



HAL
open science

Contrôle Optimal d'un Système Ferroviaire Complet

Karim Kecir

► **To cite this version:**

Karim Kecir. Contrôle Optimal d'un Système Ferroviaire Complet. Systèmes et contrôle [cs.SY]. 2014. hal-02352670

HAL Id: hal-02352670

<https://hal.inria.fr/hal-02352670>

Submitted on 7 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport de Stage
de 2^e année de Master EEA
Spécialité Ingénierie des Systèmes Temps-Réel
Université Toulouse III - Paul Sabatier
Faculté des Sciences et d'Ingénierie
Département Automatique, Électronique et Électrotechnique

**Contrôle Optimal
d'un Système Ferroviaire Complet**

Abd-El-Karim KECIR
Promotion 2013-2014



Stage effectué au sein de l'équipe SUMO
au centre de recherche Inria/IRISA de Rennes
en collaboration avec Alstom
mai – septembre 2014

Responsable pédagogique :
M. Michel COMBACAU

Responsable du stage :
M. Loïc HÉLOUËT

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens, en premier lieu, à exprimer ma sincère gratitude à mon encadrant de stage, M. Loïc HÉLOUËT, pour l'encadrement de qualité qu'il m'a dispensé ainsi que pour sa grande disponibilité, même en période de vacances.

Mes remerciements vont aux membres du jury, M. Michel COMBACAU et Mme Pauline RIBOT, pour avoir bien voulu lire, évaluer et commenter ce travail.

Je remercie l'équipe SUMO pour son accueil et plus particulièrement M. Éric FABRE et, de nouveau, M. Loïc HÉLOUËT pour m'avoir accordé la chance de travailler sur ce sujet.

Que mes enseignants du groupe M2 ASTR trouvent ici l'expression de ma gratitude pour la richesse des enseignements qu'ils m'ont prodigués.

Je souhaite également remercier mes camarades du groupe M2 ASTR pour les agréables moments que j'ai passés en leur compagnie ainsi que pour l'ambiance de travail collectif exceptionnelle que nous avons partagée ensemble cette année.

Mes remerciements particuliers vont à mes amis Adelene YADOUZ, Rafik ADICHE et Yacine BERRANEN pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de cette année.

Enfin, et surtout, à mes parents, Merci.

Table des matières

Remerciements	1
Avant-propos	4
1 Environnement de travail	5
1.1 Inria/IRISA	5
1.2 L'équipe SUMO	5
2 Introduction	6
3 Notions préliminaires	8
4 Étude bibliographique	9
4.1 Réseaux de PETRI	9
4.1.1 Modèle initial	9
4.1.2 Extensions et variantes des RdP	11
4.2 Graphes d'alternatives	13
4.3 Indicateurs clés de performance	16
4.3.1 Régularité du service	16
4.3.2 Disponibilité du service	17
4.3.3 Ponctualité du service	17
4.3.4 Fiabilité du service	18
5 Éléments du modèle	19
5.1 Réseaux de PETRI Temporels Stochastiques	19
5.1.1 Syntaxe d'un RdPTS	19
5.1.2 Sémantique d'un RdPTS	20
5.1.3 Dynamique d'exécution	23
5.2 Tables horaires	27
5.2.1 Dynamique d'exécution	28
5.2.2 Règles sémantiques	30
5.3 Fonctions de régulation	33
5.4 Modèle complet	35
5.4.1 Règles sémantiques	40
6 Prototypage	41
6.1 Tir aléatoire des temps de tir	42
6.2 Simulation	43
7 Conclusion	47
Références	49

