Intégrales de Sugeno généralisées en analyse de données

Miguel Couceiro, Didier Dubois, Henri Prade, Agnès Rico

Intégrales de Sugeno généralisées en analyse de données

Generalized Sugeno integrals in qualitative data analysis

Miguel Couceiro[1] Didier Dubois[2] Henri Prade[2] Agnès Rico[3]

[1] Université de Lorraine, LORIA, INRIA Nancy Grand-Est, CNRS,
BP 239, F54506 Vandœuvre-lès-Nancy, miguel.couceiro@inria.fr
[2] IRIT, CNRS & Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, prade@irit.fr
[3]ERIC & Université Claude Bernard Lyon 1, 43 bld du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, agnes.rico@univ-lyon1.fr

Résumé :

Les intégrales de Sugeno permettent de décrire des familles d'opérateurs d'agrégation qualitativement. On sait que les intégrales de Sugeno peuvent être représentées par des ensembles de règles. Chaque règle utilise le même seuil dans les conditions et la conclusion. Cependant, en pratique on aimerait représenter des règles mettant en œuvre plusieurs seuils. Certaines règles à plusieurs seuils peuvent se représenter par des "fonctionnelles d'utilité de Sugeno" où la valeur des critères peut être modifiée à l'aide de fonctions d'utilité. Leur pouvoir de représentation reste assez restreint. Par contre, on suggère que l'usage de disjonctions ou de conjonctions de fonctionnelles d'utilité de Sugeno augmente de façon déterminante le pouvoir expressif et qu'on peut capturer ainsi toute fonction d'agrégation unaire par morceaux sur une échelle finie.

Mots-clés :

Sugeno integrals ; piecewise unary functions ; rule-based representation.

Abstract :

Sugeno integrals are useful for describing families of multiple criteria aggregation functions qualitatively. It is known that Sugeno integrals, as aggregation functions, can be represented by a set of rules. Each rule refers to the same threshold in the conditions about the values of the criteria and in the conclusion pertaining to the value of the integral. However, in the general case, we expect rules where several thresholds appear. Some of these rules involving different thresholds can be represented by Sugeno utility functionals where criteria values are rescaled by means of utility functions associated with each criterion. But as shown in this paper, their representation power is quite restrictive. In contrast, we provide evidence to conjecture that the use of disjunctions or conjunctions of Sugeno integrals with utility functions drastically improves the expressive power. In fact, they can capture any aggregation function on a finite scale, understood as piecewise unary aggregation functions.

Keywords :

Sugeno integrals ; piecewise unary functions ; rule-based representation.

1 Introduction

Les intégrales de Sugeno sont des fonctions d'agrégation qui renvoient une évaluation globale pour des objets ou alternatives évaluées par rapport à des critères. Elles prennent en compte l'importance de chaque sous-ensemble de critères en utilisant une fonction d'ensemble monotone appelée *capacité*. Elles sont utilisées dans le domaine de la décision multicritères et de la décision dans l'incertain [6, 8, 10, 16]. Ceux sont des fonctions d'agrégation qualitatives car étant des polynômes latticiels (utilisant les opérations $\min$ et $\max$) elles peuvent être définies sur toute échelle ordonnée complète. Le maximum et le minimum pondérés sont des cas particuliers d'intégrales de Sugeno.

Représenter une fonction de plusieurs variables par une intégrale de Sugeno est un problème discuté dans [16]. Plus précisément dans ce travail, on détermine l'ensemble des intégrales de Sugeno représentant une donnée constituée d'un tuple d'évaluations partielles et d'une évaluation globale. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution est aussi fournie. Ce problème a été abordé de manière pratique et théorique [15]. L'idée est de définir une paire de capacités qui sont les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des solutions. Chaque donnée qui arrive contraint les bornes de l'ensemble des solutions. Cette approche a été étendue aux treillis distributifs [3]. Dans [14], une approche générale est proposée pour définir plusieurs familles d'intégrales de Sugeno dans le cas où les données ne sont pas toutes compatibles avec une seule famille.

Dans [7, 11] il est montré comment une intégrale de Sugeno S représente un ensemble de règles "si-alors" mono-seuil, de la forme

$x_1 \geq \alpha$ et $x_2 \geq \alpha$ et $\ldots x_n \geq \alpha \Rightarrow S \geq \alpha$, ou encore, $x_1 \leq \alpha$ et $x_1 \leq \alpha$ et $x_2 \leq \alpha$ et $\ldots x_n \leq \alpha \Rightarrow S \leq \alpha$. Ces deux types de règles sont utilisées pour sélectionner (resp. éliminer) des alternatives de valeur suffisante (resp. insuffisante). Récemment l'intégrale de Sugeno a été généralisée par des fonctionnelles d'utilité de Sugeno [2] qui utilisent une fonction d'utilité sur chaque critère. En décision multicritère, cette fonction d'agrégation peut être vue comme la combinaison d'une intégrale de Sugeno et de fonctions d'une variable préservant l'ordre sur chaque critère. En utilisant des fonctions plus générales, la fonctionnelle d'utilité de Sugeno a été étendue aux treillis distributifs [4]. Dans ce papier nous allons plus loin, en considérant des disjonctions ou des conjonctions de fonctionnelles d'utilité de Sugeno. Nous montrons que cette classe couvre toutes les fonctions unaires par morceaux monotones sur des échelles finies et qu'elle peut représenter des règles à plusieurs seuils de la forme $x_1 \geq \alpha_1$ et $x_2 \geq \alpha_2$ et $\ldots x_n \geq \alpha_n \Rightarrow S \geq \delta$ (règles de sélection) ; ou encore $x_2 \leq \alpha_1$ et $x_2 \leq \alpha_2$ et $\ldots x_n \leq \alpha_n \Rightarrow S \leq \delta$ (règles d'élimination).
Le papier est organisé comme suit : La section suivante est consacrée aux rappels sur les intégrales de Sugeno, et aux règles "si-alors" qu'elles peuvent représenter. La Section 3 présente les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble de règles soit représentable par une fonctionnelle d'utilité de Sugeno, c.-à-d., une intégrale de Sugeno combinée avec des fonctions d'utilité qui modifient les valeurs des échelles pour chaque critère. Le but principal de la Section 4 est l'extension des fonctionnelles d'utilité de Sugeno à des conjonctions ou disjonctions de celles-ci. Cette classe de fonctions est très expressive et peut représenter les fonctions unaires par morceaux croissantes et toute fonction d'agrégation définie sur une échelle finie.

