

## Procédures d'échantillonnage efficaces : Estimation de la fiabilité des systèmes séries/parallèles

Zohra Benkamra, Mekki Terbeche, Mounir Tlemcani

► **To cite this version:**

Zohra Benkamra, Mekki Terbeche, Mounir Tlemcani. Procédures d'échantillonnage efficaces : Estimation de la fiabilité des systèmes séries/parallèles. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, INRIA, 2010, 13, pp.119-133. <hal-01286817>

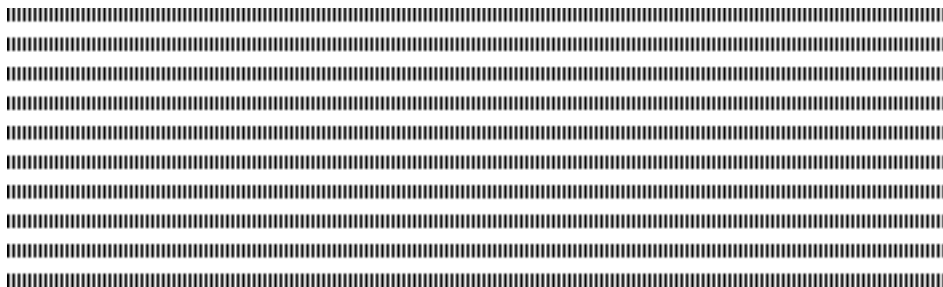
**HAL Id: hal-01286817**

**<https://hal.inria.fr/hal-01286817>**

Submitted on 11 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



TAMTAM'09

## Procédures d'échantillonnage efficaces

### Estimation de la fiabilité des systèmes séries/parallèles

Zohra BENKAMRA<sup>\*,1</sup> — Mekki TERBECHE<sup>\*\*</sup> — Mounir TLEMCANI<sup>\*,2</sup>

\* Département de Physique  
Laboratoire d'Analyse et d'Application du Rayonnement, L.A.A.R  
Université des sciences et technologies U.S.T.O-MB  
31000 Oran  
ALGERIE

<sup>\*,1</sup> bzohra@yahoo.com <sup>\*,2</sup> mounir.tlemceni@univ-pau.fr

\*\* Département de Mathématiques  
Université d'Oran Es-Sénia  
31000 Oran  
ALGERIE  
terbeche2000@yahoo.fr



**RÉSUMÉ.** Ce travail consiste à déterminer, de façon pratique et facile à utiliser, des plans séquentiels d'échantillonnage efficaces pour estimer le produit de paramètres de Bernoulli. Les procédures d'échantillonnage fournies par la littérature sont complexes et coûteuses. Les résultats sont utiles pour estimer la fiabilité des systèmes en série/parallèle où le choix du nombre des unités à tester dans chaque composant peut être effectif pour minimiser la variance de l'estimateur.

**ABSTRACT.** This work consists to determine in a practical and straightforward manner some efficient sequential sampling schemes in order to estimate the product of Bernoulli parameters. The sampling schemes given by the literature are complex and costly. The results are useful for estimating the reliability of series/parallel systems where the allocation of the number of units to be tested from each component can be effective for minimizing the variance of the estimator.

