



## Le mouvement sous toutes ses coutures

Fabrice Neyret

► **To cite this version:**

Fabrice Neyret. Le mouvement sous toutes ses coutures. Maths Mouvement Express: Brochure de vulgarisation mathématique éditée annuellement par le CIJ.. 2018, pp.1-6. <hal-01915380>

**HAL Id: hal-01915380**

**<https://hal.inria.fr/hal-01915380>**

Submitted on 7 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ... LE MOUVEMENT SOUS TOUTES SES COUTURES

FABRICE NEYRET\*

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN  
(CNRS, UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, INRIA)

**V**ous êtes au bout de la jetée, regardant la mer. Éternelle mais jamais la même, permanente mais toujours en mouvement. Des vagues entrent par trains. Mais qu'est-ce que ce mouvement entrant qui ne change rien, puisque le port ne se remplit pas ? Comme bien des questions scientifiques, celle-ci est en fait ambiguë, et il faut d'abord définir précisément de quoi l'on parle, ce qui amènera des réponses... très différentes.

## LES MOUVEMENTS DE LA MER

Une vague n'est pas un objet, c'est une onde qui se déplace dans un substrat (ici, la surface de l'eau). Dans l'air, le son est une onde de pression qui se propage de proche en proche dans le volume, comme pour un ressort, alors que le vent est un authentique déplacement d'air. À la surface d'un substrat, le mouvement, plus libre, peut se faire verticalement : une « parcelle » de matière tourne en rond autour de sa position au repos (c'est le *modèle de Gerstner*, valide en eau profonde), selon un rayon correspondant à l'amplitude  $A$  de la vague (sa demi-hauteur), et avec une période  $T$  donnée, et donc à une vitesse tangentielle  $2\pi A / T$ . Les parcelles amont et aval sont en avance ou en retard par rapport à elle sur leur propre cycle : c'est ce qui forme les vagues, et fait qu'une crête, correspondant à une parcelle au sommet de son cercle, semble se propager (voir encadré). La vitesse de la vague et la vitesse de l'eau n'ont donc rien à voir entre elles ! De plus, la première se propage tandis que la seconde s'agite sur place. En sus, il peut aussi y avoir un déplacement global d'eau, indépendamment, par exemple si la marée monte.

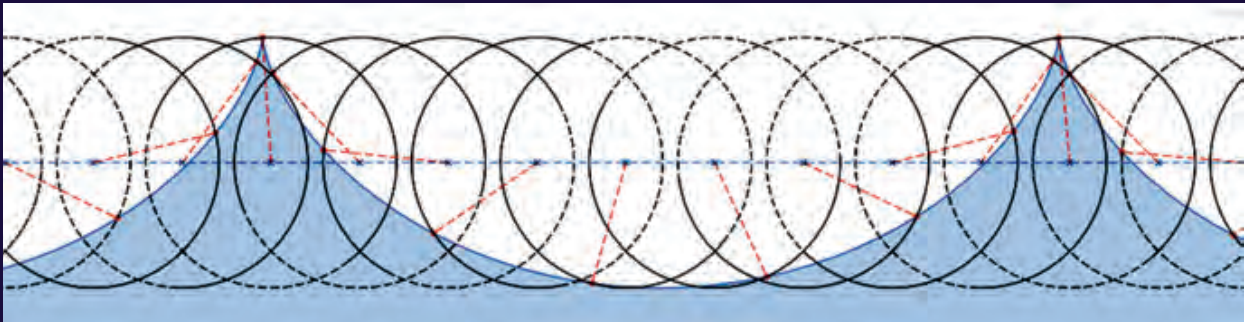
\*Sauf indication contraire explicite, tous les schémas ont été réalisés par l'auteur.

## Le mouvement des vagues

La distance telle que le décalage de cycle (dit aussi de *phase*) revient à zéro est la longueur d'onde  $L$  de la vague. L'équation de la position d'une parcelle d'eau est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \end{pmatrix} \quad \text{dans le plan de propagation.}$$

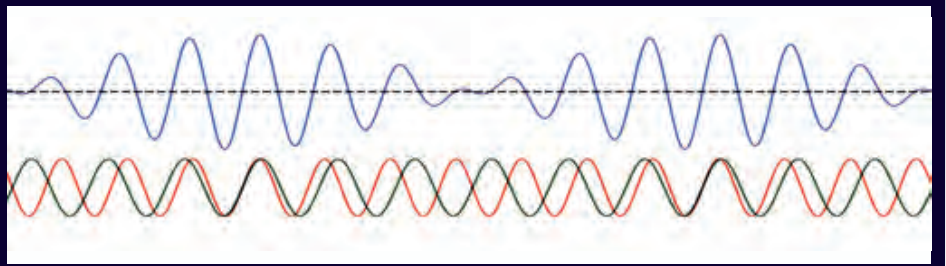
À  $x$  fixé, elle reproduit bien le mouvement circulaire d'une parcelle. À  $t$  fixé, elle reproduit la forme du train de vagues. La phase peut se factoriser  $(2\pi/L)(x - t L/T)$ , ce qui correspond bien à une équation de propagation : quand  $t$  augmente, le motif se retrouve à l'identique  $L/T$  fois plus loin – pour retrouver une même valeur de phase, par exemple la crête –, et la vitesse de la vague est donc  $L/T$ ... qui diffère selon la longueur des vagues. Et qui, comme on l'a vu, diffère aussi de la vitesse de l'eau !