2 Intégrales de Sugeno et données qualitatives

Nous utilisons les notations de la décision multicritère où des objets sont évalués par rapport à des critères : $C = \{1, \cdots, n\}$ est l'ensemble des critères. 2^C est l'ensemble des ensembles de critères, L est une échelle totalement ordonnée avec un plus grand élément 1, un plus petit 0, et une opération qui renverse l'ordre, notée ν (involutive, et $\nu(1) = 0$ et $\nu(0) = 1$). Un objet est représenté par un tuple $x = (x_1, \ldots, x_n)$, x_i étant l'évaluation de x par rapport au critère i.

Intégrale de Sugeno. Dans la définition de l'intégrale de Sugeno, les poids relatifs des ensembles de critères sont représentés par une *capacité* (ou *mesure floue*) qui est une fonction d'ensemble $\mu : 2^C \to L$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(C) = 1$ et $A \subseteq B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$. La capacité conjuguée de μ est définie par $\mu^c(A) = \nu(\mu(A^c))$ où A^c est le complémentaire de A.

Définition 1 *[17, 18] L'intégrale de Sugeno d'une fonction $x : i \in C \mapsto x_i \in L$ par rapport à une capacité $\mu : 2^C \to L$ est définie par*

$$S_\mu(x) = \max_{\alpha \in L} \min(\alpha, \mu(x \geq \alpha)),$$

où $\mu(x \geq \alpha) = \mu(\{i \in C | x_i \geq \alpha\})$.

Des écritures équivalentes [17, 13, 12] sont :

$$\max_{A \subseteq C} \min(\mu(A), \min_{i \in A} x_i) \text{ et } \min_{A \subseteq C} \max(\mu(A^c), \max_{i \in A} x_i) \quad (1)$$

Trouver les intégrales de Sugeno compatibles avec un ensemble de données.
Un ensemble de données est une collection de couples $(x^k, \alpha_k), k = 1, \ldots, N$ où chaque x^k est un tuple $(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ d'évaluations locales de l'objet k par rapport au critère $i \in C$ et α_k est l'évaluation globale de l'objet k.
Dans [16] il a été prouvé que pour une donnée (x, α) l'ensemble des capacités μ telles que $S_\mu(x) = \alpha$ est caractérisé par les inégalités $\forall A \subseteq C, \check{\mu}_{x,\alpha}(A) \leq \mu(A) \leq \hat{\mu}_{x,\alpha}(A)$, où $\check{\mu}_{x,\alpha}$ et $\hat{\mu}_{x,\alpha}$ sont les capacités définies par

$$\check{\mu}_{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \{i | x_i \geq \alpha\} \subseteq A \\ 0 \text{ sinon ;} \end{cases}$$

et $$\hat{\mu}_{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha \text{ si } A \subseteq \{i | x_i > \alpha\} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons que $\check{\mu}_{x,\alpha}$ est une mesure de nécessité par rapport à la distribution de possibilité : $\check{\pi}_{x,\alpha}(i) = 1$ si $x_i \geq \alpha$ et $\nu(\alpha)$ sinon. De même,

$\hat{\mu}_{x,\alpha}(A)$ est une mesure de possibilité de distribution : $\hat{\pi}_{x,\alpha}(i) = 1$ si $x_i \leq \alpha$ et α sinon.
Une capacité μ est compatible avec la donnée (x, α) si et seulement si $\mu(x > \alpha) \leq \alpha$ et $\mu(x \geq \alpha) \geq \alpha$. Pour qu'un ensemble de capacités compatibles μ soit non vide, nous devons aussi avoir $\min_{i=1}^n x_i \leq \alpha \leq \max_{i=1}^n x_i$, à cause de l'idempotence.
L'ensemble des capacités compatibles avec les données $(x^k, \alpha_k)_k$ est l'ensemble des capacités μ satisfaisant $\max_k \check{\mu}_{x^k,\alpha_k} \leq \mu \leq \min_k \hat{\mu}_{x^k,\alpha_k}$. Cet ensemble de solutions peut être vide, même si l'ensemble des capacités μ compatibles pour chaque donnée n'est pas vide. Afin de comparer $\max_k \check{\mu}_{x^k,\alpha_k}$ et $\min_k \hat{\mu}_{x^k,\alpha_k}$ il n'est pas nécessaire de calculer leurs valeurs et de les comparer terme à terme. Il a été prouvé [16] que l'ensemble des capacités compatibles n'est pas vide si et seulement si pour tout $\alpha_k < \alpha_l$ nous avons $\{i | x_i^l \geq \alpha_l\} \not\subseteq \{i | x_i^k > \alpha_k\}$.

L'intégrale de Sugeno : un ensemble de règles. Dans [14] on décrit comment exprimer les règles "si-alors" de sélection et les règles d'élimination associées à des intégrales de Sugeno. Leur construction est basée sur la *transformée de Möbius qualitative* d'une capacité μ qui est la fonction $\mu_\# : 2^C \to L$ définie par [9] :

$$\mu_\#(E) = \mu(E) \text{ si } \mu(E) > \max_{B \subset E} \mu(B) \text{ et 0 sinon.}$$

Un ensemble E tel que $\mu_\#(E) > 0$ est appelé un ensemble *focal*. L'ensemble des ensembles focaux de μ est noté $\mathcal{F}(\mu)$.
L'intégrale de Sugeno peut s'exprimer avec les $\mu_\#$, en modifiant l'équation (1), comme suit :

$$\begin{aligned} S_\mu(x) &= \max_{E \in \mathcal{F}(\mu)} \min(\mu_\#(E), \min_{i \in E} x_i) \\ &= \min_{T \in \mathcal{F}(\mu^c)} \max(\nu(\mu^c_\#(T)), \max_{i \in T} x_i). \end{aligned}$$

