

Graphes à degrés prescrits iid sur un processus ponctuel stationnaire

Eyal Castiel

► **To cite this version:**

Eyal Castiel. Graphes à degrés prescrits iid sur un processus ponctuel stationnaire. Probabilités [math.PR]. 2016. hal-01399526

HAL Id: hal-01399526

<https://hal.inria.fr/hal-01399526>

Submitted on 19 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Graphes à degrés prescrits iid sur un processus ponctuel stationnaire

Eyal Castiel sous la direction de Bartłomiej Błaszczyszyn

November 15, 2016

Résumé: Le but de ce mémoire est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un graphe invariant par translation simple à degrés iid sur un processus ponctuel stationnaire. On commence dans le cas d'un processus ponctuel de Poisson puis on essaye d'adapter les conditions et les preuves au cas non poissonnien. Ce mémoire découle d'une lecture approfondie de l'article de Maria Deijfen: "Stationary random graphs with prescribed iid degrees on a spatial Poisson process" ([Dei08]).

mots clefs: Processus ponctuels stationnaires, Poisson, modèle de configuration, Palm, mariages stables, graphes stationnaires

1 Préliminaires

Avant de décrire formellement le problème étudié dans ce mémoire, voici quelques résultats classiques de l'étude des processus ponctuels stationnaires dans \mathbb{R}^d et plus particulièrement une présentation rapide de résultats issus de la théorie de Palm pour les processus ponctuels. On profite aussi de cette section d'introduction pour fixer des notations qui seront valables dans toute la suite.

(Ω, \mathcal{F}) désigne un espace mesurable, que l'on muni d'une probabilité \mathbb{P} . \mathcal{B} est la tribu borélienne sur \mathbb{R}^d . On note $l(\cdot)$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d et $B(x, r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon r , $B(r)$ désigne la boule centrée en 0. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\delta_x(\cdot)$ est la masse de Dirac en x . C'est à dire que pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ $\delta_x(A) = \mathbf{1}_{x \in A}$.

Définition 1. Soit S_t l'opérateur de décalage sur les mesures; pour μ mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$: pour tout $B \in \mathcal{B}$ $S_t \mu(B) = \mu(B + t)$.

On note que si μ est une mesure ponctuelle (de la forme $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{x_k}$) alors

$$S_t \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{x_k - t}.$$

Remarque. On peut étendre cet opérateur à toute fonction $X(\cdot)$ de \mathbb{R}^d dans un espace quelconque en prenant $S_t X(x) = X(x + t)$.

Définition 2. On appelle flot sur (Ω, \mathcal{F}) une famille d'application $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}^d}$, $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ vérifiant les conditions suivantes:

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, θ_t est une bijection ;
2. Pour tous $t, s \in \mathbb{R}^d$, $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$;
3. L'application $(\mathbb{R}^d, \Omega) \ni (t, \omega) \mapsto \theta_t(\omega)$ est $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$ mesurable.

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$ et $\theta_0 = Id_{\Omega}$.

Un processus ponctuel \mathcal{P} (respectivement un processus stochastique $X(\cdot)$) est dit compatible avec le flot si $\mathcal{P} \circ \theta_t = S_t \mathcal{P}$ (respectivement si $X(\cdot) \circ \theta_t = S_t X(\cdot)$) pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

Définition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ avec $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ un flot sur (Ω, \mathcal{F}) et \mathbb{P} une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ est un cadre stationnaire si $\mathbb{P} \circ \theta_t^{-1} = \mathbb{P} \forall t \in \mathbb{R}^d$.

Un processus ponctuel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ compatible avec le flot est dit stationnaire.

Remarque. La loi d'un processus ponctuel stationnaire est invariante par translation. Sa mesure moyenne est donc proportionnelle à la mesure de Lebesgue, c'est à dire que $M(dx) = \lambda \times l(dx)$ avec $0 \leq \lambda \leq +\infty$. λ est appelée l'intensité du processus ponctuel. Dans toute la suite \mathcal{P}^λ est un processus ponctuel de Poisson stationnaire d'intensité λ , $\mathcal{P} := \mathcal{P}^1$ (on précisera toujours l'espace sur lequel ce processus ponctuel est considéré).

Il est aussi intéressant de noter qu'un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ compatible avec le flot est en fait généré par une seule variable: en effet $X_t(\omega) = X_0(\theta_t(\omega))$.

On en déduit que les marques d'un processus ponctuel marqué $\overline{\mathcal{R}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(x_i, k_i)}$ compatible avec le flot sont donc générées par une variable aléatoire K composée avec les θ_{x_i} (ou de manière équivalente un processus stochastique $\{K(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ évalué sur les atomes d'un processus ponctuel stationnaire \mathcal{R}).

Définition 4. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel stationnaire (sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$) avec une intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La probabilité de Palm de \mathcal{R} est l'unique mesure de probabilité \mathbb{P}^* sur (Ω, \mathcal{F}) donnée pour n'importe quel $B \in \mathcal{B}$ par

$$\mathbb{P}^*(A) = \frac{1}{\lambda l(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{x \in B\}} \mathbf{1}_{\{\theta_x \in A\}} \mathcal{R}(dx) \right] \quad A \in \mathcal{F}.$$

On note \mathbb{E}^* l'espérance venant de cette probabilité.

Voici un premier théorème qui permet de lier la probabilité \mathbb{P} dite stationnaire à \mathbb{P}^* , le théorème de Campbell-Little-Mecke-Matthes (CLMM). Pour une preuve des résultats de cette section, nous renvoyons le lecteur à un livre de Bartłomiej Blaszczyzyn et F. Baccelli [BB09].

Théorème 1. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel stationnaire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ avec une intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ de probabilité de Palm \mathbb{P}^* . On a pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ (par exemple une fonctionnelle (mesurable) de \mathcal{R}):

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \theta_x) \mathcal{R}(dx) \right] = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^*[f(x, \omega)] dx.$$

On peut par exemple déduire de ce théorème que \mathbb{P}^* -p.s., on a $0 \in \mathcal{R}$; plus précisément, on cite ici le théorème de Slywniak-Mecke:

Théorème 2. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel stationnaire d'intensité finie défini sur le cadre stationnaire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ de probabilité de Palm \mathbb{P}^* .

\mathcal{R} est un processus de Poisson $\Leftrightarrow \mathcal{R}$ sous \mathbb{P}^* est égal en loi à $\mathcal{R} + \delta_0$ sous \mathbb{P} .

Définition 5. On dit qu'un ensemble de points $[\mathcal{R}]$ est non équidistant si pour tous x, y, z dans $[\mathcal{R}]$ on a $|x - y| = |y - z| \Rightarrow x = z$. Une chaîne décroissante est une suite infinie $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|x_i - x_{i+1}|$ est strictement décroissante.

Si \mathcal{K} est un graphe sur $[\mathcal{R}]$, pour $x \in [\mathcal{R}]$, $T(x)$ est la somme des longueurs de toutes les arêtes de \mathcal{K} issues de x et D_x le degré de x . Sous \mathbb{P}^* , on note D le degré de $0 \in [\mathcal{R}]$ et $T := T(0)$. Pour $i \geq 1$, on définit $[\mathcal{R}]_i := \{x \in [\mathcal{R}] : D_x \geq i\}$.

Définition 6. On dit qu'un graphe aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ plongé dans \mathbb{R}^d est stationnaire si le composer avec θ_x revient à traduire tous ses sommets et ses arêtes de $-x$.

Remarque. Si \mathcal{R} est un processus stationnaire d'intensité λ fini, non nul avec des marques compatibles, alors les $\mathcal{R}_i := \sum_{x \in \mathcal{R}} \delta_x \mathbf{1}_{\{D_x \geq i\}}$ sont des processus stationnaires

d'intensités λp_{i+} ; avec $p_{i+} = \sum_{k=i}^{+\infty} p_k$.

En effet, soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{R}_i(B)] &= \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i\}} \mathcal{R}(dx)\right] \\ &= \lambda \int_B \mathbb{E}^*[\mathbf{1}_{\{D_x \circ \theta_{-x} \geq i\}}] dx \text{ par CLMM} \\ &= l(B) \times \lambda p_{i+} \text{ par compatibilité des marques} \end{aligned}$$

On utilisera à plusieurs reprises la notion tirée de Gale et Shapley ([GS62]) de mariages stables, qu'on définit donc ici dans le cadre de préférences symétriques basées sur la distance entre deux points (voir [GS62] pour plus de détails). Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble dénombrable de points et soit m un couplage parfait de ces points (c'est à dire que (\mathcal{R}, V) est un graphe simple avec tous les degrés égaux à 1 avec $V = \{(x, m(x)) \mid x \in \mathcal{R}\}$).

Définition 7. m est un couplage instable si il existe $x, y \in \mathcal{R}$ tels que:

$$|x - y| < \min\{|x - m(x)|, |y - m(y)|\}$$

Dans ce cas le couple (x, y) est appelé paire instable. Si il n'existe pas de paire instable, le couplage m est dit stable.