**MOTS-CLÉS :** Echantillonnage séquentiel, Plan Optimal, Plan équilibré, Fiabilité

**KEYWORDS :** Sequential Sampling, Optimal Design, Balanced allocation, Reliability



Reçu le 18/10/2009,  
révisé le 20/05/2010,  
accepté le 17/09/2010

Revue ARIMA, vol. 13 (2010), pp. 119-133

---

## 1. Introduction

Dans le domaine de l'engineering, les procédures d'échantillonnage pour estimer la fiabilité des systèmes série/parallèle avec coût nécessitent l'optimisation du nombre d'unités à tester dans chaque composant [1, 2, 4, 5, 8, 9]. Les schémas efficaces utilisés actuellement sont basés sur des procédures séquentielles [6]. Dans le domaine de la fiabilité, un schéma dénommé R-SS (acronyme anglais de Reliability Sequential Scheme) cf. [2, 3, 6, 7] s'est avéré performant dans le cas d'un système en série [5] lorsqu'on se fixe un nombre total d'unités à tester  $T$  supposé assez grand. Nous construisons alors un schéma équivalent pour le modèle parallèle et plus généralement le modèle mixte, et nous montrons son efficacité asymptotique à l'ordre 1 lorsque  $T$  devient grand. Le modèle proposé dans ce travail est utile pour estimer la fiabilité des systèmes séries/parallèles ou parallèles/séries, lorsque les fiabilités des composants sont inconnues et le nombre total des unités à tester dans chaque sous-système est fixé à l'avance. Il est montré alors qu'une procédure d'échantillonnage optimale existe mais malheureusement dépend des inconnues qui sont les fiabilités de chaque composant. L'efficacité d'une procédure d'échantillonnage sera alors mesurée par l'excès de variance qu'elle produit par rapport à la variance donnée par la procédure optimale. Par exemple, on veut la fiabilité d'un système parallèle de 4 composants ayant respectivement les fiabilités 0.05, 0.1, 0.95 et 0.99, sous la contrainte d'un nombre total d'unités à tester fixe  $T=100$  (ou d'un budget limité pour l'échantillonnage). Alors, le R-SS propose de tester en moyenne dans chaque composant respectivement 10, 10, 28 et 52 unités, et produit une variance de la fiabilité estimée de l'ordre de  $10^{-7}$ . Ceci est visiblement mieux que la procédure équilibrée qui consiste à tester 25 unités dans chaque composant, et produit une variance de l'ordre de  $10^{-6}$ . Nous supposons désormais l'indépendance inter et intra-populations afin de simplifier l'analyse, en particulier pour rester dans le cadre des estimateurs sans biais ayant les qualités classiques de convergence. C'est cette indépendance même qui ramène le problème de l'estimation de la fiabilité à celui de l'estimation du produit de paramètres. En fait, bien que non réaliste, cette hypothèse permet d'obtenir une expression simple de la variance du produit comme fonction de l'échantillonnage, et surtout d'utiliser les théorèmes limites dans un cadre standard tel que la loi forte des grands nombres qui s'avère essentielle pour définir le comportement asymptotique du schéma séquentiel. Le cas plus général des systèmes dépendants nécessite encore plus d'investigation du moment que les variables d'état de chaque composant doivent être modélisées à l'aide de distributions multivariées, et par conséquent l'expression de la variance de l'estimateur devient plus compliquée à cause des termes de corrélations. La validation des modèles est faite à l'aide des simulations Monte-Carlo et montre que la procédure R-SS est asymptotiquement optimale. Le choix des modèles basiques à deux composants dans la simulation n'est pas restrictif dans nos résultats mais c'est juste que le plan optimal s'explique facilement et par conséquent sa comparaison avec le R-SS devient plus simple à réaliser. Dans le cas des systèmes composés de plusieurs sous-systèmes et plusieurs composants, la procédure optimale devient non explicite. Pour cela, nous avons choisi de valider l'efficacité du R-SS en montrant que la variance qu'il produit décroît plus rapidement que celle donnée par le schéma équilibré, lorsque la taille de l'échantillon  $T$  augmente.

---

## 2. Procédures d'échantillonnage efficaces pour estimer la fiabilité d'un système parallèle

Un système parallèle  $S$  a  $n$  composants indépendants  $1, 2, \dots, n$  avec les fiabilités  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . La fiabilité  $R$  du système est par définition la probabilité qu'il fonctionne. Elle peut être calculée par dualité<sup>1</sup> en terme de défaillance  $F = 1 - R$  par le produit suivant :

$$F = \prod_{i=1, n} F_i$$

où  $F_i = 1 - R_i$  est la défaillance du composant  $i$ . On estime  $R$  par  $\hat{R} = 1 - \hat{F}$  où  $\hat{F}$  est un estimateur sans biais de  $F$  défini par le produit des moyennes échantillonnées de populations de Bernoulli, comme suit :

$$\hat{F} = \prod_{i=1, n} \hat{F}_i$$

et

$$\hat{F}_i = \frac{\sum_{l=1, M_i} Y_i^{(l)}}{M_i},$$

$Y_i^{(l)}$  est la sortie binaire de l'unité  $l$  dans le composant  $i$ , définie par :

$$Y_i^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ ne fonctionne pas} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $M_i$  est le nombre d'unités échantillonnées du composant  $i$ . Dans [5], pour les systèmes séries, on montre en supposant l'indépendance inter et intra-populations que la variance de  $\hat{F}$  est exprimée en fonction de la partition  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , comme suit :

$$Var \{ \hat{F} \} = F^2 \left[ \prod_{i=1, n} \left( 1 + \frac{d_i^2}{M_i} \right) - 1 \right] \quad (1)$$

où  $d_i = \sqrt{1/F_i - 1}$  est l'inverse du coefficient de variation  $c_i = \sqrt{1/R_i - 1}$  d'une population de Bernoulli. Donc, la variance de  $\hat{R}$  pour un système parallèle a la même structure que celle obtenue dans le cas d'un système en série [5] :

$$Var \{ \hat{R} \} = (1 - R)^2 \left[ \prod_{i=1, n} \left( 1 + \frac{1}{c_i^2 M_i} \right) - 1 \right] \quad (2)$$

où le terme fiabilité est simplement remplacé par son dual défaillance, et les coefficients de variation par leurs inverses.