Une intégrale de Sugeno correspond aux règles suivantes :
Règles de sélection associée à S_μ.
Chaque ensemble focal E de μ correspond à la règle de sélection R_E^s : si $x_i \geq \mu_\#(E)$ pour tout $i \in E$, alors $S_\mu(x) \geq \mu_\#(E)$.
Règle d'élimination associée à S_μ.
Chaque ensemble focal T de la conjuguée μ^c correspond à la règle d'élimination R_T^e : si $x_i \leq \nu(\mu^c_\#(T))$ $\forall i \in T$, alors $S_\mu(x) \leq \nu(\mu^c_\#(T))$.
L'intégrale de Sugeno est équivalente à un ensemble de règles mono-seuil. Dans la suite de l'article, les règles de sélection mono-seuil seront notées $(\bigwedge_{i \in E_j} x_i \geq \delta_j) \Rightarrow S(x) \geq \delta_j$ et les règles d'élimination mono-seuil seront notées $(\bigwedge_{i \in T_j} x_i \leq \delta_j) \Rightarrow S(x) \leq \delta_j$. Comme les intégrales de Sugeno sont idempotentes, l'ensemble des règles de sélection de la forme $(\bigwedge_{i \in C} x_i \geq \delta_j) \Rightarrow S(x) \geq \delta_j$ ou l'ensemble des règles d'élimination de la forme $(\bigwedge_{i \in C} x_i \leq \delta_j) \Rightarrow S(x) \leq \delta_j$, sont toujours valides.
Soit R un ensemble de règles mono-seuil r_i, A^{r_i} l'ensemble des critères impliqués dans la règle r_i et δ_i le seuil associé. Dans certains cas, nous pouvons définir une capacité μ avec les ensembles focaux A^{r_i} tels que $\mu_\#(A^{r_i}) = \delta_i$ et tels que l'intégrale de Sugeno correspondante induit R.

Proposition 1 *Tout ensemble de règles mono-seuil R est représentable par une intégrale de Sugeno.*

Preuve Une règle mono-seuil est équivalente à un ensemble $\{(A^{r_i}, \delta_i) : i = 1, \ldots, N\}$. Considérons l'ensemble $R(A) = \{r_i : A^{r_i} \subseteq A\}$. Définissons la fonction $\mu : 2^C \to L$ par $\mu(A) = \max\{\delta_i : r_i \in R(A)\}$ et $\mu(C) = 1$. Cette fonction induite par R est une capacité. Considérons une règle r_i dont le terme associé est $\min(\mu(A^{r_i}), \min_{i \in A^{r_i}} x_i) \geq \delta_i$. Donc $\forall r_i \in R, S_\mu(x) \geq \delta_i$ dès que $x \geq \delta_i, i \in A^{r_i}$. De plus μ est la plus petite capacité vérifiant ces inégalités.

Ce résultat est aussi montré par Greco et al. [11]. L'ensemble des règles associées aux ensembles focaux de μ donneront une représentation minimale de l'ensemble des règles de sélection R, en supprimant les règles redondantes. Par exemple, supposons que R contienne les règles $x_1 \geq \delta_1 \wedge x_2 \geq \delta_1 \Rightarrow S \geq \delta_1$ et $x_1 \geq \delta_2 \wedge x_2 \geq \delta_2 \Rightarrow S \geq \delta_2$, où $\{1, 2\} \subset C$ (il y a plus que deux critères), et que $\delta_1 > \delta_2$. Si elles sont représentables par une intégrale de Sugeno par rapport à μ telle que $\mu(\{1, 2\}) = \delta_1$ (et 0 sinon), alors la seconde règle est redondante car si $x_1 \geq \delta_2 \wedge x_2 \geq \delta_2$ alors $S_\mu(x) = \min(\delta_1, \delta_2)$. De même pour les règles d'élimination.

Dans le cas général, si les règles ont plusieurs seuils, nous avons besoin d'aller au delà des intégrales de Sugeno pour les représenter.

3 Intégrales de Sugeno avec des fonctions d'utilité

Une *fonctionnelle d'utilité de Sugeno (FUS) par rapport à une capacité* μ est $S_{\mu,\varphi}(x) = S_\mu(\varphi(x))$ avec $\varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_n(x_n))$ où chaque fonction $\varphi_i : L \to L$ est croissante, et satisfait les conditions $\varphi_i(0) = 0$ et $\varphi_i(1) = 1$. Notons que $S_{\mu,\varphi}(x) = \max_{E \in \mathcal{F}(\mu)} \min(\mu_\#(E), \min_{i \in E} \varphi_i(x_i))$, et que $S_{\mu,\varphi}$ n'est pas toujours une fonction d'agrégation idempotente.

Lorsque l'échelle L est finie, l'effet de la fonction φ_i est essentiellement celui de réduire l'échelle car lorsque φ_i n'est pas l'identité, $\varphi_i(L) \subset L$. Malgré cette remarque, les FUS sont strictement plus expressives que les intégrales de Sugeno comme indiqué dans [1].

Il est facile de comprendre que $S_{\mu,\varphi}$ représente les règles de la forme :

$$(\textstyle\bigwedge_{i \in E_j} \varphi_i(x_i) \geq \delta_j) \Rightarrow S_{\mu,\varphi}(x) \geq \delta_j \text{ et}$$
$$(\textstyle\bigwedge_{i \in T_j} \varphi_i(x_i) \leq \delta_j) \Rightarrow S_{\mu,\varphi}(x) \leq \delta_j.$$

Soit α_i tel que $\varphi_i(\alpha_i) = \delta_j$. Alors les règles mono seuil ci dessus expriment des règles à plusieurs seuils de la forme

$$(\bigwedge_{i \in E_j} x_i \geq \alpha_i) \Rightarrow S_{\mu,\varphi}(x) \geq \delta_j.$$

Montrons que toute règle de sélection à plusieurs seuils peut être représentée par une FUS.

