-2}}; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Preuve. Évidemment, $g \in X_q$, avec $q = \frac{p}{p-1}$, car

$$||g_i||_q = \frac{1}{||f_i||_p^{p-2}} \Big[\int_0^1 (|f_i(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \Big]^{\frac{p-1}{p}} = ||f_i||_p < +\infty.$$

et

$$||g||_q = (\sum_{i=1}^n ||g_i||_q^2)^{\frac{1}{2}} = ||f||_p.$$

Enfin, on a

$$< g, f >_{q,p} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 g_i(x) f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_0^1 |f_i(x)|^p dx / ||f_i||_p^{p-2} = ||f||_p^2.$$

Donc, $g \in J(f)$. D'autre part, puisque $X_p^* = X_q$ est strictement convexe, $J(f)$ est réduit à un seul élément (voir [6, p.3]). ■

3.2. Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans les espaces $(L^p(0,1))^4$

Considérons le système (Σ_d) d'échangeurs thermiques avec diffusion. On se place dans le Banach $X_p = (L^p(0,1))^4$ muni de la norme définie par (1). Associons à ce système l'opérateur dans X_p défini par

$$D(A_{d,p}) = \left\{ f \in (W^{2,p}(0,1))^4 \;\middle|\; \begin{array}{llll} f_1(0) = 0, & f_2'(0) = 0, & f_3'(0) = 0, & f_4'(0) = 0 \\ f_1'(1) = 0, & f_2'(1) = 0, & f_3(1) = 0, & f_4'(1) = 0 \end{array} \right\}, \tag{2}$$

$$A_{d,p} f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + h_1(f_2 - f_1) \\ \alpha_2 f_2'' + h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ \alpha_4 f_4'' + h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Rappelons les espaces de Sobolev $W^{2,p}$ définis par

$$W^{2,p}(0,1) = \{ f_1 \in L^p(0,1) \mid f_1', f_1'' \in L^p(0,1) \}.$$

Effectuons la transformation suivante sur l'opérateur $A_{d,p}$:

$$A_p = T^{-1} A_{d,p} T$$

où T est la matrice diagonale d'ordre 4 telle que

$$T = diag(1, \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \sqrt{\frac{h_2 h_4}{h_1 h_3}}, \sqrt{\frac{h_2 h_4 h_6}{h_1 h_3 h_5}}). \tag{4}$$

L'opérateur A_p s'écrit alors

$$D(A_p) = D(A_{d,p}) \tag{5}$$

$$A_p f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' - h_1 f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 \\ \alpha_2 f_2'' + \sqrt{h_1 h_2} f_1 - (h_2 + h_3) f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \sqrt{h_3 h_4} f_2 - (h_4 + h_5) f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 \\ \alpha_4 f_4'' + \sqrt{h_5 h_6} f_3 - h_6 f_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ecrivons A_p comme la somme d'un opérateur différentiel et d'une application bornée de la façon suivante :

$$A_p = B + C$$

avec

$$D(B) = D(A_{d,p}), \tag{7}$$

$$Bf = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1 \\ \alpha_2 f_2'' \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \theta_2 f_3 \\ \alpha_4 f_4'' \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$Cf = \begin{bmatrix} -(h_1 + \theta_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5 + \theta_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} f \tag{9}$$

où θ_1 et θ_2 sont des constantes positives que nous préciserons par la suite.

Proposition 2. *Il existe des constantes $\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0$ telles que l'opérateur B défini par les équations (7) et (8) soit le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur X_p.*

Preuve. (i). Le domaine $D(B)$ donné par (2) est dense dans $X_p = (L^p(0,1))^4$, car il contient l'ensemble $(C_0^\infty(0,1))^4$ des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans $(0,1)$.
(ii). Prouvons que l'on peut choisir $\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0$ tels que l'opérateur B soit dissipatif. Notons d'abord que l'on peut écrire

$$B = (B_1, B_2, B_3, B_4)^T$$

tel que

$$Bf = (B_1 f_1, B_2 f_2, B_3 f_3, B_4 f_4)^T, \quad \forall f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in X_p;$$

où les B_i sont des opérateurs sur $L^p(0,1)$ définis par :

$$D(B_1) = \{f_1 \in W^{2,p} \mid f_1(0) = 0,\ f_1'(1) = 0\}, \quad B_1 f_1 = \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1;$$
$$D(B_2) = \{f_2 \in W^{2,p} \mid f_2'(0) = 0,\ f_2'(1) = 0\}, \quad B_2 f_2 = \alpha_2 f_2'';$$
$$D(B_3) = \{f_3 \in W^{2,p} \mid f_3'(0) = 0,\ f_3(1) = 0\}, \quad B_3 f_3 = \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + \theta_2 f_3;$$
$$D(B_4) = \{f_4 \in W^{2,p} \mid f_4'(0) = 0,\ f_4'(1) = 0\}, \quad B_4 f_4 = \alpha_4 f_4''.$$

Il est clair que la dissipativité de tous les opérateurs B_i sur $L^p(0,1)$ entraîne celle de l'opérateur B dans X_p .
Montrons la dissipativité de l'opérateur B_1. Soit $f_1 \in D(B_1)$. Sans perte de la généralité on suppose que $\|f_1\|_p = 1$. Par la Définition 1 et le Lemme 2, on passe par les calculs suivants :

$$< f_1^*, B_1 f_1 >_{q,p} = \int_0^1 |f_1|^{p-2} f_1(\alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + \theta_1 f_1)\, dx$$

$$= -\alpha_1(p-1)\int_0^1 |f_1|^{p-2} f_1'^2\, dx - \frac{F_1}{p}|f_1|^p(1) + \theta_1 \int_0^1 |f_1|^p\, dx. \tag{10}$$

