



# Chiralités et exponentielles: un peu de différentiation

Esaïe Bauer, Marie Kerjean

► **To cite this version:**

Esaïe Bauer, Marie Kerjean. Chiralités et exponentielles: un peu de différentiation. 2019. hal-02320704v3

**HAL Id: hal-02320704**

**<https://hal.inria.fr/hal-02320704v3>**

Preprint submitted on 4 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Chiralités et exponentielles : un peu de différentiation

Esaïe Bauer<sup>1</sup> and Marie Kerjean<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ENS Lyon

<sup>2</sup> LS2N et Inria, Équipe Gallinette

## Résumé

Nous donnons une sémantique catégorique à la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée. Cette axiomatique donne un cadre à des modèles polarisés dans les espaces vectoriels topologiques. Elle s'appuie sur la notion de chiralités et les modèles non-polarisés de la logique linéaire différentielle munis d'un biproduit.

## 1 Introduction

L'informatique, comme la physique et la biologie, est source de structures abstraites et de modèles dont l'étude est intrinsèquement intéressante. Ces différentes perspectives sémantiques - entre modèles d'un mouvement physique et modèle d'un calcul - se rejoignent parfois. En particulier, on retrouve dans l'étude de certains modèles dénotationnels du lambda-calcul une caractérisation des preuves en terme de *linéarité* des fonctions. La logique linéaire (LL) [9] désigne le calcul des séquent extrait de ce modèle, et permet une compréhension des règles logiques structurelles en terme de gestion des ressources. De même, l'interprétation des formules de LL par des espaces vectoriels permet de donner un contenu logique à la notion de différentielle. La logique linéaire différentielle (DiLL) [4] est un calcul des séquents qui rajoute ainsi à LL des règles co-structurelles, décrivant la différentiation des fonctions d'ordres supérieures.

La logique linéaire (LL) construit un transfert de techniques entre l'algèbre et la logique : elle permet un nouveau point de vue sur le tiers-exclu, et la règle d'élimination de la double négation qui en découle :  $\neg\neg A \rightarrow A$ . LL raffine la logique intuitionniste en une logique classique *pour une notion linéaire de négation*. Quand en logique classique la négation d'une formule  $A$  est équivalent à l'implication de l'absurde par la formule  $A$  :

$$\neg A \equiv A \Rightarrow \perp,$$

en logique linéaire la négation correspond naturellement à l'implication linéaire du faux par la formule :

$$A^\perp \equiv A \multimap \perp.$$

Cette nuance a permis historiquement d'introduire la notion de *dualité* et de *polarisation* en théorie de la preuve. En particulier, la polarisation distingue deux classes de formules, négatives et positives. Les formules négatives sont celles qui sont par construction stables par double négation, alors que les formules positives se comprennent comme celles à qui un défaut de structure ne permet pas cette invariance [10]. Cette distinction induite par la notion de négation linéaire trouve ensuite des applications en recherche de preuve [1].

Alors que la sémantique dénotationnelle s'attache à interpréter les programmes comme des fonctions – principalement dans la théorie des domaines, la sémantique catégorique est plus spécifique et interprète les formules comme des catégories munis de lois spécifiques. La théorie des catégories se place en particulier dans la continuité de la correspondance de Curry-Howard. Un programme *fonctionnel typé* de type  $A \Rightarrow B$  est interprété comme une preuve de la formule  $B$  sous l'hypothèse  $A$ . A leur tour, ces preuves de  $A \vdash B$  sont interprétées comme des morphismes de l'objet  $A$  vers l'objet  $B$  dans une certaine catégorie.

Dans cet article, nous nous intéressons aux modèles catégoriques de DiLL, c'est à dire aux axiomes sur une ou plusieurs catégories qui permettent d'y interpréter DiLL de manière invariante par élimination des coupures.

La différentiation et la notion de polarité n'ont à priori rien à voir : quand la différentielle est historiquement un objet intervenant en analyse, la polarité appartient purement à la théorie des langages de programmation. Pourtant, la dualité au sens algébrique du terme<sup>1</sup> est au centre de la théorie des distributions [20] et d'une majeure partie

---

1. la dualité en algèbre linéaire et en analyse fonctionnelle décrit l'interaction entre un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et l'ensemble des formes linéaires (continues) sur cet espace  $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

de l'analyse fonctionnelle [12]. Mais lorsqu'on cherche à interpréter DiLL en analyse, on se heurte pourtant à des contraintes de polarité [14]. *L'injonction d'une négation linéaire involutive est trop contraignante* pour permettre à la fois de manipuler des différentielles et pour interpréter toutes les formules de la logique linéaire différentielle dans une même catégorie. Les premiers modèles qui apparaissent sont donc naturellement polarisés : les formules de DiLL sont interprétées par deux classes duales d'espaces topologiques.

La logique linéaire différentielle polarisée, déjà explorée par Vaux [21], est donc une notion logique qui a du sens en sémantique. Mais quand les modèles catégoriques de la logique linéaire différentielle sont largement étudiés dans la littérature [19] [7] [3], peu d'axiomatics catégoriques existent pour la logique linéaire polarisée. C'est l'objet de ce papier. Nous croyons à l'intérêt d'une axiomatique simple et élégante permettant de détecter des nouveaux principes calculatoires.

Dans ce travail, nous donnons un cadre catégorique pour la logique linéaire différentielle *finitaire*  $\text{DiLL}_0$ . Ce travail se base sur la notion de chiralité introduite par Melliès [18]. Les chiralités sont un modèle de la partie de la logique linéaire polarisée qui ne traite pas de l'ordre supérieur (la logique linéaire multiplicative). Nous étudions l'interaction entre les chiralités et les règles exponentielles de la logique linéaire différentielle finitaire : nous expliquons qu'il s'agit là d'introduire un tout petit peu d'ordre supérieur, sans néanmoins se préoccuper de la règle de la chaîne. La difficulté provient du fait que ce qui se faisait dans une seule catégorie se fait maintenant dans deux catégories mises en relation par deux négations différentes.

**Organisation de l'article.** Nous rappelons en partie 2 les règles de la logique linéaire différentielle, en expliquant le rôle particulier joué par la promotion. Ensuite, nous exposons les principales structures catégoriques permettant l'interprétation de DiLL, en discutant l'intérêt d'une axiomatique catégorique d'un calcul (partie 3). En partie 4, nous donnons la définition de notre modèle et l'interprétation des preuves et des formules. Enfin, en partie 4.4 nous démontrons l'invariance par élimination des coupures de cette sémantique.

**Conventions** Cette article se place à l'intersection de la correspondance de Curry-Howard et de la sémantique dénotationnelle. Une fonction est un programme, et les deux sont typés par une formule. La composition de deux fonctions correspond à l'application d'une règle de coupure entre le type de ces deux fonctions. Dans le cadre de la sémantique dénotationnelle, nous ne nous intéressons pas au calcul effectif de cette fonction. Notre travail consiste justement à trouver des interprétations de la logique *invariantes par élimination des coupures*.

## 2 La logique linéaire différentielle

### 2.1 Une logique classique ou polarisée

La logique linéaire est un calcul des séquent où les règles structurelles (contraction et affaiblissement) sont restreintes à un type particulier de formules : les formules exponentielles. Ainsi, en sémantique dénotationnelle, la preuve d'un séquent  $A \vdash B$  sera interprétée par une fonction linéaire  $f \in \mathcal{L}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$ . La preuve d'un séquent  $!A \vdash B$  sera interprétée par un autre type de fonction, répondant à des caractéristiques plus générales  $f \in \mathcal{C}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$ . La présence de cette exponentielle démultiplie les connecteurs logiques : on retrouve en logique linéaire deux conjonctions  $\otimes$  et  $\&$  (multiplicatives et additives) ainsi que deux disjonctions  $\wp$  et  $\oplus$  (multiplicatives et additives).

La logique linéaire est d'abord (au sens historique) classique au sens où toute formule est équivalente à sa double négation linéaire :  $A \equiv A^{\perp\perp}$ . Cette négation transforme naturellement la conjonction additive (resp. multiplicative) en la disjonction additive (resp. multiplicative). Nous ne nous intéresserons pas ici à la logique linéaire intuitionniste, et nous représentons la plupart du temps les séquents sous-forme monolatère : le séquent  $A \vdash B$  sera écrit  $\vdash A^\perp, B$ . Pour des raisons pédagogique nous pourrions toutefois les écrire sous forme bilatère.

La logique linéaire polarisée ( $\text{LL}_P$ ) [16] distingue deux types de formules suivant leur comportement logique. Sans rentrer dans les détails, nous rappelons que cette distinction a du sens en recherche de preuve [1]. Un séquent monolatère prouvable de la logique linéaire polarisée comporte *au plus* une formule positive.

**Notation 1.** Les notations  $N, M$  ou  $P, Q$  désignent des formules négatives ou positives respectivement. Les notations  $\mathcal{N}, \mathcal{M}$  désignent des multi-ensembles de formules toutes négatives. Les notations  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}$  désignent les catégories

Formules négatives :  $N, M := \mathbf{n} \mid ?P \mid \uparrow P \mid N \wp M \mid \perp \mid N \& M \mid \top$ .  
 Formules positives :  $P, Q := a^\perp \mid !N \mid \downarrow N \mid P \otimes Q \mid 0 \mid P \oplus Q \mid 1$ .

FIGURE 1 – Les règles de la logique linéaire polarisée  $LL_P$ 

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash v : A, v^\perp : A^\perp} \text{ (axiom)} \\
 \\
 \frac{}{\vdash 1} \text{ (1)} \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}, N, M}{\vdash \mathcal{N}, N \wp M} \text{ (}\wp\text{)} \\
 \\
 \frac{}{\vdash \mathcal{N}, \top} \top \\
 \\
 \frac{\vdash P, \mathcal{N}}{\vdash P \oplus Q, \mathcal{N}} \oplus_L \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}, A \quad \vdash A^\perp, \mathcal{M}}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}}{\vdash \mathcal{N}, \perp} (\perp) \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}, P \quad \vdash \mathcal{M}, Q}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, P \otimes Q} (\otimes) \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}, N \quad \vdash \mathcal{N}, M}{\vdash \mathcal{N}, N \& M} \& \\
 \\
 \frac{\vdash \mathcal{N}, Q}{\vdash \mathcal{N}, P \oplus Q} \oplus_R
 \end{array}$$

FIGURE 2 – Les règles de la logique linéaire polarisée multiplicative et additive

dans lesquelles nous interprétons les formules négatives et positives respectivement.

Nous donnons en figure 1 la grammaire de la logique linéaire polarisée, construite à partir d'un ensemble de formules atomique toutes négatives  $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$ , et en figure 2 ses règles logiques multiplicatives et additives (MALLP). La négation d'une formule positive est toujours négative et vice-versa. La négation d'une formule est définie en figure 3.

**Notation 2.** Nous notons  $A \multimap B := A^\perp \wp B$  l'implication linéaire entre deux formules. D'après les polarités choisies, on a donc que  $P \multimap N$  est une formule négative, et cela correspond à la sémantique donnée en section 2.3.