Exemple 1 *Considérons la règle de sélection $x_1 \geq \alpha_1$ et $x_2 \geq \alpha_2 \Rightarrow S \geq \delta$ avec $1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 > \delta \geq 0$, où $|C| \geq 3$. Définissons les fonctions d'utilité φ_1, φ_2 telles que $\varphi_1(x_1) \geq \delta$ si $x_1 \geq \alpha_1$ et $\varphi_1(x_1) < \delta$ sinon, et $\varphi_2(x_2) \geq \delta$ si $x_2 \geq \alpha_2$ et $\varphi_2(x_2) < \delta$ sinon. Alors la règle mono-seuil $\varphi_1(x_1) \geq \delta$ et $\varphi_2(x_2) \geq \delta \Rightarrow S \geq \delta$ est équivalente à la précédente règle à plusieurs seuils : par construction $x_1 \geq \alpha$ est équivalent à $\varphi_1(x_1) \geq \delta$, et de même pour x_2. On peut alors utiliser une capacité avec le poids δ sur l'ensemble focal $\{1, 2\}$ et le poids 1 sur C ; la FUS $\max(\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \delta), \min_{i \in C} \varphi_i(x_i))$ implique la règle de sélection à plusieurs seuils initiale, à condition que, pour $i > 2$ nous ayons $\varphi_i(1) = 1$ et $\varphi_i(x_i) = 0$ sinon.*

Plus généralement considérons la règle de sélection $x_1 \geq \alpha_1$ et $x_2 \geq \alpha_2$ et $\ldots x_\ell \geq \alpha_\ell \Rightarrow S \geq \delta_j$, avec l'échelle finie $L = \{0, \delta_1 < \ldots < \delta_k = 1\}$. Nous pouvons la représenter à l'aide de la fonction φ_i telle que $\varphi_i(x_i) \in [\delta_j, 1]$ si $x_i \geq \alpha_i$ et $\varphi_i(x_i) \in [0, \delta_{j-1}]$ sinon. Le poids δ_j est attribué à l'ensemble focal $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ et le poids 1 à C ; la FUS représentant la règle est $\max(\min(\min_{i=1}^{\ell} \varphi_i(x_i), \delta_j), \min_{i \in C} \varphi_i(x_i))$, à condition que, pour $i > \ell$ nous ayons $\varphi_i(1) = 1$ et $\varphi_i(x_i) = 0$ sinon.

De même pour la règle d'élimination $x_1 \leq \alpha_1$ et $x_2 \leq \alpha_2$ et $\ldots x_\ell \leq \alpha_\ell \Rightarrow S \leq \delta_j$, on peut utiliser la fonction ψ_i telle qe $\psi_i(x_i) \in [0, \delta_j]$ si $x_i \leq \alpha_i$ et $\psi_i(x_i) \in [\delta_{j+1}, 1]$ sinon. Le poids δ_j est donné à l'ensemble focal $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ et le poids 1 à C; la FUS représentant la règle est $S_{\mu,\psi}(x) = \min(\max(\max_{i=1}^{\ell} \psi_i(x_i), \delta_j), \max_{i \in C} \psi_i(x_i))$, à condition que, pour $i > \ell$ nous ayons $\psi_i(0) = 0$ et $\psi_i(x_i) = 1$ sinon.

Néanmoins il est parfois impossible de représenter le comportement de plusieurs règles par une seule FUS car les contraintes sur les fonctions d'utilité induites par les règles peuvent être en conflit.

Proposition 2 *Considérons deux règles de sélection r^1 et r^2 partageant le critère x, et de la forme "si $\ldots$ et $x \geq \alpha_i$ et $\ldots$ alors $S \geq \delta_i$ avec $\alpha_1 > \alpha_2$ mais $\delta_1 \leq \delta_2$. Alors, il n'existe pas de FUS qui la représente.*

Preuve : La fonction d'utilité φ calculée en x est soumise aux contraintes suivantes : pour la règle 1 : $\varphi(x) \geq \delta_1$ si $x \geq \alpha_1$, et $\varphi(x) < \delta_1$ sinon. Pour la règle 2 : $\varphi(x) \geq \delta_2$ si $x \geq \alpha_2$, et $\varphi(x) < \delta_2$ sinon. Mais comme $\alpha_1 > \alpha_2$, supposons $\alpha_1 > x \geq \alpha_2$. Alors les conditions imposent $\varphi(x) < \delta_1$ et $\varphi(x) \geq \delta_2$, ce qui est impossible.

Exemple 2 *Considérons les règles :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x_1 \geq \delta_2 \text{ et } x_2 \geq \lambda_3 \text{ alors } S \geq \lambda_3 \\ \text{si } x_2 \geq \lambda_2 \text{ et } x_3 \geq \lambda_2 \text{ alors } S \geq \lambda_3 \end{array} \right\}$$

avec $\lambda_2 < \lambda_3$. La variable x_2 est commune aux deux règles. La première règle impose que $\varphi_2(\lambda_3) \geq \lambda_3$ et $\varphi_2(x_2) < \lambda_3$ si $x_2 < \lambda_3$ (par exemple $\varphi_2(x_2) = x_2$). En particulier, $\varphi_2(\lambda_2) < \lambda_3$. Mais l'autre règle impose $\varphi_2(\lambda_2) \geq \lambda_3$, ce qui est contradictoire.

Remarquons que dans la proposition précédente, si les deux règles mettent en jeu les mêmes critères ($A^{r_1} = A^{r_2}$) avec des seuils dans r^1 pour les critères autres que x pas plus petits que les niveaux requis dans r^2

pour ces critères, alors la règle r^1 n'est qu'une conséquence de r^2 et peut être supprimée. Nous avons une proposition similaire à la Proposition 2 pour les règles d'élimination.
Si la condition de la proposition précédente n'est pas vérifiée dans l'ensemble des règles de sélection R, c'est-à-dire, $\forall r_1, r_2 \in R, \forall i \in A^{r_1} \cap A^{r_2}$, si $\alpha_i^{r_1} > \alpha_i^{r_2}$ implique $\delta_1 > \delta_2$, alors l'ensemble des règles peut être pris en compte par une intégrale de Sugeno par rapport à la capacité μ telle que $\mu(A^{r_j}) = \delta_j, r^j \in R$, à condition d'enlever les règles redondantes de R.