Table des figures

1	Tir d'une transition dans un RdP	10
2	Représentation d'une paire d'alternatives	14
3	Exemple de graphe d'alternatives	15
4	Exemple de réseau de PETRI temporel stochastique	20
5	Tir d'une transition dans un RdPTS	21
6	Exemple de fonctions de répartition et de densité	23
7	Cas de plusieurs transitions tirables en même temps	24
8	Exemple de configuration d'une table horaire	29
9	Prédécesseurs et successeurs directs d'un nœud	30
10	Illustration des nœuds à mettre à jour par γ_1	34
11	Position d'arrêt d'un train dans une station	37
12	Places et transitions dans un modèle RdPTS de réseau de métro	38
13	Modélisation d'une contrainte en termes de headway minimal	38
14	Fonctions d'étiquetage et de liaison entre RdP et TH	39
15	Exemple de fonction de densité	43
16	Tir aléatoire à partir d'une fonction de répartition	44
17	Exemple d'une topologie en anneau	45
18	Illustration partielle du RdP modélisant la topologie choisie	46

Avant-propos

Le présent travail rentre dans le cadre du projet P22 mené par l'équipe SUMO d'Inria en collaboration avec Alstom. On s'y intéresse au contrôle optimal d'un grand système ferroviaire. Ceci englobe, entre autres, la gestion des retards sur les arrivées des trains, le réordonnancement de ces derniers en cas de perturbation de la circulation ou encore la modification de leurs itinéraires.

Alstom dispose d'une plateforme de test dite d'intégration et de validation (FIVP, pour *Factory Integration and Validation Platform*). La FIVP permet de faire des simulations d'un système régulé au moyen d'une politique de contrôle préalablement choisie, de le perturber (e.g. retarder un train), etc. Les résultats sont ensuite analysés afin d'évaluer cette politique de régulation. Cette plateforme est identique, dans sa conception, au système réel et est donc fortement fidèle à son comportement mais présente, par cela même, une faiblesse qui consiste en l'importance du temps de simulation. En effet, celui-ci est équivalent au temps d'exécution du système réel, i.e., pour simuler une expérience d'une journée, il faut... une journée !

Le projet P22 est né du besoin d'avoir un moyen plus adéquat permettant d'évaluer des politiques de régulation. Une solution idéale aurait été de pouvoir obtenir un modèle mathématique bien défini qui fournirait des résultats directement à partir d'un ensemble de formules. Toutefois, étant donné la complexité du système, cette piste a rapidement été écartée pour laisser place à l'idée de développer un simulateur simplifié mais beaucoup plus rapide. Il permettrait de simuler plusieurs scénarios de système perturbé régulé avec différentes politiques de régulation et de fournir une évaluation de celles-ci. L'objectif du stage c'est d'arriver à construire un modèle approché qui servirait de base au développement de ce simulateur. Un second objectif est de débiter la construction du simulateur qui se verra évoluer, dans des travaux postérieurs à celui-ci, pour aboutir à un outil complet d'évaluation de politiques de régulation à partir de jeux de simulation.

1 Environnement de travail

1.1 Inria/IRISA

Inria — anciennement connu sous l’acronyme INRIA pour Institut national de recherche en informatique et en automatique — est un établissement public français à caractère scientifique et technologique créé en 1967. Il a pour ambition de mettre en réseau les compétences et talents de l’ensemble du dispositif de recherche français et international, dans ses domaines de compétences. Inria est composé de huit centres de recherche répartis sur tout le territoire français : Bordeaux, Grenoble, Lille, Nancy, Paris, Rennes, Saclay, Sophia Antipolis.

L’Institut de recherche en informatique et systèmes aléatoires (IRISA) est, quant à lui, une unité mixte de recherche (UMR) en informatique, en traitement du signal et des images et en robotique fondée en 1975. Sur la conjonction de ces trois thématiques, l’IRISA se positionne comme le grand laboratoire de recherche en Bretagne avec une présence affirmée sur les campus de Brest, Lannion, Rennes et Vannes. Depuis le 1er Janvier 2012, l’UMR est conventionnée avec 7 établissements tutelles (CNRS, ENS Rennes, Inria, INSA de Rennes, Institut Mines-Télécom, Supélec, Université de Bretagne Sud (UBS), Université de Rennes 1) et un établissement partenaire (Supélec).

Inria dispose d’un statut particulier au sein de l’IRISA et pour toute équipe Inria, l’IRISA prend l’appellation de *centre de recherche Inria Rennes — Bretagne Atlantique*. Le stage s’effectue dans ses locaux, au sein de l’équipe Inria SUMO.