## 2.2 La logique linéaire différentielle

La logique linéaire se comprend souvent en terme de *ressources*. Une preuve de  $A, !B \vdash C$  pourra utiliser plusieurs fois la formule  $!B$  mais utilisera une seule fois la formule  $A$ . Une preuve interprétée par une fonction linéaire utilisera une et une seule fois son hypothèse - le domaine de la fonction linéaire.

$$\begin{array}{l}
 (!A)^\perp = ?A^\perp \quad (A \& B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp \quad (A \oplus B)^\perp = A^\perp \& B^\perp \\
 (?A)^\perp = !A^\perp \quad (A \wp B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp \quad (A \otimes B)^\perp = A^\perp \wp B^\perp \\
 (\uparrow A)^\perp = \downarrow A^\perp \quad (\downarrow A)^\perp = \uparrow A^\perp \quad 0^\perp = \top \\
 1^\perp = \perp \quad \perp^\perp = 1 \quad \top^\perp = 0 \\
 a^{\perp\perp} = a
 \end{array}$$

FIGURE 3 – La négation linéaire involutive en logique linéaire classique

La preuve d'un séquent linéaire est en particulier non-linéaire et la logique linéaire comporte une règle permettant d'oublier que notre preuve est linéaire. C'est la règle de *déréliction* :

$$\frac{A \vdash B}{!A \vdash B} d$$

La logique linéaire différentielle se détache de cette intuition de ressource en permettant de *linéariser* les preuves. Ainsi, elle introduit une règle de co-déréliction :

$$\frac{!A \vdash B}{A \vdash B} \bar{d}$$

Rappelons que la différentielle  $D_x f$  d'une fonction  $E \rightarrow F$  en un point  $x \in E$  est une fonction linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $h \in E$ ,  $f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + o(h)$ .

En sémantique dénotationnelle, la règle  $\bar{d}$  est traditionnellement interprétée exactement par la différentiation en 0 d'une fonction. Si la preuve d'un séquent  $!A \vdash B$  est interprétée par une certaine fonction différentiable  $f \in \mathcal{C}^1(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$ , alors la preuve de  $A \vdash B$  construite en appliquant la règle de co-déréliction au séquent précédent est interprétée par la différentielle en 0 de  $f$  :

$$D_0(f) \in \mathcal{L}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket).$$

De manière surprenante, le calcul d'une différentielle, et en particulier le calcul de la différentielle d'une composition de fonctions se fait à travers des règles tout à fait symétrique à la contraction et à l'affaiblissement. Nous rappelons d'abord les règles exponentielles de la logique linéaire sous forme bilatère.

$$\frac{\vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} w \qquad \frac{!N, !N \vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} c \qquad \frac{N \vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} d \qquad \frac{!N \vdash N}{!N \vdash !N} p$$

Nous expliquons informellement l'interprétation logique et dénotationnelle *en termes fonctionnels* de ces règles. La règle d'affaiblissement permet au niveau logique d'introduire des hypothèses qui ne seront pas utilisées. Elle s'interprète comme la possibilité de considérer une fonction constante en une valeur  $v : \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  comme un fonction non-linéaire sur n'importe quel domaine de définition. La règle de contraction  $c$  qui permet au niveau logique d'utiliser plusieurs fois des hypothèses exponentielles, s'interprète au niveau fonctionnel comme la multiplication scalaire entre deux fonctions. Les intuitions de la règle de déréliction ont déjà été expliquées. La règle de promotion s'interprète comme la possibilité logique de prouver plusieurs fois une formule si l'on peut se servir plusieurs fois de ses hypothèses. Au niveau fonctionnel, la règle de promotion permet de *composer des fonctions non-linéaires*. Nous expliquons maintenant pourquoi.

L'interprétation des preuves usuelles non-linéaires de la logique (minimale par exemple) se traduit au niveau fonctionnel par une adjonction entre une catégorie de fonctions non-linéaires et une catégorie de fonctions linéaires :

$$\mathcal{C}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \simeq \mathcal{L}(!\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket).$$

Ainsi, l'interprétation de la règle de promotion permet de transformer une fonction  $f \in \mathcal{L}(\llbracket !A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$  en une fonction  $p(f) \in \mathcal{L}(\llbracket !A \rrbracket, \llbracket !B \rrbracket)$ , et de composer l'interprétation de deux preuves non-linéaires  $f \in \mathcal{L}(\llbracket !A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$  et  $g \in \mathcal{L}(\llbracket !B \rrbracket, \llbracket C \rrbracket)$  comme deux fonctions  $f \in \mathcal{C}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$  et  $g \in \mathcal{C}(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$ .

Cette adjonction entre fonctions linéaires et fonctions non-linéaires permet aussi d'interpréter, quand les fonctions non-linéaires sont des fonctions lisses, *l'exponentielle comme une espace de distributions à support compact*. Dans un modèle dénotationnel de la logique linéaire classique, l'interprétation de la négation doit être involutive. Dans une catégorie de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels<sup>2</sup>, cette négation linéaire est toujours interprétée comme le dual de l'interprétation de la formule : l'espace des formes linéaires, éventuellement continues, de l'interprétation de la formule. Ainsi :

$$\begin{aligned} \llbracket !A \rrbracket &\simeq \llbracket !A \rrbracket'' \\ &:= \mathcal{L}(\llbracket !A \rrbracket, \mathbb{R})' \\ &\simeq \mathcal{C}^\infty(\llbracket A \rrbracket, \mathbb{R})' \end{aligned}$$

2. Nous nous plaçons pour faire simple dans une catégorie de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, mais des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels auraient pu être considérés, voir [13]

$$\begin{array}{c}
\frac{\vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} w \\
\frac{\vdash \mathcal{N}}{\vdash !N} \bar{w} \\
\frac{!N, !N \vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} c \\
\frac{\vdash \mathcal{N}, !N \quad \vdash \mathcal{M}, !N}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, !N} \bar{c} \\
\frac{N \vdash \mathcal{N}}{!N \vdash \mathcal{N}} d \\
\frac{\vdash \mathcal{N}, N}{\vdash \mathcal{N}, !N} \bar{d}
\end{array}$$

FIGURE 4 – Les règles exponentielles logique linéaire différentielle finitaire et polarisée (DiLL<sub>0,poi</sub>)

L'ensemble des formes linéaires sur un espace de fonctions lisses  $C^\infty([A], \mathbb{R})'$  est exactement l'espace des distributions à support compact  $\mathcal{E}'([A])$ . Nous donnons maintenant les règles de la logique linéaire différentielle ainsi que leur interprétation en terme de distribution, pour la lectrice familière avec cette théorie. Nous renvoyons à l'article originel de Ehrhard et Regnier pour une explication en terme de fonctions [4]. Les règles exponentielles ajoutées par la logique linéaire différentielle sont les duales des règles  $w$ ,  $c$  et  $d$  :

$$\frac{}{\vdash \delta_0 : !N} \bar{w} \quad \frac{\vdash \mathcal{N}, \phi : !N \quad \vdash \mathcal{M}, \psi : !N}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi * \psi : !N} \bar{c} \quad \frac{\vdash \mathcal{N}, v : N}{\vdash \mathcal{N}, (f \mapsto D_0 f(v)) : !N} \bar{d}$$

Une distribution est un opérateur linéaire qui agit sur une fonction. Ainsi, les règles  $\bar{w}$ ,  $\bar{c}$  et  $\bar{d}$  décrivent les transformations linéaires que l'on peut effectuer sur une fonction lisse. La règle de co-affaiblissement  $\bar{w}$  permet d'habiter n'importe quel exponentielle par une distribution essentielle : le dirac en 0  $\delta_0$ ;  $f \mapsto f(0)$ . La règle de co-contraction  $\bar{c}$  permet de faire le produit de convolution entre deux distributions  $\phi$  et  $\psi$ . Surtout, elle permet de translater les distributions : pour tout opérateur de Dirac  $\delta_x$ , distribution  $\phi$  et fonction  $f$ , on a  $\delta_x * \phi(f) = \phi(y \mapsto f(x + y))$ . Ainsi, la règle de co-contraction convolué avec la règle de co-déréliction permet de différencier une preuve en tout point de son domaine. La règle de co-déréliction dit exactement qu'à partir n'importe quel point d'un domaine de fonction, on peut créer la distribution qui agit sur une fonction en calculant sa dérivée en 0 suivant le vecteur  $v$ .

D'après les explications données ci-dessus, la lectrice aperçoit peut être déjà qu'éliminer une coupure entre une règle de promotion et une règle de co-déréliction va demander de détailler le calcul de la règle de la chaîne propre à la différentiation des composées de fonction.

$$D_0(f \circ g)(v) = D_{f(v)}g(D_0 f(v)).$$

Le calcul de cette règle fait intervenir les trois règles co-structurelles  $\bar{w}$ ,  $\bar{c}$  and  $\bar{d}$ .

**La logique linéaire différentielle finitaire** L'introduction de DiLL permet donc une approche complètement symétrique des règles exponentielles, exception faite de la règle de promotion. Historiquement, DiLL a d'ailleurs d'abord été introduite sous sa forme *finitaire*, c'est à dire sans la règle de promotion [4]. C'est pour cette logique là, dont les règles sont rappelées en figure 4, que nous construisons un modèle catégorique aujourd'hui. C'est une logique dont les modèles ne nécessitent pas d'ordre supérieur, et qui s'interprète donc plus facilement dans l'analyse réelle usuelle. DiLL finitaire traduit une idée d'interaction entre processus concurrents [8] et se généralise au calcul de solutions d'un opérateur différentiel partiel linéaire à coefficients constants [14]. Nous considérons notre travail sur la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée comme une première étape vers une sémantique décomposant la règle de la chaîne via les règles co-structurelles primitives de la logique linéaire différentielle.

**Définition 3.** La grammaire de la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée (DiLL<sub>0,P</sub>) est celle donnée en figure 2. Les règles de construction des preuves de la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée consiste en l'union des règles de MALL<sub>P</sub> (figure 2) et de celles données en figure 4.

### 2.3 Un premier modèle polarisé de DiLL<sub>0</sub>

Nous donnons dans cette section un exemple de modèle polarisé de DiLL<sub>0</sub> en analyse réelle motivant la recherche d'un cadre catégorique. La logique linéaire différentielle provient de l'étude des modèles vectoriels de la logique

linéaire. Ces modèles sont toutefois dans un cadre restreint : il s'agit de certains espaces de suites dans lesquels les opérations se font sur les indices des suites [5], ou sur des espaces vectoriels sur un corps discret [6]. L'interprétation de DiLL dans des espaces plus généraux, comme les espaces vectoriels normés se révèle ardue, notamment lorsqu'il s'agit de combiner les contraintes d'espaces *complets* (pour une meilleure manipulation des limites et donc des fonctions différentiables) et d'espaces *reflexifs*, c'est à dire linéairement homéomorphes à leur double dual. Ainsi, *avec la contrainte d'être complet, tout modèle intuitionniste de DiLL ne donne pas un modèle polarisé*. En effet, l'interprétation topologiques de la construction de Chu [2], qui c'est à dire le fait de munir l'espace vectoriel par exemple d'une topologie faible ou d'une topologie de Mackey, ne préserve pratiquement jamais la complétion d'un espace.