Exemple 3 *Considérons les règles :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{si } x_1 \geq \lambda_3 \textit{ et } x_2 \geq \lambda_5 \textit{ alors } S \geq \lambda_4 \\ \textit{si } x_1 \geq \lambda_2 \textit{ et } x_2 \geq \lambda_3 \textit{ alors } S \geq \lambda_3 \end{array} \right\}$$

avec $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$. Les deux règles mettent en jeu les mêmes critères. La condition d'impossibilité de la proposition 2 n'est pas satisfaite. D'après la première règle, on doit ajouter la fonction d'utilité φ_1 telle que $\varphi_1(\lambda_3) \geq \lambda_4$ et $\varphi_1(x_1) < \lambda_4$ si $x_1 < \lambda_3$. D'après la seconde règle, φ_1 doit aussi satisfaire $\varphi_1(\lambda_2) \geq \lambda_3$ et $\varphi_1(x_1) < \lambda_3$ si $x_1 < \lambda_2$. Par exemple, on peut choisir $\varphi_1(\lambda_1) = \lambda_2; \varphi_1(\lambda_2) = \lambda_3; \varphi_1(\lambda_3) = \lambda_4$. De même pour l'attribut 2, φ_2 doit aussi satisfaire $\varphi_2(\lambda_5) \geq \lambda_4$ et $\varphi_2(x_2) < \lambda_4$ si $x_2 < \lambda_5$, et $\varphi_2(\lambda_3) \geq \lambda_3$ et $\varphi_2(x_2) < \lambda_3$ si $x_1 < \lambda_3$, par exemple $\varphi_2(\lambda_2) = \lambda_2$, $\varphi_2(\lambda_3) = \lambda_3$, $\varphi_2(\lambda_4) = \lambda_3$, $\varphi_2(\lambda_5) = \lambda_4$. En utilisant les fonctions d'utilité nous obtenons les règles

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{si} \varphi_1(x_1) \geq \lambda_4 \textit{ et } \varphi_2(x_2) \geq \lambda_4 \textit{ alors } S \geq \lambda_4 \\ \textit{si } \varphi_1(x_1) \geq \lambda_3 \textit{ et } \varphi_2(x_2) \geq \lambda_3 \textit{ alors } S \geq \lambda_3 \end{array} \right\}$$

qui peuvent être représentées par la seule expression $S(x) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \lambda_4)$.

Une question se pose : quelle sorte d'ensemble de règles peut être représenté avec une FUS $S_{\mu,\varphi}$? Les résultats précédents suggèrent que l'ensemble des règles doit avoir un comportement local strictement monotone comme suit : Soit $R(j)$ l'ensemble de règles dans lequel l'attribut x_j apparait. Soit Θ_j l'ensemble des seuils α_i apparaissant dans les règles r^i de $R(j)$ de la forme $x_j \geq \alpha_i$, et soit $\Gamma(\alpha)$ l'ensemble des seuils de conclusion δ_i pour les règles r^i telles que $\alpha_i = \alpha \in \Theta_j$. Alors la multifunction Γ doit être strictement monotone : $\forall \alpha, \alpha' \in \Theta_j, \alpha > \alpha'$ implique $\min \Gamma(\alpha) > \max \Gamma(\alpha')$. En effet, si il y a plusieurs niveaux de conclusion $\delta \in \Gamma(\alpha)$, correspondant à différentes règles ayant la même condition $x_j \geq \alpha$, la fonction d'utilité pour x_j devra satisfaire $\varphi_j(\alpha) \geq \max \Gamma(\alpha)$ et $\varphi_j(x_j) < \min \Gamma(\alpha)$ si $x_j < \alpha$.

4 Combinaison de fonctionnelles d'utilité de Sugeno

Afin de trouver un opérateur d'agrégation qui puisse représenter tout ensemble de règles de sélection à plusieurs seuils, nous considérons une fonction croissante $f : L^n \to L$ de la forme

$$f(x_1, \ldots x_n) = \max_{i \in I} \min(\min_{j \in A_i} \varphi_{ij}(x_j), \delta_i)$$

où L est une chaine finie et chaque fonction $\varphi_{ij} : L \to L$ est croissante avec les conditions $\varphi_{ij}(0) = 0$ et $\varphi_{ij}(1) = 1$, I un ensemble d'indices. Nous appelons ces fonctions f *la forme disjonctive de fonctions unaires par morceaux* (df-PUF), dans le sens où le domaine L^n peut être partionné en sous-ensembles tels que $f(x_1, \ldots, x_n)$ vaut $\varphi_{ij}(x_j)$, ou une constante δ_i pour $i \in I$. Notons que toute fonction croissante $f : L^n \to L$ qui vérifie les conditions aux bornes :
$f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ et $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ (**BC**)
est une df-PUF.
Le but principal de cette partie est d'étudier s'il existe une famille de K fonctionnelles d'utilité de Sugeno S_k telles que $f = \vee_{i=1}^K S_k$, et de montrer que toute fonction d'agrégation g vérifiant **(BC)** peut s'exprimer ainsi. Il suffira alors d'une disjonction de fonctionnelles d'utilité de Sugeno pour modéliser tout ensemble de règles de sélection. Plus généralement on peut espérer apprendre une telle agrégation à partir de données qualitatives.

Proposition 3 *Toute df-PUF définie sur un domaine fini et vérifiant* **(BC)** *est une disjonction de fonctionnelles d'utilité de Sugeno.*

Preuve : Comme $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, il existe $i \in I$ tel que $\delta_i = 1$, et $\forall j \in A_i, \varphi_{ij}(1) = 1$; de plus $\forall j \in A_i, \varphi_{ij}(0) = 0$. Ainsi, f peut se réécrire comme suit :

$$\max_{i \in I} \max(\min(\min_{j \in A_i} \varphi_{ij}(x_j)), \delta_i), \min_{k \in C} \varphi_{ik}(x_k))$$

à condition que pour tout $k \notin A_i$, nous ayons

$$\varphi_{ik}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_{ik}(x_k) = 0 \quad \text{pour} \quad x_k < 1.$$

L'expression

$$\max(\min(\min_{j \in A_i} \varphi_{ij}(x_j)), \delta_i), \min_{k \in C} \varphi_{ik}(x_k))$$

est une FUS par rapport à la capacité μ_i telle que A_i est un ensemble focal avec $\mu_i(A_i) = \delta_i$ et $\mu_i(C) = 1$ dans le cas $A_i \neq C$.