Mouvement de l'eau au passage d'une vague (modèle trochoïdal de Gerstner).  
DesmosGraph interactif : <https://www.desmos.com/calculator/gzka4avuuq>

Puis un bateau est entré au port, entraînant un train de vagues derrière lui. Ce paquet de vagues traîne encore près de nous, alors que l'on se serait attendu à le voir deux fois plus loin. Effectivement, à bien y regarder, il semble se déplacer deux fois moins vite que les vagues qu'il contient, celles-ci naissant à l'arrière et mourant à l'avant ! Comment cela est-il possible ? En fait, les ondes sont rarement pures, et la surface liquide subit la superposition de tout un ensemble d'ondes : le bateau a excité le milieu liquide dans toute une gamme de longueurs d'onde voisines de sa taille, et ces ondes interfèrent entre elles. Ainsi, si deux ondes ont pour nombre d'onde  $k + \varepsilon$  et  $k - \varepsilon$ , avec  $k = 2\pi / L$ , leur somme  $\sin((k+\varepsilon)x) + \sin((k-\varepsilon)x)$  donne  $2 \sin(kx) \cos(\varepsilon x)$  : le train d'onde moyen  $\sin(kx)$  est modulé par une large enveloppe  $2 \cos(\varepsilon x)$  formant le paquet. Pour une infinité d'ondes, et avec la relation de dispersion liant  $L$  et  $T$ , on trouve que la vitesse d'un paquet (dite *vitesse de groupe*) est la moitié de la vitesse des ondes (dite *vitesse de phase*) en situation d'eau profonde.

Les interférences entre ondes similaires engendrent des paquets se propageant à leur propre vitesse.



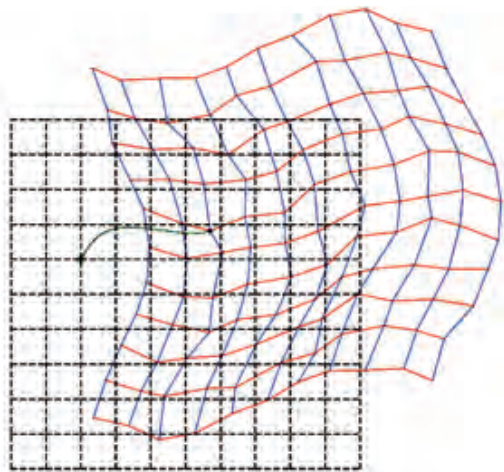
DesmosGraph interactif : <https://www.desmos.com/calculator/a6bq1kxc9l>

Nous voici donc avec quatre vitesses différentes : la parcelle d'eau, la crête de vague, le groupe de vagues, et le courant global éventuel. Ça fait beaucoup. Est-ce tout ? Eh bien non. On a mentionné une « parcelle d'eau », mais à quoi cela correspond-il ? Pas aux molécules, en tout cas : aux conditions ambiantes, celles-ci se déplacent à des vitesses de l'ordre de la vitesse du son (dans les 1 000 km/h !), dans toutes les directions, et rebondissent en tous sens, ce qui en moyenne, « vu de loin », s'annule. Enfin, ne s'annule pas exactement : la résultante est ce qui donne le mouvement de la parcelle. La vitesse de l'eau n'est pas la vitesse de ses molécules, et les deux n'ont rien à voir entre elles. Ce qu'il se passe avec les molécules dans une petite parcelle se passe aussi avec les petites parcelles vis-à-vis des grandes : les fluides ont tendance à être turbulents (agités en tous sens, à toutes les échelles). À l'intérieur d'une grande parcelle de fluide, les fluctuations des petites parcelles se compensent vu de l'échelle supérieure, et la résultante peut être faible par rapport à l'agitation des petites parcelles... ou pas. Ce phénomène se reproduit à toutes les échelles tant qu'il s'y trouve de la turbulence. Bref, la vitesse de l'eau dépend de l'échelle à laquelle on la regarde.

Vous savez maintenant presque tout sur les différents mouvements qui se superposent dans l'eau : le piège de la question *mal posée* était qu'il n'y a pas qu'un mouvement de l'eau, et que « eau » est de surcroît une désignation très imprécise. *A contrario*, nous allons maintenant faire le tour des nombreuses facettes sous lesquelles les scientifiques et ingénieurs peuvent regarder un champ de mouvement donné.