Les espaces de Fréchet sont les espaces métrisables et complets. Un exemple typique d'espace de Fréchet qui n'est pas un Banach est l'espace des fonctions lisses

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

muni de la famille dénombrable de semi-normes suivante :

$$p_{k,n}(f) := \sup_{|\alpha|=k} \sup_{|x| \leq n} \|\partial^\alpha f(x)\| \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

Les autres espaces de fonctions  $C^m$ , ou les espaces de fonctions à décroissance rapide, sont également des espaces de Fréchet.

**Définition 4.** Pour  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé (lcs), on note  $E'_\beta$  l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues sur  $E$ , muni de la topologie de convergence uniforme sur les bornés. C'est de nouveau un lcs. Un lcs  $E$  est alors dit *réflexif* lorsqu'il est linéairement homéomorphe à  $(E'_\beta)'_\beta$ .

Les espaces réflexifs sont naturellement ceux qui modélisent la négation linéaire involutive de DiLL. Tous les espaces de Fréchet ne sont pas réflexifs, mais tous les espaces de Fréchet *nucléaires*<sup>3</sup> le sont. Ceux-ci étant en plus stables par produit tensoriel et produit cartésien, on pourrait penser qu'ils forment un modèle de MALL. Pourtant, les espaces métrisables, et donc les espaces de Fréchet ne sont *pas stables par dualité*.

Les espaces métrisables sont caractérisés par leur *base dénombrable de voisinages de 0*. Le dual fort  $E'_\beta$  transforme cette base dénombrable d'ouverts en une *base dénombrable de bornés*. La classe des duaux d'espace de Fréchet est par contre bien connue : il s'agit des espaces DF.

Nous avons ainsi un modèle de MALL *polarisé* : les positifs  $y$  sont interprétés par des espaces nucléaires DF (une catégorie notée NDF), et les négatifs par des espaces nucléaires Fréchet (notés NF). Les différents propriétés de stabilités se trouve dans les premiers travaux sur les produits tensoriels topologiques par Grothendieck [11], dont celle liée au produit tensoriel topologique projectif complété  $\tilde{\otimes}_\pi$ .

$$\begin{array}{ccc} & (-)'_\beta & \\ & \curvearrowright & \\ (\text{NDF}, \tilde{\otimes}_\pi, \mathbb{R}) & \perp & (\text{NF}^{op}, \tilde{\otimes}_\pi, \mathbb{R}) \\ & \curvearrowleft & \\ & (-)'_\beta & \end{array} \quad (1)$$

Ce modèle permet également de d'interpréter les exponentielles sur les espaces euclidiens :

$$! \mathbb{R}^n := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})' \text{ et } ? \mathbb{R}^n := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Une extension de ces formules donne un modèle de DiLL<sub>0,P</sub> [15]. Le travail exposé ici vise à leur donner un cadre catégorique. On fait alors face à plusieurs difficultés. Quand dans le modèle ci-dessus toutes les fonctions linéaires continues sont des morphismes de la catégorie des espaces vectoriels topologiques, il s'agit maintenant de décider quelles fonctions font partie de l'interprétation des positifs et quelles fonctions font partie de l'interprétation des négatifs. En particulier, l'interprétation de l'exponentielle fait intervenir des shifts (interprétés par une procédure de complétion) qui n'apparaissent pas lorsqu'on regarde les espaces de fonctions lisses sur  $\mathbb{R}^n$ , ceux ci étant déjà complets.

3. les espaces nucléaires sont les lcs dans lesquels plusieurs notions de produit tensoriel topologique correspondent. Le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [12]

## 2.4 Elimination des coupures

Nous rappelons dans cette section les règles d'élimination des coupures pour les règles exponentielles de DiLL0. Ces règles correspondent aux intuitions sémantiques de l'analyse réelle : ainsi, l'élimination des coupures entre  $c$  et  $\bar{d}$  correspond à la différentiation d'une multiplication scalaire de fonctions, donc à la formule  $(fg)' = f'g + g'f$ . Nous renvoyons à [4] pour une explication des règles en ces termes.

Comme indiqué par l'exemple de la règle de Leibniz ci-dessus, les preuves de la logique linéaire différentielle doivent être sommées. Elle obéissent donc à une grammaire particulière. Les preuves de DiLL sont des sommes commutatives et associatives d'arbres de preuve. Il y a pour cette somme un élément neutre : toute formule  $A$  possède une 0-preuve, notée  $o_A$ .

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?E} w \quad \frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow \vdash \Gamma
\end{array}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} c \quad \frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \text{cut}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, !E^\perp \quad \vdash \Gamma', !E^\perp}{\vdash \Gamma, \Gamma', !E^\perp} \bar{c} \quad \frac{\vdash \Delta}{\vdash \Delta, ?E} w}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, !E^\perp \quad \frac{\frac{\vdash \Delta}{\vdash \Delta, ?E} w}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta, ?E} w}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \text{cut}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Delta, E}{\vdash \Delta, ?E} d \quad \frac{\frac{\vdash \Gamma, E^\perp}{\vdash \Gamma, !E^\perp} \bar{d}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightsquigarrow \frac{\frac{\vdash \Delta, E \quad \vdash \Gamma, E^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?E} w \quad \frac{\frac{\vdash \Delta, E^\perp}{\vdash \Delta, !E^\perp} \bar{d}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightsquigarrow o_{\Gamma ? \Delta}$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w} \quad \frac{\frac{\vdash \Gamma, E}{\vdash \Gamma, ?E} d}{\vdash \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow o_{\Gamma ? \Delta}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} c \quad \frac{\frac{\vdash \Delta, E^\perp}{\vdash \Delta, !E^\perp} \bar{d}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightsquigarrow$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, \Delta, ?E} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Delta, E^\perp}{\vdash \Delta, !E^\perp} \bar{d}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut} + \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, \Delta, ?E} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\vdash \Gamma, \Delta, ?E} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}}{\vdash \Delta, \Gamma} \text{cut}$$





**Notation 6.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  une catégorie monoïdale symétrique, on adoptera les notations suivantes pour les isomorphismes naturels accompagnant cette structure :

- morphismes d'associativité :  $\alpha_{A,B,C}^{\otimes} : (A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$ .
- morphismes de neutralité :  $\rho_A^{\otimes} : A \otimes 1 \simeq A$ ,  $\lambda_A^{\otimes} : 1 \otimes A \simeq A$ .
- morphisme de commutativité :  $\gamma_{A,B}^{\otimes} : A \otimes B \simeq B \otimes A$ .

Sans ambiguïté on notera respectivement  $\alpha_{A,B,C}, \rho_A, \lambda_A, \gamma_{A,B}$  voire  $\alpha, \rho, \lambda, \gamma$  pour  $\alpha_{A,B,C}^{\otimes}, \rho_A^{\otimes}, \lambda_A^{\otimes}, \gamma_{A,B}^{\otimes}$ .

### 3.1 Biproduct et règles costructurales

Nous décrivons dans cette partie le rôle joué par le biproduct dans les modèles non-polarisés de la logique linéaire différentielle, d'après les travaux de Fiore.

**Notation 7.** Soit  $F$  un foncteur monoïdal fort de  $(\mathcal{C}, \diamond, I)$  vers  $(\mathcal{D}, \blacklozenge, J)$ , on note  $m_{F,\diamond,\blacklozenge}^{A,B}$  le morphisme de  $F(A \diamond B)$  vers  $F A \blacklozenge F B$  et on notera  $m_{F,\diamond,\blacklozenge}^0$  le morphisme de  $F I$  vers  $J$ .

On notera  $m_F^{A,B}, m_F$  voire  $m$  quand il n'y a pas d'ambiguïté.

**Définition 8.** Soient  $\mathcal{L}$  une catégorie,  $\diamond$  une loi monoïdale symétrique sur  $\mathcal{L}$  et soit  $A$  un objet de  $\mathcal{L}$ , avec  $u_A : I \rightarrow A$  et  $\nabla_A : A \diamond A \rightarrow A$  des morphismes. On dit que  $(A, u_A, \nabla_A)$  est un *monoïde commutatif* si les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 A \diamond A \diamond A & \xrightarrow{\nabla_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A \\
 \text{Id} \diamond \nabla_A \downarrow & & \downarrow \nabla_A \\
 A \diamond A & \xrightarrow{\nabla_A} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 I \diamond A & \xrightarrow{u_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A & \xleftarrow{\text{Id} \diamond u_A} & A \diamond I \\
 \lambda \searrow & & \downarrow \nabla_A & & \swarrow \rho \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \diamond A & \xrightarrow{\gamma} & A \diamond A \\
 \nabla_A \searrow & & \swarrow \nabla_A \\
 & & A
 \end{array}$$

Soient des morphismes  $n_A : A \rightarrow I$  et  $\Delta_A : A \rightarrow A \diamond A$ ,  $(A, n_A, \Delta_A)$  est un *co-monoïde commutatif* si les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \diamond A \\
 \Delta_A \downarrow & & \downarrow \Delta_A \diamond \text{Id} \\
 A \diamond A & \xrightarrow{\text{Id} \diamond \Delta_A} & A \diamond A \diamond A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & & A \\
 \lambda^{-1} \swarrow & \Delta_A \downarrow & \searrow \rho^{-1} \\
 I \diamond A & \xleftarrow{n_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A & \xrightarrow{\text{Id} \diamond n_A} & A \diamond I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \Delta_A \swarrow & & \searrow \Delta_A \\
 A \diamond A & \xrightarrow{\gamma} & A \diamond A
 \end{array}$$

**Définition 9.** Un *biproduct* sur une catégorie  $\mathcal{L}$  est une structure monoïdale  $(\diamond, I)$  avec des transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc}
 I & & I \\
 u_A \searrow & & \swarrow n_A \\
 & A & \\
 \nabla_A \swarrow & & \searrow \Delta_A \\
 A \diamond A & & A \diamond A
 \end{array}$$

telles que  $(A, u_A^\diamond, \nabla_A^\diamond)$  est un monoïde commutatif et  $(A, n_A^\diamond, \Delta_A^\diamond)$  est un co-monoïde commutatif. On omettra les  $\diamond$  au-dessus des morphismes quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

*Exemple 10.* L'exemple typique d'un biproduit est le produit des espaces vectoriels : pour tout espaces vectoriels  $E$  et  $F$ ,  $E \times F \simeq E \oplus F$ .