1. Cette dualité existe déjà entre l'impédance et l'admittance en électromagnétisme.

### 2.1. Le plan d'échantillonnage optimal

Le problème consiste à estimer la fiabilité du système, lorsque les fiabilités de ses composants sont inconnues et un nombre total d'unités à échantillonner  $T$  est fixé. Plus la variance de  $\hat{R}$  est petite, plus notre estimateur est meilleur. Ainsi, le plan d'échantillonnage optimal consiste à sélectionner  $M_i$ , le nombre d'unités à tester dans chaque composant  $i$ , solution du problème d'optimisation suivant :

$$(opt) \begin{cases} \min Var \{ \hat{R} \} \\ M_1 + M_2 + \dots + M_n = T \end{cases}$$

**Théorème 1** *Supposons que les  $M_i$  sont des variables continues; alors la solution du plan optimal satisfait les conditions suivantes :*

$$\frac{M_i}{M_n} = \frac{(1 + M_n c_n^2)}{(1 + M_i c_i^2)} : i = 1, \dots, n - 1, \quad (3)$$

$$M_n = T - \sum_{i=1, n-1} M_i. \quad (4)$$

En outre, l'estimateur obtenu par ce plan est efficace.

**Preuve.** Si on traite les  $M_i$  comme des variables continues, alors il s'agit d'un problème standard de minimisation d'une fonction de  $n$  variables avec une contrainte. Les conditions (3) et (4) peuvent être aisément obtenues à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Noter que l'hypothèse d'indépendance permet d'une part de travailler dans le cadre classique des estimateurs sans biais, puisque le produit d'estimateurs sans biais est aussi sans biais, et d'autre part d'obtenir une expression simple de la variance du produit comme fonction de la la partition  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Par conséquent, lorsque la taille de l'échantillon  $T$  tend vers l'infini, alors au moins l'un des  $M_i$  tend vers l'infini, et d'après les conditions d'optimalité (3) et (4) on conclut que tous les  $M_i$  tendent vers l'infini. Comme résultat, la variance optimale de  $\hat{R}$  tend vers zéro. Ainsi, l'estimateur  $\hat{R}$  obtenu par la procédure optimale est un estimateur efficace. ■

Une conséquence directe de ce théorème est que la variance de  $\hat{R}$  atteint son minimum lorsque les équations suivantes sont satisfaites :

$$\frac{M_i}{M_j} = \frac{c_j \sqrt{1 + \frac{1}{c_j^2(M_i + M_j)}}}{c_i \sqrt{1 + \frac{1}{c_i^2(M_i + M_j)}}} : \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

Malheureusement, ces équations dépendent des inconnues  $c_i$ . En particulier, lorsque tous les composants ont la même fiabilité, le plan optimal devient équivalent au schéma équilibré, défini par :

$$M_i = \frac{T}{n} : i = 1, \dots, n.$$

L'estimateur obtenu par ce plan rudimentaire est un estimateur absolument correct, i.e. sans biais et sa variance tend vers zéro.

**Exemple 1** *Dans le cas spécial d'un système parallèle de deux composants ( $n = 2$ ), le plan optimal devient :*

$$\begin{cases} \frac{M_1}{M_2} = \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{c_2^2 T}}{1 + \frac{1}{c_1^2 T}}}, \\ M_2 = T - M_1, \end{cases} \quad (6)$$

ce qui fait que pour  $T$  assez grand, les  $M_i$  deviennent inversement proportionnels aux coefficients de variation, en négligeant les termes d'ordre supérieur en  $T^{-1}$  :

$$\begin{cases} \frac{M_1}{M_2} = \frac{c_2}{c_1}, \\ M_2 = T - M_1. \end{cases} \quad (7)$$

La variance de la fiabilité estimée  $\hat{R}$  peut être explicitée à l'aide de (2), comme suit :

$$\text{Var} \{ \hat{R} \} = \frac{(1-R)^2}{T} \left( (\alpha + \beta)^2 + \frac{(M_2\alpha - M_1\beta)^2}{M_1M_2} \right) \quad (8)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{c_1} \sqrt{1 + \frac{1}{c_2^2 T}},$$

$$\beta = \frac{1}{c_2} \sqrt{1 + \frac{1}{c_1^2 T}}.$$

Il est clair que si les conditions (6) sont satisfaites alors la variance devient optimale et on a dans ce cas :

$$\text{Var}_{(optimal)} \{ \hat{R} \} = \frac{(1-R)^2}{T} (\alpha + \beta)^2. \quad (9)$$

En particulier, la variance produite par le plan équilibré, i.e.  $M_1 = M_2 = T/2$  peut être déduite de (8) :

$$\text{Var}_{(équilibré)} \{ \hat{R} \} = \text{Var}_{(optimal)} \{ \hat{R} \} + \frac{(1-R)^2}{T} (\alpha - \beta)^2 \quad (10)$$

Par conséquent, le seul cas où le plan équilibré devient optimal est lorsque  $\alpha = \beta$ , i.e. lorsque les composants ont la même fiabilité. Soit par exemple, un total de  $T = 100$  unités doivent être testés dans un système parallèle de deux composants avec des fiabilités données  $R_1 = 0.8$  et  $R_2 = 0.9$ . Les coefficients de variation sont  $c_1 = 1/2$  et  $c_2 = 1/3$ . En résolvant le système (6), le plan optimal propose de tester approximativement  $M_1 = 40$  unités du premier composant, alors que le plan équilibré testera 50 de chaque composant. Les variances produites par les deux plans sont :

$$\text{Var}_{(équilibré)} \{ \hat{R} \} = 0.00010976,$$

$$\text{Var}_{(optimal)} \{ \hat{R} \} = 0.00010599.$$

Le schéma asymptotique proposé par les équations (7) produit approximativement la même partition que le plan optimal  $M_1 = 40$ ,  $M_2 = 60$ , et avec une même variance 0.000106. Malheureusement, lui aussi dépend des coefficients de variation qui restent inconnus.