On utilise l'inégalité du type Poincaré suivante:

$$\int_0^1 |g|^2\, dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 |g'|^2\, dx, \quad \forall g \in W^{1,2},\ g(0) = 0.$$

En posant $g = |f_1|^{\frac{p}{2}}$, on obtient l'inégalité

$$-\int_0^1 |f_1|^{p-2}|f_1'|^2\, dx \le -\frac{8}{p^2}\int_0^1 |f_1|^p\, dx. \tag{11}$$

En combinant les équations (10) et (11) on obtient

$$< f_1^*, B_1 f_1 >_{q,p} \le -\left(\frac{8\alpha_1(p-1)}{p^2} - \theta_1\right)\int_0^1 |f_1|^p\, dx. \tag{12}$$

Le choix θ_1 tel que

$$\theta_1 = \theta_1(p) = \frac{8\alpha_1(p-1)}{p^2}$$

donne la dissipativité de l'opérateur B_1.
Des calculs similaires conduisent à la dissipativité des opérateurs B_2, B_4 et B_3 en choisissant

$$\theta_2 = \theta_2(p) = \frac{8\alpha_3(p-1)}{p^2}.$$

(iii). Pour tout $i = 1, \ldots, 4$, l'image de l'opérateur $(I - B_i)$remplit tout l'espace L^p. On peut le voir en résolvant, pour tout $\varphi \in L^p(0,1)$, l'équation différentielle linéaire avec second membre

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1'' - F_1 u_1' - u_1 = \varphi \\ u_1(0) = 0, \\ u_1'(1) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Cette équation admet une unique solution $u_1 \in W^{2,p}$. Donc $R((\theta_1 + 1)I - B_1)$ est surjectif, ce qui entraîne que $R(I - B_1) = L^p(0,1)$ (voir Théorème 1.4.5 dans [22]). On conclut que B vérifie la condition d'image et qu'il est le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe de contractions sur X_p, $\forall\ 1 < p < \infty$. ■

Proposition 3. *Il existe une constante $\alpha_p > 0$ telle que l'opérateur $C + \alpha_p I$, C étant défini par l'équation (9), soit dissipatif dans X_p.*

Preuve. Soit $f \in X_p$. On note $g = (g_1, \ldots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{||f_i||_p^{p-2}}; \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Il s'agit de prouver qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$< g, (C + \alpha I) f >_{q,p} \leq 0, \quad \forall f \in X_p.$$

On effectue les calculs successifs suivants :

$$\begin{aligned}
< g, (C+\alpha I)f >_{q,p} &= \sum_{i=1}^{4} \int_0^1 ((C+\alpha I)f)_i(x) g_i(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \left[(-h_1 - \theta_1 + \alpha) f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2\right] g_1\, dx \\
&\quad + \int_0^1 \left[\sqrt{h_1 h_2} f_1 + (-h_2 - h_3 + \alpha) f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3\right] g_2\, dx \\
&\quad + \int_0^1 \left[\sqrt{h_3 h_4} f_2 + (-h_4 - h_5 - \theta_2 + \alpha) f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4\right] g_3\, dx \\
&\quad + \int_0^1 \left[\sqrt{h_5 h_6} f_3 + (-h_6 + \alpha) f_4\right] g_4\, dx. \qquad (14)
\end{aligned}$$

On poursuit les calculs en utilisant l'inégalité de Holder,

$$\begin{aligned}
< g, (C+\alpha I)f >_{q,p} &\leq (-h_1 - \theta_1 + \alpha)||f_1||_p^2 + (-h_2 - h_3 + \alpha)||f_2||_p^2 \\
&\quad + (-h_4 - h_5 - \theta_2 + \alpha)||f_3||_p^2 + (-h_6 + \alpha)||f_4||_p^2 \\
&\quad + 2\sqrt{h_1 h_2}||f_1||_p||f_2||_p + 2\sqrt{h_3 h_4}||f_2||_p||f_3||_p \\
&\quad + 2\sqrt{h_5 h_6}||f_3||_p||f_4||_p. \qquad (15)
\end{aligned}$$

On remarque à ce niveau que si la matrice symétrique $C + \alpha I$ est définie négative, l'opérateur $C + \alpha I$ dans X_p est dissipatif. Puisque la matrice C est définie négative, il suffit de prendre α_p égal à la plus petite valeur propre de la matrice définie positive $(-C)$ telle que $(C + \alpha I)$ devienne semi-définie négative. ■

Corollaire 1. *L'opérateur A_p défini par (5)-(6) est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions $S(t)$ sur X_p, $1 < p < +\infty$. De plus il existe une constante positive α_p telle que*

$$||S(t)||_p \leq e^{-\alpha_p t}, \quad \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire, le semi-groupe $S(t)$ (ou l'opérateur A_p) est exponentiellement stable sur X_p.

Preuve. D'après les Propositions 2 et 3, l'opérateur B est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur X_p et l'opérateur $C + \alpha_p I$ est borné et dissipatif dans X_p. En vertu d'un résultat de perturbation (voir Corollaire 3.3, [22, p.82]) on conclut que $A_p + \alpha_p I = B + (C + \alpha_p I)$ est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur X_p. En utilisant $e^{tA_p} = e^{t(A_p + \alpha_p I)} e^{-t\alpha_p}$, on complète la preuve du Corollaire 1. ■

Corollaire 2. *Pour chaque $p \in (1, +\infty)$, l'opérateur $A_{d,p}$ associé au système d'échangeurs thermiques avec diffusion est le générateur d'un C^0 semi-groupe (noté $Z(t)$) sur X_p. De plus il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$||Z(t)||_p \leq Me^{-\alpha_p t}, \quad \forall t \geq 0,$$

i.e., le semi-groupe $Z(t)$ (ou l'opérateur $A_{d,p}$) est exponentiellement stable sur X_p.