**Proposition 11.** *Le biproduit est un produit avec projections :  $n \diamond Id; \lambda^\diamond$  et  $Id \diamond n; \rho^\diamond$ . C'est aussi un co-produit avec les co-projections  $(\rho^\diamond)^{-1}; Id \diamond u$  et  $(\lambda^\diamond)^{-1}; u \diamond Id$ .*

*Remarque 12.* Le biproduit sur une catégorie est ce qui permet d'additionner les morphismes et donc d'interpréter les sommes de preuves de DiLL. En effet, la présence d'une structure de biproduit est équivalente à la conjonction d'un enrichissement sur la catégorie des monoïdes et à la présence d'un produit [19, 2.3]. Ainsi, pour deux morphismes  $f, g \in \mathcal{L}(A, B)$ , on construit leur somme :

$$f + g : A \xrightarrow{\Delta} A \diamond A \xrightarrow{f \diamond g} B \diamond B \xrightarrow{\nabla} B.$$

Nous rappelons par ailleurs que tout produit sur une catégorie donne lieu à un morphisme diagonal :

**Proposition 13.** [17, Prop 16] *Soit  $(\mathcal{C}, \times, 0)$  une catégorie cartésienne, avec  $n_A : A \longrightarrow 0$  comme morphisme terminal. Alors  $\mathcal{C}$  est muni de la transformation naturelle suivante :*

$$\Delta_A : A \longrightarrow A \times A$$

telle que pour tout objet  $A$   $(A, \Delta_A, n_A)$  est un co-monoïde commutatif.

De même, toute catégorie co-cartésienne  $(\mathcal{C}, \otimes, 0)$  est naturellement munie d'une co-diagonale  $\nabla_A : A \oplus A \longrightarrow A$ .

## 3.2 Chiralités

Les chiralités ont été introduites par Melliès [18] comme une manière de relâcher l'injonction d'une négation linéaire involutive en une équivalence de catégories. Dans leur première forme, les chiralités consistent en deux foncteurs contravariants formant une équivalence entre deux catégories monoïdales, accompagnés de foncteurs covariants permettant le plongement des catégories l'une dans l'autre. Ces deux paires de foncteurs représentent respectivement les deux négations (des positifs aux négatifs et vice-versa) et les deux shifts.

Nous poussons le raisonnement plus loin en demandant que la composition des foncteurs soit un isomorphisme non pas sur les deux catégories mais sur une seule d'entre elles. Ce cas de figure est celui qui apparaît concrètement dans les modèles dénotationnels, où seules les interprétations des formules négatives sont par construction invariantes par double négation. L'interprétation des formules positives nécessite justement l'application d'un shift pour vérifier cette invariance.

**Définition 14.** Une *fermeture polarisée à gauche* (resp. *à droite*) est une adjonction  $L : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \dashv R : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$  telle qu'on ait un isomorphisme naturel entre  $\text{Id}_{\mathcal{P}}$  et  $R \circ L$  (resp. un isomorphisme naturel entre  $L \circ R$  et  $\text{Id}_{\mathcal{N}}$ ) qui soit image de l'identité par l'adjonction.

Les chiralités négatives définies ci-dessous sont donc une structure intermédiaire entre les chiralités de dialogue et les chiralités mixtes définies par Melliès.

**Définition 15.** Une *chiralité négative* est la donnée d'une paire de catégories monoïdales  $(\mathcal{P}, \otimes, 1)$  et  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$  avec :

- une fermeture polarisée à gauche fortement monoïdale,  $(-)^{\perp L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}^{op} \dashv (-)^{\perp R} : \mathcal{N}^{op} \longrightarrow \mathcal{P}$ ,
- une fermeture polarisée à gauche,  $\uparrow : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \dashv \downarrow : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$ ,
- une famille de bijections :

$$\chi_{p,n,m} : \mathcal{N}(\uparrow p, n \wp m) \simeq \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes n^{\perp R}), m) \quad (2)$$

naturelles en  $p, n$  et  $m$  telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes (n' \wp n)^{\perp R}), m) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{N}(\uparrow p, (n' \wp n) \wp m) \\
 \downarrow \text{associativité, monoïdalité de la négation} & & \uparrow \text{associativité} \\
 \mathcal{N}(\uparrow((p \otimes n'^{\perp R}) \otimes n^{\perp R}), m) & \xrightarrow{\chi} \mathcal{N}(\uparrow p \otimes n'^{\perp R}, n \wp m) \xrightarrow{\chi} & \mathcal{N}(\uparrow p, n' \wp (n \wp m))
 \end{array} \tag{3}$$

On omettra les indices sur  $\chi$  quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

*Remarque 16.* Dans la suite,  $\chi_n(f)$  signifiera qu'on veut faire passer  $n$  de droite à gauche, ainsi, si on a que  $f$  est un morphisme de  $\uparrow p$  vers  $m \wp n$ ,  $\chi_n(f)$  désignera le morphisme  $\chi_{p,n,m}(f; \gamma)$  et si  $f$  est un morphisme de  $\uparrow p$  vers  $n \wp m$ ,  $\chi_n(f)$  désignera  $\chi_{p,n,m}(f)$ .

## 4 Un modèle catégorique polarisé de $\text{DiLL}_{0,pol}$

Dans cette partie nous donnons un cadre catégorique pour interpréter les règles de la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée, de manière invariante par élimination des coupures. Ce modèle consiste en une chiralité négative, interprétant les connecteurs multiplicatifs, un biproduit *sur chacune des catégories de la chiralité*, ainsi qu'un opérateur de co-déréliction interprétant la règle du même nom.

Une difficulté de ce modèle provient du fait que l'interprétation d'une preuve fait intervenir les plongements covariants d'une catégorie dans une autre (les shifts  $\uparrow$  et  $\downarrow$ ) : les structures doivent donc être compatibles avec ceux-ci. De manière intéressante, exiger un biproduit sur l'une des catégories ne semble pas suffire ; nous avons besoin d'un biproduit sur chacune des deux catégories de la chiralité.

Une deuxième difficulté provient de la structure exponentielle. Les lois régissant ! sont traditionnellement modélisées par une adjonction entre une catégorie  $\mathcal{L}$  aux morphismes linéaires et une catégories  $\mathcal{L}_!$  aux morphismes non-linéaires [17]. Ces deux adjonctions doivent maintenant interagir avec les deux catégories représentant la polarisation. Ainsi, l'interprétation de l'exponentielle ! et de son dual ? font explicitement intervenir des shifts  $\uparrow$  et  $\downarrow$  (voir définition 20).

**Définition 17.** Un modèle de  $\text{DiLL}_{0,pol}$  consiste en :

- $\perp$  Une chiralité négative  $(\mathcal{P}, \otimes, 1)$  et  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$  avec une clôture monoïdal forte  $(-)^{\perp L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}^{op} \dashv (-)^{\perp R} : \mathcal{N}^{op} \longrightarrow \mathcal{P}$ , et une clôture polarisée  $\uparrow : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \dashv \downarrow : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$ . Nous noterons  $\chi$  la famille de bijections :  $\chi : \chi_{p,n,m} : \mathcal{N}(\uparrow p, n \wp m) \simeq \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes n^{\perp R}), m)$ .

**Notation 18.** On notera *refl l'isomorphisme de  $(-)^{\perp R \perp L}$  vers  $Id$  dans  $\mathcal{N}$ , et compl l'isomorphisme de  $\uparrow \circ \downarrow$  vers  $Id$  dans  $\mathcal{N}$ .*

- $\oplus$  Un biproduit  $(\oplus, I)$  sur  $\mathcal{P}$ . Nous notons  $I \xrightarrow{u_P^\oplus} P, P \oplus P \xrightarrow{\nabla_P^\oplus} P, P \xrightarrow{n_P^\oplus} I$  et  $P \xrightarrow{\Delta_P^\oplus} P \oplus P$  les transformations naturelles telles que  $(P, u^\oplus, \nabla^\oplus)$  est un monoïde commutatif et  $(P, n^\oplus, \Delta^\oplus)$  est un co-monoïde commutatif.

- $\&$  Un biproduit  $(\&, J)$  sur  $\mathcal{N}$ . Nous notons  $J \xrightarrow{u_N^\&} N, N \& N \xrightarrow{\nabla_N^\&} N, N \xrightarrow{n_N^\&} J$  et  $N \xrightarrow{\Delta_N^\&} N \& N$  les transformations naturelles telles que  $(N, u^\&, \nabla^\&)$  est un monoïde commutatif et  $(N, n^\&, \Delta^\&)$  est un co-monoïde commutatif.

- $\oplus_\infty$  Une catégorie co-cartésienne  $(\mathcal{P}^\infty, \oplus_\infty, 0)$

- $\otimes$  Une clôture monoïdale forte

$$\mathcal{E} : (\mathcal{P}^{\infty,op}, \oplus, 0_{\mathcal{P}^\infty}) \longrightarrow (\mathcal{N}^{op}, \wp, \perp) \dashv \mathcal{U} : (\mathcal{N}^{op}, \wp, \perp) \longrightarrow (\mathcal{P}^{\infty,op}, \oplus, 0_{\mathcal{P}^\infty}).$$

**Notation 19.** On note  $d : \mathcal{E} \circ \mathcal{U} \longrightarrow Id$  (ici dans  $\mathcal{N}^{op}$ ) l'unité de l'adjonction précédente entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $N \in \mathcal{N}$ ,  $d_N$  est donc un morphisme de  $\mathcal{N}$  qui va de  $N$  vers  $\mathcal{E} \circ \mathcal{U}(N)$ .

$\text{clos}_P$  Une famille d'isomorphismes naturels dans  $\mathcal{P}$  :

$$\text{clos}_P : \downarrow P^{\perp L} \simeq (\uparrow P)^{\perp R}.$$

$\bar{d}$  Une transformation naturelle  $\bar{d} : \mathcal{E} \circ \mathcal{U} \longrightarrow \text{Id}$  vérifiant :

$$d_N; \bar{d}_N = \text{Id}_N$$

$\oplus/\otimes$  On demande que  $\oplus$  soit compatible avec  $\otimes$ , c'est à dire que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes C & \xrightarrow{1 \otimes n} & A \otimes I \\ n \downarrow & \nearrow n & \downarrow 1 \otimes u \\ I & \xrightarrow{u} & A \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes 1_C} & (A \oplus A) \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \nabla \otimes 1_C \\ (A \otimes C) \oplus (A \otimes C) & \xrightarrow{\nabla} & A \otimes C \end{array}$$

$\chi/\otimes$  On demande en plus que le diagramme suivant commute pour tout  $N, \mathcal{M} \in \mathcal{N}$  et tout morphisme  $f \in \mathcal{N}(\uparrow 1, N \wp \mathcal{M})$  :

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow(1 \otimes \mathcal{M}^{\perp R}) & \xrightarrow{\uparrow 1 \otimes \chi_N(f)^{\perp R}} & \uparrow 1 \otimes (\uparrow 1 \otimes N^{\perp R})^{\perp R} & \xrightarrow{\uparrow \lambda} & \uparrow(\uparrow 1 \otimes N^{\perp R})^{\perp R} & (4) \\ \downarrow \chi_{\mathcal{M}}(f) & & & & \downarrow \uparrow(\uparrow \lambda)^{\perp R} \\ N & \xleftarrow{\text{refl}} & N^{\perp R \perp L} & \xleftarrow{\text{compl}} & \uparrow \downarrow N^{\perp R \perp L} & \xleftarrow{\uparrow \text{clos}^{-1}} & \uparrow(\uparrow N^{\perp R})^{\perp R} \end{array}$$

**Définition 20.** On notera  $?$  le foncteur  $\mathcal{E} \circ \mathcal{U} \circ \uparrow$ , ainsi que  $!$  le foncteur  $(\mathcal{E} \circ \mathcal{U} \circ \uparrow(-)^{\perp R})^{\perp R}$ .