La décomposition de f comme $\bigvee_{i\in I} S_{\mu_i,\varphi_i}(x)$ dans la Proposition 3 n'est pas parcimonieuse. Certains termes peuvent être regroupés en une seule FUS par rapport à une capacité plus complexe en regroupant les fonctions d'utilité sur chaque attribut en une seule. Pour le faire l'idée est d'extraire un nombre maximal de sous-ensembles $A_i \subset C$, tels que

- lorsque $A_i \cap A_{i'} \neq \emptyset$, les fonctions d'utilité φ_{ij} et $\varphi_{i'j}$ pour tout $j \in A_i \cap A_{i'}$ sont égales ;
- lorsque $A_i \subset A_{i'}$, on a $\delta_i < \delta_{i'}$.

Soit I_1 un sous-ensemble maximal d'indices de termes pouvant former une FUS en utilisant la méthode précédente. L'idée est alors de réappliquer la méthode sur les indices restants $\{A_i : i \in I \setminus I_1\}$, jusqu'à ce que I soit vide.

De même nous pouvons considérer *la forme conjonctive des fonctions unaires par morceaux* (cf-PUF), soit les expressions de la forme :

$$f(x_1, \dots x_n) = \min_{i\in I} \max(\max_{j\in A_i} \psi_{ij}(x_j), \gamma_i).$$

Proposition 4 *Toute cf-PUF définie sur un domaine fini et vérifiant* **(BC)** *est une conjonction de fonctionnelles d'utilité de Sugeno.*

Preuve : Comme $f(0, 0, \dots, 0) = 0$, il existe $i \in I$ tel que $\gamma_i = 0$, et $\forall j \in A_i, \psi_{ij}(0) = 0$; de plus $\forall j \in A_i, \psi_{ij}(1) = 1$. Ainsi, f peut se réecrire comme

$$\min_{i\in I} \min(\max(\max_{j\in A_i} \psi_{ij}(x_j), \gamma_i), \max_{k\in C} \psi_{ik}(x_k))$$

à condition que pour tout $k \notin A_i$, on a que $\psi_{ik}(0) = 0$ et $\psi_{ik}(x_k) = 1$ pour $x_k > 0$. L'expression

$$\min(\max(\max_{j\in A_i} \psi_{ij}(x_j), \gamma_i), \max_{k\in C} \psi_{ik}(x_k))$$

est une FUS (forme conjonctive) par rapport à la capacité μ_i telle que A_i^c est un ensemble focal avec

$$\mu_i(A_i^c) = \gamma_i \quad \text{et} \quad \mu_i(\emptyset) = 0.$$

A partir de ces résultats, nous pouvons essayer de modéliser toute fonction d'agrégation g définie complètement par un tableau de dimension n, avec une disjonction ou une conjonction de fonctionnelles d'utilité de Sugeno. En effet toute table ainsi donnée peut être représentée par des règles de sélection ou d'élimination à plusieurs seuils.

1	1	1
≥ 0	≥ 0	≥ 0
0	0	0

0	≥ 0	1
0	≥ 0	1
0	0	0

0	λ	λ
0	λ	λ
0	0	0

0	0	λ
0	0	λ
0	0	λ

Figure 1 – Respectivement, r^1, r^2, r^3, r^4

Exemple 4 *Considérons l'échelle* $0 < \lambda < 1$ *et* $f(x_1, x_2)$ *donnée par la table*

$x_2 \setminus x_1$	0	λ	1
1	1	1	1
λ	0	λ	1
0	0	0	λ

Nous pouvons décrire les valeurs positives dans la table à l'aide de règles de sélection de la forme "si $x_1 \geq \alpha_1$ *et* $x_2 \geq \alpha_2$ *alors* $S \geq \delta$*".*
Pour notre exemple les règles sont (voir Figure 1) :
Pour la valeur 1 *:*
r^1 *:* $x_2 = 1 \Rightarrow S = 1$ *;*
r^2 *:* $x_1 = 1$ *et* $x_2 \geq \lambda \Rightarrow S = 1$.
Pour la valeur λ *:*
r^3 *:* $x_1 \geq \lambda$ *et* $x_2 \geq \lambda \Rightarrow S \geq \lambda$ *;*
r^4 *:* $x_1 = 1 \Rightarrow S \geq \lambda$.
Cet ensemble de règles peut s'exprimer à l'aide d'une df-PUF formée par le maximum des termes suivants :
r^1 *:* $\varphi_{12}(x_2)$*, avec* $\varphi_{12}(1) = 1$ *et* $\varphi_{12}(\lambda) < 1 (\delta_1 = 1)$ *;*
r^2 *:* $\min(\varphi_{21}(x_1), \varphi_{22}(x_2))$ *avec* $\varphi_{21}(1) = 1$ *et* $\varphi_{21}(\lambda) < 1$ *;* $\varphi_{22}(\lambda) = 1$ *et* $\varphi_{22}(0) = 0 (\delta_2 = 1)$ *;*
r^3 *:* $\min(\varphi_{31}(x_1), \varphi_{32}(x_2), \lambda)$ *avec* $\varphi_{31}(\lambda) \geq \lambda$ *;* $\varphi_{32}(\lambda) \geq \lambda (\delta_3 = \lambda)$ *;*
r^4 *:* $\min(\varphi_{41}(x_1), \lambda)$*, avec* $\varphi_{41}(1) = 1$ *et* $\varphi_{41}(\lambda) = 0$ $(\delta_4 = \lambda)$.
Par construction, la df-PUF qui correspond à la superposition des tableaux de la figure 1, soit le maximum des expressions correspondantes dans chaque tableau, est la borne inférieure de la fonction f*. Elle est égale à* f *si* $\varphi_{12}(\lambda) = 0$.

