
Séparation des états du graphe de marquages d'un réseau de Petri pour la commande par supervision des systèmes à événements discrets.

Mohaman GONZA^{1,2}, Laurent BITJOKA^{1,2}, Hassane ALLA³

1. LESIA (Laboratoire d'Énergie, Signal, Imagerie et Automatique), ENSAI, Université de Ngaoundéré, Cameroun

2. Equipe de Recherche en Génie Electrique, Institut Universitaire Catholique Saint Jérôme de Douala, Cameroun

mohaman.gonza@univ-ndere.cm, lbitjoka@univ-ndere.cm,
senguel.wayang@univ-ndere.cm

3. Laboratoire GIPSA-Lab, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

hassane.alla@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

RESUME. Le graphe de marquages est généralement de taille importante pour que l'on puisse identifier de manière simple et efficace l'ensemble des états adéquats pour la synthèse de supervision des systèmes à événements discrets. En outre, le problème d'explosion combinatoire inhérent à la théorie de supervision affecte les méthodes de synthèse s'appuyant sur le graphe de marquages. Parmi ces méthodes, la méthode des invariants de marquages qui est la plus utilisée ne peut garantir l'optimalité des résultats que si l'ensemble adéquat des contraintes linéaires liées aux états ou marquages interdits lui est fourni.

Pour trouver un tel ensemble adéquat de contraintes, l'espace d'états du graphe de marquages du réseau de Petri modélisant le système à événements discrets doit être séparé.

Cet article présente une approche de séparation des ensembles d'états interdits et d'états autorisés du graphe de marquages accessibles, représenté par sa matrice de fonction de transition codifiée. Cette séparation est définie par une fonction de décision qui caractérise l'ensemble des états-frontières ou critiques. Cet ensemble constitue l'hyperplan de séparation qui peut être utilisé pour déterminer de manière bijective les contraintes admissibles nécessaires à la synthèse de supervision par la méthode des invariants de marquages.

ABSTRACT. The markings graph is usually large so that we can identify in the simple and efficient way the suitable set of states for control synthesis of discrete event systems. Moreover, the combinatorial explosion problem inherent in control theory is present in the methods of synthesis based on the marking graph. Among these methods, the method of invariants markings which is the most used cannot guarantee the optimality of the results if and only if the suitable set of linear constraints links to forbidden states or markings supplied to it.

To find such a suitable set of constraints, the state space of the markings graph of Petri net modeling the discrete event system must be separated. This paper presents an approach of separation of accessible markings graph into sets of forbidden states and allowed states. The markings graph is represented by his codified transition function matrix. This separation is defined by a decision function that characterizes the set of border or criticism states. This set constitutes the hyperplane separation that can be used to determine bijectively admissible constraints necessary for the synthesis of supervision by the method of invariants markings.

MOTS-CLES : Hyperplan de séparation, Matrice de fonction de transition, Graphe de marquages, Réseau de Petri, Système à Evénements Discrets

KEYWORDS: Separation hyperplane, Transitions function matrix, Markings graph, Petri Net, Discrete Events System

1. Introduction

Dans le cadre de l'automatique des systèmes à événements discrets (SED), la théorie de supervision (Ramadge et Wonham, 1983) fournit de nombreux concepts et résultats fondamentaux pour la synthèse systématique de contrôleurs (Charbonnier et *al.*, 1999). Depuis lors, la recherche académique explore cette technique mathématique afin de disposer d'un cadre formel pour la commande par supervision des systèmes. Les résultats théoriques obtenus sont remarquables surtout pour des systèmes modélisés par les réseaux de Petri (Moody et Antsaklis, 1998 ; Alla et *al.*, 2000 ; Roussel, 2015). Le passage de la synthèse à l'implantation de la commande n'est pas systématique à cause du phénomène d'explosion combinatoire inhérente au SED (Marangé et *al.*, 2009) modélisé par les automates d'une part, et d'autre part à la taille du graphe de marquages lorsque le SED est modélisé par réseau de Petri (Gougam et *al.*, 2013). En effet, le graphe de marquages a l'inconvénient d'énumérer toutes les évolutions parallèles, ce qui conduit généralement à l'explosion combinatoire du nombre d'états. De ce fait, les résultats théoriques semblent être limités, voire exploratoires seulement (Ciardo et *al.*, 2012 ; Roussel, 2015) et le concept de contrôlabilité peut s'avérer insuffisant (Nourelfath, 2001). Notamment, une spécification de commande peut être jugée incontrôlable par rapport à un modèle du procédé, alors qu'en réalité elle est réalisable par un système de commande ayant la caractéristique d'être déterministe. Le calcul classique du langage suprême contrôlable peut mener à un ensemble restreint, voire vide, pour une spécification qui pourrait être implantée sans aucune incontrôlabilité (Nourelfath et Niel, 2000)