*Remarque 21.* La présence d'un produit sur  $\mathcal{N}$  et d'un coproduit sur  $\mathcal{P}$  est nécessaire à l'interprétation des règles multiplicatives et additives polarisées. Il nous faut aussi sommer les interprétations des preuves de DiLL. Celles-ci seront interprétées comme des morphismes dans  $\mathcal{N}(\uparrow P, N)$ . Suivant la remarque 12 il faudrait donc disposer d'un morphisme diagonal  $\Delta_P : P \longrightarrow P \oplus P$  (modulo  $\uparrow$ ) et d'un morphisme co-diagonal  $\nabla_N : N \& N \longrightarrow N$ . Ceux-ci sont peu ou prou équivalents respectivement à la présence d'un produit sur  $\mathcal{P}$  et d'un coproduit sur  $\mathcal{N}$  [17, prop 16]. Ainsi, dans un premier temps, nous avons demandé un biproduit sur chacune des catégories  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$ . Nous espérons dans un deuxième temps pouvoir alléger cette structure.

## 4.1 Premières propriétés de notre modèle

Soit  $\mathcal{L}$  un modèle de  $\text{DiLL}_{\text{pol}}$  comme introduit en définition 17. Avant de nous attaquer à l'interprétation des formules, nous démontrons dans cette section des propriétés dans ce modèle. Les preuves des résultats énoncés ici se trouvent en annexe.

Les résultats suivants proviennent du fait que les adjoints à droite préservent les limites :

**Proposition 22.** Le foncteur  $\uparrow$  est monoïdal fort entre les catégories  $(\mathcal{P}, \oplus, I)$  et  $(\mathcal{N}, \&, J)$ .

**Proposition 23.** Le foncteur  $\mathcal{U}$  est monoïdal fort entre  $(\mathcal{N}, \&, J)$  et  $(\mathcal{P}^\infty, \oplus_\infty, 0)$ .

**Corollaire 24.** Le foncteur  $?$  est monoïdal fort de  $(\mathcal{P}, \oplus, I)$  à  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$ .

Les morphismes suivants serviront à interpréter la contraction, l'affaiblissement, la co-contraction et le co-affaiblissement :

$$c_P := (m_{?, \oplus, \wp}^{P, P})^{-1}; ?\nabla_P : ?P \wp ?P \longrightarrow ?P$$

$$w_P := (m_{?}^0)^{-1}; ?u_P : \perp \longrightarrow ?P$$

$$\bar{c}_P := ?\Delta_P; m_{?}^{P, P} : ?P \longrightarrow ?P \wp ?P$$

$$\bar{w}_P := ?n_P; m?_0 : ?P \longrightarrow \perp$$

Nous donnons la structure additive des morphismes sur  $\mathcal{N}(N, M)$  :

$$f + g := \Delta_N^{\&}; f \& g; \nabla_M \text{ et } 0_{(N, M)} := n_N^{\&}; u_M^{\&}.$$

## 4.2 Interprétation des formules

Les formules négatives sont interprétées par des objets de  $\mathcal{N}$  quand les formules positives sont interprétées par des objets de  $\mathcal{P}$ . A l'aide d'une première interprétation des formules atomiques dans  $\mathcal{N}$ , l'interprétation des formules se fait par induction sur la grammaire des formules de DiLL. On utilise pour cela les foncteurs définis précédemment, avec des notations correspondant aux constructeurs logiques employés.

**Proposition 25.** *On interprète la négation d'une formule à l'aide des foncteurs de dualité, de manière à ce que le dual de l'interprétation d'une formule et l'interprétation de la négation de la formule soient isomorphes. On note ces isomorphismes  $isopos_P : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket P \rrbracket^{\perp L}$  et  $isoneg_N : \llbracket N^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket N \rrbracket^{\perp R}$  et on les définit par induction sur les formules. En particulier, afin d'assurer la proposition 26, on s'assure d'utiliser la forte monoïdalité de  $\perp_R$  et non celle de  $\perp_L$  (les deux étaient possibles mais un choix était nécessaire).*

$n^\perp$  Si  $P = n^\perp$  (la négation d'une variable) :  $isopos_P := refl^{-1}$ .

$n$  Si  $N = n$  (une variable) :  $isoneg_N := Id_{\llbracket n \rrbracket}$ .

$\otimes$  Si  $P = P_1 \otimes P_2$  :  $isopos_P := refl^{-1}; ((m_{\perp_R}^{\llbracket P_1^\perp \rrbracket, \llbracket P_2^\perp \rrbracket})^{-1})^{\perp L}; (isoneg_{P_1^\perp} \otimes isoneg_{P_2^\perp})^{\perp L}$ .

$\wp$  Si  $N = N_1 \wp N_2$  :  $isoneg_N := isoneg_{N_1} \otimes isoneg_{N_2}; (m_{\perp_R}^{\llbracket N_1 \rrbracket, \llbracket N_2 \rrbracket})^{-1}$ .

$\oplus$  Le cas  $P = P_1 \oplus P_2$  se traite symétriquement au cas  $P_1 \otimes P_2$ .

$\&$  Le cas  $N = N_1 \& N_2$  se traite symétriquement au cas  $N_1 \wp N_2$ .

$!$  Si  $P = !N$  :  $isopos_{!N} := ?isoneg_N; refl^{-1}$ .

$?$  Si  $N = ?P$  :  $isoneg_{?P} := (?isoneg_{P^\perp})^{\perp R}$ .

$\downarrow$  Si  $P = \downarrow N$  :  $isopos_{\downarrow N} := refl^{-1}; (clos)^{\perp L}; (\downarrow isopos_{N^\perp})^{\perp L}$ .

$\uparrow$  Si  $N = \uparrow P$  :  $isoneg_{\uparrow P} := \downarrow isopos_P; clos$ .

$1$  Si  $P = 1$  :  $isopos_1 := refl^{-1}; ((m_{\perp_R}^0)^{-1})^{\perp L}$ .

$\perp$  Si  $N = \perp$  :  $isoneg_\perp := (m_{\perp_R}^0)^{-1}$ .

$\top, 0$  Les cas  $N = \top$  ou  $P = 0$  se traitent symétriquement aux cas  $N = \perp$  et  $P = 1$ .

On interprète des ensembles de formules négatives  $\mathcal{N} := N_1, \dots, N_n$  par la disjonction multiplicative de l'interprétation des formules :

$$\llbracket \mathcal{N} \rrbracket := \llbracket N_1 \rrbracket \wp \llbracket N_2 \rrbracket \wp \dots \wp \llbracket N_n \rrbracket.$$

La proposition suivante est immédiate :

**Proposition 26.** *Pour toute formule négative  $N$ , on a :*

$$(isoneg_N)^{\perp L}; isopos_{N^\perp}^{-1} = refl_{\llbracket N \rrbracket}.$$

## 4.3 Interprétation des preuves

Nous donnons maintenant l'interprétation des preuves de notre système. Comme dans les chiralités de dialogue, La preuve d'un séquent  $\vdash P, \mathcal{N}$  avec  $\mathcal{N}$  un multi-ensemble de formules négatives et  $P$  une formule positive est interprétée par un morphisme dans  $\mathcal{N}(\llbracket P \rrbracket^{\perp L}, \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)$ . La preuve d'un séquent  $\vdash \mathcal{N}$  avec  $\mathcal{N}$  un multi-ensemble de formules négatives est interprétée par un morphisme dans  $\mathcal{N}(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)$ .

Cette définition est traditionnellement faite par induction sur la dernière règle utilisée dans la preuve.

*Remarque 27.* Un séquent est ici par définition un multi-ensemble de formules, le séquent  $\vdash A, B$  n'est donc pas différent de  $\vdash B, A$ , cependant  $\llbracket A \rrbracket \wp \llbracket B \rrbracket$  et  $\llbracket B \rrbracket \wp \llbracket A \rrbracket$  sont deux objets différents dans une catégorie. Pour être rigoureux, il ne faudrait donc pas donner une interprétation des séquents, mais plutôt d'une version des séquents où l'ordre des formules du séquent à son importance. Ici on fixe un ordre arbitraire sur l'ordre de nos formules et on omet les morphismes de commutativités qu'il faudrait rajouter dans certains cas.

cut Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{N}$  et  $g : \llbracket \mathcal{N}^\perp \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash \mathcal{N}^\perp, \mathcal{M}$ . On interprète la preuve de  $\vdash \llbracket \mathcal{N} \rrbracket, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  résultant d'une coupure entre les deux précédentes preuves par  $f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp$  (isopos;  $g$ ).

ax Pour toute formule  $N$ , l'axiome prouvant  $\vdash N, N^{\perp R}$  s'interprète par refl :  $\llbracket N \rrbracket^{\perp R \perp L} \longrightarrow \llbracket N \rrbracket$ .

$\otimes$  Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$  et  $g : \llbracket Q \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash Q, \mathcal{M}$ . On définit l'interprétation de  $\vdash P \otimes Q, \mathcal{N}, \mathcal{M}$  résultant de la règle ( $\otimes$ ) appliquée aux deux preuves précédentes par : isopos<sup>-1</sup>; isopos  $\wp$  isopos;  $f \wp g : \llbracket P \otimes Q \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$ .

$\wp$  Soit  $f \in \mathcal{N}(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{N}, N_1, N_2 \rrbracket)$  interprétant une preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, N_1, N_2$ . L'interprétation de la preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, N_1 \wp N_2$  est également  $f$ .

$\oplus$  Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ . On définit l'interprétation de la preuve de  $\vdash P \oplus Q, \mathcal{N}$  résultant par application de la règle ( $\oplus_g$ ) par : isopos<sup>-1</sup>; isopos & isopos; Id &  $n_{\llbracket Q \rrbracket^{\perp L}}$ ;  $\rho$ ;  $f : \llbracket P \oplus Q \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ . Le cas de la règle ( $\oplus_d$ ) se traite de manière symétrique.

& Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{N}$  et  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{N}$ . On définit l'interprétation de la preuve de  $\vdash \mathcal{N} \& \mathcal{M}, \mathcal{N}$  résultant par application de la règle (&) aux précédentes preuves :  $\chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}^{-1}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}(f) \& \chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}(g))$ .

1 On interprète la preuve qui ne contient que la règle (1) par  $m_{\perp L, \otimes, \wp}^0 \in \mathcal{N}(1^{\perp L}, \perp)$ .