1.2 L’équipe SUMO

L’équipe SUMO (pour *SU*per*vi*sion of large *MO*dular and *di*stributed systems) s’intéresse aux méthodes formelles, et notamment aux systèmes concurrents, pour modéliser, analyser et superviser de grands systèmes répartis (ou modulaires). L’accent est mis sur les aspects quantitatifs de ces modèles : le temps, les probabilités, les coûts, et la combinaison de ces aspects. Elle rassemble des compétences venant des méthodes formelles (modélisation et vérification), des systèmes à événements discrets (théorie du contrôle et du diagnostic), des modèles de la concurrence et du traitement du signal. Les domaines d’application de ses travaux comportent : la gestion des réseaux de télécommunications, la supervision de centres de données, la modélisation et la vérification de services web, ou encore des applications plus spécifiques dans le domaine des systèmes embarqués ou de la bio-informatique.

2 Introduction

Dans un système ferroviaire considéré, sont pris en compte : la topologie des voies, les trains, les systèmes de signalisation, le contrôle de bas niveau — tel que la régulation automatique des vitesses des trains — et les politiques de régulation de haut niveau régies par des opérateurs humains ; à cela doivent s'ajouter les perturbations sous forme d'événements aléatoires qui peuvent altérer le comportement nominal du système. Ces événements incluent les incidents mineurs qui engendrent des retards sur les arrivées des trains, mais aussi les incidents de plus grande importance qui peuvent causer une interruption du service de durée conséquente.

Les départs, arrivées et vitesses des trains sont commandés pour coller à une table horaire prédéfinie. Pour ce faire, des stratégies de contrôle différentes sont applicables en fonction de l'état dans lequel se trouve le système par rapport à la table horaire. Ces stratégies de contrôle peuvent consister en l'absorption de retards mineurs, la modification de la table horaire en fonction des retards ou encore en des décisions plus conséquentes telles que l'injection/l'extraction des trains, le changement de leurs itinéraires ou encore la fermeture partielle d'une ligne.

Ce document vise à présenter un modèle pour les systèmes ferroviaires urbains — et, plus particulièrement, les réseaux de métro — qui permet une représentation du système physique (topologie, trains, etc.) ainsi que de son comportement (dates de réalisation des événements de départ et d'arrivée, retards, etc.) et, en même temps et d'une manière distincte, une représentation de la table horaire à respecter (dates prévues des événements, contraintes temporelles, ordonnancement des trains, etc.). Y figure également un exemple de politique de régulation qui consiste à simplement décaler les dates de départ des trains en fonction des retards, si cela est nécessaire.

La solution proposée est basée sur une approche modulaire et hiérarchique fournissant un modèle simple mais d'un niveau d'abstraction évolutif, i.e., qui devra être augmenté en fonction des besoins rencontrés. Le modèle comporte deux composantes principales : un réseau de PETRI temporel stochastique représentant le système physique et une table horaire construite à partir d'un graphe d'alternatives. L'exécution synchronisée de ces deux composantes couplée à une politique de régulation choisie décrit le comportement du système.

L'intérêt principal de ce modèle est de pouvoir être exploitable à des fins d'évaluation des performances d'une politique de régulation donnée. Évaluer une politique consiste à calculer un certain nombre d'indicateurs clés de performance tels que les retards cumulés des trains, la régularité du service, la densité des passagers, etc. Le but final c'est de décider quelle politique de régulation est la plus adaptée à une situation donnée.

En outre, la dernière partie de ce rapport est consacrée à la présentation d'une ébauche du simulateur développée sous MATLAB. Elle compte principalement l'implémentation d'un réseau de PETRI temporel stochastique tel que défini dans ce document. Chaque exécution du programme est un exemple du comportement stochastique en boucle ouverte d'un réseau de métro de topologie en anneau donné. La partie de régulation ainsi que le développement du simulateur sont prévues pour un travail postérieur à celui-ci et d'une durée qui s'élève, a priori, à trois ans (probablement une thèse de doctorat).