## 2.2. Le plan d'échantillonnage séquentiel (R-SS)

En suivant [5], l'idée pour construire un plan approximativement optimal est d'alterner de manière séquentielle entre l'échantillonnage et la mise à jour des inconnues à chaque étape. Supposons qu'à l'étape  $k$  on a testé  $M_{i,k}$  unités du composant  $i$ , alors le coefficient de variation  $c_i$  peut être mis à jour par son estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{c}_{i,k} = \sqrt{\frac{1}{\hat{R}_{i,k}} - 1}$$

où  $\hat{R}_{i,k}$  est la moyenne échantillonnée des unités qui fonctionnent du composant  $i$  :

$$\hat{R}_{i,k} = \frac{\sum_{l=1, M_{i,k}} X_{i,k}^{(l)}}{M_{i,k}},$$

$X_{i,k}^{(l)}$  étant la sortie binaire de l'unité  $l$  du composant  $i$  à l'étape  $k$ , définie par :

$$X_{i,k}^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ fonctionne,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A cette étape, la variance de  $\hat{R}$  atteint son minimum si les conditions (5) sont satisfaites, i.e.

$$\frac{M_{i,k}}{M_{j,k}} = \frac{c_{j,k} \sqrt{1 + \frac{1}{c_{j,k}^2 (M_{i,k} + M_{j,k})}}}{c_{i,k} \sqrt{1 + \frac{1}{c_{i,k}^2 (M_{i,k} + M_{j,k})}}} : \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (11)$$

D'où, le plan séquentiel (R-SS) peut être dérivé, comme dans [5], par l'algorithme suivant :

### Algorithme (R-SS)

- 1) Tester une unité de chaque composant.
- 2) Si à l'étape  $k$  on a testé  $M_{i,k}$  unités du composant  $i$ , alors à l'étape  $k + 1$  tester encore 1 unité de  $i$  si

$$\frac{M_{i,k}}{M_{j,k}} < \frac{\hat{c}_{j,k} \sqrt{1 + \frac{1}{\hat{c}_{j,k}^2 (M_{i,k} + M_{j,k})}}}{\hat{c}_{i,k} \sqrt{1 + \frac{1}{\hat{c}_{i,k}^2 (M_{i,k} + M_{j,k})}}} : \forall j \neq i.$$

- 3) Si l'égalité se produit, résoudre la situation de manière arbitraire (aléatoire ou en alternant le choix).

- 4) Stop si  $M_{1,k} + M_{2,k} + \dots + M_{n,k} = T$ , sinon  $k := k + 1$  et aller en 2.

**Théorème 2** *Le schéma (R-SS) est asymptotiquement optimal, pour  $T$  assez grand. Plus précisément, l'excès de variance produite par le (R-SS) sur la variance produite par le plan optimal est d'ordre  $1/T$ , lorsque  $T$  tend vers l'infini, i.e.*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \left( \text{Var}_{(R-SS)} \{ \hat{R} \} - \text{Var}_{(optimal)} \{ \hat{R} \} \right) = 0.$$

Rappelons que l'estimateur obtenu par le schéma optimal est efficace. Une conséquence directe de ce théorème est que l'estimateur obtenu par le (R-SS) est asymptotiquement efficace.

**Preuve.** Remarquer d'abords que ce schéma peut être déduit par dualité du (R-SS), comme il a été défini dans [5] pour les systèmes en série, en changeant simplement la fiabilité de chaque composant par sa défaillance. Ainsi, la loi forte des grands nombres conduit à l'optimalité asymptotique du (R-SS) dans le cas des grands échantillons, et qui s'exprime dans notre cas par :

$$\frac{M_{i,k}}{M_{j,k}} \rightarrow \frac{c_j}{c_i} : k \rightarrow \infty. \quad (12)$$