$\perp$  Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash \mathcal{N}$ . On interprète la preuve de  $\vdash \mathcal{N}, \perp$  qui résulte de l'application de la règle ( $\perp$ ) par  $f; \rho^{-1}$ .

$\top$  On interprète la preuve ne comportant que cette règle par la zéro-preuve  $0_{\mathcal{N}(\uparrow 1, \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)}$ .

$c$  Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ?\llbracket P \rrbracket \wp ?\llbracket P \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . On construit  $f; \mathcal{N} \wp c_{\llbracket P \rrbracket} : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ?\llbracket P \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ .

$\bar{c}$  Pour la co-contraction, on a  $f : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, !\mathcal{N}$  et  $g : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}, !\mathcal{N}$ . Et donc on a (isopos);  $\bar{c}_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}$ ; ((isopos)<sup>-1</sup>);  $f \wp ((\text{isopos})^{-1}; g) : ?\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, !\mathcal{N}$ .

$w$  Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}$ . On construit  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; w_P \wp f : \uparrow 1 \longrightarrow ?\llbracket P \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ .

$\bar{w}$  On construit refl;  $\bar{w}_{N^\perp} : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \perp$  interprétant  $\vdash !\mathcal{N}$ .

$d$  Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant  $\vdash P, \mathcal{M}$ . On construit

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow \llbracket P \rrbracket^{\perp L}}^{\otimes}; \text{compl}; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, ?P$ .

$\bar{d}$  Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{N}$ . On définit

$$f' := \uparrow \lambda_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp R}}^{-1}; \chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}^{-1}(f)$$

et on construit refl;  $\bar{d}_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp R}}; f' : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, !\mathcal{N}$ .

## 4.4 Invariance par élimination des coupures

Nous démontrons que l'interprétation d'une preuve après l'élimination d'une coupure est la même qu'avant l'élimination modulo l'utilisation de l'adjonction  $\chi$  et de son inverse  $\chi^{-1}$  et des isomorphismes suivants :  $\lambda, \rho, \gamma, \alpha, \text{clos}, \text{refl}$  ainsi que de leurs inverses. Beaucoup des résultats qui suivent proviennent d'outils fournis par le biproduct [19]. La plupart des démonstrations utilisent la naturalité des isomorphismes des catégories monoïdales symétrique et certains diagrammes. Les cas co-déréliction/contraction et co-contraction/déréliction sont les cas les plus exigeants : leur démonstration utilise en particulier la compatibilité du biproduct avec  $\mathfrak{A}$  et des diagrammes du biproduct.

Nous commençons par quelques lemmes préliminaires. Le lemme suivant se démontre à l'aide du fait que  $J$  est terminal et initial (respectivement).

**Lemme 28.** Soit  $f$  un morphisme de  $A'$  vers  $A$ , alors on a :

$$f; 0_{C(A,B)} = 0_{C(A',B)}$$

Soit  $g$  un morphisme de  $B$  vers  $B'$ , alors on a :

$$0_{C(A,B)}; g = 0_{C(A,B')}$$

Les démonstrations des propriétés qui suivent font intervenir les notions de naturalité, de produit cartésien et des diagrammes de catégories monoïdales. Elles serviront plus tard pour l'invariance de la sémantique par l'élimination des coupures pour les cas contraction/co-déréliction et déréliction/co-contraction.

**Proposition 29.** On a l'égalité :

$$\Delta_{?P\mathfrak{A}?P}^{\&} (\bar{d}_{\uparrow P} \mathfrak{A} \bar{w}_{?P}) \& (\bar{w}_{?P} \mathfrak{A} \bar{d}_{\uparrow P}); \rho^{\mathfrak{A}} \mathfrak{A} \lambda^{\mathfrak{A}}; \nabla_{\uparrow P}^{\&} = (m_{?,\mathfrak{A},\oplus}^{P,P})^{-1}; ?\nabla_P; \bar{d}$$

**Proposition 30.** On a l'égalité :

$$\Delta^{\&} ; \rho^{-1} \& \lambda^{-1}; (d \mathfrak{A} w) \& (w \mathfrak{A} d); \nabla^{\&} = d; ?\Delta; m_{?}^{P,P}$$

Cette égalité se montre avec les mêmes arguments que la preuve de l'égalité précédente, en utilisant le fait que le biproduct  $\&$  est un produit co-cartésien cette fois-ci.

**Théorème 31.** L'axiomatique donnée par la définition 17 forme un modèle dénotationnel de la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée.

Nous fournissons une preuve détaillée de l'invariance de la sémantique par élimination des coupures en annexe, dans les sections A et B.

## 5 Conclusion

Nous avons construit une axiomatique catégorique pour la logique linéaire différentielle, finitaire polarisée. Celle-ci est construite sur la notion de chiralité, de biproduct et de co-déréliction. Notre but était de mettre à jour au niveau catégorique la facilité avec laquelle la polarisation apparaît dans les modèles de la logique linéaire différentielle.

Nous n'avons que partiellement réussi : en effet, l'ajout d'une co-déréliction se fait toujours de manière ad-hoc, et ne rend pas compte du caractère dual entre la déréliction et la co-déréliction. De plus, la nécessité de demander un biproduct sur chacune des deux catégories de la chiralité est particulièrement lourde, et il faudrait dans l'idéal pouvoir s'en dégager. Nous pensons qu'exiger un biproduct sur  $\mathcal{N}$  devrait suffire - cela donnerait naturellement un coproduct sur  $\mathcal{P}$ . Il reste néanmoins à vérifier les preuves dans le détail.

On remarque par ailleurs que quand la partie linéaire de DiLL polarisée est interprétée par une chiralité, la partie exponentielle ressemble elle aussi à une chiralité. En effet, la partie exponentielle est interprétée elle aussi par une clôture monoïdale forte (entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ ), ainsi que par des morphismes  $\bar{d}$  et  $d$  se comportant comme des shifts entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ . Nous conjecturons que l'interprétation de DiLL avec *promotion* se fera via deux chiralités, l'une traitant de l'interaction positif / négatif et l'autre de l'interaction linéaire / non-linéaire. Nous espérons qu'une telle structure catégorique permettra de décomposer la différentiation avec des opérateurs plus primitifs, et d'éventuellement mettre en valeur les opérateurs de contrôle en jeu dans le calcul de la différentielle.



## Références

- [1] Jean-Marc Andreoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. 1992.
- [2] Michael Barr. *\*-autonomous categories*, volume 752 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979. With an appendix by Po Hsiang Chu.
- [3] R. F. Blute, J. R. B. Cockett, and R. A. G. Seely. Differential categories. *Math. Structures Comput. Sci.*, 16(6), 2006.
- [4] T. Ehrhard and L. Regnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2) :166–195, 2006.
- [5] Thomas Ehrhard. On köthe sequence spaces and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12(5) :579–623, 2002.
- [6] Thomas Ehrhard. Finiteness spaces. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(4) :615–646, 2005.
- [7] Thomas Ehrhard. An introduction to differential linear logic : proof-nets, models and antiderivatives. *Mathematical Structures in Computer Science*, 28(7) :995–1060, 2018.
- [8] Thomas Ehrhard and Olivier Laurent. Interpreting a finitary pi-calculus in differential interaction nets. *Inf. Comput.*, 2010.
- [9] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.
- [10] Jean-Yves Girard. A new constructive logic : Classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1991.
- [11] A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 16 :140, 1955.
- [12] Hans Jarchow. *Locally convex spaces*. B. G. Teubner, 1981.
- [13] M. Kerjean and C. Tasson. Mackey-complete spaces and power series. *MSCS*, 2016.
- [14] Marie Kerjean. A logical account for linear partial differential equations. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2018, Oxford*.
- [15] Marie Kerjean and Jean-Simon Pacaud Lemay. Higher-order distributions for differential linear logic. In *FOS-SACS 2019, Held as Part ETAPS, Prague, Czech Republic, Proceedings*.
- [16] O. Laurent. *Etude de la polarisation en logique*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, March 2002.
- [17] P.-A. Melliès. Categorical semantics of linear logic. *Société Mathématique de France*, 2008.
- [18] Paul-André Melliès. Dialogue categories and chiralities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 52(4) :359–412, 2016.
- [19] M. Fiore. Differential structure in models of multiplicative biadditive intuitionistic linear logic. *Proceedings of TLCA*, 2007.
- [20] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [21] Lionel Vaux. Differential linear logic and polarization. In *Typed Lambda Calculi and Applications, 9th International Conference, TLCA 2009, Brasilia, Brazil, July 1-3, 2009. Proceedings*, pages 371–385, 2009.

## A Invariance de la sémantique par élimination des coupures : cas des règles exponentielles

*Remarque 32.* On omettra volontairement d'écrire certains isomorphismes dans les calculs pour qu'ils soient plus lisibles. On pourra facilement se convaincre que les propriétés restent vraies si on ne les avait pas omis.

On commence par les coupures logique sur les connecteurs exponentiels :

—  $w$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , on a avant élimination de la coupure :

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; w_{\llbracket P \rrbracket} \mathfrak{A} f; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \mathfrak{A} \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\ &= (\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}) \mathfrak{A} f \\ &\cong ?(u_P; n_P); \mathfrak{A} f \quad \text{et donc en utilisant la prop. 2.2 de [19]} \\ &= \perp \mathfrak{A} f \cong f \end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après élimination de la coupure.

—  $c$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} ?\llbracket P \rrbracket \mathfrak{A} ?\llbracket P \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Avant l'élimination des coupures on a donc une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$\begin{aligned} & f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} c_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \\ &\cong f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} ((m_{?}^{?P, ?P})^{-1}; ?(\nabla_{\llbracket P \rrbracket}, n_{\llbracket P \rrbracket})) \\ &= f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} ((m_{?}^{?P, ?P})^{-1}; ?(n_{\llbracket P \rrbracket} \oplus n_{\llbracket P \rrbracket}; \lambda_I)) \quad \text{On utilise [19] prop. 2.2} \\ &\cong f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (?(n_{\llbracket P \rrbracket} \mathfrak{A} ?n_{\llbracket P \rrbracket})) \quad \text{Par naturalité de } m_{?}^{\mathfrak{A}} \\ &= f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (\bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \mathfrak{A} \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}) \end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après coupure.

—  $\bar{c}$  et  $w$  : Soit  $f : ?\llbracket N^{\perp} \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  et  $g : ?\llbracket N^{\perp} \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  et  $h : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprètent (respectivement)  $\vdash !N, \mathcal{N}, \vdash !N, \mathcal{M}$  et  $\vdash \mathcal{M}$ . On a comme interprétation avant coupure :

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket} \mathfrak{A} h; (\bar{c}_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \\ &\cong (w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; \bar{c}_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \\ &= ((m_{?}^0)^{-1}; ?(u_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; \Delta_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}); (m_{?}^{[?N], [?N]})^{-1}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \\ &\cong (((m_{?}^0)^{-1} \mathfrak{A} (m_{?}^0)^{-1}); ?u_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket} \mathfrak{A} ?u_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \quad \text{On utilise [19] prop. 2.2 et la naturalité de } m_{?} \\ &\cong (w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; f) \mathfrak{A} (w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket}; g) \mathfrak{A} h \\ &= w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket} \mathfrak{A} ((w_{\llbracket N^{\perp} \rrbracket} \mathfrak{A} h); (g \mathfrak{A} \mathcal{M})); f \mathfrak{A} \mathcal{N} \mathfrak{A} \mathcal{M} \end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après coupure.