Représentons f *par le nombre minimal de FUS's. Les deux règles* r^1 *et* r^4 *correspondent à la FUS* $S_{\mu,\varphi}(x)$ *où* $\mu_\#(1) = \lambda$*,* $\mu_\#(2) = 1$*, et* $\varphi_1(\lambda) = 0 = \varphi_2(\lambda)$*, soit* $S_{\mu,\varphi}(x) = \max((\min(\lambda, \varphi_1(x_1)), \varphi_2(x_2))$*. La règle* r^2 *correspond à la FUS* $S_{\mu',\varphi'}(x)$ *avec* $\mu'_\#(\{1, 2\}) = 1$*, et* $\varphi'_2(\lambda) = 1$*, c'est-à-dire,* $S_{\mu',\varphi'}(x) = \min(x_1, \varphi'_2(x_2))$*. La FUS's de la règle* r^3 *peut être choisie identique à celle de la règle* r^2*, car le terme* $\min(\varphi_{31}(x_1), \varphi_{32}(x_2), \lambda)$*, est subsumé par* $S_{\mu',\varphi'}(x)$*. L'expression de* f *est alors :*

$$f(x_1, x_2) = \max(S_{\mu,\varphi}(x), S_{\mu',\varphi'}(x)).$$

Les valeurs différentes de 1 dans le tableau peuvent être représentées par des règles d'élimination de la forme "si $x_1 \leq \alpha_1$ *et* $x_2 \leq \alpha_2$ *alors* $S \leq \delta$*". Pour notre exemple, les règles sont :*
Pour la valeur λ
r'^1 *:* $x_2 = 0 \Rightarrow S \leq \lambda$ *; (valeur* λ *ligne 1)*
r'^2 *:* $x_1 \leq \lambda$ *et* $x_2 \leq \lambda \Rightarrow S \leq \lambda$ *(valeur ligne 2).*
Pour la valeur 0
r'^3 *:* $x_1 = 0$ *et* $x_2 \leq \lambda \Rightarrow S = 0$ *(valeur* 0 *colonne 1) ;*
r'^4 *:* $x_1 \leq \lambda$ *et* $x_2 = 0 \Rightarrow S = 0$ *(valeur* 0 *ligne 1).*
Cet ensemble de règles s'exprime par une fonction unaire par morceaux formée par le minimum des termes :
- r'^1 *:* $\max(\psi_{12}(x_2), \lambda)$ *;*

1	1	1
≤ 1	≤ 1	≤ 1
λ	λ	λ

1	1	1
λ	λ	1
λ	λ	1

1	1	1
0	≤ 1	1
0	≤ 1	1

1	1	1
≤ 1	≤ 1	1
0	0	1

Figure 2 – Respectivement, r'^1, r'^2, r'^3, r'^4

- r'^2 : $\max(\psi_{21}(x_1), \psi_{22}(x_2), \lambda)$ avec $\psi_{21}(\lambda) \leq \lambda$ et $\psi_{22}(\lambda) \leq \lambda$;
- r'^3 : $\max(\psi_{31}(x_1), \psi_{32}(x_2))$ avec $\psi_{32}(\lambda) = 0$;
- r'^4 : $\max(\psi_{41}(x_1), \psi_{42}(x_2))$ avec $\psi_{41}(\lambda) = 0$.
La fonction unaire par morceaux qui correspond à la superposition des tableaux de la Figure 2, soit le minimum des expressions correspondantes à chaque tableau est une borne supérieure de f. Elle est égale à f, si $\varphi_{12}(\lambda) = 1$, ce qui garantit la valeur 1 pour $(1, \lambda)$.

Nous pouvons trouver des fonctions d'utilité de telle sorte que la borne supérieure coïncide avec la fonction f et qu'elle puisse s'exprimer comme un minimum de FUS's. En effet les règles r'^1 et r'^4 peuvent être rassemblées et définir une capacité γ telle que $\gamma(2) = \lambda$ et $\gamma(\{1, 2\}) = 1$. Nous pouvons unifier les fonctions d'utilité apparaissant dans les termes pour ces règles : $\psi_1(\lambda) = 0$, $\psi_2(\lambda) = 1$. La règle r'^3 définit une capacité γ' telle que $\gamma'(\{1, 2\}) = 1$. Nous avons besoin de la fonction d'utilité $\psi'_2(\lambda) = 0$, alors que ψ'_1 peut être l'identité. La règle $r'2$ est vraie avec les fonctions d'utilité de la règle r'^3. Nous obtenons $f(x_1, x_2) = \min(S_{\gamma,\psi}(x), S_{\gamma',\psi'}(x))$.

Pour généraliser l'approche de l'exemple précédent, considérons les étapes suivantes :
1- Transformer la fonction en ensemble de règles de sélection (resp. d'élimination).
2- Exprimer chaque règle comme un min pondéré (resp. max pondéré) impliquant des fonctions unaires et construire la df-PUF correspondant (resp. cf-PUF).
3- Regrouper les min (resp. max) en FUS's en uniformisant les fonctions d'utilité pour chaque variable présente.
Afin de trouver l'ensemble de règles de sélection minimum pouvant représenter une - borne inférieure d'une - fonction d'agrégation f, nous pouvons faire comme suit. Considérer $\delta = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et le produit cartésien

$$\Lambda_\delta = \Pi_{i=1}^n [\lambda_i, 1], \delta > 0.$$

Nous pouvons nous restreindre aux ensembles maximaux au sens de l'inclusion, soit :

$$\mathcal{K}_\delta = \max_{\subseteq} \{\Lambda_\delta \ : \ \delta = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}.$$

Pour chaque hypercube maximal $\Lambda_\delta \in \mathcal{K}_\delta$, nous pouvons écrire la règle de sélection $\bigwedge_{i:\lambda_i>0} x_i \geq \lambda_i \Rightarrow f \geq \delta$ et construire le terme max en suivant la procédure décrite précédemment. Pour les règles d'élimination la procédure est duale, mais nous considérons les ensembles maximaux de la forme $M_\delta = \Pi_{i=1}^n [0, \lambda_i], \delta < 1$ et pour chacun nous définissons la règle d'élimination $\bigwedge_{i:\lambda_i<1} x_i \leq \lambda_i \Rightarrow f \leq \delta$, et nous construisons le term min correspondant.

La deuxième étape de la procédure ci-dessus est évidente pour obtenir un df-PUF (resp. Cf-PUF) mais la représentation obtenue est non parcimonieuse. De plus, pour avoir une représentation exacte de la fonction d'agrégation f en utilisant uniquement les règles de sélection (ou uniquement les règles de suppression), il faudra peut-être imposer des contraintes supplémentaires sur les fonctions d'utilité comme dans l'Exemple 4. La troisième étape devrait être plus formellement définie, comme le choix des groupements de termes max (resp. min) de la df-PUF (resp. cf-PUF) et l'unification des fonctions d'utilité pour former plusieurs fonctionnelles d'utilité de Sugeno. Ces groupements ne semblent pas être uniques.