Le terme "instable" vient du fait que chaque point "préfère" être apparié à un sommet le plus proche possible. En effet si (x, y) est une paire instable $|x - y| < \min\{|x - m(x)|, |y - m(y)|\}$ c'est à dire x préfère y à $m(x)$ et y préfère x à $m(y)$. Si un point x n'est pas apparié par m , on dit que $|x - m(x)| = +\infty$.

2 Introduction

Soit \mathcal{P} un processus ponctuel de Poisson. Le but de ce mémoire est de présenter une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un graphe stationnaire sur les atomes de \mathcal{P} avec des degrés indépendants et identiquement distribué de loi F ayant l'espérance de la somme de longueur des arêtes partant de 0 finie. On cherche ici à exposer le résultat prouvé dans l'article de Maria Deijfen "stationary random graphs with prescribed iid degrees on a spatial poisson process", ainsi que d'adapter cette condition au cas non poissonnien.

L'idée d'un graphe à degrés prescrits iid vient du modèle de configuration: un graphe abstrait sur un ensemble à $n < \infty$ sommets avec des degrés iid (on note l'absence d'objet limite lorsque $n \rightarrow +\infty$). Le modèle de configuration permet d'utiliser les graphes aléatoires pour modéliser des situations plus complexes que par exemple le graphe d'Erdős-Rényi (qui a forcément des degrés poissonniens lorsque $n \rightarrow +\infty$) en apportant une plus

grande liberté sur la distribution des degrés. On ajoute ici une composante spatiale avec le processus ponctuel ainsi qu'un nombre infini de sommets.

Voici le résultat principal exposé dans ce papier:

Théorème 3. Il existe un graphe invariant par translation à degrés prescrits iid de loi F sur $[\mathcal{P}] \subset \mathbb{R}^d$ les points d'un processus ponctuel de Poisson stationnaire tel que l'espérance de la somme des longueurs des arêtes partant de chaque point est finie si et seulement si F a un moment d'ordre $\frac{d+1}{d}$

On mentionne ici une condition pour l'existence (et même l'unicité) d'un couplage stable. L'unicité n'est pas vraie en général pour un couplage stable. Elle vient ici du fait que les préférences sont basées sur la distance et donc symétriques.

Proposition 1. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel stationnaire d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$. On suppose que presque sûrement \mathcal{R} est non équidistant et sans chaîne descendante. Alors il existe un unique couplage parfait stable entre les points de \mathcal{R} .

Une façon d'obtenir cet unique mariage stable peut être de coupler de manière répétée les plus proches voisins mutuels.

Plus précisément, on commence par appairer les points de \mathcal{R} qui sont plus proches voisins mutuels. On applique ensuite cette procédure à \mathcal{R} auquel on a enlevé les points couplés à l'étape précédente, etc... Les conditions pour l'existence d'un couplage stable garantissent que cette procédure est bien définie.

Lemme 1. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble discret, non équidistant et sans chaîne descendante. Il existe un unique couplage stable des points de U avec au maximum un point non apparié. De plus ce couplage peut être obtenu grâce à la procédure qui vient d'être exposée.

Preuve. On prouve par induction sur les étapes de la procédure que toutes les paires formées par cet algorithme sont aussi appariées dans les autres mariages parfaits.

Ceci est évident à la première étape où les plus proches voisins mutuels sont appariés. On suppose que toutes les paires formées par l'algorithme jusqu'à la n^{eme} étape sont aussi formées dans les autres mariages stables. Si deux points sont plus proches voisins mutuels à l'étape $n+1$ (après avoir retiré les points utilisés aux étapes précédentes), par hypothèse de récurrence ils ne forment pas de paires stables avec des sommets utilisés précédemment, de plus si ils étaient connectés à un point plus loin ils formeraient une paire instable.

Soit N l'ensemble des points laissés sans paires par cet algorithme. On va montrer que ces points sont aussi non appariés dans n'importe quel autre mariage stable. Ceci est évident si $\#N \leq 1$.

Supposons que $\#N \geq 2$. Soit $x_0 \in N$ et x_1 son plus proche voisin dans N (qui existe car U est discret et est unique par non équidistance). Pour $n \geq 0$, x_{n+1} est le plus proche voisin de x_n dans N . On a forcément $|x_n - x_{n+1}| \geq |x_{n+1} - x_{n+2}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme il n'y a pas de chaîne descendante il existe k tel que $|x_k - x_{k+1}| = |x_{k+1} - x_{k+2}| = r$, dans ce k par non équidistance $x_k = x_{k+2}$, ainsi x_k et x_{k+1} sont plus proches voisins

mutuels dans N et devraient donc être appariés une fois que tous les autres points de $U \cap (B(x_k, r) \cup B(x_{k+1}, r))$ ont été retirés. Ainsi x_k et x_{k+1} ne sont pas dans N donc $\#N \leq 1$ et le lemme est prouvé. \square

On prouve maintenant la proposition:

Preuve de la proposition 1. On applique le lemme 1. à $[\mathcal{R}]$ et on remarque que les hypothèses sur \mathcal{R} garantissent que cette procédure laisse au maximum un point non connecté (dans ce cas on dit que la distance à sa paire est infinie). D'autre part, si cela arrive avec probabilité positive, en conditionnant par cet événement, la localisation de ce point non-apparié serait une variable aléatoire sur \mathbb{R}^d invariante par translation, ce qui est impossible. Donc la probabilité d'avoir un point non-apparié est nulle. \square

On expose ici un lemme tiré de [DL05] qui prouve qu'un processus de Poisson rempli les conditions de la proposition 1.

Lemme 2. *Soit \mathcal{P}^λ un processus de Poisson stationnaire d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$. \mathcal{P}^λ est non équidistant et sans chaîne descendante \mathbb{P}^* -p.s. .*

Preuve. On commence par la non-équidistance; Grâce à l'invariance par translations et au théorème de Slyvniack, on peut se contenter de prouver que \mathbb{P} -p.s. il n'y a pas de points équidistants de l'origine.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists x, y \in [\mathcal{P}^\lambda] x \neq y \mid |x| = |y|) &\leq \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{\exists y \in \mathcal{P}^\lambda, x \neq y \mid |x| = |y|\}} \mathcal{P}^\lambda(dx)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{P}^\lambda(\{x \neq y \mid |x| = |y|\}) \mathcal{P}^\lambda(dx)\right] \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^*[\mathcal{P}^\lambda(\{y \neq 0 \mid |x| = |x+y|\})] dx \text{ par CLMM} \\
&= \lambda \mathbb{E}^*\left[\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|x| = |x+y|\}} dx \mathcal{P}^\lambda(dy)\right] = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|x| = |x+y|\}} dx = 0$

On prouve maintenant que \mathcal{P}^λ ne contient pas de chaîne descendante. On commence par noter que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})$, on a: $\alpha^{(n)}(B) := \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^{nd}} \mathbf{1}_{\{(x_1, \dots, x_n) \in B\}} \mathcal{P}^\lambda(dx_1, \dots, dx_n)\right] = \lambda^n l(B)$. Ceci est évidemment vrai pour les ensembles du type $B_1 \times \dots \times B_n$ puis on utilise

un argument de classes monotones.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}^\lambda : b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n|) &\leq \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^{nd}} \mathbb{1}_{\{b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n|\}} \mathcal{P}^\lambda(dx_1, \dots, dx_n) \right] \\
&= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^{nd}} \mathbb{1}_{\{b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n|\}} dx_1, \dots, dx_n \\
&= (\lambda b^d c)^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n\}} dx_1, \dots, dx_n \\
&= \frac{(\lambda b^d c)^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

La suite d'évènement $(\{\exists x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}^\lambda : b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n|\})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi $\mathbb{P}(\text{il existe une chaîne descendante infinie}) = \mathbb{P}(\exists x_1, \dots \in \mathcal{P}^\lambda : b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n| \geq \dots) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\exists x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}^\lambda : b \geq |x_1| \geq \dots \geq |x_{n-1} - x_n|) = 0.$

□

Remarque. On peut de la même manière prouver qu'un processus ponctuel stationnaire avec une mesure de moments factoriels telle que $\alpha^{(n)}(B) \leq c^n l(B)$ n'a pas de chaîne descendantes Pour une condition plus générale voir [DL05].

3 Preuve de la partie nécessaire

Grâce à l'invariance par translation, pour étudier le voisinage des points de $[\mathcal{P}]$, on peut se contenter d'étudier sous \mathbb{P}^* le voisinage de $0 \in [\mathcal{P}]$.

La partie nécessaire vient de l'impossibilité de construire des arêtes multiples: on verra en effet que si $\mathbb{E}[D^{\frac{d+1}{d}}] = +\infty$ la somme des distances entre 0 et ses D plus proches voisins dans $[\mathcal{P}]$ est d'espérance infinie (cette quantité est clairement un minorant de la quantité étudiée sous \mathbb{P}^*).