—  $c$  et  $\bar{c}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} ?\llbracket P \rrbracket \mathfrak{A} ?\llbracket P \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Et donc  $f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} c_{\llbracket P \rrbracket}$  interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Soit  $g : ?\llbracket P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, !P^{\perp}$  et  $h : ?\llbracket P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_2 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_2, !P^{\perp}$ . Et donc  $\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \mathfrak{A} h$  interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, ?P$ .

Finalement, avant élimination des coupures on a cette fonction comme interprétation :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (c_{\llbracket P \rrbracket}; \bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \mathfrak{A} h)$$

Et après élimination on obtient :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; \text{Id}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \text{Id}_{\llbracket P \rrbracket}) \wp (\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; \text{Id}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \text{Id}_{\llbracket P \rrbracket}); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (c_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (c_{\llbracket P \rrbracket}; h)$$

Il suffit donc de vérifier l'égalité suivante :

$$c; \bar{c} = (\bar{c}; c) \wp (\bar{c}; c).$$

Ce qui revient à vérifier :

$$\nabla; \Delta = (\Delta; \nabla) \oplus (\Delta; \nabla).$$

Et cette dernière équation vient de la naturalité de  $\Delta$ , puis de  $\nabla$ .

- $\bar{d}$  et  $w$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}$ . Donc  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; w_{\llbracket P \rrbracket} \wp f$  interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Soit  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^\perp$ . Si on pose :

$$g' := \uparrow \text{isoneg}; \uparrow \lambda^{-1}; \chi_{1, \llbracket P^\perp \rrbracket, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g)$$

Alors  $\bar{d}_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; g' : ?\llbracket P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, !P^\perp$ . On a alors  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; \bar{d}; g') \wp f$  qui interprète la preuve avant coupure. Comme  $\bar{d}$  est une transformation naturelle, on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} ?I & \xrightarrow{?u_{\llbracket P \rrbracket}}} & ?\llbracket P \rrbracket \\ \bar{d}_I \downarrow & & \downarrow \bar{d}_{\llbracket P \rrbracket} \\ \uparrow I & \xrightarrow{\uparrow u_{\llbracket P \rrbracket}}} & \uparrow \llbracket P \rrbracket \end{array}$$

Or  $\uparrow I$  est  $J$  (par définition) donc on a que  $?u_{\llbracket P \rrbracket}; \bar{d}_{\llbracket P \rrbracket} = 0_{C(?I, \uparrow \llbracket P \rrbracket)}$ .

Finalement par le lemme 28, on a que notre interprétation est  $0_{C(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)}$ , ce qui est bien l'interprétation d'une zéro-preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}$ .

- $d$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ . Alors :

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow P^\perp}^{\otimes}; \text{compl}; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ . Et donc avant coupure, on a cette interprétation de la preuve :

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow P^\perp}^{\otimes}; \text{iso}_{\uparrow \downarrow} \longrightarrow Id; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

Par les mêmes arguments qu'avant, on peut conclure qu'on obtient bien l'élément neutre de l'addition entre fonction.

- $\bar{d}$  et  $c$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, P^\perp$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \text{isoneg}; \uparrow \lambda^{-1}; \chi^{-1}(f)$$

$\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f'$  interprète une preuve de  $\vdash !P^\perp, \mathcal{M}$ . Considérons maintenant  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Alors  $g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp c_{\llbracket P \rrbracket}$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Avant élimination de la coupure on a l'interprétation suivante de la preuve :

$$g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp c_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f')$$

Et après l'élimination de la coupure, nous avons l'interprétation suivante de la preuve :

$$\mathcal{M}^{\&}; \left( \left[ g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f'); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \lambda^{\wp} \right] \& \right. \\ \left. \left[ g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f') \wp \perp; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \rho^{\wp} \right] \right); \nabla^{\&}$$

En utilisant la compatibilité de  $\wp$  avec le biproduct et la naturalité de  $\mathcal{M}^{\&}$  et de  $\nabla^{\&}$ , on obtient :

$$= g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\mathcal{M}^{\&}; (\bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; \lambda^{\wp}) \& (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}; \rho^{\wp}); \nabla^{\&}); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp f'$$

Et d'après la propriété 29 :

$$= g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (c_{\llbracket P \rrbracket}; d_{\llbracket P \rrbracket}); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp f'$$

Qui est bien l'interprétation de la preuve avant l'élimination de la coupure.

—  $d$  et  $\bar{c}$ . Soit  $f : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors en posant :

$$f' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow \llbracket P^\perp \rrbracket}^{\otimes}; \text{compl}; f),$$

$f'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ .

Soit  $g : \llbracket ?P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, !P^\perp$  et  $h : \llbracket ?P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_2 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_2, !P^\perp$ . Alors  $\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \wp h$  interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, !P^\perp$ . Donc avant l'élimination des coupures on a une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$f'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket; (\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \wp h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket.$$

Et après l'élimination des coupures :

$$\Delta^{\&}; \left( \left[ (\lambda^{\wp})^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp (f'; ((d_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)); \gamma; \alpha; \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket \wp \gamma \right] \& \left[ (\lambda^{\wp})^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (f'; ((d_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right); \nabla^{\&}$$

Puis par naturalité de  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\lambda$ , le dernier terme écrit est égal à :

$$\Delta^{\&}; \left( \left[ f'; (\lambda^{\wp})^{-1}; \gamma; \alpha; (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp \gamma); ((d_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (w_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket) \right] \& \left[ (\lambda^{\wp})^{-1}; ((w_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (f'; (d_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right); \nabla^{\&}$$

On utilise le fait que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} A \wp B & & A \wp B \\ \lambda^{-1} \downarrow & \searrow \rho^{-1} & \downarrow \rho^{-1} \quad \searrow A \wp \rho^{-1} \\ \perp \wp (A \wp B) & \xrightarrow{\gamma} & (A \wp B) \wp \perp & (A \wp B) \wp \perp & \xrightarrow{\alpha} & A \wp (B \wp \perp) \\ & & & & & \\ & & A \wp B & & & \\ & & \downarrow A \wp \rho^{-1} \quad \searrow A \wp \lambda^{-1} & & & \\ & & A \wp (B \wp \perp) & \xrightarrow{A \wp \gamma} & A \wp (\perp \wp B) & \end{array}$$

Et donc le dernier terme que l'on a écrit est égal à :

$$\begin{aligned}
& \Delta^{\&}; \left( \left[ f' ; (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp (\lambda^{\wp})^{-1}) ; ((d_{\llbracket P \rrbracket} ; g) \wp (w_{\llbracket P \rrbracket} ; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \& \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left[ (\lambda^{\wp})^{-1} ; ((w_{\llbracket P \rrbracket} ; g) \wp (f' ; (d_{\llbracket P \rrbracket} ; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right) ; \nabla^{\&} \\
& = \Delta^{\&} ; \left( \left[ f' ; (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp (\lambda^{\wp})^{-1}) ; (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \& \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left[ f' ; (\lambda^{\wp})^{-1} ; (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right) ; \nabla^{\&} \\
& = f' ; \Delta^{\&} ; \left( \left[ (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp (\lambda^{\wp})^{-1}) ; (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \& \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left[ (\lambda^{\wp})^{-1} ; (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right) ; \nabla^{\&} ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \\
& = f' ; \Delta^{\&} ; \left( \left[ (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp (\lambda^{\wp})^{-1}) ; (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) ; \alpha \right] \& \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left[ (\lambda^{\wp})^{-1} ; (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) ; \alpha \right] \right) ; \nabla^{\&} ; \alpha^{-1} (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket))
\end{aligned}$$

Puis on utilise le fait que ces diagrammes commutent :

$$\begin{array}{ccc}
A \wp B & & A \wp B \\
\downarrow A \wp \lambda^{-1} & \searrow \rho^{-1} \wp B & \downarrow \lambda^{-1} \\
A \wp (\perp \wp B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \wp \perp) \wp B & \quad & \perp \wp (A \wp B) & \xrightarrow{\alpha} & (\perp \wp A) \wp B
\end{array}$$

Et donc le dernier terme que l'on a écrit est égal à :

$$\begin{aligned}
& = f' ; \Delta^{\&} ; \left( \left[ ((\rho^{\wp})^{-1} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket) ; ((d_{\llbracket P \rrbracket} \wp w_{\llbracket P \rrbracket}) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket) \right] \& \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left[ ((\lambda^{\wp})^{-1} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket) ; ((w_{\llbracket P \rrbracket} \wp d_{\llbracket P \rrbracket}) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket) \right] \right) ; \nabla^{\&} ; \alpha^{-1} ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket))
\end{aligned}$$

Par compatibilité du biproduit avec  $\wp$ , on a que le terme précédent est égal à :

$$= f' ; \left( \Delta^{\&} ; (\rho^{\wp})^{-1} \& (\lambda^{\wp})^{-1} ; (d_{\llbracket P \rrbracket} \wp w_{\llbracket P \rrbracket}) \& (w_{\llbracket P \rrbracket} \wp d_{\llbracket P \rrbracket}) ; \nabla^{\&} \right) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket ; \alpha^{-1} ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket))$$

Et d'après la proposition 30 ce dernier terme est égal à :

$$\begin{aligned}
& = f' ; (d ; ?\Delta ; m_{?}^{P,P}) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket ; \alpha^{-1} ; (g \wp (h \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \\
& \cong f' ; (d ; ?\Delta ; m_{?}^{P,P}) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket ; (g \wp h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket
\end{aligned}$$

qui est bien égal à l'interprétation de la preuve avant coupure.

—  $d$  et  $\bar{d}$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^{\perp} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^{\perp}$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \lambda^{-1} ; \chi^{-1}(f)$$

refl;  $\bar{d}_{\llbracket P^{\perp} \rrbracket \perp R}$ ;  $f'$  interprète une preuve de  $\vdash !P^{\perp}, \mathcal{M}$ . Supposons que  $g : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors en posant :

$$g' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}) ; \uparrow \lambda_{\downarrow P^{\perp}}^{\otimes} ; \text{compl} ; g),$$

on a que  $g' ; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ . Avant l'élimination des coupures l'interprétation

de la preuve est :

$$\begin{aligned}
& g'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket; (\text{isopos}; \text{refl}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket}{}^{\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\
& = g'; (d_{\llbracket P \rrbracket}; ?\text{isoneg}_{P^\perp}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket}{}^{\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \quad \text{par définition de isopos} \\
& = g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^\perp}; d_{\llbracket P^\perp \rrbracket}{}^{\perp R}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket}{}^{\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\
& = g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^\perp}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\
& = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; g)
\end{aligned}$$

On veut montrer que c'est égal à :

$$f; (\text{isopos}; g) \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

En appliquant  $\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}$ , on voit que l'égalité qu'on veut montrer est :

$$\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; g = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f); \text{isopos}; g$$

Et donc il nous suffit de montrer cette égalité :

$$\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; \text{isopos}^{-1} = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f)$$

Le côté gauche de l'égalité est égal à :

$$\begin{aligned}
& \uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; \text{isoneg}^{\perp L}; \text{isopos}^{-1} \\
& = \uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow \lambda; \uparrow \text{clos}^{-1}; \text{compl}; \text{refl} \quad \text{d'après 26}
\end{aligned}$$

En appliquant le diagramme 4, on obtient le résultat.