Parmi toutes les méthodes de synthèse de commande par supervision basées sur les réseaux de Petri, la méthode des invariants de marquages résout le problème des états interdits par l'ajout judicieux de places et d'arcs «de contrôle» au réseau de Petri du système. En effet, l'approche utilise le concept des invariants de marquages pour calculer de manière très élégante les matrices d'incidence du système contrôlé et du contrôleur (Yamalidou et *al.*, 1996 ; Moody & Antsaklis, 2000). C'est une

méthode simple et efficace, basée sur l'expression de la spécification sous la forme des contraintes nécessaire au calcul d'un contrôleur. Le contrôleur obtenu ainsi ne peut garantir le respect de la spécification que si tous les événements impliqués dans la dynamique du SED sont contrôlables. En effet, des états interdits supplémentaires sont générés par la synchronisation des événements incontrôlables. Pour garantir l'optimalité des résultats, il faut fournir à la méthode des invariants l'ensemble adéquat des contraintes liées aux états interdits (Vasiliu, 2012). Trouver un tel ensemble reste un problème majeur qui nécessite la séparation des états du graphe de marquages du SED en deux ensembles ou régions d'états autorisés et interdits. Nous savons par ailleurs, que dans un graphe, il y a suffisamment de régions permettant de discerner tous les états d'un système et que ces états peuvent être injectivement codés comme des états locaux (Ehrenfeucht et Rozenberg, 1990b ; Badouel et *al.*, 1994). Ainsi la séparation peut être définie comme une partition de l'espace d'états du modèle du SED en boucle fermée. Cette définition est à distinguer de la discrimination ou classification binaire pour laquelle une partition est a priori connue, au moins pour un échantillon d'apprentissage (Amirou, 2015 ; Falk et *al.*, 2000).

L'objectif du travail de séparation des états du graphe de marquages présenté dans cet article est de déterminer de manière bijective les états critiques liés aux contraintes admissibles et permettant le calcul d'un contrôleur optimal (Dideban, 2007). Notre démarche consiste à générer le graphe de marquages (section 2) du réseau de Petri du système à événements discrets lorsque ce dernier est borné (Wimmel, 2004). Ensuite, le graphe de marquages sera représenté par une matrice de fonction de transitions dont les éléments sont codifiés par une fonction associative (section 3). La fonction associative affecte une valeur aux états résultant du franchissement d'une transition suivant leur caractère interdit ou autorisé par la spécification. A partir de cette matrice nous définissons la fonction de décision (section 4) qui permet d'effectuer la séparation des états du graphe de marquages tout en déterminant les états critiques constituant l'hyperplan séparateur. Une application de la méthode (section 5) à un exemple académique, utilisé pour illustrer les approches de synthèse de supervision, permettra d'évaluer sa pertinence ainsi que les perspectives qu'ouvre ce travail.

2. Graphe de marquages et ensembles d'états dans la synthèse de supervision

2.1. Graphe de marquages d'un réseau de Petri

Le réseau de Pétri est un moyen de modélisation du comportement des systèmes à événements discrets et de description des relations existantes entre des conditions et des événements (Ramchandani, 1974). Il peut être défini comme un triplet $R = (P, T, W)$ où P et T sont deux ensembles finis et non vide respectivement de places et de transitions et $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow IN$ est une fonction (David et Alla, 1992 ; Feuillade et Pinchinat, 2005).

Pour définir l'état d'un système modélisé par un réseau de Petri, il est nécessaire de compléter le réseau de Petri par un marquage (application $M : P \rightarrow \mathbb{N}$).

Un réseau de Petri augmenté d'un marquage initial M_0 sera noté $R = (P, T, W, M_0)$

Le marquage M_k des places d'un RdP définit l'état du système modélisé à un instant. C'est un vecteur de dimension le nombre de places qui, peut être représenté graphiquement par des jetons associés à une place donné.

$$M_k = [M_k(p_0) \quad \dots \quad M_k(p_i) \quad \dots \quad M_k(p_n)]^T \quad (1)$$

$M_k(p_i)$ est le nombre de jetons contenu dans la place $p_i \in P$ à l'instant k. Ce marquage peut être modifié au cours du temps par le franchissement de transitions. La transition $t_j \in T$ est dite franchissable à partir de $M_k(p_i)$ si et seulement si :

$$M_k(p_i) \geq W(p_i, t_j) ; \text{ on note } M_k \lfloor t_j \rangle \quad (2)$$

Le franchissement de t_j engendre la création d'un nouveau marquage $M_{k+1}(p_i)$ à partir de $M_k(p_i)$ défini par :

$$M_{k+1}(p_i) = M_k(p_i) + W(t_j, p_i) - W(p_i, t_j) ; \text{ soit } M_k \lfloor t_j \rangle M_{k+1} \quad (3)$$

A chaque séquence de franchissement, est associé un vecteur caractéristique noté \bar{S} de dimension nombre de places tel qu'on puisse avoir une équation fondamentale :

$$M_{k+1} = M_k + W\bar{S}^T \quad (5)$$

L'équation fondamentale traduit la dynamique de fonctionnement du SED et permet d'explorer toutes les évolutions, en examinant à chaque pas la liste complète des transitions franchissables dans le réseau de Petri. L'ensemble possible de séquences de franchissement de transitions peut être infini. Toutefois, la dynamique du SED peut être décrite de manière finie par le graphe de marquages (Desel et Esparza, 2015). Le graphe de marquage représente l'ensemble des marquages accessibles et d'arcs correspondant aux franchissements des transitions.