D'où, la suite de la preuve est similaire à celle dans [5]. ■

### 3. Plans d'échantillonnage pour estimer la fiabilité des systèmes séries/parallèles

Considérer maintenant un système  $S$  de  $n$  sous-systèmes  $S_1, S_2, \dots, S_n$  connectés en série, chaque sous-système  $S_j$  contient  $n_j$  composants  $S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{n_jj}$  connectés en parallèle. Le but est de déterminer un plan d'échantillonnage pour estimer la fiabilité de  $S$ , lorsque le nombre total  $T_j$  des unités à tester dans chaque sous-système  $S_j$  est fixé. Ainsi, le problème est de sélectionner  $M_{ij}$ , le nombre d'unités à tester dans chaque composant  $S_{ij}$ , sous l'ensemble des contraintes :

$$\sum_{i=1, n_j} M_{ij} = T_j : j \in \{1, \dots, n\}, \quad (13)$$

et tel que la variance de la fiabilité estimée  $\hat{R}$  du système soit la plus petite possible. En supposant l'indépendance inter et intra-populations, la fiabilité du système est :

$$R = \prod_{j=1, n} R_j$$

où

$$R_j = 1 - \prod_{i=1, n_j} (1 - R_{ij}) \quad (14)$$

est la fiabilité du sous-système parallèle  $S_j$ , et  $R_{ij}$  la fiabilité du composant  $S_{ij}$ . On estime  $R$  par le produit :

$$\hat{R} = \prod_{j=1, n} \hat{R}_j \quad (15)$$

où

$$\hat{R}_j = 1 - \prod_{i=1, n_j} (1 - \hat{R}_{ij}), \quad (16)$$

$\hat{R}_{ij}$  est la moyenne échantillonnée des unités qui fonctionnent du composant  $S_{ij}$  :

$$\hat{R}_{ij} = \frac{\sum_{l=1, M_{ij}} X_{ij}^{(l)}}{M_{ij}}, \quad (17)$$



utilisée pour estimer  $R_{ij}$ , et  $X_{ij}^{(l)}$  étant la sortie binaire de l'unité  $l$  du composant  $S_{ij}$ , définie par :

$$X_{i,j}^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ fonctionne,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la solution à notre problème est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 1** *Supposons l'indépendance inter et intra-populations, alors la variance de  $\hat{R}$  s'écrit :*

$$Var \{ \hat{R} \} = \prod_{j=1,n} \left( Var \{ \hat{R}_j \} + R_j^2 \right) - \prod_{j=1,n} R_j^2, \quad (18)$$

et atteint son minimum sous l'ensemble des contraintes (13), si pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  la variance de  $\hat{R}_j$  atteint son minimum sous la contrainte correspondante  $M_{1j} + M_{2j} + \dots + M_{nj} = T_j$  (fixé).

**Preuve.** On déduit de (15) que la variance de  $\hat{R}$  peut être obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} Var \{ \hat{R} \} &= E \left( \prod_{j=1,n} \hat{R}_j^2 \right) - E^2 \left( \prod_{j=1,n} \hat{R}_j \right) \\ &= \prod_{j=1,n} E \left( \hat{R}_j^2 \right) - \prod_{j=1,n} E^2 \left( \hat{R}_j \right) \\ &= \prod_{j=1,n} \left( Var \{ \hat{R}_j \} + E^2 \left( \hat{R}_j \right) \right) - \prod_{j=1,n} E^2 \left( \hat{R}_j \right). \end{aligned}$$

En utilisant (17) et l'indépendance dans la relation (16) il est simple de vérifier que  $\hat{R}_j$  est un estimateur sans biais de  $R_j$  et par conséquent  $E^2 \left( \hat{R}_j \right) = R_j^2$ . D'où, la preuve est achevée par le fait que  $R_j^2$  n'est pas affecté par l'échantillonnage et aussi que  $Var \{ \hat{R}_j \}$  est positive pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . ■

Comme conséquence, l'application du plan optimal dans chaque sous-système produit une variance optimale pour tout le système et qui est donnée par la relation (18), comme suit :

$$Var_{(optimal)} \{ \hat{R} \} = \prod_{j=1,n} \left( Var_{(optimal)} \{ \hat{R}_j \} + R_j^2 \right) - \prod_{j=1,n} R_j^2 \quad (19)$$

**REMARQUE.** — De manière générale, la variance produite par n'importe quel plan est obtenue (ou définie) par la même règle. Par exemple, le plan (R-SS) pour les systèmes série/parallèle peut être défini en utilisant l'algorithme (R-SS) pour chaque sous-système parallèle  $S_j$  sous la contrainte  $T_j$  fixé, juste comme il a été défini dans la section précédente. Son comportement lorsque tous les  $T_j$  tendent vers l'infini est illustré par le théorème suivant.