Preuve. On remarque que si A_p est le générateur d'un C^0 semi-groupe $S(t)$, alors $A_{d,p} = T^{-1}A_pT$ est aussi le générateur d'un C^0 semi-groupe $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = T^{-1}S(t)T.$$

Donc,

$$||Z(t)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||T|| \cdot ||S(t)||.$$

Le résultat cherché découle du Corollaire 1. ■

4. Stabilité du modèle avec diffusion dans $(C[0,1])^4$

4.1. Générateur infinitésimal

On considère le système (Σ_d) d'échangeurs thermiques dans le Banach $X = (C[0,1])^4$ muni de la norme de la convergence uniforme sur chaque composante, plus précisément :

$$\forall f \in X, \quad ||f||_X = ||f||_\infty = \left[\sum_{i=1}^{4} ||f_i||_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

L'espace d'état que l'on choisit pour (Σ_d) est le sous-espace fermé X_∞ dans X défini par

$$X_\infty = \{f \in X \mid f_1(0) = 0,\ f_3(1) = 0\} \subset X.$$

L'opérateur associé sur X_∞ est défini par

$$D(A_{d,\infty}) = \left\{ f \in (C^2[0,1])^4 \cap X_\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 f_1''(0) - F_1 f_1'(0) + h_1 f_2(0) = 0, \\ \alpha_3 f_3''(1) + F_2 f_3'(1) + h_4 f_2(1) + h_5 f_4(1) = 0, \\ \qquad\qquad f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0, \quad f_4'(0) = 0 \\ \qquad\qquad f_1'(1) = 0, \quad f_2'(1) = 0, \quad f_4'(1) = 0 \end{array} \right\}, \tag{17}$$

$$A_{d,\infty} f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' + h_1(f_2 - f_1) \\ \alpha_2 f_2'' + h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ \alpha_4 f_4'' + h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

De même, définissons l'opérateur A_∞ sur X_∞ par

$$A_\infty = T^{-1}A_{d,\infty}T$$

avec T la matrice diagonale donnée par (4). On remarque facilement que, pour $1 < p < q < +\infty$, on a

$$D(A_\infty) \subset D(A_q) \subset D(A_p) \tag{19}$$

et A_p prolonge A_q qui lui même prolonge A_∞.

Lemme 3. *Les propriétés suivantes ont lieu :*

(i) L'opérateur A_∞ est dissipatif dans X_∞.

(ii) L'image $R(I - A_\infty)$ de l'opérateur $I - A_\infty$ est X_∞.

Preuve. (i). Soit $f \in D(A_\infty)$, alors $f \in D(A_p)$ pour tout $1 < p < +\infty$. D'après le Corollaire 1, l'opérateur A_p est dissipatif dans X_p. La Proposition 1 entraîne que

$$||(\lambda I - A_\infty)f||_p \geq \lambda ||f||_p, \ \ \forall \lambda > 0, \ \forall p > 1. \tag{20}$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, les quantités $||f_i||_p$ tendent vers $||f_i||_\infty$, alors que la relation (20) donne à la limite

$$\forall \lambda > 0, \ ||(\lambda I - A_\infty)f||_\infty \geq \lambda ||f||_\infty. \tag{21}$$

Donc A_∞ est dissipatif dans X.

(ii). On écrit $A_\infty = B_\infty + C_\infty$, où B_∞ et C_∞ sont des opérateurs de X définis par

$$D(B_\infty) = D(A_\infty), \tag{22}$$

$$B_\infty f = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1'' - F_1 f_1' \\ \alpha_2 f_2'' \\ \alpha_3 f_3'' + F_2 f_3' \\ \alpha_4 f_4'' \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$C_\infty f = \begin{bmatrix} -h_1 & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2 + h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4 + h_5) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} f. \tag{24}$$

On montre que

$$\rho(B_\infty) \supset (0, +\infty), \quad ||R(\lambda : B_\infty)|| \leq \lambda^{-1}, \ \ \forall \lambda \in (0, +\infty).$$

Puisque le domaine $D(B_\infty)$ est dense, par le Théorème de Hill-Yosida [22, p.8], B_∞ est le générateur d'un C_0 semi-groupe sur X_∞.

Comme l'opérateur C_∞ est borné dans X_∞, en utilisant un résultat de perturbation (voir Théorème 1.1 [22, p.76]), on établit que

$$\rho(B_\infty + C_\infty) \supset (||C_\infty||, +\infty).$$

En particulier, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - A_\infty) = X_\infty$. D'après le Théorème 4.5 [22, p.15], $R(I - A_\infty) = X_\infty$. ■

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 4. *Les opérateurs A_∞ et $A_{d,\infty}$ sont tous les deux le générateur d'un C^0 semi-groupes uniformément bornés sur X_∞.*

4.2. Stabilité exponentielle du modèle avec diffusion dans X_∞

Dans cette section, on montre que le C^0 semi-groupe engendré par l'opérateur $A_{d,\infty}$ est exponentiellement stable dans X_∞ et dans $Y = (C^1[0,1])^4$. Ensuite on propose de caractériser le taux de décroissance exponentielle pour le semi-groupe.