L'ensemble de marquages accessibles $Acc(R, M_0)$ du graphe de marquages du réseau de Petri marqué (R, M_0) est défini par :

$$Acc(R, M_0) = \{M_k \in IN^P \text{ tel qu'il existe } S \text{ et } M_0[S]M_k\} \quad (6)$$

Le graphe de marquages (*GM*) d'un réseau de Petri (*RdP*) est un automate à états finis de manipulation formelle facile (Dideban, 2007; Ferrier&Boimond, 2013) et défini comme un 4-uplet $GM = (M, \Sigma, \delta, M_0)$ où :

- M est l'ensemble fini de marquages;
- Σ est l'ensemble fini des événements associés aux transitions
- δ est la fonction de transitions d'états de $M \times \Sigma \rightarrow M$
- $M_0 \in M$ est le marquage initial

Un marquage quelconque peut être représenté comme suit :

$$M_k = \{m_k(P_i) \mid i = \overline{0, n}; m(P_i) \geq 0\} \quad (7)$$

L'évolution d'un état initial vers un état final implique une mutation de toutes les places en fonction du franchissement des transitions adjacentes ou incidentes :

$$[m_0(P_0)m_0(P_1)\cdots m_0(P_n)]^T \rightarrow [m_1(P_1)m_1(P_2)\cdots m_1(P_0)]^T \rightarrow \cdots \rightarrow [m_k(P_0)m_k(P_1)\cdots m_k(P_n)]^T \quad (8)$$

Par conséquent, le graphe de marquages est un espace d'états atteignables par la détermination des successeurs qui ne présente pas de conflit.

2.2. Ensembles d'états du graphe de marquages

Soit un SED modélisé par les modèles RdP du procédé $R_p = \{P_p, T_p, \Sigma_p, W_p\}$ et celui de la spécification $R_s = \{P_s, T_s, \Sigma_s, W_s\}$. Le fonctionnement en boucle fermée du SED synchronisation des deux RdP (Dorsaf et al., 2012) qui, est opération structurelle consistant à fusionner les transitions synchronisées sur les mêmes événements.

La composé synchrone de deux RdP est un nouveau RdP $R = R_p \parallel_S R_s$ tel que :
 $P = P_p \cup P_s$; $T = T_p \cup T_s - T_{p_s}$; $\Sigma = \Sigma_p \cup \Sigma_s$ l'alphabet des événements

Le graphe de marquages du modèle RdP $R = R_1 \parallel_S R_2$ du système est l'automate de ce système en remplaçant chaque transition par l'événement associé. De manière générale, si Σ est l'alphabet des événements du SED, on peut définir la partition suivante : $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_u$ où Σ_c et Σ_u dénotent respectivement les ensembles d'événements contrôlables et incontrôlables.

Le problème d'états interdits et de contrôlabilité apparaît dans les SED modélisés par RdP lorsqu'on veut synchroniser le modèle des spécifications avec le modèle du procède par des événements incontrôlables.

Soit T_u l'ensemble des transitions associé aux événements incontrôlables communes aux deux modèles $R_P = \{P_P, T_P, \Sigma_P, W_P\}$ et $R_S = \{P_S, T_S, \Sigma_S, W_S\}$
 Soit M_P l'ensemble des marquages des places du procédé et M_S celui des spécifications. Les états interdits dans le modèle du système en boucle fermée peuvent est donné par l'expression :

$$M_I = \{[M_P, M_S] \mid \exists t \in T_u, \forall P_i \in R_P, m(P_i) \geq 1 \text{ et } \exists P_j \in R_S, m(P_j) = 0\} \quad (9)$$

En considérant le graphe de marquages de RdP $R = R_P \parallel_S R_S$ comme un automate, l'algorithme de synthèse de supervision proposé par Kumar (Kumar, 1991 ; Kumar et al., 1991) permet de déterminer de façon systématique :

- Les états interdits : un état interdit est tel qu'il existe un événement non contrôlable admis dans le modèle du procédé, mais interdit dans la spécification,
- Les états faiblement interdits : un état faiblement interdit tel qu'il existe une séquence d'événements incontrôlables dans le produit synchrone procédé- spécification qui conduit à un état défendu.

Par analogie, on distingue dans un graphe de marquages construit à partir de RdP :

- L'ensemble M_I d'états interdits qui comprend tout marquage $M_i \in Acc(R, M_0)$ pour lequel une transition incontrôlable $t \in T_u$ peut être trouvée telle que $M_i[t]M_k$ avec $M_k \in Acc(R_P, M_{P0})$ et $M_k \notin Acc(R, M_0)$

$$M_I = \{M_i \mid M_i \in Acc(R, M_0) \exists t \in T_u : M_i[t]M_k, M_k \in Acc(R_P, M_{P0}) \text{ et } M_k \notin Acc(R, M_0)\} \quad (10)$$

- L'ensemble M_{fI} d'états faiblement interdits constitué de tout marquage $M_i \in Acc(R, M_0)$ qui n'est pas lui-même interdit mais, à partir duquel un marquage interdit $M_k \in M_I$ peut être atteint via une séquence des transitions incontrôlables $t \in T_u$

$$M_{fI} = \{M_i \mid M_i \in Acc(R, M_0), M_i \notin M_I \exists t \in T_u : M_i[t]M_k, M_k \in M_I\} \quad (11)$$

- L'ensemble M_{fF} d'états interdits frontières constitué de tout état interdit ou faiblement interdit accessible depuis un état autorisé via une transition contrôlable $t \in T_C$.
- L'ensemble M_A d'états autorisés qui se défini comme :

$$M_A = \{Acc(R, M_0) \setminus M_I \cup M_{IF}\} \quad (12)$$

L'espace pertinent d'états accessibles d'un graphe de marquage est défini comme l'espace constitué de l'ensemble d'états autorisés et de l'ensemble d'états interdits frontières : $\{M_A \cup M_{IF}\}$

3. Matrice de fonction de transitions associée au graphe de marquages

Le graphe de marquages, espace d'états atteignables par la détermination des successeurs partant d'un marquage initial, peut être représenté par des matrices. Par exemple la matrice d'incidence représente les relations d'incidences entre transitions et places, tandis que la matrice d'adjacence représente les relations d'adjacences entre les places. Nous associons au graphe de marquages une matrice de fonction de transition qui, met en évidence relation de franchissement d'une transition $M_i[t_j]$ ($i=0 \dots n$; $j=0 \dots m$). Il s'agit d'une matrice (Tableau 1) qui fait le bilan de l'action de toutes les liaisons du *RdP* et garantie l'intégrité des informations vis-à-vis du graphe de marquages. Elle est notée Φ et traduit une application $\delta: M \times T \rightarrow M$, qui décrit quelle transition peut être franchie dans un état et le nouvel état résultant.