On exhibera ensuite une procédure afin de construire un graphe qui se trouve remplir les conditions souhaitées dès que $\mathbb{E}[\xi^{\frac{d+1}{d}}] < +\infty$.

Définition 8. Soit \mathcal{P}^λ un processus ponctuel de Poisson stationnaire d'intensité λ . $V^\lambda(r)$ est le nombre de points de $[\mathcal{P}^\lambda] \cap B(r)$.

pour $n \geq 1$, on pose $R_n^\lambda = \inf\{r > 0 : V^\lambda(r) \geq n\}$: le rayon de la plus petite boule centrée en 0 contenant n points de \mathcal{P}^λ .

Lemme 3. Pour $n \geq 1$ $\mathbb{E}[R_n^\lambda] = \frac{C}{\lambda^{1/d}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \frac{1}{d})}{\Gamma(k+1)}$ avec $C = C(d) \in]0; +\infty[$.

En particulier, $\mathbb{E}[R_n^\lambda] \geq c' \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{1/d}$.

Preuve. $l(B(r)) = cr^d$ donc $V^\lambda(r)$ suit une loi de Poisson de paramètre λcr^d . On a donc pour tout $r > 0, n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(R_n^\lambda \geq r) = \mathbb{P}(V^\lambda(r) \leq n) = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda cr^d)^k}{k!} e^{-\lambda cr^d}$.

La première égalité vient de la définition de R et V et la deuxième vient de la loi de V .

$$\text{On a donc: } \mathbb{E}[R_n^\lambda] = \int_0^\infty \mathbb{P}(R_n^\lambda \geq r) dr = \int_0^\infty \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda cr^d)^k}{k!} e^{-\lambda cr^d} dr$$

$$\text{calcul de } \int_0^\infty \frac{(\lambda cr^d)^k}{k!} e^{-\lambda cr^d} dr :$$

$$\text{On pose } \varphi(r) \text{ le } C^1\text{-difféomorphisme sur }]0; +\infty[\text{ } r \mapsto \left(\frac{r}{\lambda c}\right)^{1/d} \quad (\varphi'(r) = \frac{r^{\frac{1-d}{d}}}{d(\lambda c)^{1/d}})$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{(\lambda cr^d)^k}{k!} e^{-\lambda cr^d} dr = \int_0^\infty \frac{r^{k+\frac{1}{d}-1} e^{-r}}{k! d(\lambda c)^{1/d}} dr = \frac{1}{d(\lambda c)^{1/d}} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{d})}{\Gamma(k + 1)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R_n^\lambda] = \frac{1}{d(\lambda c)^{1/d}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \frac{1}{d})}{\Gamma(k + 1)}, \text{ ce qui prouve la 1}^{ere} \text{ partie du lemme avec } C = \frac{c^{-1/d}}{d}.$$

$\frac{\Gamma(k + \frac{1}{d})}{\Gamma(k + 1)}$ est décroissant en k donc :

$$\mathbb{E}[R_n^\lambda] \geq \frac{n}{d(\lambda c)^{1/d}} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{d})}{\Gamma(n + 1)} = \frac{1}{d(\lambda c)^{1/d}} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{d})}{\Gamma(n)}$$

En appliquant la formule de Stirling, on obtient :

$$\frac{\Gamma(n + \frac{1}{d})}{\Gamma(n)} \sim e^{-1/d} \sqrt{\frac{n + \frac{1}{d}}{n}} \left(\frac{n + \frac{1}{d}}{n}\right)^n (n + \frac{1}{d})^{1/d} \sim n^{1/d} \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad \square$$

preuve de la partie nécessaire du théorème 3. Sous \mathbb{P}^* , conditionnellement à D et R_D , on définit $A = \left\{ V \left(\frac{R_D}{3^{1/d}} \right) < \frac{D-1}{2} \right\}$. Sur cet évènement, au moins la moitié des $D-1$ $[\mathcal{P}]$ points de l'intérieur de R_D (on exclut l'origine et l'unique point de $[\mathcal{P}]$ à distance R_D de l'origine) sont à une distance de 0 supérieure ou égale à $\frac{R_D}{3^{1/d}}$.

\mathcal{P} est un processus de Poisson donc sous \mathbb{P}^* $[\mathcal{P}]$ a même loi que $\mathcal{P} + \delta_0$ sous \mathbb{P} par le théorème de Slyvniak. Étant donnés D et R_D , les D points de $[\mathcal{P}] \cap B(R_D) \setminus \{0\}$ sont distribués uniformément sur $B(R_D)$. Il en est donc de même sous la probabilité de Palm.

Ainsi conditionnellement à D et R_D , $V^* \left(\frac{R_D}{3^{1/d}} \right)$ suit une loi $\mathcal{B}in \left(D-1, \frac{l(B(\frac{R_D}{3^{1/d}}))}{l(B(R_D))} \right)$

. On utilise ici les propriétés caractéristiques des processus de Poisson.

$$\Rightarrow \mathbb{E}^* \left[V^* \left(\frac{R_D}{3^{1/d}} \right) \mid D, R_D \right] = (D-1) \frac{l(B(\frac{R_D}{3^{1/d}}))}{l(B(R_D))} = \frac{D-1}{3}$$

On applique ensuite l'inégalité de Markov à A , ce qui donne:

$$\mathbb{P}^*(A \mid D, R_D) \geq 1 - \left(\frac{D-1}{3} \times \frac{2}{D-1} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^*[T \mid D, R_D] \geq \frac{\mathbb{E}^*[T \mid A, D, R_D]}{3}$$

Remarque. Sur A , au moins la moitié des D demi-arêtes partantes de l'origine sont connectées à des sommets à une distance supérieure à $3^{-1/d}R_D$. Sur cet événement, on a donc $T \geq \frac{(D-1)R_D}{2 \times 3^{1/d}}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}^*[T] &= \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[T \mid D, R_D]] \\
&\geq \frac{\mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[T \mid A, D, R_D]]}{3} \\
&\geq \frac{\mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[(D-1)R_D \mid A, D, R_D]]}{6 \times 3^{1/d}} \text{ par la remarque précédente} \\
&= \frac{\mathbb{E}^*[(D-1)\mathbb{E}^*[R_D \mid D]]}{6 \times 3^{1/d}} \\
&\geq \frac{C'}{6 \times 3^{1/d}} \mathbb{E}^*[(D-1)D^{1/d}] \text{ par le lemme précédent}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathbb{E}^*[D^{1+1/d}] < +\infty$ est nécessaire pour que $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$. \square

Remarque 1. On remarque que cette preuve s'adapte parfaitement au cas non poissonnien: si on a un processus ponctuel \mathcal{R} tel que $\mathbb{P}^*(E_r) > 0$ avec E_r de la forme $E_r = \left\{ V \left(\frac{R_D^{\mathcal{R}}}{r} \right) < \frac{D-1}{2} \right\}$. Dans ce cas, $\mathbb{E}^*[DR_D^{\mathcal{R}}] < +\infty$ reste une condition nécessaire pour avoir $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$. Cette condition fait en sorte que le D^{eme} plus proche voisin de 0 soit (avec probabilité positive) "comparable" aux précédents. Plus précisément, si il existe $r \in]1; +\infty[$ tel que $B(0, \frac{R_D^{\mathcal{R}}}{r})$ contient moins de $\frac{D-1}{2}$ points de \mathcal{R} avec probabilité positive, alors $\mathbb{E}^*[DR_D^{\mathcal{R}}] = +\infty \Rightarrow \mathbb{E}^*[T] = +\infty$. Lorsque $r \rightarrow +\infty$ cette condition garantie que le processus étudié est simple (sous réserve que D ne soit pas à support borné).

Voici un résultat pour formaliser cette remarque:

Proposition 2. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel simple stationnaire d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$ marqué de manière iid de loi F (et indépendante de \mathcal{R}).

On rappelle que D est la marque de 0 sous \mathbb{P}^* .

Si $F([4; +\infty[) > 0$, $\mathbb{E}^*[DR_D^{\mathcal{R}}] < +\infty$ est nécessaire à l'existence d'un graphe avec les propriétés voulues.