Pour cela nous allons utiliser la théorie des opérateurs sectoriels. D'abord, on montre que l'opérateur $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel sur X_∞ et sur Y_∞. Noter que Y_∞ est un sous-espace fermé dans Y défini par

$$Y_\infty = \left\{ f \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} f_1(0) = f_1'(1) = 0 \\ f_2'(0) = f_2'(1) = 0 \\ f_3'(0) = f_3(1) = 0 \\ f_4'(0) = f_4'(1) = 0 \end{array} \right\}.$$

Proposition 5. *L'opérateur $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel sur X_∞ et sur Y_∞.*

Preuve. (1). Par la preuve du Lemme 3, l'opérateur B_∞ est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur X_∞. Pour montrer que $A_{d,\infty}$ est un opérateur sectoriel, il suffit de prouver que chaque opérateur composant $B_{\infty,i}$ de B_∞ est sectoriel sur le sous-espace correspondant de $C[0,1]$. Pour atteindre cet objectif il suffit de prouver qu'il existe des constantes positives $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ telles que, pour tout $i = 1, 2, 3$ ou 4, on ait

$$\rho(B_{\infty,i}) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\text{Arg}(\lambda - \omega)| \leq \theta\} \cup \{\omega\},$$

$$||R(\lambda, B_{\infty,i})|| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\theta,\omega}.$$

Ceci se réalise par un calcul direct de l'opérateur de résolvante en résolvant l'équation différentielle [27, Chapitre IV]. On en déduit, par le théorème 5.2 [22, p.61], que l'opérateur B_∞ est sectoriel sur X_∞. Comme $A_{d,\infty}$ est une perturbation bornée de B_∞, le résultat découle du Théorème 2.1 dans [22, p.80].

(2). Pour l'opérateur $A_{d,Y}$ défini sur le sous-espace correspondant dans $Y = (C^1[0,1])^4$, le raisonnement est similaire mais avec un calcul plus élaboré. On commence par prouver que chaque opérateur composant est sectoriel. On laisse au lecteur le soin de la preuve complète pour $A_{d,Y}$ dans Y_∞. ■

Dans la suite, on propose de caractériser les ensembles spectraux pour l'opérateur $A_{d,\infty}$ et pour $A_{d,Y}$.

Proposition 6. *Les opérateurs définis sur les espaces de Banach différents $A_{d,Y}$, $A_{d,\infty}$ et $A_{d,q}$ ont le même ensemble des valeurs propres :*

$$\sigma_p(A_{d,Y}) = \sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,q})$$

et

$$\sigma(A_{d,Y}) \subset \sigma(A_{d,\infty}) \subset \sigma(A_{d,q}), \quad \forall\, 1 < q < \infty.$$

Preuve. Rappelons que

$$D(A_{d,Y}) = \left\{ f \in Y_\infty \cap (C^3[0,1])^4 \mid A_{d,\infty} f \in Y_\infty \right\}.$$

1. Montrons d'abord l'égalité des spectres ponctuels $\sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,Y})$. Soit $\lambda \in \sigma_p(A_{d,Y})$. Alors il existe $f \in D(A_{d,Y})$ non nul tel que $(\lambda I - A_{d,Y})f = 0$. Puisque $A_{d,\infty}$ prolonge $A_{d,Y}$, alors $f \in D(A_{d,\infty})$ et $(\lambda I - A_{d,\infty})f = 0$. Donc $\lambda \in \sigma_p(A_{d,\infty})$. On en déduit que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) \supset \sigma_p(A_{d,Y}).$$

Réciproquement, soit $f \in D(A_{d,\infty})$ et soit $(\lambda I - A_{d,\infty})f = 0$. Par définition, l'équation différentielle ci-dessous admet une solution non triviale $f \in D(A_{d,\infty})$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 f_1''(x) \\ \alpha_2 f_2''(x) \\ \alpha_3 f_3''(x) \\ \alpha_4 f_4''(x) \end{bmatrix} = \lambda f(x) - \begin{bmatrix} -F_1 f_1'(x) + h_1(f_2(x) - f_1(x)) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3(x) - f_2(x)) \\ F_2 f_3'(x) + h_4(f_2(x) - f_3(x)) + h_5(f_4(x) - f_3(x)) \\ h_6(f_3(x) - f_4(x)), \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution $f \in (C^3[0,1])^4$ et $A_{d,\infty} f \in Y_\infty$. Donc $f \in D(A_{d,Y})$. On vient de montrer que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) \subset \sigma_p(A_{d,Y}).$$

On a ainsi prouvé l'égalité des spectres ponctuels.

(2). Le raisonnement similaire à celui du point (1) permet d'établir que

$$\sigma_p(A_{d,\infty}) = \sigma_p(A_{d,q}).$$

(3). Il est évident que $\rho(A_{d,Y}) \supset \rho(A_{d,\infty}) \supset \rho(A_{d,q})$, ce qui permet d'écrire

$$\sigma(A_{d,Y}) \subset \sigma(A_{d,\infty}) \subset \sigma(A_{d,q}). \tag{25}$$

■

Nous sommes en mesure d'établir le théorème de stabilité dans le cadre des espaces de Banach X_∞ et Y_∞.

Théorème 1. *Les taux de décroissance exponentielle des semi-groupes engendrés par $A_{d,\infty}$ et $A_{d,Y}$, respectivement, sur X_∞ et Y_∞, sont identiques :*

$$\omega_0(A_{d,\infty}) = \omega_0(A_{d,Y}) = S(A_{d,_\infty}) = \sup_{\lambda \in \sigma_p(A_{d,\infty})} \Re e(\lambda) < 0.$$

Par conséquent, le semi-groupe associé au système d'échangeurs thermiques avec diffusion est exponentiellement stable sur X_∞ et Y_∞.