Tableau 1. Representation de la matrice de fonction de transitions

	t_0	t_1	...	t_m
M_0	$M_0[t_0]$	$M_0[t_1]$...	$M_0[t_m]$
M_1	$M_1[t_0]$	$M_1[t_1]$...	$M_1[t_m]$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
M_n	$M_n[t_0]$	$M_n[t_1]$...	$M_n[t_m]$

Les éléments $M_i[t_j]$ de la matrice de fonction de transitions peuvent être injectivement codés comme des vecteurs d'états suivant leur caractère interdit ou autorisé. La codification (Tableau 2) consiste à attribuer une valeur algébrique définie par une fonction associative est notée :

$$\varphi: M_i[t_j] \rightarrow \{-1, 1\} \quad (13)$$

Elle attribue une valeur aux états M_k résultant du franchissement de la transition $t_j \in T$. On obtient ainsi une matrice de fonction de transitions codifiée $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dont les éléments sont notés $\varphi(i, j)$ ou φ_{ij} .

Tableau 2. Matrice de fonction de transitions codifiée

	t_0	t_1	...	t_m
M_0	φ_{00}	φ_{01}	...	φ_{0m}
M_1	φ_{10}	φ_{11}	...	φ_{1m}
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
M_n	φ_{n0}	φ_{n1}	...	φ_{nm}

Règle de codification :

Si le marquage de sortie est présent chaque fois que $M_k \geq 1$ et autorisé par la spécification, alors $\varphi(i, j) = 1$; sinon, $\varphi(i, j) = -1$ lorsque M_k est interdit par la spécification de départ.

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1 & ; M_k \text{ est autorisé} \\ -1 & ; M_k \text{ est interdit} \end{cases} \quad (14)$$

On définit une notation simple de la matrice de fonction de transitions codifiées

$$\Psi \in \mathbb{R}^{n \times m} \Leftrightarrow \Psi = (\varphi_{ij}) = \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \cdots & \varphi_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n0} & \cdots & \varphi_{nm} \end{bmatrix} \quad (15)$$

4. Séparation des états du Graphe de Marquages du SED

Ehrenfeucht et Rozenberg (1990) caractérisent deux propriétés de séparation qui permettent la séparation des états d'un graphe. La première stipule qu'il y a suffisamment de régions pour discerner tous les états du système et, la seconde dit que si un événement n'est pas autorisé en un état il doit exister une région qui "inhibe" cet événement en cet état. Dans ce travail, la séparation consiste à associer à chaque état M_k du graphe de marquages son ensemble interdit M_I ou autorisé M_A vis-à-vis d'un "hyperplan de séparation" H .

L'hyperplan est constitué des états frontières ou critiques M_H qui « sépare » les états du graphe de marquages en deux ensembles tel que : $M_A \cup M_I \cup M_H = M$ et il n'y a pas de transitions entre des états de M_A et M_I .

Nous disons que M_H sépare strictement M_A et M_I si et seulement si :

$$\begin{cases} H(M_k) > 0 \text{ pour tout } M_k \in M_A \quad ; k = 0, \dots, n \\ \text{et} \\ H(M_k) < 0 \text{ pour tout } M_k \in M_I \quad ; k = 0, \dots, n \end{cases} \quad (16)$$

Si H ne sépare pas strictement M alors il existe un ensemble $M_H = \{M_k : H(M_k) = 0\}$. En somme, nous associons H une fonction de décision $g(M_k)$ qui est une forme linéaire défini par :

$$g(M_k) = \lambda + \langle y_k, M_k \rangle \text{ où } y_k \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \text{ un vecteur}$$

$$\begin{cases} g(M_k) > 0; \quad M_k \in M_A \text{ est un état autorisé} \\ g(M_k) = 0; \quad M_k \in M_H \text{ est un état frontière} \\ g(M_k) < 0; \quad M_k \in M_I \text{ est un état interdit} \\ k = 0, \dots, n \end{cases} \quad (17)$$

La séparation des états du graphe de marquages est tributaire des états interdits (de départ) par la spécification. Les états constituant l'hyperplan peuvent appartenir soit à l'ensemble d'états interdits : on parle d'états autorisés critiques ; soit à l'ensemble d'états autorisés : respectivement on parle d'états interdits frontières.

Pour caractériser la séparation, nous posons $[Y] = [\Psi][T]$ comme la réponse de la fonction de décision.

$$[Y] = [\Psi][T] = \begin{bmatrix} \varphi_{00} & \cdots & \varphi_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n0} & \cdots & \varphi_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \varphi_{0j} \cdot t_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \varphi_{nj} \cdot t_j \end{bmatrix} \quad (18)$$

Les transitions sont pondérées à 1 tel que : $\|t_0\| = \cdots = \|t_j\| = \cdots = \|t_m\| = 1$.