La question de trouver une représentation minimale de toute fonction d'agrégation sur une échelle finie au moyen d'une conjonction ou d'une disjonction de FUS's est une question pour des recherches futures. Il sera intéressant de mesurer l'amélioration du pouvoir expressif en passant des intégrales de Sugeno aux fonctions d'agrégation monotones sur L.

Exemple 5 *Si $|L| = 3$ comme dans l'Exemple 4, il est facile de vérifier à partir de la Figure 3 qu'il y a $49 = 7 \times 7$ fonctions d'agrégation idempotentes dont seules 9 sont des intégrales de Sugeno, toutes de la forme $\max(\min(x_1, \mu(1)), \min(x_2, \mu(2)), \min(x_1, x_2))$, avec $\mu(1), \mu(2) \in L$.*

$x_2 \setminus x_1$	0	λ	1
1	$d \geq c$	$\geq \max(\lambda, c)$	1
λ	$c \leq \lambda$	λ	$\geq \max(\lambda, b)$
0	0	$a \leq \lambda$	$b \geq a$

Figure 3 – Fonctions d'agrégation sur une échelle à trois valeurs.

5 Conclusion

Le résultat principal de cet article est de montrer que tout ensemble de règles dont les conditions utilisent des seuils comme bornes inférieures (resp. bornes supérieures) sur des valeurs d'attributs ou des évaluations globales peut être représenté par des fonctions unaires par morceaux, qui à leur tour peuvent être exprimées sous la forme de conjonctions ou de disjonctions floues d'intégrales de Sugeno sur des transformations appropriées de l'échelle commune des attributs. Nous avons montré que cette famille de fonctions correspond à des fonctions d'agrégation monotones sur une échelle finie. Nous avons aussi montré comment exprimer une telle fonction d'agrégation au moyen d'un ensemble de règles à seuils multiples, lui-même représentable comme une combinaison de FUS's.

Ces résultats pourraient s'appliquer à l'apprentissage d'opérations d'agrégation (donc de règles avec seuils) à partir de données qualitatives, voyant ces dernières comme une table d'agrégation partiellement définie. Il existe une autre approche à ce problème, basée sur les intégrales de Sugeno et les règles à seuil unique [5, 14]. Dans ces articles, l'idée est d'approcher un ensemble de données par au-dessus et par en-dessous above au moyen de deux intégrales de Sugeno standard basées sur des capacités supérieure et inférieure, ce qui n'est pas toujours possible. Ces travaux n'utilisent pas de fonction d'utilité. Au contraire, l'approche présentée semble conduire à la conjonction ou à la disjonction de plusieurs intégrales de Sugeno faisant intervenir plusieurs fonctions unaires jouant le rôle de fonctions d'utilité, ce qui pourrait requérir le réglage de beaucoup de paramètres. Cependant, ce dernier défaut pourrait peut-être être surmonté en recherchant une représentation minimale, ce qui est une question ouverte à creuser.

Acknowledgements. Ce travail bénéficie du soutien du Labex ANR-11-LABX-0040-CIMI (Centre International de Mathématiques et d'Informatique) dans le cadre du programme ANR-11-IDEX-0002-02, projet ISIPA.

Références

[1] M. Couceiro, D. Dubois, H. Prade, T. Waldhauser. Decision making with Sugeno integrals. Bridging the gap between multicriteria evaluation and decision under uncertainty. *Order*, 33 (3) 517-535, 2016.

[2] M. Couceiro, J.-L. Marichal. Axiomatizations of quasi-polynomial functions on bounded chains. *Aequationes Math.* 396 (1), 195-213, 2009.

[3] M. Couceiro, T. Waldhauser. Interpolation by polynomial functions of distributive lattices : a generalization of a theorem of R. L. Goodstein. *Algebra Universalis*, 69 (3), 287–299, 2013.

[4] M. Couceiro, T. Waldhauser. Pseudo-polynomial functions over finite distributive lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 239, 21-34, 2014.

[5] D. Dubois, C. Durrieu, H. Prade, A. Rico, Y. Ferro. Extracting decision rules from qualitative data using Sugeno integral : A case-study. *Proc. ECSQARU'15*, Springer, LNAI 9161, 14-24, 2015.

[6] D. Dubois, J.-L. Marichal, H. Prade, M. Roubens, and R. Sabbadin. The use of the discrete Sugeno integral in decision making : A survey. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9 :539–561, 2001.

[7] D. Dubois, H. Prade, A. Rico. The logical encoding of Sugeno integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 241 : 61-75, 2014.

[8] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory. *Eur. J. of Oper. Res.*, 128 :459–478, 2001.

[9] M. Grabisch, The Möbius transform on symmetric ordered structures and its application to capacities on finite sets, *Discrete Mathematics*, 287, 17–34, 2004.

[10] M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno (Eds.) *Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications*. Physica-verlag, Berlin, 2000.

[11] S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski, Axiomatic characterization of a general utility function and its particular cases in terms of conjoint measurement and rough-set decision rules, *Eur. J. Operarional Res.* 158 : 271-292, 2004.

[12] J.-L. Marichal. *Aggregation Operations for Multicriteria Decision Aid.* Ph. D. Thesis, University of Liège, Belgium, 1998.

[13] J.-L. Marichal. On Sugeno integrals as an aggregation function. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(3) :347-365, 2000.

[14] H. Prade, A. Rico, M. Serrurier, E. Raufaste. Elicitating Sugeno integrals : Methodology and a case study. *Proc. ECSQARU'09*, Springer, LNAI 5590, 712-723, 2009.

[15] A. Rico. *Modélisation des préférences pour l'aide à la décision par l'intégrale de Sugeno.* PhD thesis, Université Paris I-Panthéon-Sorbonne, 2002.

[16] A. Rico, C. Labreuche, M. Grabisch, and A. Chateauneuf. Preference modeling on totally ordered sets by the Sugeno integral. *Discrete Applied Mathematics*, 147, 2005.

[17] M. Sugeno. *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph.D.Thesis, Tokyo Instit. of Techno., 1974

[18] M. Sugeno. Fuzzy measures and fuzzy integrals : a survey. In : *Fuzzy Automata and Decision Processes*, (M. M. Gupta, G. N. Saridis, and B. R. Gaines, eds.), North-Holland, 89-102, 1977.