Preuve. D'après le Corollaire 2, l'opérateur $A_{d,2}$ est le générateur d'un C^0 semi-groupe exponentiellement stable sur $X_2 = \left(L^2(0,1)\right)^4$. De plus, on montre que le semi-groupe engendré est analytique et que $A_{d,2}$ est à résolvantes compactes, donc $\sigma_p(A_{d,2}) = \sigma(A_{d,2})$. Donc, on a

$$\omega_0(A_{d,2}) = S(A_{d,2}) = \sup_{\lambda \in \sigma_p(A_{d,2})} \Re e(\lambda). \tag{26}$$

Puisque $A_{d,\infty}$ et $A_{d,Y}$ sont sectoriels sur X_∞ et Y_∞, respectivement, alors on a aussi

$$\omega_0(A_{d,\infty}) = S(A_{d,\infty}), \quad \omega_0(A_{d,Y}) = S(A_{d,Y}). \tag{27}$$

A l'aide de la Proposition 6 et du fait que $A_{d,\infty}$ et $A_{d,Y}$ sont à résolvantes compactes, nous obtenons de (26)-(27) :

$$\omega_0(A_{d,Y}) = \omega_0(A_{d,\infty}) = \omega_0(A_{d,2}) < 0. \tag{28}$$

D'où le résultat cherché. ■

5. Stabilité du modèle sans diffusion dans $(C[0,1])^4$ et $(L^p(0,1))^4$

On considère le système (Σ_c) d'échangeurs thermiques sans diffusion (i.e., avec convection). On note par $A_{c,\infty}$ et $A_{c,p}$, respectivement, les opérateurs sur $X = (C[0,1])^4$ et $Y_p = (L^p(0,1))^4$ associés au système (Σ_c). Ils sont définis par

$$D(A_{c,\infty}) = \left\{ f \in (C^1(0,1))^4 \mid f_1(0) = 0,\ f_3(1) = 0 \right\} \tag{29}$$

$$D(A_{c,p}) = \left\{ f \in (W^{1,p}(0,1))^4 \mid f_1(0) = 0,\ f_3(1) = 0 \right\} \tag{30}$$

$$A_{c,p} f = A_{c,\infty} f = \begin{bmatrix} -F_1 f_1' + h_1(f_2 - f_1) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ F_2 f_3' + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Rappelons que

$$W^{1,p}(0,1) = \{ f_1 \in L^p(0,1) \mid f_1' \in L^p(0,1) \}.$$

On effectue la même transformation que précédemment sur les opérateurs:

$$E_c = T\, A_{c,\infty}\, T^{-1}, \quad E_p = T\, A_{c,p}\, T^{-1}$$

où $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ est la matrice diagonale donnée par (4).
On décompose E_p comme la somme d'un opérateur différentiel et d'une application matricielle bornée:

$$E_p = G + \Lambda$$

avec

$$D(G) = D(A_{c,p}) \tag{32}$$

$$Gf = \begin{bmatrix} -F_1 f_1' \\ 0 \\ F_2 f_3' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -h_1 & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2+h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4+h_5) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème 2 *(i) L'opérateur E_p est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p.*
(ii) L'opérateur $A_{c,p}$ est le générateur d'un C^0 semi-groupe $S_p(t)$ borné sur Y_p.
(iii) La trace de l'opérateur $A_{c,\infty}$ sur l'espace $X_0 = \{f \in X \mid f_1(0) = f_3(0) = 0\}$ est le générateur d'un C^0 semi-groupe $W_0(t)$ borné sur X_0.

Preuve. Pour prouver (i), on montre d'abord que l'opérateur G précédent engendre un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p. Soit $f \in Y_p$, notons $g = (g_1, \ldots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{||f_i||_p^{p-2}}; \quad i = 1, \ldots, 4.$$

$$\begin{aligned} < g, Gf >_{Y_q, Y_p} &= \sum_{i=1}^{4} \int_0^1 (Gf)_i(x) g_i(x)\, dx \\ &= -\frac{F_1}{||f_1||_p^{p-2}} \int_0^1 |f_1(x)|^{p-2} f_1(x) f_1'(x)\, dx \\ &+ \frac{F_2}{||f_3||_p^{p-2}} \int_0^1 |f_3(x)|^{p-2} f_3(x) f_3'(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{p} \frac{F_1}{||f_1||_p^{p-2}} \left[|f_1(x)|^p\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{p} \frac{F_2}{||f_3||_p^{p-2}} \left[|f_3(x)|^p\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{p} \frac{F_1}{||f_1||_p^{p-2}} |f_1(1)|^p - \frac{1}{p} \frac{F_2}{||f_3||_p^{p-2}} |f_3(0)|^p \leq 0. \end{aligned}$$

D'où la dissipativité de l'opérateur G sur Y_p. On montre que G vérifie la condition d'image en utilisant la même démarche qu'à la preuve de la Proposition 2.
Donc G engendre un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p, puisque Y_p est un Banach réflexif.
On voit clairement que la matrice Λ est dissipative dans Y_p (voir preuve de la Proposition 3). On déduit, par un résultat de perturbations, que $A_{c,p} = G + \Lambda$ est le générateur d'un

C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p.
On établit (ii) exactement comme à la preuve du Corollaire 2.
Enfin pour (iii), on établit que l'opérateur E_c est dissipatif et vérifie la condition d'image sur X par le même raisonnement qu'au Lemme 3. Ensuite, par le même raisonnement qu'à la Proposition 4 on montre que la trace de E_c sur X_0 est dissipative, vérifie la condition d'image et est de domaine dense dans X_0. D'où le résultat voulu. ■

Pour la suite, donnons la définition suivante.

Définition 2 *Le C^0 semi-groupe sur Y_p (resp. X_0) engendré par l'opérateur $A_{c,p}$ (resp. trace de $A_{c,\infty}$ sur X_0) est appelé le semi-groupe associé au modèle de convection sur Y_p (resp. X_0).*

Pour étudier la stabilité du semi-groupe engendré par $A_{c,\infty}$ sur X (ou plutôt sa trace sur X_0), nous allons passer à la transformation de l'opérateur.