La première façon d'étudier un champ de mouvement est de regarder le déplacement parcouru, soit en visualisant sur une carte initiale où sont partis ses points (schéma suivant à gauche), soit en visualisant sur une carte actuelle d'où ils sont venus, ceci pouvant se faire en advectant une texture





Visualisation des nouvelles positions par rapport aux anciennes.  
DesmosGraph interactif :  
<https://www.desmos.com/calculator/5qn5kcrszu>

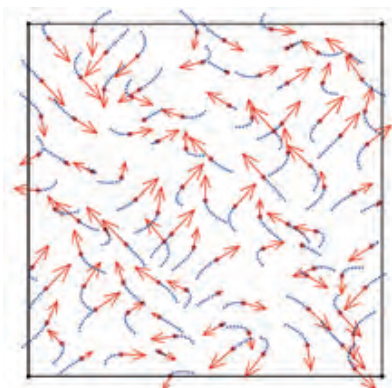


Visualisation des anciennes positions par rapport aux nouvelles par advection de texture.

– ici, un damier – posée sur le fluide au départ (schéma ci-dessus à droite). Pour des déplacements modestes et cohérents, comme dans le cas des solides déformables, c’est lisible, mais pour nos fluides turbulents c’est vite un sac de nœuds.

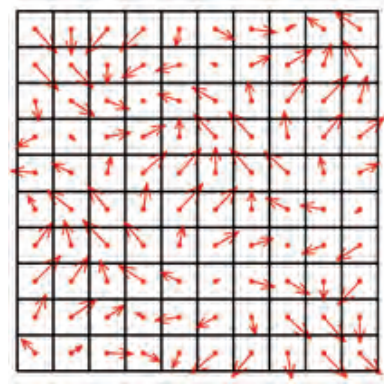
Pour un fluide, il est plus intéressant d’étudier le champ de vitesses, c’est-à-dire le déplacement depuis l’instant d’avant. Soit on suit les parcelles, comme on le ferait en mécanique du point, et on mesure la vitesse de celles-ci au cours du temps (approche *lagrangienne*, ci-dessous à gauche), soit on considère des cases d’espace fixes, et on s’intéresse à la vitesse au centre de celles-ci (approche *eulérienne*, à droite). La taille de la parcelle définissant la mesure des vitesses découle soit de la sensibilité du dispositif de mesure de fluide réel, soit de la résolution de la simulation numérique.

Bien qu’il s’agisse du même écoulement, les deux approches voient des choses très différentes : pour des ondes, la première suivrait l’évolution des crêtes, tandis que la seconde regarderait ce qu’il se passe aux bouées.



Représentation lagrangienne des vitesses.

Cependant, on a vu précédemment que la notion de vitesse de fluide se décline selon l’échelle (d’une part parce que s’y superposent des phénomènes



Représentation eulérienne des vitesses.

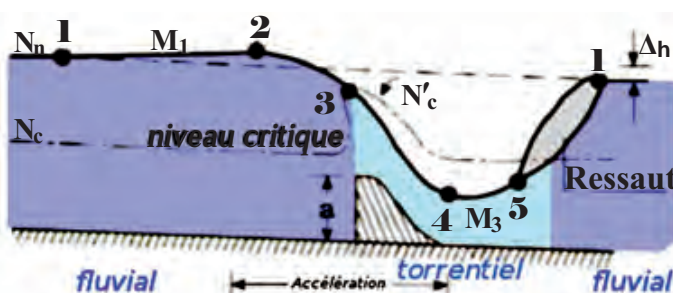
différents, turbulences, vagues, courant... , d'autre part parce que par nature la turbulence engendre de l'agitation locale à toutes les échelles). Fixer une échelle de mesure des vitesses nous rend aveugle aux autres échelles ! Aussi, il est intéressant de décomposer les vitesses, ou tout autre quantité, selon l'échelle : on se retrouve avec une pyramide de cartes (détaillées pour les très petites agitations, grossières pour les grandes échelles).

L'information multi-échelle peut aussi se présenter sous une forme complètement différente, donnant des statistiques d'échelle plus lisibles : on décide que chaque case représente une longueur d'onde (ou plutôt son inverse, une fréquence spatiale) et sa direction ; le centre de la carte matérialise la fréquence nulle ; les bords représentent les fréquences élevées ; et dans chaque case on reporte la quantité moyenne mesurée pour cette échelle et cette direction. Ce *spectre* des valeurs est obtenu par la transformée de Fourier, la même qui vous livre sur votre chaîne hi-fi le petit diagramme évolutif décomposant le signal musical écouté sous forme de quantités fréquentielles, des graves aux aigus selon l'échelle des longueurs d'onde sonore (ici dans une version 1D puisqu'elle opère sur le temps et non sur l'espace). Sous certaines conditions techniques (spectre complet avec les phases), cette représentation est duale : on peut retrouver les quantités spatiales à partir d'un spectre *via* la transformée de Fourier inverse.