**Théorème 3** *Supposer que tous les  $T_j$  tendent vers l'infini à la même vitesse, i.e,*

$$\frac{\max_j (T_j)}{\min_j (T_j)} \leq c \quad (20)$$

où  $c$  est une constante positive. Alors :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \left( \text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R} \right\} - \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R} \right\} \right) = \mathbf{0} \quad (21)$$

**Preuve.** D'après (18),  $\text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R} \right\}$  peut être définie comme suit :

$$\text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R} \right\} = \prod_{j=1,n} \left( \text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R}_j \right\} + R_j^2 \right) - \prod_{j=1,n} R_j^2.$$

En écrivant les termes  $\text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R}_j \right\} + R_j^2$  sous la forme équivalente :

$$\text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R}_j \right\} - \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R}_j \right\} + \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R}_j \right\} + R_j^2,$$

on obtient :

$$\text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R} \right\} = \prod_{j=1,n} (a_j + b_j) - \prod_{j=1,n} R_j^2$$

où pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  on a noté :

$$\begin{aligned} a_j &= \text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R}_j \right\} - \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R}_j \right\}, \\ b_j &= \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R}_j \right\} + R_j^2. \end{aligned}$$

De même, en utilisant (19), on peut écrire :

$$\text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R} \right\} = \prod_{j=1,n} b_j - \prod_{j=1,n} R_j^2$$

En développant le produit, il est technique mais aisé de vérifier que l'on a :

$$\prod_{j=1,n} (a_j + b_j) - \prod_{j=1,n} b_j = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

où  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont définis par :

$$A_1 = a_1 (a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n), \quad A_n = a_n b_1 b_2 \cdots b_n,$$

et pour  $1 < j < n$  :

$$A_j = (b_1 b_2 \cdots b_{j-1}) a_j (a_{j+1} + b_{j+1}) \cdots (a_n + b_n).$$

D'où, on a :

$$T \cdot \left( \text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R} \right\} - \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R} \right\} \right) = T (A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

Il sera alors suffisant de montrer que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T A_j = 0. \quad (22)$$

Or, d'après l'optimalité asymptotique d'ordre 1 du (R-SS) dans chaque sous-système parallèle (voir théorème 2), on a pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\lim_{T_j \rightarrow \infty} T_j a_j = \lim_{T_j \rightarrow \infty} T_j \left( \text{Var}_{(R-SS)} \left\{ \hat{R}_j \right\} - \text{Var}_{(optimal)} \left\{ \hat{R}_j \right\} \right) = 0, \quad (23)$$

L'hypothèse (20) implique que si  $T_j$  tend vers l'infini alors tous les  $T_k, k \neq j$ , tendent vers l'infini. D'après le théorème 1, les estimateurs obtenus par le plan optimal dans chaque sous-système sont efficaces. Donc, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la variance produite par le plan optimal de  $\hat{R}_k$  tend vers 0, et par conséquent  $b_k$  tend vers  $R_k^2$ , quand  $T_k$  tend vers l'infini. De là, on déduit à l'aide de (23) que :

$$\begin{aligned} \lim_{T_j \rightarrow \infty} T_j A_j &= \lim_{T_j \rightarrow \infty} (b_1 b_2 \cdots b_{j-1}) [T_j a_j] (a_{j+1} + b_{j+1}) \cdots (a_n + b_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, l'hypothèse (20) implique que  $T/T_j$  reste borné pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , et par conséquent :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T A_j = \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{T}{T_j} T_j A_j = 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

---

## 4. Simulation Monte-Carlo

On commence d'abord par le cas basique de deux composants par sous-système, de telle sorte que l'on puisse facilement déterminer la procédure optimale et calculer la variance produite par celle-ci. On fait alors une comparaison entre le (R-SS), le plan optimal et le plan équilibré, dans le cas d'un seul système parallèle de deux composants, lorsque les fiabilités varient et  $T = 100$  est fixé. La variance produite par chaque plan est reportée dans le tableau 1 ainsi que le nombre moyen des unités à tester  $E(M_1)$  affecté au premier composant par le (R-SS). Clairement, les résultats indiquent que le plan séquentiel (R-SS) est bien plus efficace que le plan équilibré et que le seul cas où ce dernier l'emporte est celui où  $R_1 = R_2$ . Dans le tableau 2, nous avons reporté l'excès de variance  $V_{(R-SS)} - V_{(optimal)}$  ainsi que sa vitesse par rapport à  $T^{-1}$ , pour différentes valeurs de  $T$ . Les résultats valident l'optimalité asymptotique d'ordre 1 du (R-SS) et la figure 1 confirme visiblement sa performance par rapport au plan équilibré. On considère ensuite un système série/parallèle simple composé de deux sous-systèmes ayant deux composants chacun montés en parallèle, avec des fiabilités respectives données :  $R_{11} = 0.9$ ,  $R_{12} = 0.99$ ;  $R_{21} = 0.55$ ,  $R_{22} = 0.5$ . Le partitionnement a priori pour chaque sous-système étant fixé à  $T_1 = T/4$ ,  $T_2 = 3T/4$ , et on fait varier  $T$  de 100 à 1000 par pas de 100. Les résultats sont reportés dans la figure 2 et montrent l'efficacité asymptotique du schéma séquentiel (R-SS), lorsque  $T$  augmente. On remarque que dans tous les cas, lorsque les fiabilités des différents composants sont assez différentes, alors le schéma séquentiel propose un partitionnement non équilibré, et produit ainsi une variance de plus en plus proche de la variance optimale. Finalement, on considère un système série/parallèle plus complexe composé de 4 sous-systèmes en série, les sous-systèmes sont composés respectivement de 2,3,4 et 5 composants montés en parallèle avec différentes fiabilités (voir figure 3). Le partitionnement a priori pour chaque sous-système étant fixé uniforme, i.e. ;  $T_j = T/4$  pour  $j = 1, \dots, 4$ , et on fait varier  $T$  de 100 à 10000 par pas de

100. Les variances produites par le (R-SS) et par le schéma équilibré sont reportées dans la figure 4 en échelle logarithmique. La variance produite par le (R-SS) décroît bien plus rapidement que la variance donnée par le schéma équilibré, lorsque  $T$  augmente.