On effectue dans le système (Σ_c) le changement de fonction inconnue de la façon suivante:

$$u_i = v_i\, e^{\theta x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

où θ est un réel arbitraire. Alors $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ est la solution du système suivant :

$$(\widetilde{\Sigma}_c) \ : \ \begin{cases} \partial_t v_1 = -F_1\, \partial_x v_1 - \theta F_1 v_1 + h_1(v_2 - v_1), \quad x \in (0,1), \ \ t > 0 \\ \partial_t v_2 = h_2(v_1 - v_2) + h_3(v_3 - v_2), \\ \partial_t v_3 = F_2\, \partial_x v_3 + \theta F_2 v_3 + h_4(v_2 - v_3) + h_5(v_4 - v_3), \\ \partial_t v_4 = h_6(v_3 - v_4), \\ v_1(0,t) = 0, \ \ v_3(1,t) = 0, \\ v(x,0) = v^0(x), \quad x \in (0,1). \end{cases}$$

On introduit les opérateurs $A_{c,\theta}$ et $A_{p,\theta}$ sur X_0 et Y_p respectivement;

$$D(A_{c,\theta}) = \left\{ f \in (C^1(0,1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0 \right\} \tag{35}$$

$$D(A_{p,\theta}) = \left\{ f \in (W^{1,p}(0,1))^4 \mid f_1(0) = 0, f_3(1) = 0 \right\} \tag{36}$$

$$A_{p,\theta} f = A_{c,\theta} f = \begin{bmatrix} -F_1 f_1' - \theta F_1\, f_1 + h_1(f_2 - f_1) \\ h_2(f_1 - f_2) + h_3(f_3 - f_2) \\ F_2 f_3' + \theta F_2\, f_3 + h_4(f_2 - f_3) + h_5(f_4 - f_3) \\ h_6(f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \tag{37}$$

On effectue la même transformation que précédemment :

$$E_{c,\theta} = T^{-1}\, A_{c,\theta}\, T, \quad E_{p,\theta} = T^{-1}\, A_{p,\theta}\, T.$$

On fait la décomposition de $E_{p,\theta}$ comme la somme d'un opérateur différentiel et d'une application matricielle bornée : $E_{p,\theta} = G + \Lambda_\theta$ avec

$$D(G) = D(A_{p,\theta}) \tag{38}$$

$$Gf = \begin{bmatrix} -F_1 f_1' \\ 0 \\ F_2 f_3' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\Lambda_\theta = \begin{bmatrix} -(h_1+\theta F_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2+h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4+h_5-\theta F_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix} \tag{40}$$

On établit le résultat important suivant.

Proposition 7. *Il existe des constantes $\theta > 0$ et $\mu > 0$ indépendantes de p telles que l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I$ soit le générateur d'un semi-groupe de contractions sur Y_p.*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 4. *Il existe des constantes $\theta > 0$ et $\mu > 0$ indépendantes de p telles que l'opérateur $\Lambda_\theta + \mu I$ soit dissipatif dans Y_p.*

Preuve. Soit $f \in D(G)$, notons $g = (g_1, \ldots, g_4)^T$ tel que

$$g_i = \frac{|f_i|^{p-2} f_i}{||f_i||_p^{p-2}}; \quad i = 1, \ldots, 4.$$

On effectue les mêmes calculs qu'à la preuve de la Proposition 3. A l'aide des inégalités de Hölder et de Cauchy, on peut écrire

$$< g, (\Lambda_\theta + \mu I) f >_{Y_q, Y_p} =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [-h_1 - \theta F_1 + \mu] f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 \\ \sqrt{h_1 h_2} f_1 + [-h_2 - h_3 + \mu] f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 \\ \sqrt{h_3 h_4} f_2 + [-h_4 - h_5 + \theta F_2 + \mu] f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 \\ \sqrt{h_5 h_6} f_3 - h_6 f_4 + \mu f_4 \end{bmatrix} \right\rangle_{q,p}$$

$$=< g_1, (-h_1 - \theta F_1 + \mu) f_1 + \sqrt{h_1 h_2} f_2 >_{q,p}$$

$$+ < g_2, \sqrt{h_1 h_2} f_1 + (-h_2 - h_3 + \mu) f_2 + \sqrt{h_3 h_4} f_3 >_{q,p}$$

$$+ < g_3, \sqrt{h_3 h_4} f_2 + (-h_4 - h_5 + \theta F_2 + \mu) f_3 + \sqrt{h_5 h_6} f_4 >_{q,p}$$

$$+ < g_4, \sqrt{h_5 h_6} f_3 + (-h_6 + \mu) f_4 >_{q,p} \leq \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}^\top (\widetilde{\Lambda}_\theta + \mu I) \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}, \tag{41}$$

où

$$\widetilde{\Lambda}_\theta = \begin{bmatrix} -(h_1+\theta F_1) & \sqrt{h_1 h_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{h_1 h_2} & -(h_2+h_3) & \sqrt{h_3 h_4} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_3 h_4} & -(h_4+h_5-\theta F_2) & \sqrt{h_5 h_6} \\ 0 & 0 & \sqrt{h_5 h_6} & -h_6 \end{bmatrix}.$$

On peut trouver une constante $\theta > 0$ telle que la matrice $(-\widetilde{\Lambda}_\theta)$ soit définie positive, il suffit de prendre sa plus petite valeur propre pour μ :

$$\mu = \min_{i=1,\ldots,4} \sigma_i(-\widetilde{\Lambda}_\theta).$$

Cela permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$< g, (\Lambda_\theta + \mu I) f >_{Y_q, Y_p} \leq - \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix}^\top (-\widetilde{\Lambda}_\theta - \mu I) \begin{bmatrix} \|f_1\|_p \\ \|f_2\|_p \\ \|f_3\|_p \\ \|f_4\|_p \end{bmatrix} \leq 0.$$

On complète ainsi la preuve du Lemme 4. ■

Remarque 1. On peut aussi choisir une constante $\theta < 0$ telle que $(-\widetilde{\Lambda}_\theta)$ soit définie positive. Par conséquent il existe des constantes $\theta < 0$ et $\mu > 0$ telles que $(\Lambda_\theta + \mu I)$ soit dissipatif.