Preuve. $({}^cE_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une famille d'événements décroissants en r . Ainsi il existe r tel que $\mathbb{P}^*({}^cE_r) < 1$ si et seulement si $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^*({}^cE_r) = \mathbb{P}^*\left(\bigcap_{r>1} {}^cE_r\right) < 1$.

$$\mathbb{P}^*\left(\bigcap_{r>1} {}^cE_r\right) = \mathbb{P}^*(\forall r > 1 V \left(\frac{R_D^{\mathcal{R}}}{r} \right) \geq \frac{D-1}{2}) = \mathbb{P}^*(\mathcal{R}(\{0\}) \geq \frac{D-1}{2}).$$

Comme \mathcal{R} est simple, sous \mathbb{P}^* , $\mathcal{R}(\{0\})$ est presque sûrement égal à 1. Si $F([4; +\infty[) > 0$, alors $\mathbb{P}^*\left(\bigcap_{r>1} {}^cE_r\right) < 1$ et il existe r^* tel que $\mathbb{P}^*(E_{r^*}) > 0$. Sur l'évènement

E_{r^*} au moins la moitié des D demi-arêtes partantes de l'origine sont connectées à des sommets qui sont à une distance supérieure à $\frac{R_D^{\mathcal{R}}}{r^*}$; On a donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[T] &= \mathbb{E}^*[T|E_{r^*}]\mathbb{P}^*(E_{r^*}) \\ &\geq \frac{\mathbb{E}^*[(D-1)R_D^{\mathcal{R}}]}{2r^*}\mathbb{P}^*(E_{r^*}) \end{aligned}$$

Donc si $F([4; +\infty[) > 0$, $\mathbb{E}^*[DR_D^{\mathcal{R}}] < +\infty$ est nécessaire à l'existence d'un graphe stationnaire sur les points de \mathcal{R} avec l'espérance de la somme de la taille des arêtes issue de l'origine finie. \square

Remarque 2. *On verra dans la section suivante qu'il est possible de construire un graphe ayant les propriétés désirées dès que F est à support borné. En particulier si $F([4; +\infty[) = 0$, on verra qu'il est toujours possible de construire un graphe stationnaire sur les points d'un processus stationnaire sur \mathbb{R}^d d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$ avec des degrés iid de loi F .*

4 Construction du graphe désiré

Définition 9. *Soit \mathcal{R} un processus ponctuel satisfaisant les conditions d'existence d'un mariage stable exposé précédemment. Pour $x \in [\mathcal{R}]$ on appelle $\mathcal{M}(x)$ la paire de x dans l'unique mariage stable au sens de la définition 7.*

On pourrait être tenté de chercher une construction en utilisant la notion de mariage stable. C'est, dans le cas de la dimension 1, une fausse piste comme le montre ce résultat tiré de Holroyd ([HPPS08] théorème 5 i.).

Fait 1. *Soit \mathcal{P} un processus ponctuel de Poisson sur \mathbb{R}^d d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$. On a*

$$\mathbb{E}^*[\mathcal{M}(0)^d] = +\infty$$

Remarque. *En particulier, on peut déduire de ce théorème que dans le cas $d=1$, n'importe quel graphe contenant les arêtes obtenues en reliant des paires stables des points d'un processus de Poisson donne $\mathbb{E}^*[T] = +\infty$. En revanche, tout n'est pas perdu pour $d \geq 2$.*

On déduit de cette remarque qu'on aura besoin de différencier les cas $d = 1$ et $d \geq 2$. Pour prouver la partie suffisante du théorème, on commence par régler le cas où F est à support borné.

4.1 Appariement adjacent décalé sur la ligne($d=1$)

Voici un premier algorithme pour la dimension 1.

Pour $i \geq 1$ soit $[\mathcal{P}]_i := \{x \in [\mathcal{P}] : D_x \geq i\}$. Pour chaque point $x \in [\mathcal{P}]$, on numérote ses demi-arêtes de 1 à D_x . On dit que la demi-arête numérotée i est "au niveau i " de la configuration. On commence par apparier les arêtes au niveau $u = \max(i : p_i > 0) < +\infty$ de la configuration.

On commence par numérotter les points de $[\mathcal{P}]_u$ par ordre croissant (x_0 est le point le plus proche de 0 dans $]-\infty; 0]$, sous \mathbb{P}^* , $x_0 = 0$). Avec probabilité $\frac{1}{2}$, x_0 est dit "gaucher" (et "droitier" sinon); chaque point numéroté par un nombre pair a la même orientation que x_0 et chaque point impair a l'orientation inverse. On commence par relier la u^{eme} demi-arête de chaque $x \in [\mathcal{P}]_u$. Pour se faire, si x est gaucher (respectivement droitier), on la connecte à la u^{eme} demi-arête du u^{eme} point droitier (respectivement gaucher) à sa gauche (respectivement à sa droite); c'est à dire au $2u - 1^{eme}$ point de $[\mathcal{P}]_u$ à sa gauche (respectivement à sa droite). Cette procédure ne dépend pas de la numérotation des points (seulement de leurs orientations) et on obtient la même arête selon si on part d'un point gaucher ou de sa paire droitère.

Pour $x \in [\mathcal{P}]_i$, on connecte sa demi-arête au niveau i en appliquant la même procédure aux points de $[\mathcal{P}]_i$ et on connecte la i^{eme} demi-arête d'un point gaucher (resp. droitier) au $2i - 1^{eme}$ point de $[\mathcal{P}]_i$ à sa gauche (resp. à sa droite).

Comme $[\mathcal{P}]_i \subset [\mathcal{P}]_{i-1}$ deux points ne peuvent pas être connectés plusieurs fois entre eux: en effet on commence par coupler les arêtes au niveau $u = \sup(i : p_i > 0) < \infty$ et on se rapproche en rajoutant des points. Cette procédure est appelée appariement adjacent décalé (Shifted Adjacent Matching, SAM).

On remarque aussi que comme les D_x sont des marques indépendantes identiquement distribuées, les $[\mathcal{P}]_i$ sont des processus de Poissons stationnaires d'intensités respectives p_{i+} . Ceci garantit l'invariance par translation de la procédure.

Proposition 3. *Si on applique SAM à un processus ponctuel de Poisson marqué (\mathcal{P}, ξ) sur \mathbb{R} défini sur le cadre stationnaire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ compatible avec le flot, d'intensité 1 avec des marques iid à support borné, on a $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$ (plus précisément $\mathbb{E}^*[T] = u^2$)*

Preuve. Sous \mathbb{P}^* on appelle que L_i la taille de la i^{eme} arête issue de l'origine ($L_i := 0$ si $D < i$).

Cette arête sera connectée au $(2i - 1)^{eme}$ point de $[\mathcal{P}]_i$ à gauche (ou à droite) de 0. Donc L_i a même loi qu'une somme de variables exponentielles de paramètre 1 (il y a un nombre $Negbin(2i - 1, p_{i+})$): il y a une variable exponentielle de paramètre 1 entre

chaque points de $[\mathcal{P}]$ et chacun est aussi dans $[\mathcal{P}]_i$ avec probabilité $p_{i+} = \sum_{k=i}^{\infty} p_k$.

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}^*[L_i \mid D \geq i] = \frac{2i - 1}{p_{i+}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}^*[T] &= \mathbb{E}^*\left[\sum_{i=1}^u L_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^u p_{i+} \mathbb{E}^*[L_i \mid D \geq i] \\ &= \sum_{i=1}^u 2i - 1 = \frac{2(u^2 + u)}{2} - u = u^2 < \infty \end{aligned}$$

□

Remarque 3. Ici l'hypothèse poissonnienne n'est pas indispensable : si on avait seulement un processus ponctuel compatible avec le flot et des marques iid, les $[\mathcal{P}]_i$ seraient aussi des processus stationnaires avec la même intensité que dans le cas poissonnien: pour $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[\#\{[\mathcal{P}]_i \cap B\}] = p_{i+} l(B)$ grâce à la compatibilité des marques et le théorème de Campbell-Little-Mecke-Matthes . On aurait donc une autre loi à la place de la loi exponentielle pour l'écart entre les points (qui ne seraient plus forcément indépendants). Si on a un écart de loi μ de moyenne $m < \infty$, on a toujours une somme d'un nombre binomial négatif de variable de moyenne m , ainsi $\mathbb{E}^*[L_i \mid D \geq i] = \frac{2i-1}{p_{i+}} \times m$ et le calcul se poursuit de la même manière.

4.2 Mariage stable coloré itéré dans \mathbb{R}^d $d \geq 2$

Avant de présenter l'algorithme pour $d \geq 2$, voici un résultat tiré de Holroyd ([HPPS08] théorème 5 ii.) que nous allons utiliser.

Théorème 4. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel sur le cadre stationnaire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ compatible avec le flot $(\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'intensité $\lambda \in]0; \infty[$. On rappelle que sous Palm, $\mathcal{M}(0)$ est la distance entre 0 et sa paire stable dans $[\mathcal{R}]$

Alors $\forall r > 0 \mathbb{P}^*(\mathcal{M}(0) > t) \leq \frac{C}{\lambda} t^{-d}$.