Pour chaque état M_k on définit :

$$y_k = \sum_{j=1}^m \varphi_{kj} \cdot \|t_j\| \quad (19)$$

Nous pouvons ainsi définir $Y^T = [y_0 \quad \cdots \quad y_n]$ comme un vecteur de scalaires et de déduire la fonction de décision :

$$[g(M_k)] = \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 M_0 \\ \vdots \\ y_n M_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}; \text{ avec } \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0. \quad (20)$$

La séparation va dépendre de la valeur algébrique de $y_k = \sum_{j=1}^m \varphi_{kj}$:

- $\sum_{j=1}^m \varphi_{kj} < 0$: M_k est un état interdit par la synchronisation des transitions incontrôlables (y compris les états interdits de départ)
- $\sum_{j=1}^m \varphi_{kj} > 0$: M_k est un état autorisé par la spécification
- $\sum_{j=1}^m \varphi_{kj} = 0$: M_k est un état interdit frontière ou un état critique constituant l'hyperplan séparateur

La codification de la matrice de fonction de transition permet de déterminer les états interdits supplémentaires (générés par la synchronisation d'événements incontrôlables) sans avoir à remonter les branches dans le graphe de marquage pour détecter les séquences d'événements incontrôlables qui mènent le système en boucle fermée vers les états interdits. Cet ensemble correspond aux les déférents sous-ensembles de l'espace d'états accessibles déterminés en appliquant l'algorithme de Kumar sur le graphe de marquages. Le résultat obtenu respecte la condition de séparation d'événements ($M_k < 0$) et la condition de séparation d'états $M_i \neq M_k$ comme stipulée dans la théorie des régions (Badouel et al., 1994).

5. Application aux systèmes manufacturiers

Cas 1 : Exemple académique pour la théorie de supervision

Soit un système manufacturier composé de deux machines identiques M_1 et M_2 , et d'un stock entre les deux machines (figure 1). Les deux machines travaillent en série et de façon indépendante, puisent des pièces brutes en amont et rejettent des pièces usinées en aval. Le fonctionnement du système doit respecter la présence d'un stock de capacité limité à 1 situé entre les deux machines.

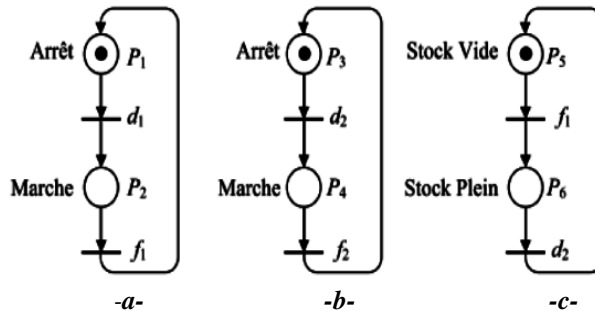


Figure 1. Modèle de RdP. a) Machine 1. b) machine 2. c) Spécification.

Notons respectivement $\Sigma_1 = \{d_1, f_1\}$ et $\Sigma_2 = \{d_2, f_2\}$, les alphabets des machines M_1 et M_2 . Nous avons :

- Les transitions d_1 et d_2 (démarrage cycle machines M_1 et M_2) sont contrôlables ;
- Les transitions f_1 et f_2 (fin cycle machines M_1 et M_2) sont incontrôlables.
- Les transitions communes au modèle du procédé et à la spécification sont f_1 et d_2 .
- La matrice d'incidence du réseau de Petri du système en boucle fermée est:

$$W_R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Le graphe de marquages du SED est donné à la figure 2

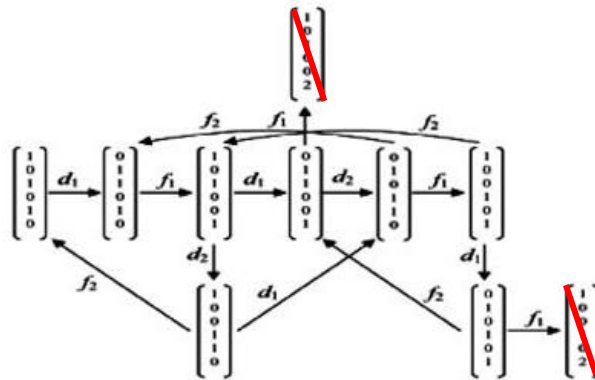


Figure 2. Graphe de marquages du système manufacturier (Cas 1)

Les états non atteignables $[1 0 1 0 0 2]^T$ et $[1 0 0 1 0 2]^T$ sont des états non atteignables qui peuvent être considéré comme des états interdits pour les besoins de la simplification dans la réduction des contraintes (Dideban, 2007). Ils ne font pas partis du graphe de marquages qui se veut fini.

❖ **Identification des états interdits (de départs) par la spécification :**

La spécification exige l'interdiction de marquages des places P_2 et P_6 simultanément. C'est-à-dire qu'il ne faut pas que la machine M_1 soit en état de marche si le stock est plein. Ceci revient à identifier les états $P_2P_4P_6$ ($[0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$) et $P_2P_3P_6$ ($[0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$) comme états interdits par la spécification.