## B Invariance par élimination des coupures : cas des règles logiques, multiplicatives et additives

On détaille les cas (plus classique) sur les formules avec des connecteurs binaires comme connecteur principal.

—  $\otimes$  et  $\wp$ . On a  $f : \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash A, \mathcal{N}$  et  $g : \llbracket B \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash B, \mathcal{M}$ . Et donc

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos} \wp \text{isopos}; f \wp g$$

interprète une preuve de  $\vdash A \otimes B, \mathcal{N}, \mathcal{M}$ . De plus, on a  $h : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket A^\perp \rrbracket \wp \llbracket B^\perp \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^\perp, B^\perp$  et donc aussi de  $\vdash \mathcal{M}, A^\perp \wp B^\perp$ . L'interprétation de la preuve avant l'élimination de la coupure est :

$$h; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \text{isopos} \wp \text{isopos}; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp f \wp g$$

Et après l'élimination de la coupure :

$$h; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; f) \wp \llbracket B^\perp \rrbracket; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; g)$$

Comme  $\wp$  est un bi-foncteur, on a bien le résultat.

—  $\oplus$  et  $\&$ . On ne fait le cas que pour la règle  $\oplus_g$ , l'autre est similaire. On a donc une fonction  $h : \uparrow \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  et qui interprète une preuve de  $\vdash A, \mathcal{N}$ . Et donc

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos} \& \text{isopos}; \text{Id} \& n; \rho; h$$

interprète une preuve de  $\vdash A \oplus B, \mathcal{N}$ . On a aussi une fonction  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket A^\perp \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^\perp$  et une fonction  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket B^\perp \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, B^\perp$ . Et donc

$$\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \& \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g))$$

interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^\perp \& B^\perp$ . Et donc avant élimination de la coupure, on a une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$\begin{aligned}
& \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \& \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g)); (\llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos} \& \text{isopos}; \text{Id} \& n; \rho; h)) \\
& = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \& \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g)); (\text{isopos} \& \text{isopos}; \text{Id} \& n; \rho); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp h \\
& = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \text{Id} \& n; \rho; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f)); \text{isopos}); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp h \\
& = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f)); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; h) \\
& = f; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; h).
\end{aligned}$$

Ce qui est bien l'interprétation de la preuve après élimination de la coupure.

On termine sur les dernières règles du système.

—  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^\perp$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \lambda^{-1}; \chi^{-1}(f)$$

isopos<sup>-1</sup>;  $\uparrow$ isoneg;  $f'$  interprète une preuve de  $\vdash \downarrow P^\perp, \mathcal{M}$ . Supposons que  $g : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors

$$g' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow P^\perp}^{\otimes}; \text{compl}; g),$$

interprète une preuve de  $\vdash \uparrow P, \mathcal{N}$ . Avant l'élimination des coupures, l'interprétation de la preuve est :

$$g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^\perp}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$$

On remarque alors qu'on a la même égalité que pour le cas déréliction/co-déréllection, on peut donc appliquer la fin de la démonstration pour ce cas-ci.

— règle  $ax$ . Si au-dessus de la coupure il y a une règle  $ax$ , et que l'interprétation de la preuve de l'autre séquent est  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket A \rrbracket$ , on interprète la preuve avant élimination par :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; \text{isopos}^{-1}) = f$$

d'où notre résultat. Si l'interprétation de l'autre séquent est  $f : \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , on interprète la preuve après élimination par :

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos}; f = f$$

et on a aussi notre résultat.

— (1) et  $\perp$ . Si au-dessus de la coupure il y a une règle (1), et que l'interprétation de la preuve de l'autre séquent est  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , alors on interprète la preuve avant l'élimination des coupures par :

$$f; \rho^{-1}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; \text{isopos}^{-1}; m) \cong f$$

## C Preuves omises dans le corps du papier

*preuve de la propriété 11.* Montrons d'abord que  $I$  est terminal. Pour cela, il faut montrer que  $n_A$  est le seul morphisme de  $A$  vers  $I$ . Comme  $(A, n, \mathcal{M})$  est un co-monoïde commutatif, on a que  $I \diamond n$  et  $n \diamond I$  ont des inverses à gauche. De même, comme  $(A, u, \nabla)$  est un monoïde commutatif, on a que  $\nabla$  a un inverse à gauche. Par naturalité de  $\nabla$ , on a :

$$\nabla; n_I = n_I \diamond n_I; \nabla$$

Et on peut conclure que  $n_I$  a un inverse à gauche. Par naturalité de  $n_I$ , on a que  $n_I = n_I; n_I$ , et donc  $n_I = \text{Id}$ . Supposons maintenant qu'on a un morphisme  $f$  de  $A$  vers  $I$ . Par naturalité de  $n$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
A & & \\
\downarrow n_A & \searrow f & \\
I & \xleftarrow{n_I (= \text{Id})} & I
\end{array}$$

Et on a donc bien que  $I$  est terminal.

Finissons maintenant de montrer que c'est un produit cartésien. Soit  $f : C \rightarrow A$  et  $g : C \rightarrow B$  deux morphismes. Alors

$$\langle f, g \rangle := \mathcal{M}_C; f \diamond g$$

vérifie bien :

$$\langle f, g \rangle; n \diamond \text{Id}; \lambda^\diamond = g$$

et

$$\langle f, g \rangle; \text{Id} \diamond n; \rho^\diamond = f$$

On utilise à chaque fois le fait que  $(A, n, \mathcal{M})$  est un co-monoïde commutatif. Et on fait de même pour montrer que ce morphisme est unique. Pour montrer que le biproduit est un co-produit, on pourra faire un raisonnement similaire.  $\square$

*preuve de la propriété 29.* On a :

$$\nabla^{\&} = (m_{\uparrow}^{P,P})^{-1}; \uparrow \nabla$$

Pour montrer cela, on remarque que  $\nabla^{\&} = \text{Id} \& \text{Id}; \nabla^{\&}$ . Et que donc en pré-composant le membre droite de l'égalité par  $(\lambda^{\&})^{-1}; u_{\uparrow P}^{\&} \& \text{Id}$  ou par  $(\rho^{\&})^{-1}; \text{Id} \& u_{\uparrow P}^{\&}$  on obtient bien à chaque fois l'identité, comme  $\&$  est un co-produit, on a bien l'égalité. Et donc on a :

$$(m_{\uparrow}^{P,P})^{-1}; ?\nabla; \bar{d} = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \mathcal{E} \circ U(\nabla^{\&}); \bar{d}$$

Puisque  $m_{\uparrow}$  vient de la composition des trois foncteurs monoïdaux forts suivants :  $\mathcal{E}$ ,  $U$  et  $\uparrow$ .

Par naturalité de  $\bar{d}$ , on a :

$$(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \mathcal{E} \circ U(\nabla^{\&}); \bar{d} = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \bar{d}; \nabla^{\&}$$

Et donc pour montrer notre égalité, il suffit de montrer :

$$\Delta^{\&}; (\bar{d} \wp \bar{w}) \& (\bar{w} \wp \bar{d}); \rho^{\wp} \wp \lambda^{\wp} = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \bar{d}$$

Comme  $\&$  est un produit, on a égalité si on a égalité en composant à chaque fois par les deux projections. Faisons donc cela pour le morphisme à gauche de l'égalité :

$$\begin{aligned}
?P \wp ?P &\xrightarrow{\Delta^{\&}} (?P \wp ?P) \& (?P \wp ?P) \xrightarrow{(\bar{d} \wp \bar{w}) \& (\bar{w} \wp \bar{d})} (\uparrow P \wp \perp) \& (\perp \wp \uparrow P) \xrightarrow{\rho^{\wp} \wp \lambda^{\wp}} \uparrow P \& \uparrow P \xrightarrow{n^{\&} \& \text{Id}} J \& \uparrow P \xrightarrow{\lambda^{\&}} \uparrow P \\
&= ?P \wp ?P \xrightarrow{\Delta^{\&}} (?P \wp ?P) \& (?P \wp ?P) \xrightarrow{n^{\&} \& \text{Id}} J \& (?P \wp ?P) \xrightarrow{\lambda^{\&}} ?P \wp ?P \xrightarrow{\bar{w} \wp \bar{d}} \perp \wp \uparrow P \xrightarrow{\lambda^{\wp}} \uparrow P \\
&= \bar{w} \wp \bar{d}; \lambda^{\wp}
\end{aligned}$$

Et pour le morphisme à droite :

$$\begin{aligned}
?P \wp ?P &\xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(\uparrow P \& \uparrow P) \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P \& \uparrow P \xrightarrow{n^{\&} \& \text{Id}} J \& \uparrow P \xrightarrow{\lambda^{\&}} \uparrow P \\
&= ?P \wp ?P \xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(\uparrow P \& \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^{\&} \& \text{Id})} \mathcal{E} \circ U(J \& \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(\lambda^{\&})} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P \\
&= ?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^{\&} \& \text{Id})} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{J, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(J \& \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(\lambda^{\&})} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P
\end{aligned}$$



Or on a :

$$(m_{\mathcal{E} \circ U}^{J,A})^{-1} = m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp Id; \lambda^{\wp}; \mathcal{E} \circ U((\lambda^{\&})^{-1})$$

Et donc le terme d'avant est égal à :

$$?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^{\&}) \wp Id} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp Id} J \& ?P \xrightarrow{\lambda^{\wp}} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P$$

Et par naturalité de  $\lambda^{\wp}$  le terme d'avant est égale à :

$$?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^{\&}) \wp Id} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp Id} J \& ?P \xrightarrow{Id \wp \bar{d}} J \& \uparrow P \xrightarrow{\lambda^{\wp}} \uparrow P$$

Il nous reste donc à prouver que

$$\bar{w} = \mathcal{E} \circ U(n^{\&}); m_{\mathcal{E} \circ U}^0$$

On remarque alors qu'on a :

$$\mathcal{E} \circ U(n_{\uparrow P}^{\&}) = \mathcal{E} \circ U \circ (\uparrow n; m_{\uparrow}^0)$$

Et on peut conclure. Pour montrer qu'on a égalité quand on compose par l'autre projection on raisonne de la même manière. □

*preuve détaillée de l'invariance de la sémantique par élimination des coupures.* □