Lemme 5. *L'opérateur G défini par (38)-(39) est le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p.*

Preuve. La preuve de ce lemme est donnée au début de la preuve du Théorème 2. ■

Preuve de Proposition 7 : D'après le Lemme 4, il existe $\theta > 0$ et $\mu > 0$ telles que $(\Lambda_\theta + \mu I)$ soit dissipatif. Par le Lemme 5, l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I = G + \Lambda_\theta + \mu I$ est aussi dissipatif et donc le générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p. ■

Maintenant, nous énonçons le résultat de stabilisation.

Théorème 3. (i) *Pour tout $1 < p < +\infty$, le semi-groupe $W_p(t)$ sur $Y_p = (L^p(0,1))^4$ associé au modèle de diffusion est exponentiellement stable.*
(ii) *Le semi-groupe $W_0(t)$ sur X_0 associé au modèle de convection est exponentiellement stable.*

Preuve. (i) La Proposition 7 assure l'existence de $\mu > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que l'opérateur $E_{p,\theta} + \mu I$ soit générateur d'un C^0 semi-groupe de contractions sur Y_p. En notant par $T_{p,\theta}(t)$ le C^0 semi-groupe sur Y_p engendré par $E_{p,\theta}$, on établit que

$$\forall w \in Y_p, \quad W_p(t)\, w(x) = e^{\theta x} T_{p,\theta}(t) \left(e^{-\theta \cdot}\, w\right)(x). \tag{42}$$

Le semi-groupe $T_{p,\theta}$ est exponentiellement stable :

$$T_{p,\theta} = e^{-\mu t}\, e^{(E_{p,\theta} + \mu I)t}.$$

Par conséquent, il existe une constante $M > 0$ dépendant de θ telle que

$$||W_p(t)|| \leq M\ e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) En vertu de la Proposition 7, il existe $\mu > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (indépendants de p) tels que l'opérateur sur Y_p $E_{p,\theta}+\mu I$ soit dissipatif. En passant en limite, on prouve que l'opérateur $E_{c,\theta} + \mu I$ est dissipatif (similaire à la preuve de la Proposition 2 (iii)) sur X_0 et vérifie la condition d'image. Par conséquent, l'opérateur $E_{c,\theta}$ sur X_0 engendre un semi-groupe uniformément borné sur X_0 que nous notons $T_\theta(t)$. En notant $W_0(t)$ le semi-groupe sur X_0 engendré par E_c, on établit une relation similaire à (42) entre $W_0(t)$ et $T_\theta(t)$. Par conséquent, il existe une constante $M > 0$ dépendant de θ telle que

$$||W_0(t)|| \leq M\ e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi on achève la preuve du Théorème 3. ■

Enfin nous indiquons que le semi-groupe associé au modèle de convection n'est pas analytique.

Proposition 8. *le semi-groupe (sur Y_p ou X_0) associé au modèle de convection n'est pas analytique.*

Preuve de Proposition 8 : Il suffit de prouver que l'opérateur de transport $\mathcal{T}$ sur $C[0,1]$ suivant

$$D(\mathcal{T}) = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}; \quad \mathcal{T}\ f = -f_x$$

n'est pas sectoriel. En effet l'opérateur de résolvante s'écrit

$$R(\lambda, \mathcal{T})f\ (x) = u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi)\, d\xi, \quad \forall\ f \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{43}$$

Supposons que $\mathcal{T}$ est sectoriel. Puisque son semi-groupe engendré est borné, son ensemble de résolvante $\rho(\mathcal{T})$ contient l'ensemble Σ des $\lambda = n + i\,m$ tels que $n < 0$ et $\left|\frac{n}{m}\right|$ soit suffisamment petit. De plus, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\lambda|\ ||R(\lambda, \mathcal{T})f|| \leq M\ ||f||,\ \ \forall \lambda \in \Sigma,\ \forall f \in C[0,1]. \tag{44}$$

Soit $f \equiv 1$ et soit $\lambda = n + i\,m$. La relation (43) entraîne

$$|u(x)| = \left|\frac{1 - e^{-(n+im)x}}{n + im}\right| \geq \frac{e^{-nx} - 1}{|\lambda|}.$$

Cela permet d'écrire l'inégalité suivante pour n grand :

$$\|u\|_p \geq \left(\int_{1/2}^1 |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \geq \frac{1}{|\lambda|}\left(\int_{1/2}^1 (e^{-nx} - 1)^p dx\right)^{1/p}$$

$$\geq \frac{1}{2|\lambda|}\left(\int_{1/2}^1 e^{-pnx} dx\right)^{1/p} = \frac{1}{2|\lambda|}\left(\frac{e^{-np} - e^{-np/2}}{-np}\right)^{1/p}. \tag{45}$$

Comme la fonction exponentielle emporte sur le polynôme, à partir de (45) on obtient

$$|\lambda|\|R(\lambda, \mathcal{T})f\| = |\lambda| \cdot \|u\| \to +\infty$$

lorsque $n \to -\infty$. Ceci est en contradiction avec (44). Donc le semi-groupe n'est pas analytique dans Y_p.