❖ **Séparation des états du graphe de marquages :**

– **Matrice de fonction de transition associée au graphe de marquages**

Tableau 3 : Matrice de fonction de transitions

		d_1	f_1	d_2	f_2
M_0	$[101010]^T$	$[011010]^T$	0	0	0
M_1	$[011010]^T$	0	$[101001]^T$	0	0
M_2	$[101001]^T$	$[011001]^T$	0	$[100110]^T$	0
M_3	$[100110]^T$	$[010110]^T$	0	0	$[101010]^T$
M_4	$[010110]^T$	0	$[100101]^T$	0	$[011010]^T$
M_5	$[100101]^T$	$[010101]^T$	0	0	$[101001]^T$
M_6	$[011001]^T$	0	-	$[010110]^T$	0
M_7	$[010101]^T$	0	-	0	$[011001]^T$

Tableau 4 : Matrice de fonction de transitions codifiée

		d_1	f_1	d_2	f_2	$y_k = \sum_{j=1}^m \varphi_{kj}$
M_0	$[101010]^T$	1	0	0	0	1
M_1	$[011010]^T$	0	1	0	0	1
M_2	$[101001]^T$	-1	0	1	0	0
M_3	$[100110]^T$	1	0	0	1	2
M_4	$[010110]^T$	0	1	0	1	2
M_5	$[100101]^T$	-1	0	0	1	0
M_6	$[011001]^T$	0	-1	-1	0	-2
M_7	$[010101]^T$	0	-1	0	-1	-2

Soit $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

A partir de cette matrice nous pouvons obtenir la séparation des états via la fonction de décision $[g(M_k)]$ et nous obtenons :

$$[g(M_k)] = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ 0 \\ 2M_3 \\ 2M_4 \\ 0 \\ -2M_6 \\ -2M_7 \end{bmatrix}$$

Nous déduisons simplement:

- L'ensemble d'états caractérisant l'hyperplan : $M_H = \{M_2, M_5\} \in M_A$
- L'ensemble des états : $M_A = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_5, M_6\}$
- L'ensemble des états interdits : $M_I = \{M_6, M_7\}$

La figure 3 illustre la séparation des états du graphe de marquages. Les états M_2 et M_5 qui constituent l'hyperplan sont encadrés par les rectangles. En imposant des contraintes linéaires on garantit le contrôle strict. Ce résultat distingue les états conformément à l'algorithme de kumar (Kumar, 1991).

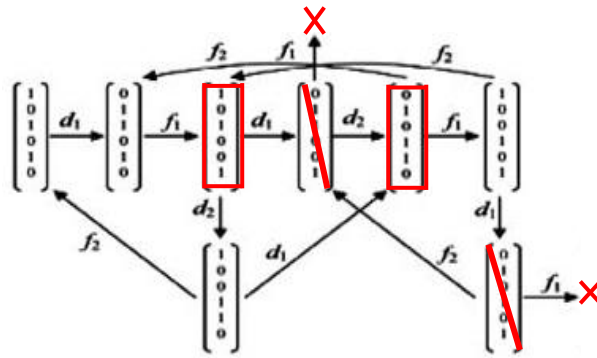


Figure 3. Séparation des états du graphe de marquages

Cas 2 : Système composé de deux machines et d'un robot (Dideban, 2007)

On considère un système composé de deux machines et d'un robot (figure 4). Chaque machine opère sur une seule pièce brute à la fois. Lorsque la machine a fini son travail (événement incontrôlable fm_i), le robot décharge la machine et lorsqu'il a

fini le déchargement de la machine (événement incontrôlable fdm_i), il transfère la pièce vers un stock. Après la fin du transfert (événement incontrôlable ftr_i), le robot revient à son état initial. Seul le début de tâche sur chaque machine (événement c_1 et c_2) est contrôlable. Les spécifications sont imposées par le robot.

- Le modèle RdP du procédé et la spécification sont présentés (fig. 4)

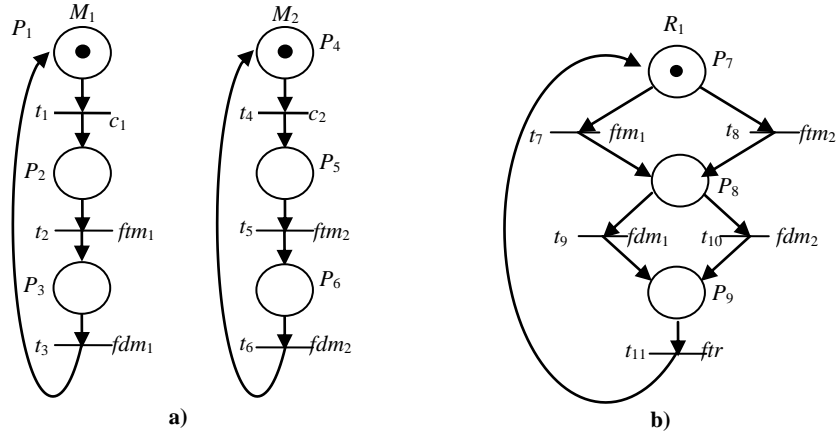


Figure 4. a) Modèle RdP des deux machines, b) Modèle RdP de fonctionnement de robot comme une spécification

- La composition synchrone des RdP nous donne le RdP en boucle fermée (Fig. 5)

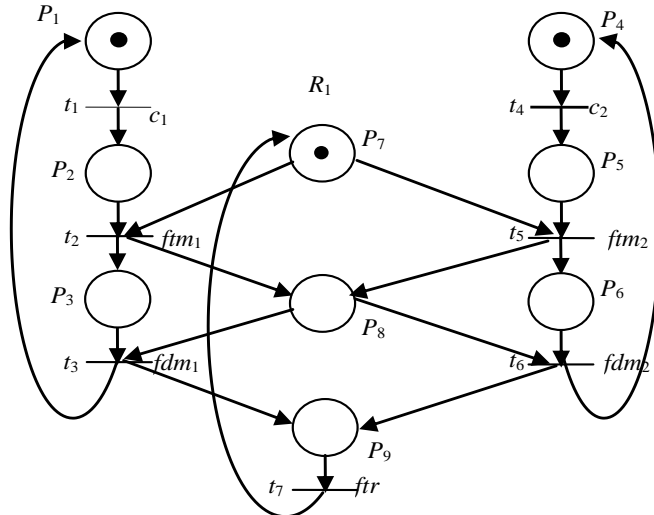


Figure 5. Modèle RdP en boucle fermée du système

- La matrice d'incidence du RdP du système en boucle fermée est:

$$W_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Le graphe de marquages du SED est donné à la figure 6