Preuve. On dit qu'un point $x \in [\mathcal{R}]$ est t -mauvais si $\bar{T}(x) := |\mathcal{M}(x) - x| > t$. On peut remarquer que le processus stochastique $(\bar{T}(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ est compatible avec le flot: en effet dans la configuration θ_x tous les points de $[\mathcal{R}]$ sont translatés de $-x$, cela conserve les longueurs et donc la paire de 0 dans cette nouvelle configuration est la paire de x translatée de $-x$.

i.e $\bar{T} \circ \theta_x(0) = |\mathcal{M} \circ \theta_x(0) - 0| = |\mathcal{M}(x) - x| = \bar{T}(x)$

Étant donné qu'on se trouve dans le cadre d'un mariage stable, deux points t -mauvais ne peuvent pas se situer à une distance inférieure à t : on aurait sinon $|\mathcal{M}(x) - x| > t$ et $|\mathcal{M}(y) - y| > t$ mais $|x - y| \leq t$ et x, y formeraient donc une paire instable.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 \geq \mathbb{E}[\#\{\{x \in [\mathcal{R}], x \text{ est } t\text{-mauvais}\} \cap B(t/2)\}] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{\bar{T} \circ \theta_x(0) > t\}} \mathbf{1}_{\{x \in B(t/2)\}} \mathcal{R}(dx) \right] \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{x \in B(t/2)\}} \mathbb{P}^*(\bar{T}(0) > t) dx \text{ par Campbell-Little-Mecke-Matthes} \\
&= c \left(\frac{t}{2} \right)^d \lambda \mathbb{P}^*(\mathcal{M}(0) > t) \\
&\Rightarrow \mathbb{P}^*(\mathcal{M}(0) > t) \leq \frac{C}{\lambda} t^{-d}
\end{aligned}$$

□

L'algorithme décrit maintenant est une version modifiée des "mariages stables" de Gale et Shapley ([GS62]) et donne $\mathbb{E}^*[T] < \infty$ si F à support borné.

On rappelle le cadre de notre processus ponctuel marqué (\mathcal{R}, ξ) où on associe à chaque point x un nombre de demi-arête D_x (on suppose que $[\mathcal{R}]$ satisfait les conditions pour que l'algorithme exposé à la fin de l'introduction soit bien défini, par exemple si $(\mathcal{R}, \xi) = (\mathcal{P}, \xi)$ est un processus de Poisson marqué stationnaire, voir annexe). Comme pour SAM, on définit $[\mathcal{P}]_i := \{x \in [\mathcal{P}] : D_x \geq i\}$. On commence par coupler les points de $[\mathcal{P}]_1$ en utilisant un mariage stable et on relie les demis-arêtes de niveau 1 de ces points. Pour chaque paire ainsi formée, de manière indépendante, on colorie les points reliés de couleurs différentes. Plus précisément chaque point est de couleur 1 (ou 2) avec probabilité $1/2$ et est de la couleur opposée de sa paire (et ce indépendamment pour chaque paire). Cela donne lieu aux processus ponctuels stationnaires $[\mathcal{P}]_{2,1}$ et $[\mathcal{P}]_{2,2}$ des points de $[\mathcal{P}]_2$ de même couleur. Soit $n \geq 1$. On se place à la fin de la $n^{\text{ème}}$ étape de l'algorithme. On a déjà créé les n premières arêtes des points de $[\mathcal{P}]_n$ et on a un coloriage à 2^{n-1} couleurs. Pour chaque paire formée dans l'étape n de l'algorithme, de manière indépendante, on recolorie chaque point en rajoutant une couleur de la même manière qu'à l'étape 1. On double ainsi à chaque étape le nombre de couleurs, on les renumérote de 1 à 2^n et on les permute de façon uniforme, ainsi les $[\mathcal{P}]_{n,j} = 1, \dots, 2^n$ sont des processus ponctuels stationnaires d'intensités égales ou $[\mathcal{P}]_{n,j}$ est l'ensemble des points de $[\mathcal{P}]_n$ de couleur j . On applique ensuite un mariage parfait à chaque $[\mathcal{P}]_{n+1,j}, j = 1, \dots, 2^n$ séparément pour connecter les arêtes au niveau $n+1$ de la configuration. On itère ensuite cette procédure jusqu'à l'étape $u = \sup(i : p_i > 0) < \infty$ aux ensembles de points de même couleur en doublant à chaque étape le nombre de couleur. Par construction, deux points ayant la même couleur ne peuvent pas avoir été couplés à une étape précédente. De plus comme on ne relie à chaque étape que les points de même couleur, cette procédure ne crée pas d'arêtes multiples entre deux points de \mathcal{P} .

Proposition 4. *Pour $d \geq 2$ si on applique RSMC à un processus ponctuel de Poisson marqué (\mathcal{P}, ξ) d'intensité 1 défini sur le cadre stationnaire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ compatible avec le flot (c'est à dire que la loi de (\mathcal{P}, ξ) est invariante par translation) on a: $\mathbb{E}^*[T] < \infty$.*

Preuve. On commence par prouver que pour tous $j \leq i$ les $[\mathcal{P}]_{i,j}$ sont des processus stationnaires d'intensité respective $\frac{p_{i+}}{2^{i-1}}$. L'invariance par translation des marques et l'uniformité du coloriage permettent de faire passer le caractère stationnaire de $[\mathcal{P}]$ aux $[\mathcal{P}]_{i,j}$. Pour connaître leurs intensités, il suffit maintenant de calculer la mesure moyenne des $[\mathcal{P}]_{i,j}$. Soit $B \in \mathcal{F}$ borné

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathcal{P}_{i,j}(B)] &= \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i, x \text{ de couleur } j\}} \mathcal{P}(dx)\right] \\
\text{par l'uniformité de la permutation} &= \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i, x \text{ de couleur } j'\}} \mathcal{P}(dx)\right] \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i, x \text{ de couleur } k\}} \mathcal{P}(dx)\right] &= 2^{i-1} \times \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i, x \text{ de couleur } j\}} \mathcal{P}(dx)\right]
\end{aligned}$$

pour n'importe quel j

$$\begin{aligned}
\text{d'autre part } \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i, x \text{ de couleur } k\}} \mathcal{P}(dx)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i\}} \mathcal{P}(dx)\right] \\
&= \int_B \mathbb{E}^*[\mathbf{1}_{\{D_x \circ \theta_{-x} \geq i\}}] dx \text{ par CLMM} \\
&= l(B) \times p_{i_+} \text{ par compatibilité des marques}
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}[\mathcal{P}_{i,j}(B)] = \frac{1}{2^{i-1}} \times \mathbb{E}\left[\int_B \mathbf{1}_{\{D_x \geq i\}} \mathcal{P}(dx)\right] = l(B) \times \frac{p_{i_+}}{2^{i-1}}$$

On note $D = D_0$ et L_i la taille de la i^{eme} arête partant de l'origine (si $D < i$ $L_i := 0$). On a a chaque niveau de la configuration un mariage stable, on a donc directement par le résultat de Holroyd que pour l'arête au niveau i :

$$\mathbb{P}^*(L_i > r \mid D \geq i) \leq C \frac{2^{i-1}}{p_{i_+}} r^{-d} \Rightarrow \mathbb{E}^*[L_i \mid D \geq i] \leq C' \times \frac{2^{i-1}}{p_{i_+}}$$

Comme pour SAM, on a maintenant

$$\mathbb{E}^*[T] = \mathbb{E}^*\left[\sum_{i=1}^u L_i\right] = \sum_{i=1}^u p_{i_+} \mathbb{E}^*[L_i \mid D \geq i] \leq C' \sum_{i=1}^u 2^{i-1} < \infty$$

□

Remarque 4. On peut remarquer qu'ici l'hypothèse poissonnienne ne sert qu'à assurer l'existence d'un mariage stable pour les $[\mathcal{P}]_{i,j}$; La même preuve s'applique aussi à un processus ponctuel marqué compatible avec le flot sur le cadre stationnaire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ tant qu'il est non équidistant et sans chaîne décroissante (qui est une conditions pour l'existence d'un mariage stable) voir [DL05] pour des conditions pour qu'un processus ponctuel stationnaire soit sans chaîne descendante.

Proposition 5. Soit \mathcal{R} un processus ponctuel stationnaire sur \mathbb{R}^d tel que $\alpha^{(n)}(B) := \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^{nd}} \mathbf{1}_{\{(x_1, \dots, x_n) \in B\}} \mathcal{R}(dx_1, \dots, dx_n)\right] \leq c^n l(B)$ avec $c > 0$. Si F est une loi sur \mathbb{N} à support bornée, il existe un graphe sur les points de \mathcal{R} stationnaire simple à degrés prescrit iid de loi F tel que $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve des propositions 3 et 4 au vu des remarques 3 et 4. Le fait que $\alpha^{(n)}(B) \leq c^n l(B)$ garantit que le processus ponctuel étudié est non équidistant et sans chaîne décroissante (voir annexe). \square

4.3 Cas support non borné, $\mathbb{E}[\xi^{\frac{d+1}{d}}] < +\infty$

Un inconvénient évident à ces deux procédures est qu'une demi-arête appartenant à un niveau élevé de la configuration doit être connecté à une demi-arête au même niveau. On présente dans cette section un algorithme tiré de [Dei08] et inspiré d'un article de Jonasson ([Jon07]) qui lève cette limitation et donne dans le cas poissonnien $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$ pour des degrés iid de loi F dès que F a un moment d'ordre $\frac{d+1}{d}$.

On commence par décrire cette procédure pour construire un graphe sur \mathbb{Z}^d avec des degrés iid, puis on retournera dans le cadre poissonnien.