---

## **5. Conclusion**

Dans ce travail, nous avons développé une procédure efficace pour estimer la fiabilité des systèmes séries/parallèles lorsque les tailles d'échantillons dans chaque sous-système sont fixées assez grandes et du même ordre. Notamment, les systèmes parallèles/séries où les sous-systèmes sont connectés en parallèle et leurs composants en série sont traités par la même technique, en utilisant la dualité. Le problème du partitionnement dynamique qui envisage un plan complètement séquentiel, dans lequel les  $T_j$  sont inconnus, sort du cadre de cet article et fera l'objet d'un prochain travail.

$(R_1, R_2)$	$V_{(R-SS)}$	$V_{(équilibré)}$	$V_{(optimal)}$	$*E(M_1)$
(.1,.1)	.0029192	.0029192	.0029192	50.014
(.1,.5)	.0036121	.004509	.003612	25.362
(.1,.7)	.0025373	.0035716	.0025372	18.282
(.1,.9)	.00090893	.0014792	.00090885	10.1
(.5,.5)	.002525	.002525	.002525	49.92
(.5,.7)	.0014595	.001521	.0014593	39.164
(.5,.9)	.00041191	.000509	.00041189	25.423
(.7,.8)	.00046166	.00046944	.00046164	43.222
(.7,.9)	.0001929	.00021156	.0001929	34.308
(.8,.9)	.00010599	.00010976	.00010599	40.423

**Tableau 1.** Comparaison entre le (R-SS), le plan équilibré et la plan optimal pour un système parallèle de deux composants pour des fiabilités variables [ $T=100$ ; 1000 simulations].  $*E(M_1)$ =nombre moyen obtenu par le (R-SS) pour le composant 1.

$T$	$V_{(R-SS)} - V_{(optimal)}$	Vitesse*
100	3.0480e-008	3.0480e-006
200	4.5717e-009	9.1434e-007
300	3.0313e-009	9.0940e-007
400	1.8815e-009	7.5260e-007
500	8.3525e-010	4.1763e-007
600	3.4367e-010	2.0620e-007
700	3.9825e-010	2.7878e-007
800	1.9784e-010	1.5827e-007
900	5.8692e-011	5.2823e-008
1000	1.3639e-011	1.3639e-008

**Tableau 2.** Comparaison entre le (R-SS) et le plan optimal pour un système parallèle de deux composants pour différentes valeurs de  $T$  [ $R_1 = 0.9$ ,  $R_2 = 0.99$ ; 1000 simulations].  $*Vitesse = T (V_{(R-SS)} - V_{(optimal)})$

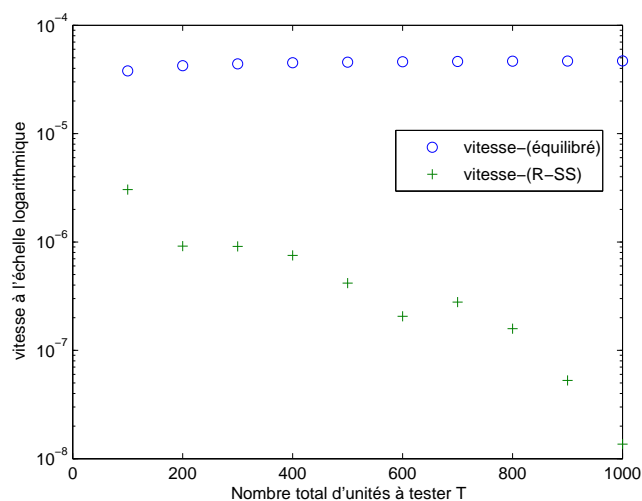


Figure 1. Comparaison entre le (R-SS) et le plan optimal pour un système parallèle de deux composants lorsque T varie [ $R_1 = 0.9$ ,  $R_2 = 0.99$ ; 1000 simulations].