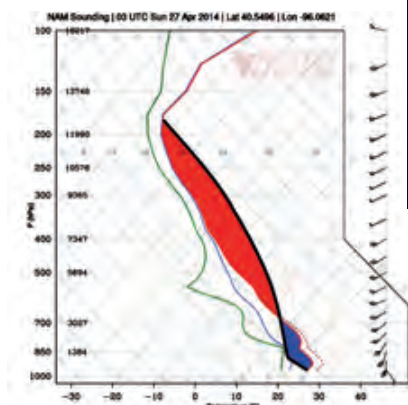
## DES GRANDEURS ALTERNATIVES À LA VITESSE

La vitesse peut encore se représenter d'autres façons, par exemple comme énergie cinétique  $E_c = (1/2)m|v|^2$  ou l'une de ses variantes, la *charge* (*cf.* le théorème de Bernoulli). Comme l'énergie est directement concernée par diverses lois de conservation ( $E_c + E_p + E_t = \text{constante}$ ), les physiciens apprécient cette forme car il est alors possible d'analyser graphiquement, voire de résoudre, des problèmes juste en mesurant des lignes ou surfaces d'énergie, le franchissement de seuils critiques, *etc.*

Enfin, les tourbillons jouent un grand rôle dans les écoulements, qu'il s'agisse de grands vortex ou de remous turbulents (où les tourbillons



Au niveau d'un ressaut hydraulique, le régime bascule de fluvial à torrentiel (l'équivalent fluide de « supersonique ») quand la ligne de courant franchit une valeur critique, puis rebascule à fluvial avec déferlement (le ressaut).  
© *Hydraulique générale*, Armando Lencastre, Eyrolles, 1999

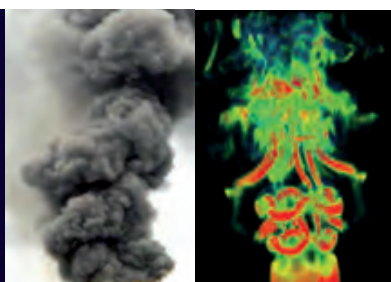


Le graphe d'un sondage atmosphérique (mesurant température et humidité à toutes les altitudes) permet de prévoir si la convection nuageuse démarrera, et à quelle hauteur l'énergie disponible fera monter les nuages.  
© *twisterdata.com*, 2014

s'étirent en torsades qui se brisent en tourbillons plus petits). Non seulement les vortex sont des structures persistantes, mais leurs formes sont éclairantes : verticaux (tornades, vidanges de lavabo...), en anneau (ronds de fumée, champignons atomiques, zones de remontée à la surface des fleuves...) ou en « paquet de nouilles » (turbulence sauvage). On peut mesurer cette tendance rotatoire en tout point: la *vorticité*, double de la vitesse angulaire locale, s'obtient par  $\left( -\frac{\partial V_x}{\partial y} \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$  en 2D (ou plus généralement  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ , avec  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$  le pseudo-vecteur des dérivées partielles du champ de vitesse selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ).

Une carte de la vorticité est particulièrement lisible : seule l'âme des tourbillons a une valeur non nulle (ci-dessous en couleurs vives), l'écoulement qui suit passivement autour peut donc être figuré en noir ou en transparent (car il tourne autour de l'axe des vortex mais pas sur lui-même). Plus étonnant : sous certaines conditions, la vorticité est également duale de la vitesse; elle contient autant d'information. On peut donc directement écrire et simuler les équations des fluides en vorticité, et retrouver ensuite le champ de vitesse correspondant, par l'équation de Biot et Savart.

Un écoulement à fort cisaillement (comme un panache de fumée) déclenche des instabilités dynamiques qui engendrent des anneaux de vorticité (en couleur). Ces filaments se propagent, interagissent et se déforment en cascade d'échelles jusqu'à dégénérer en « paquet de nouilles » puis en dissipation thermique, caractéristique de la turbulence. © *Droits réservés*



Toutes ces facettes sont indépendantes et peuvent se combiner : la vorticité peut se suivre en lagrangien ou en eulérien, en spatial ou en spectral, et on peut en mesurer l'énergie cinétique de rotation, qui peut elle-même se regarder en espace ou en spectral... Les mouvements des fluides sont riches, et les questions qu'on leur pose sont multiples : tous ces outils d'exploration permettent de se faire une meilleure idée d'un phénomène, en regardant une même chose – son mouvement – sous toutes les facettes conceptuelles.

**F.N.**