Soit $\{\overline{D}_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ la suite de degré. Pour m "grand" (fixé plus tard) on définit $\overline{D}'_z = \overline{D}_z \mathbb{1}_{\{\overline{D}_z > m\}}$, on dit que z est haut si $\overline{D}'_z > 0$, sinon z est bas. Dans l'objectif uniquement technique d'avoir un ensemble de points non équidistants, on perturbe chaque sommet de \mathbb{Z}^d en le bougeant d'une distance uniforme sur $[0; 0, 1]$ selon un axe choisi uniformément. On procède ensuite par étape:

A la première étape, chaque sommet haut z réquisitionne ses \overline{D}_z plus proches voisins bas. Chaque sommet bas ainsi demandé connecte une de ses demi-arête à une demi-arête de l'unique sommet haut le plus proche qui l'a réquisitionné. On note $\overline{D}_z(1)$ le nombre de demi-arêtes non appariées issues du sommet haut z après la première étape. Ensuite, chaque z avec $\overline{D}_z(1) > 0$ réclame ses $\overline{D}_z(1)$ plus proches voisins bas qui n'ont pas encore été connectés à un sommet haut et chaque sommet bas connecte sa demi-arête la plus élevée au sommet haut qui l'a réclamé (s'il y en a un) le plus proche. Cette opération est ensuite répétée jusqu'à ce que les sommets hauts aient connecté toutes leurs demi-arêtes. Lors de cette procédure un sommet bas est connecté à au plus un sommet haut. On utilise ensuite RSMC ou SAM (selon si $d = 1$ ou $d > 1$) pour connecter les demi-arêtes restantes des sommets bas (qui ont un degré borné par m). On montrera en annexe (en suivant la preuve de Jonasson [Jon07]) que si m est choisi assez grand, cette procédure est bien définie et donne $\mathbb{E}[\overline{T}] < +\infty$ dès que $\mathbb{E}[\overline{D}_z^{\frac{d+1}{d}}] < +\infty$, avec \overline{T} étant la distance totale entre l'origine et les points auxquels elle a été reliée (dans la métrique de \mathbb{Z}^d).

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, U_x est le cube unité centré en x . Soit z_0 , choisit uniformément dans U_0 et $\mathbb{Z}^d(z_0)$ la translation de \mathbb{Z}^d obtenue en plaçant l'origine en z_0 . Les demi-arêtes d'un point $x \in \mathcal{P}$ sont associées à l'unique $z \in \mathbb{Z}^d(z_0)$ tel que $x \in U_z$. On note N_z le nombre de points de \mathcal{P} dans U_z et \overline{D}_z le nombre de demi-arêtes associées à $z \in \mathbb{Z}^d(z_0)$. Les \overline{D}_z sont utilisés comme une suite de degrés sur $\mathbb{Z}^d(z_0)$ et sont iid. En effet comme \mathcal{P} est un processus de Poisson les N_z sont iid (de loi $Poi(1)$) et $\overline{D}_z = \sum_{x \in U_z} D_x$ avec $\{D_x\}_{x \in \mathcal{P}}$

une famille iid. Pour numéroter les arêtes associées aux $z \in \mathbb{Z}^d(z_0)$, on commence par numéroter les points de $\mathcal{P} \cap U_z$ puis on prend tour à tour (selon cet ordre) une arête de chaque point jusqu'à épuisement. On procède de la manière suivante:

1. On choisit m "grand" comme dans Jonasson ([Jon07]) et on dit que $z \in \mathbb{Z}^d(z_0)$ est haut si $\overline{D}_z > m$. On connecte les demi-arêtes associées au sommets haut de $\mathbb{Z}^d(z_0)$ à celles associées aux sommets bas de $\mathbb{Z}^d(z_0)$ en utilisant l'algorithme sur \mathbb{Z}^d décrit plus haut (les demi-arêtes sont utilisées dans l'ordre de leur numérotation). On crée une arête entre les points de \mathcal{P} dont sont issues les demi-arêtes.
- 2.a Dans le cas $d = 1$ les demi-arêtes non appariées restantes (venant de sommets bas de $\mathbb{Z}^d(z_0)$) sont connectées avec SAM . Comme dans l'étape 1, on place ensuite une arête entre les deux points de \mathcal{P} dont sont issues les demi-arêtes.
- 2.b Dans le cas $d \geq 2$ les demi arêtes des points bas de \mathcal{P} restantes sont connectées avec RSMC.

on note qu'un sommet bas est connecté à au plus un sommet haut. Comme deux sommets de $\mathbb{Z}^d(z_0)$ ne sont pas connectés plusieurs fois et on applique ensuite un algorithme qui ne crée pas d'arêtes multiples aux sommets bas (qui n'ont pas été connectés entre eux avant), le graphe obtenu est simple. La stationnarité des $[\mathcal{P}]_i$ assure aussi l'invariance par translation de cette procédure.

Pour passer du résultat de Jonasson à $\mathbb{E}^*[T] < +\infty$, il suffit de remarquer que si \overline{L} est la taille de l'arête dans $\mathbb{Z}^d(z_0)$ correspondante à L la taille de l'arête entre deux points de \mathcal{P} on a :

$$\begin{aligned}
L &\leq \overline{L} + \sqrt{d} \\
\Rightarrow \mathbb{E}^*[T] &= \mathbb{E}^*\left[\sum_{i=1}^D L_i\right] \\
&\leq \mathbb{E}^*\left[\sum_{i=1}^D (\overline{L}_i + \sqrt{d})\right] \\
&= \mathbb{E}^*[\overline{T} + \sqrt{d}D] < +\infty
\end{aligned}$$

Remarque 5. *Pour passer d'une configuration de degrés iid sur \mathcal{P} à une configuration iid de degrés sur $\mathbb{Z}^d(z_0)$ on utilise de manière intensive les propriétés caractéristiques des processus de Poisson. De plus, avoir une suite de degrés iid est à priori essentiel pour la preuve de Jonasson (on utilise un résultat de vitesse de convergence pour la loi des grands nombres). Une généralisation de la condition au cas non poissonnien requiert donc un résultat de vitesse de convergence pour une suite de degrés non indépendants une approche différente de celle inspirée par Jonasson. On peut surement adapter la preuve pour des processus ponctuels où les interactions entre les points s'effacent avec la distance.*

Annexe

Lemme 4. Soit U un ensemble de points discret, non équadistant et sans chaîne descendante. Soit m son unique mariage parfait:

- i.* Si $y = m(x)$ alors $m \setminus \{\{x, y\}\}$ est l'unique mariage stable de $U \setminus \{x, y\}$
- ii.* Si $z \in \mathbb{R}^d \setminus U$ est tel que $U \cup \{z\}$ est non équadistant et $|x - m(x)| < |x - z|$ pour tout $x \in U$ alors m est l'unique mariage parfait de $U \cup \{z\}$ (en particulier z n'est pas apparié).

Preuve. Grâce au lemme 1, il suffit de vérifier que le couplage ainsi obtenu est stable. Pour le point *i.*, il suffit de se rendre compte que si une paire était instable dans $m \setminus \{\{x, y\}\}$, elle le serait dans m .

De manière similaire, pour *ii.* la condition $|x - m(x)| < |x - z|$ pour tout $x \in U$ garantie que z ne forme pas de paire instable avec un point de U . \square

Lemme 5. Soit \mathcal{P} un processus ponctuel de Poisson stationnaire d'intensité $\lambda \in]0; +\infty[$:

- i.* Soit U une variable uniforme dans S indépendante de \mathcal{P} , avec $l(S) \in]0; +\infty[$. La loi de $\mathcal{P} + \delta_U$ est absolument continue par rapport à la loi de \mathcal{P} .
- ii.* Soit \mathcal{F} un processus ponctuel donc le support est presque sûrement un sous ensemble fini de \mathcal{P} . La loi de $\mathcal{P} - \mathcal{F}$ est absolument continue par rapport à la loi de \mathcal{P} .

Avant de prouver ce lemme, on a besoin de formaliser un peu plus l'espace dans lequel \mathcal{P} est une variable aléatoire:

On note \mathbb{M} l'ensemble des mesures ponctuelles: $\mathbb{M} := \{\mu \text{ mesure} : \mu(B) = k \forall B \in \mathcal{B}\}$ et \mathcal{N} la tribu engendrée par les $\mu(B), B \in \mathcal{B}, \mu \in \mathbb{M}$

Preuve. Point *i.*

Soit $\mathcal{P}' := \mathcal{P} + \delta_U = \mathcal{P} \cap S + \mathcal{P} \cap^c S + \delta_U =$. Soient $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap S$ et $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cap^c S$. On a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et δ_U indépendants. Soit ϕ une fonction $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$) mesurable. On cherche à prouver que

$$\mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}')] = \mathbb{E}[\phi(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P})].$$

Pour ψ une fonction $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$) mesurable.