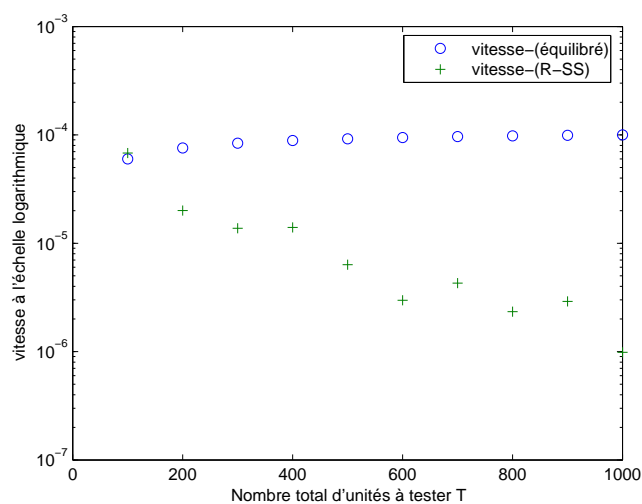
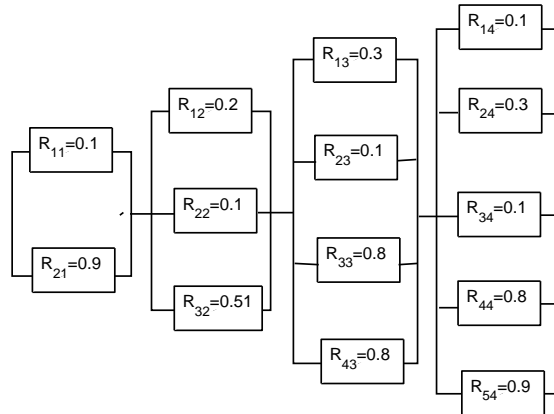
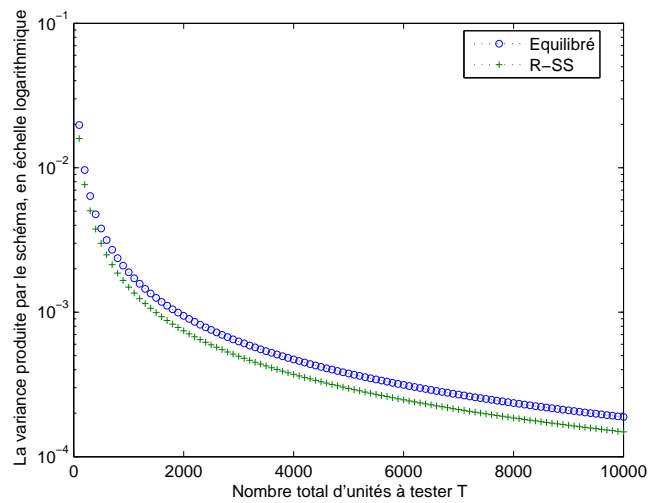


Figure 2. Comparaison entre le (R-SS) et le plan optimal pour un système série/parallèle composé de deux sous-systèmes, chacun a deux composants, lorsque T varie [ $R_{11} = 0.9$ ,  $R_{12} = 0.99$ ;  $R_{21} = 0.55$ ,  $R_{22} = 0.5$ ; 1000 simulations].



**Figure 3.** Un système série/parallèle non trivial : Les fiabilités sont données pour la simulation. Le partitionnement à priori est uniforme égale à  $T/4$  par sous-système.



**Figure 4.** Un système série/parallèle non trivial : La variance produite par le R-SS décroît plus rapidement que la variance donnée par le schéma équilibré.

---

## 6. Bibliographie

- [1] D. A. BERRY, « Optimal Sampling Schemes for Estimating System Reliability by Testing Components—1 :Fixed Sample Sizes », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, n° 346, p. 485–491, 1974.
- [2] M. DJERDJOUR, K. REKAB, « A sampling scheme for reliability estimation », *Southwest J. Pure Appl. Math.*, vol. electronic, n° 2, p. 1–5, 2002.
- [3] M. DJERDJOUR, K. REKAB, « A branch and bound algorithm for designing reliable systems at a minimum cost. », *Appl. Math. Comput.*, vol. 118, n° 2-3, p. 247–259, 2001.
- [4] C.F. PAGE, « Allocation Proportional to Coefficients of Variation when Estimating the Product of Parameters », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 85, n° 412, p. 1134–1139, 1990.
- [5] K. REKAB, « A Sampling Scheme for Estimating the Reliability of a Series System », *IEEE Trans. Reliability*, vol. 42, n° 2, p. 287–291, 1992.
- [6] K. REKAB, M. TAHIR, « A Two-Stage Allocation Scheme for Estimating the Product of Several Means », *Stochastic Anal. Appl.*, vol. 18, n° 2, p. 289–298, 2000.
- [7] K. REKAB, X. YAN, , A. MARK, « Asymptotic Optimality of Fully Sequential Design and Stopping Rule for Myopic Design. », *Int. J. Math. Comput. Sci.*, vol. 2, n° 1, p. 41–48, 2007.
- [8] C.P. SHAPIRO, « Allocation Schemes for Estimating the Product of Positive Parameters », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 80, n° 390, p. 449–454, 1985.
- [9] M. WOODROOFE, J. HARDWICK, « Sequential Allocation for an Estimation Problem with Ethical Costs », *Ann. Statist.*, vol. 18, n° 3, p. 1358–1377, 1990.