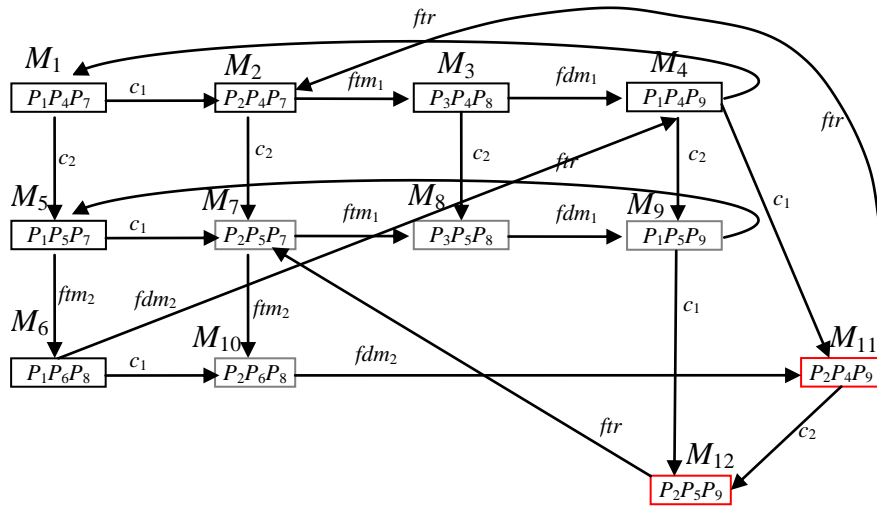


Figure 6. Graphe de marquages accessibles

❖ **Identification des états interdits (de départs) par la spécification :**

La synchronisation des événements incontrôlables ftr_1 et ftr_2 ne permet pas de respecter la spécification. Supposons que le Robot soit entrain de décharger la machine M_1 (marquage de la place P_9), et que la machine M_2 ait déjà démarré et soit arrivé à la fin de son travail (marquage place P_2). Dans cet état il est nécessaire que tout de suite le robot vienne pour prendre la pièce. Comme ce n'est pas le cas, la pièce est perdue. La spécification exige l'interdiction de l'état $P_2P_5P_9$.

❖ **Séparation des états du graphe de marquages :**

- **Matrice de fonction de transition associée au graphe de marquages**

Tableau 3 : Matrice de fonction de transitions

	c_1	c_2	ftm_1	ftm_2	fdm_1	fdm_2	ftr
M_1	M_2	M_5					
M_2		M_7	M_3				
M_3		M_8			M_4		
M_4		M_9					M_1
M_5	M_7			M_6			
M_6	M_{10}					M_4	
M_7			M_8	M_{10}			
M_8				-	M_9		
M_9	M_{12}						M_5
M_{10}			-			M_{11}	
M_{11}		M_{12}					M_2
M_{12}							

Tableau 4 : Matrice de fonction de transitions codifiée

	c_1	c_2	ftm_1	ftm_2	fdm_1	fdm_2	ftr	$y_k = \sum_{j=1}^m \varphi_{kj}$
M_1	1	1						2
M_2		1	1					2
M_3		1			1			2
M_4		1					1	2
M_5	1			1				2
M_6	1					1		2
M_7			1	1				2
M_8				-1	1			0
M_9	-1						1	0
M_{10}			-1			1		0
M_{11}		-1					1	0
M_{12}								-1

A partir de cette matrice nous pouvons obtenir la séparation des états via la fonction de décision $[g(M_k)]$ et nous obtenons :

- L'ensemble d'états constituant l'hyperplan :

$$M_H = \{M_8, M_9, M_{10}, M_{11}\} \in M_I$$
- L'ensemble des états : $M_A = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7\}$
- L'ensemble des états interdits : $M_I = \{M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}\}$

L'application de l'algorithme de kumar (Kumar, 1991) permet de distinguer l'ensemble des états interdits frontières : $\{M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}\}$. Nous constatons que l'état M_7 est identifié comme autorisé par notre méthode. En effet, cet état est un état autorisé critique car on y accède via les transitions contrôlables, ce qui ne pose pas de problème de contrôle d'une part et qui peut être interdit par la technique de réduction des contraintes lors de la synthèse du contrôleur.

Conclusion

La séparation des états du graphe de marquages accessibles, outil principal d'analyse des SED modélisés par réseau de Petri est une contribution essentielle à la synthèse de contrôleurs par la méthode des invariants de marquages. La méthode de séparation consiste à associer au graphe de marquages une matrice de fonction de transitions dont les éléments peuvent être codifiés par une fonction associative qui, prend en compte les états interdits par la spécification du SED. Cette codification permet de caractériser un hyperplan (fonction de décision) qui assure la séparation de l'espace d'états du graphe de marquages. L'hyperplan est un ensemble d'états ou marquages frontières nécessaires et suffisants à la détermination des contraintes admissibles adéquates pour la synthèse des SED par la méthode des invariants.