Par indépendance, $\mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \delta_U)] = \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E}[\phi(x + \mathcal{P}_2 + \delta_U)] \mathcal{L}_{\mathcal{P}_1}(dx)$

où $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_1}$ est la loi de \mathcal{P}_1 . On pose $\phi_x(y) = \phi(x + y)$, $y \in \mathbb{M}$. On remarque que par définition $\int_{\mathbb{M}} \phi_x(y) \mathcal{L}_{\mathcal{P}_1}(dx) = \mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}_1 + y)]$ (et donc aussi quand y est remplacé par un processus ponctuel indépendant).

Comme \mathcal{P} est un processus de Poisson et $l(S) < +\infty$, étant donné $\mathcal{P}_2(S) = n$,

$\mathcal{P}_2 = \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}$ avec les X_k indépendants de U , iid de loi uniforme sur S . On pose

$p_n := \mathbb{P}(\mathcal{P}_2(S) = n)$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2 + \delta_U)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2 + \delta_U) | \mathcal{P}_2(S) = n] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{E}[\phi_x(\sum_{k=1}^n \delta_{X_k} + \delta_U)] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{E}[\phi_x(\sum_{k=1}^{n+1} \delta_{X_k})] \text{ car } U \text{ suit une loi uniforme sur } S, \text{ comme les } X_k \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \frac{p_n}{p_{n+1}} \mathbb{E}[\phi_x(\sum_{k=1}^{n+1} \delta_{X_k})] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \frac{p_{n-1}}{p_n} \mathbb{E}[\phi_x(\sum_{k=1}^n \delta_{X_k})] \text{ par changement de variable} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2) \frac{p_{n-1}}{p_n} | \mathcal{P}_2(S) = n] = \mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2) \frac{p_{\mathcal{P}_2(S)-1}}{p_{\mathcal{P}_2(S)}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{P}_2(S) > 0\}}]
\end{aligned}$$

On note que $\frac{p_{\mathcal{P}_2(S)-1}}{p_{\mathcal{P}_2(S)}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{P}_2(S) > 0\}} = \frac{\mathcal{P}_2(S)}{l(S)}$. Si on récapitule, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}')] &= \mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \delta_U)] = \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2 + \delta_U)] \mathcal{L}_{\mathcal{P}_1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E}[\phi_x(\mathcal{P}_2) \frac{\mathcal{P}_2(S)}{l(S)}] \mathcal{L}_{\mathcal{P}_1}(dx) \\
&= \mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \frac{\mathcal{P}_2(S)}{l(S)}] \\
&= \mathbb{E}[\phi(\mathcal{P}) \psi(\mathcal{P})]
\end{aligned}$$

On a prouvé *i.* en exhibant la dérivé de Radon Nikodym $\psi(\mathcal{P}) = \frac{\mathcal{P}_2(S)}{l(S)}$.

On prouve maintenant le point *ii.*

On rappelle que la loi de $\mathcal{P} - \mathcal{F}$ absolument continue par rapport à la loi de \mathcal{P} veut dire que pour tout $A \in \mathcal{N}$, $\mathbb{P}(\mathcal{P} \in A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A) = 0$ ou de manière équivalente $\mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{P} \in A) > 0$.

Comme \mathcal{P} est discret et sans point d'accumulation et \mathcal{F} est fini, il existe presque sûrement un nombre fini de boules (avec des centres et des rayons aléatoires) tel que \mathcal{F} soit l'intersection de \mathcal{P} et de ces boules.

Soit $A \in \mathcal{N}$ tel que $\mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A) > 0$. Soit $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de réunions finies de boules à centres et rayons rationnels (il y en a un nombre dénombrable). On a

clairement $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A, \mathcal{P} \cap C_n = \mathcal{F}) = \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A) > 0$ et donc il existe n^* tel que $\delta := \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A, [\mathcal{P} \cap C_{n^*} = [\mathcal{F}]) > 0$. On pose $W := C_{n^*}$,

$[\mathcal{P}'] = [\mathcal{P}] \cap {}^c W$ et $A_1 = \left\{ x \in \mathbb{M}, \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A; [\mathcal{F}] = \mathcal{P} \cap W | \mathcal{P}' = x) > \frac{\delta}{2} \right\}$. On

affirme que $\mathbb{P}(\mathcal{P}' \in A_1) \geq \delta/2$.

Si ce n'est pas le cas, on a:

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{\mathbb{M}} \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A; [\mathcal{F}] = [\mathcal{P}] \cap W | \mathcal{P}' = x) \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}(dx) \\ &< \frac{\delta}{2} + \int_{{}^c A_1} \mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A; [\mathcal{F}] = [\mathcal{P}] \cap W | \mathcal{P}' = x) \mathcal{L}_{\mathcal{P}'}(dx) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \mathbb{P}(\mathcal{P}' \in {}^c A_1) \leq \delta \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{P}(W) = 0$ et $[\mathcal{P}] \cap W = [\mathcal{F}]$ impliquent que $\mathcal{P} - \mathcal{F} = \mathcal{P}$. De même $\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A$ et $\mathcal{P} - \mathcal{F} = \mathcal{P}$ impliquent $\mathcal{P} \in A$. De plus si ω est tel que $\mathcal{P}'(\omega) \in A_1$, alors $\mathbb{P}(\mathcal{P} - \mathcal{F} \in A; [\mathcal{F}] = [\mathcal{P}] \cap W | \mathcal{P}')(\omega) > \frac{\delta}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{P} \in A) &\geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathcal{P}(W)=0, [\mathcal{P}] \cap W = [\mathcal{F}], \mathcal{P} - \mathcal{F} \in A\}} | \mathcal{P}']] \\ &\geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathcal{P}' \in A_1, \mathcal{P}(W)=0, [\mathcal{P}] \cap W = [\mathcal{F}], \mathcal{P} - \mathcal{F} \in A\}} | \mathcal{P}']] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathcal{P}' \in A_1\}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{[\mathcal{P}] \cap W = [\mathcal{F}], \mathcal{P} - \mathcal{F} \in A\}} | \mathcal{P}']] \mathbb{P}(\mathcal{P}(W) = 0) \\ &\geq \frac{\delta}{2} \mathbb{P}(\mathcal{P}' \in A_1) \mathbb{P}(\mathcal{P}(W) = 0) > 0 \end{aligned}$$

L'égalité de l'avant dernière ligne vient du fait que $\{\mathcal{P}' \in A_1\}$ est \mathcal{P}' mesurable et $\{\mathcal{P}(W) = 0\}$ est indépendant de \mathcal{P}' . \square

preuve du fait 1. On considère l'ensemble aléatoire H des points qui préféreraient un point dans la boule unité (si un était disponible) à leur partenaire actuel (on rappelle que $\mathcal{M}(x)$ est la paire de x dans le mariage parfait):

$$H = H(\mathcal{P}) := \{x \in [\mathcal{P}] : |x - \mathcal{M}(x)| > |x| - 1\}$$

Si on arrive à prouver que $\mathbb{P}(\#H = +\infty) = 1$, on aura

$$\begin{aligned} +\infty &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|x - \mathcal{M}(x)| > |x| - 1\}} \mathcal{P}(dx)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda \mathbb{P}^*(\mathcal{M}(0) > |x| - 1) dx \text{ par CLMM} \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda \mathbb{P}^*(\mathcal{M}(0) + 1 > t) c t^{d-1} dt \\ &= \frac{c\lambda}{d} \mathbb{E}^*[(\mathcal{M} + 1)^d] \end{aligned}$$

Pour prouver que $\mathbb{P}(\#H = +\infty) = 1$, on construit une modification $\overline{\mathcal{P}}$ du processus de Poisson de la manière suivante:

- i. Si $\#H < +\infty$, on retire tous les points de $H \cup \{\mathcal{M}(x), x \in H\}$;

ii. on ajoute un point choisi uniformément dans $B(0, 1)$ indépendant de \mathcal{P}

Par le lemme précédent, la loi de $\overline{\mathcal{P}}$ est absolument continue par rapport à la loi de \mathcal{P} . Par le lemme 4, si $\#H < +\infty$, le mariage parfait de $[\overline{\mathcal{P}}]$ a un point non apparié: celui rajouté en *ii.* . Par absolue continuité, si $\mathbb{P}(\#H = +\infty) < 1$, \mathcal{P} a aussi un point non apparié avec probabilité positive. Cela contredit la proposition 1., et donc $\mathbb{P}(\#H = +\infty) = 1$. \square

Le résultat de Jonasson utilisé dans la section 4.3 porte sur des graphes à degrés iid plongé dans un graphe abstrait. On commence donc par formuler quelques notations avant d'énoncer et de prouver le théorème.