Maintenant, soit $f(x) = e^x - 1$. Soit $\lambda \in \Sigma$. Par (43), on trouve $u(x)$:

$$u(x) = \frac{e^x}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda(\lambda + 1)}.$$

Alors,

$$|\lambda| \, ||R(\lambda, \mathcal{T})f||_\infty = |\lambda| \, ||u||_\infty \geq \frac{e^{-n}}{|\lambda + 1|} - 1 - \left| \frac{\lambda \, e}{\lambda + 1} \right|. \tag{46}$$

La fonction exponentielle emportant sur le polynôme, le membre de l'extrême droite de (46) tend vers $+\infty$ quand $n \to -\infty$. Or, cela est en contradiction avec (44). Par conséquent le semi-groupe n'est pas analytique dans X_0, non plus. ■

6. References

[1] **S. Agmon**, On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 15, 119-147, 1962.

[2] **Ph. Bénilan, H. Touré**, Sur l'équation générale $u_t = a(., u, \varphi(., u)_x)_x$ dans L^1, II, Etude du problème d'évolution, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 12, n°6, p. 727-761, 1995.

[3] **H. Bounit, H. Hammouri, J. Sau**, Regulation of an irrigation canal system through the semi-group approach, *Proceedings of the International Workshop Regulation of Irrigation Canals : Sates of the Art of Research and Applications*, 261-276, Morocco, 1997.

[4] **M. Bouyssel**, Integrale de Lebesgue, mesure et integration; Cépadues-Editions, 1996.

[5] **H. Brézis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[6] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[7] **N. Chafee**, Asymptotic behaviour for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions, *J. Differential Equations* 18, 111-134, 1975.

[8] **J.M. Coron**, On the null asymptotic stabilization of the two-dimansional incompressible Euler equations in a simply connected domain, *Siam Journal on Control and Optimization*, vol.37, 1874-1896, 1999.

[9] **L.C. Evans**, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[10] **A. Friedman**, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, 1963.

D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1977.

[11] **A. Haraux**, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, Paris, 1991.

[12] **F. Huang**, *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*, Ann. Diff. Eqns 1:45-53, 1985.

[13] **V. Komornik**, *Exact controllability and stabilization: the multiplier method*, Masson, Paris, 1994.

[14] **O. Ladyzhenskaya, N. Uralceva**, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Acad. Press, 1968 (Traduction française Dunod).

[15] **O. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov, N. Uralceva**, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. society, 1968.

[16] **J. Liéto**, *Le génie chimique à l'usage des chimistes*, Lavoisier TEC & DOC, 1998.

[17] **J.L. Lions**, *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1: Contrôlabilité exacte*, Masson, 1988.

[18] **C. Lobry**, *Bases mathématiques de la théorie des systèmes asservis non linéaires*, Analyse Appliquée et Informatique, Université Bordeaux 1, 1976.

[19] **H. Matano**, Asymptotic behaviour and stability of solutions of semilinear diffusion equations, *Publ. RIMS Kyoto University*, 15, 401-454, 1979.

[20] **H. Matano**, Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 18-2, 221-227, 1978.

[21] **U. Nieken, G. Kolios, G. Eigenberger**, Limiting cases and approximate solutions for a fixed-bed reactors with periodic flow reversal, *AiChe*, vol.41, no.8, August 1995.

[22] **A. Pazy**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] **M.H. Protter, H.F. Weinberger**, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[24] **J. Rauch, M. Taylor**, Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain, *Indiana university Mathematics journal*, 24, 79-86, 1974.

[25] **M. Renardy**, On the linear stability of hyperbolic PDE's and viscoelastic flows, *Z. Angew Math. Phys. (ZAMP)*, vol.45, 854-865, 1994.

[26] **F. Simondon, H. Touré**, A Lyapunov functional and long-time behaviour for a degenerate parabolic problem, *Advances in Mathematical sciences and applications*, Gakkôtosho, Tokyo, vol.6, no.1 , 243-266, 1996.

[27] **A. Tchousso**, *Étude de la stabilité asymptotique de quelques modèles de transfert de chaleur*, Thèse doctorale, 141 pages, Université Claude Bernard Lyon 1, 2004.

[28] **A. Tchousso, C.Z. Xu**, Exponential stability of symmetric hyperbolic systems using Lyapunov functionals, to appear in *the Proceedings of Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzydroje, Poland, September 2004.

[29] **H. Touré**, *Etude des équations générales* $u_t - \varphi(u)_{xx} + f(u)_x = v$ *par la théorie des semi-groupes non linéaires dans* L^1, Thèse de 3^{eme} cycle, Université de Franche Comté, 1982.

[30] **D. Vortmeyer, R.J. Schaefer**, Equivalence of one- and two-phase models for heat transfer processes in packed beds: one dimensional theory, *chemical Engineering Science*, vol.29, pp. 485-491, 1974.

[31] **C.Z. Xu**, *Commande des systèmes à paramètres distribués*, Mémoire de l'Habilitation à Diriger la Recherche, 58 pages, Université de Metz, 1997.

[32] **C.Z. Xu, G. Sallet**, Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems, *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol.7, 421-442, June 2002 (URL:http://www.emath.fr/cocv/).

[33] **C.Z. Xu, G. Sallet**, Proportional and integral regulation of irrigation canal systems governed by the St Venant equation, *The proceedings of the IFAC world congress 1999*, 147-152, Beijing, P.R. China, 1999.

[34] **C.Z. Xu, J.P. Gauthier**, Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant, *R.A.I.R.O. - APII*, vol.25, 377-396, 1991.

[35] **T.I. Zelenyak** Stabilisation of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable, *Differentsial'nye Uralvneniya*, 4, 34-35, 1968 (Translated as Diff. Eq., 4, 17-22, 1968).