La perspective de notre travail consistera à déterminer l'hyperplan sous la forme d'une équation basée sur les marquages des places du réseau de Petri du SED en boucle fermée. Cette équation d'hyperplan devra être basée sur la structure graphique du réseau de Petri avec des propriétés analogues à la théorie de supervision. L'intérêt sera alors de n'avoir pas à construire le graphe de marquages, car l'équation d'hyperplan pourra caractériser les états interdits frontières et définir les contraintes linéaires admissibles à la synthèse de supervision par méthode des invariants.

Références Bibliographiques

- Alla H., David R., Di Mascolo M., Ferrier J.-L. (2000). *Analyse et commande des systèmes à événements discrets*, Editions Hermès Science
- Amirou A. (2015). *Optimisation des SVMs pour la discrimination des signaux*. Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri –Tizi-Ouzou
- Badouel E., Darondeau, Bernardinello L. (1994). Polynomial algorithms for the synthesis of bounded nets, *Proceedings Caap 95, Lecture notes in computer science 915*, p. 364–378. Springer

- Charbonnier F., Alla H., and David R. (1999). *The Supervised Control of Discrete-Event Dynamic Systems*, IEEE Transactions on control systems technology, vol. 7, n° 2
- Ciardo G., Zhao Y., and Xiaoqing J., (2012). Ten Years of Saturation: A Petri Net Perspective, *Lecture Notes in Computer Science*, K. Jensen, S. Donatelli, and J. Kleijn (Eds.): ToPNoC V, LNCS 6900, pp. 51–95, 2012, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- David R., Alla H. (1992), *Petri Nets and Grafset, Tools for Modelling Discrete Event Systems*, Prentice Hall, Londres
- Desel J., Esparza J. (2015). Negotiations and Petri Nets, *Proceedings of the International Workshop on Petri Nets and Software*, Engineering PNSE'15, vol. 1372, Brussels, Belgium
- Dideban A. (2007). *Synthèse de contrôleurs discrets par simplification de contraintes et de conditions*. Thèse de Doctorat PhD, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Dorsaf Elhog-Benzina, Haddad S., Hennicker R., (2012), Refinement and Asynchronous Composition of Modal Petri Nets, *Lecture Notes in Computer Science LNCS 6900*, K. Jensen, S. Donatelli, and J. Kleijn (Eds.), pp. 96–120, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Ehrenfeucht A., Rozenberg G. (1990b). Partial 2-structures, Part II: State Spaces of Concurrent Systems, *Acta Informatica*, vol. 26, p. 343–368.
- Falk J. E., Bandurova Y. and Yeganova L. (2001). Sets separation problems and global optimization, *Third world congress of nonlinear analysts*, 47 p.1857-1867, Elsevier science Ltd
- Ferrier J-L., Boimond J-L. (2013). Systèmes dynamiques à événement discrets. Du modèle à la commande, Séminaire dans le cadre des JDA'99, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00844691
- Feuillade G., Pinchinat S. (2005). Spécifications modales de réseaux de Petri, IRISA / INRIA Rennes, RS - JESA – 39/2005. MSR'05, pages 287 à 301
- Gougam H-E., Subias A., Pencolé Y. (2013). Diagnosticabilité de motifs de supervision par dépliage de réseaux de Petri, *Manifestation avec acte : 5e Journées Doctorales /Journées Nationales MACS*, Strasbourg, France, p.139-144
- Kumar R (1991). *Supervisory synthesis techniques for discrete event dynamical systems*. Thesis PhD, University of Texas
- Kumar R., Garg V., Marcus V.I., (1991). *On controllability and normality of discret event dynamics systems*, Systems and control letters, Vol 17, p. 157-158
- Marangé P., Abdelouahed T., Gellot F., Carré-Ménérier V. (2009). Etude du comportement global d'un SED en vue de la validation de sa commande spécifiée par Grafset. *Journal européen des systèmes automatisés JESA*, vol 42, n°1 p. 63-94
- Moody J. O., Antsaklis P. J., (1998), *Supervisory control of discrete event systems using petri nets*, springer-science + business media, new york
- Nourelfath Mustapha (2001). Un nouvel algorithme pour la synthèse de la commande des systèmes à événements discrets. *Troisième conférence francophone de modélisation et simulation, Troyes, France*
- Nourelfath M., Niel E. (2000). Relaxation du concept de contrôlabilité pour une synthèse de la commande des systèmes de production. Première Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), 5-8 Juillet 2000, Lille, p. 526-531.

- Ramadge P. J., Wonham W. M (1983). Supervisory control of a class of discrete event processes, *Lecture Notes in Computer Science (LNCIS)*, Vol. 63, p. 477-498. Springer-Verlag, Germany
- Ramchandani C. (1974). Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Petri Nets. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA.
- Roussel J. M. (2015). *Contribution à la commande sûre des Systèmes à Evènements Discrets*. Habilitation à diriger des recherches, ENS Cachan, HAL archives ouvertes, France
- Vasiliu Andra-Ioana (2012). *Synthèse de contrôleurs des systèmes à événements discrets basée sur les réseaux de Pétri*. Thèse PhD, HAL archives ouvertes, France
- Wimmel H. (2004). Infinity of intermediate states is decidable for Petri Nets, *Lecture Notes in Computer Science*, applications and theory of Petri Nets international Conference, ICATPN, J. Cortadella and W. Reisig (Eds.), LNCS 3099, pp. 426–434, Springer-Verlag Berlin Heidelberg