Soit G un graphe transitif et 0 un sommet quelconque de G (on utilise dans ce papier le cas où l'ensemble des sommets est \mathbb{Z}^d et les arêtes relient les points à distance euclidienne égale à 1). On note d_G la distance dans ce graphe. $\nu(n)$ est le nombre de points de G dans la boule combinatoire de rayon n . $\mathcal{R}(n)$ est le rayon (en distance d_G) de la plus petite boule contenant n points de G . On dit que G est à croissance polynomiale d'ordre d si $\nu(n) \sim n^d$ pour un entier $d \geq 1$. Si G est à croissance polynomiale d'ordre d , $\mathcal{R}(n) \sim n^{1/d}$ et il existe $0 < C < +\infty$ tel que $\frac{1}{C} \leq \frac{\nu(2n)}{\nu(n)} \leq C$. On remarque que pour G ayant pour sommets les points de \mathbb{Z}^d avec les arêtes comme décrites précédemment, G est à croissance polynomiale d'ordre d .

Théorème 5. *Soit G un graphe infini transitif avec des degrés finis. On suppose que G est à croissance polynomiale d'ordre d . F est une loi de probabilité sur \mathbb{N} et D une variable de loi F . Il existe un graphe simple invariant par automorphisme sur les sommets de G à degrés iid de loi F et $\mathbb{E}[\overline{T}] < +\infty$ si et seulement si $\mathbb{E}[D\mathcal{R}(D)] < +\infty$.*

Preuve. On commence par noter que comme $\mathcal{R}(n) \sim n^{1/d}$, $\mathbb{E}[D\mathcal{R}(D)] < +\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}[D^{(d+1)/d}] < +\infty$.

Soient $\{\overline{D}_z\}_{z \in G}$ la suite iid de degrés et $\overline{D}'_z = \overline{D}_z \mathbb{1}_{\{\overline{D}_z > m\}}$. On rappelle que z est dit haut si $\overline{D}'_z > 0$. On fixe m tel que $\mathbb{E}[\overline{D}'_z] < \frac{4^{-d}}{C}$. Pour plus de simplicité on suppose que $\mathbb{P}(D = 0) = 0$ (si ce n'est pas le cas, enlever cette condition est évident).

Sous condition que v est haut, on pose R_v pour la distance dans G entre v et le sommet le plus loin auquel il est apparié (avec la convention que R_v est infini si v ne connecte pas toutes ses arêtes). $R := R_0$ et $\overline{D}' = \overline{D}'_0$.

On commence par remarquer qu'un sommet en dehors de la boule combinatoire sur G de rayon $2n$ n'influence pas si la racine est connectée ou non à un sommet bas dans $B[0, n]$. De plus si $\sum_{v \in B[0, 2n]} \overline{D}'_v < \frac{\nu(n)}{2}$, il y a au maximum la moitié des sommets de $B[0, n]$ qui sont hauts et donc 0 peut connecter toutes ses arêtes dans $B[0, n]$. Ainsi $\mathbb{P}(R < n) \geq \mathbb{P}(\sum_{v \in B[0, 2n]} \overline{D}'_v < \frac{\nu(n)}{2})$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R \geq n) \leq \mathbb{P}(\sum_{v \in B[0, 2n]} \overline{D}'_v \geq \frac{\nu(n)}{2}) = \mathbb{P}(\frac{1}{\nu(2n)} \sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{\nu(n)}{2\nu(2n)})$$

Ou les X_k sont iid de même loi que \overline{D}'_0 . De plus $\frac{\mathbf{v}(n)}{\mathbf{v}(2n)} \geq \frac{1}{C}$, cela implique

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathbf{v}(2n)} \sum_{k=1}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{\mathbf{v}(n)}{2\mathbf{v}(2n)}\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathbf{v}(2n)} \sum_{k=1}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{1}{2C}\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathbf{v}(2n)} \sum_{k=1}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{1}{2^{d+1}C}\right) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\mathbf{v}(2n)} \sum_{k=1}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{1}{2^{d+1}C}\right) \quad (2)$$

En faisant une approximation intégrale et un changement de variable, cette dernière expression est finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{d-1}{d}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \frac{1}{2^{d+1}C}\right) < +\infty$. On donne comme indication que $\mathbf{v}(n) \sim n^d$ et que si on pose $t := (2n)^d$,

$$\begin{aligned} (2(n+1))^d - (2n)^d &= ((t^{1/d} + 2)^d - t) \\ &= t\left(\left(1 + \frac{2}{t^{1/d}}\right)^d - 1\right) = t \sum_{k=1}^d \binom{d}{k} \left(\frac{2}{t^{1/d}}\right)^k \sim t \frac{d-1}{d} \end{aligned}$$

Baum et Katz dans "convergence rates in the law of large numbers" ([BK64] théorème 3) donnent une condition pour la convergence d'une série majorant celle obtenue en (2): $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{d-1}{d}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \frac{1}{2^{d+1}C}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{d-1}{d}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k > \mathbb{E}[X_k]\right)$ car $\mathbb{E}[X_k] < \frac{4^{-d}}{C} = \frac{1}{2^{d+1}C}$

Soient $t > 1, r > 1$ tels que $1/2 < r/t \leq 1$. Le théorème 3 de [BK64] nous dit (entre autre) que pour une suite iid X_k les assertions suivantes sont équivalentes

- i. $\mathbb{E}[|X_k|^t] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_k] = \mu$
- ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{r-2} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right| > n^{r/t}\epsilon\right) < +\infty$ pour tout $\epsilon > 0$

On applique ce résultat avec $t = r = \frac{d+1}{d} > 1$ pour obtenir que $\mathbb{E}[R] < +\infty$ (et donc $\mathbb{P}(R = +\infty) = 0$, c'est à dire que chaque point est apparié en temps fini).

Par le même argument que précédemment, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \geq n|\overline{D}') &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{v \in B[0,2n]} \overline{D}'_v \geq \frac{\mathbf{v}(n)}{2} | \overline{D}'\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\overline{D}' + \sum_{k=2}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{\mathbf{v}(n)}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\overline{D}' + \sum_{k=1}^{\mathbf{v}(2n)} X_k \geq \frac{\mathbf{v}(n)}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette expression est évidemment bornée par 1. Comme $\nu(n) \sim n^d$ avec $d \geq 1$, pour n assez grand $\frac{\nu(n)}{4} \geq \nu(\frac{n}{4})$, de plus lors ce que $n > 4\mathcal{R}(\overline{D}')$, on a $\overline{D}' \leq \nu(\frac{n}{4})$, donc:

$$\mathbb{P}(\overline{D}' + \sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{\nu(n)}{2}) \leq \mathbb{P}(\nu(\frac{n}{4}) + \sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{\nu(n)}{2}) \leq \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{\nu(n)}{4})$$

avec les X_k iid de même loi que \overline{D}'_z .
On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R|\overline{D}'] &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R \geq n|\overline{D}') && \leq 4\mathcal{R}(\overline{D}') + \sum_{n=4\mathcal{R}(\overline{D}')+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{\nu(n)}{4}) \\ &&& \leq 4\mathcal{R}(\overline{D}') + \sum_{n=4\mathcal{R}(\overline{D}')+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{\nu(2n)} \sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{1}{C2^{d+2}}) \end{aligned}$$

On réutilise le théorème 3 de [BK64] et le fait que $\mathbb{E}[X_k^{(d+1)/d}] < +\infty$ pour avoir que
 $S := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{\nu(2n)} \sum_{k=1}^{\nu(2n)} X_k \geq \frac{1}{C2^{d+2}}) < +\infty$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\overline{T}] &\leq \mathbb{E}[R\overline{D}'] && = \mathbb{E}[\overline{D}'\mathbb{E}[R|\overline{D}']] \leq \mathbb{E}[\overline{D}'(4\mathcal{R}(\overline{D}') + S)] \\ &&& = 4\mathbb{E}[\overline{D}'\mathcal{R}(\overline{D}')] + S\mathbb{E}[\overline{D}'] \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve si on remarque que $\overline{D}' \leq \overline{D}$ et donc $\mathbb{E}[\overline{D}'\mathcal{R}(\overline{D}')] \leq \mathbb{E}[\overline{D}\mathcal{R}(\overline{D})] < +\infty$ \square

References

- [BB09] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn. *Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume I — Theory*, volume 3, No 3–4 of *Foundations and Trends in Networking*. NoW Publishers, 2009.
- [BK64] Leonard E. Baum and Melvin Katz. Convergence rates in the law of large numbers. *Probab. Th. Rel. Fields*,, 1964.
- [Dei08] Maria Deijfen. Stationary random graphs with prescribed iid degrees on a spatial poisson process. *Electronic Communications in Probability (2009)*, 14:81–89, 2008.
- [DL05] Daryl J. Daley and Günter Last. Descending chains, the lilypond model, and mutual-nearest-neighbour matching. *Advances in Applied Probability*, 37(3):604–628, jun 2005.

- [GS62] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The american monthly*, vol 69, 1962.
- [HPPS08] A. Holroyd, R. Pemantle, Y. Peres, and O. Schramm. Poisson matching. *Annales de l'institut Henri Poincare*, 2008.
- [Jon07] J. Jonasson. Invariant random graphs with iid degrees in a general geology. *Probab. Th. Rel. Fields*, 2007.