3 Notions préliminaires

Avant toute chose, il est nécessaire d'introduire quelques notions qui se rapportent au domaine du ferroviaire ainsi que quelques précisions.

Dans le contexte de ce travail, quand on parle de systèmes ferroviaires, il s'agit principalement de réseaux de métro. On considère que ceux-ci comportent un ensemble de trains et de tronçons ferroviaires (que l'on appellera *sections*) qui constituent les voies des trains. On s'intéresse d'une manière particulière aux événements d'arrivée et de départ des trains, à leurs dates prévues et à leurs dates d'occurrence effective.

On parlera de *planning* pour désigner l'ensemble de toutes les dates de départ et d'arrivée des trains prévues pour une journée d'exploitation. On utilisera le terme *table horaire* pour désigner le modèle théorique qui regroupe le *planning*, l'ordonnement des trains, leurs chemins, etc. Cette table horaire est calculée de sorte à satisfaire un ensemble de contraintes qui sont définies en fonction des exigences physiques du système, i.e., les vitesses commerciales maximales des trains, le temps de séjour minimum d'un train en station (temps de chargement et de déchargement des passagers), les distances de sécurité entre les trains, etc.

Il existe deux types d'intervalles de sécurité à respecter impérativement : une distance en terme de sections et une distance temporelle (un intervalle de temps) entre chaque deux trains qui se suivent. La contrainte physique dicte qu'il ne faut jamais qu'un train rentre dans une section si celle-ci n'est pas libre¹ ; la contrainte temporelle dicte, quant à elle, qu'il faut absolument qu'un certain temps minimal s'écoule après l'entrée d'un train dans une section pour qu'un autre train puisse y entrer. Cette contrainte est appelée *headway minimal* ; le *headway* étant l'intervalle de temps entre l'entrée de la tête du train dans une section et la sortie de sa queue de la section d'avant, plus une marge additionnelle de sécurité par rapport au train qui le suit. En d'autres mots, c'est la distance entre l'extrémité d'un train et celle du train qui le suit, exprimée en fonction du temps que va prendre le second train à la couvrir.

Au cours de ce travail, une approche modulaire est adoptée dans le choix de modélisation des systèmes ferroviaires. Les composantes du modèle dérivent principalement des modèles théoriques de réseaux de PETRI et de graphes d'alternatives qui sont détaillés dans la section suivante. Les choix de modélisation sont justifiés tout au long de cette partie du document.

1. Il existe d'autres types de contraintes qui prennent en compte les feux de signalisation et les vitesses des trains mais, à des fins de simplification, celles-ci ne sont pas prises en compte dans la version actuelle du modèle proposé au cours de ce travail.

4 Étude bibliographique

Les systèmes ferroviaires peuvent être vus comme de grands systèmes à événements discrets (SED) où les événements sont, entre autres, les départs et les arrivées effectifs des trains, les ordres de départ donnés par le système de régulation automatique ou encore l'occurrence d'incidents.

Les réseaux de PETRI (RdP) ont longtemps été un très bon moyen de modélisation des SED grâce à leur puissance d'expression, leur forme graphique intuitive, leurs bases théoriques, mais aussi parce qu'ils permettent de modéliser les phénomènes de synchronisation et de parallélisme d'une manière aisée et très explicite.

Dans le milieu ferroviaire, plusieurs variantes des RdP ont été utilisées comme moyen de modélisation. On cite : les RdP classiques dans [5], les RdP colorés dans [8] ou encore les graphes d'événements temporisés (une sous classe de RdP) dans [7].

La section suivante est consacrée à une présentation brève de la syntaxe et de la sémantique des réseaux de PETRI.

4.1 Réseaux de PETRI

4.1.1 Modèle initial

Les réseaux de PETRI ont vu le jour avec la thèse de doctorat de C. A. PETRI en 1962 [13] et se sont développés, au fil du temps, grâce aux travaux de plusieurs chercheurs. Un réseau de PETRI est un 6-uplet $\langle P, T, A^-, A^+, L, M_0 \rangle$ où :

- P est un ensemble non vide de *places*. Chaque place est représentée par un cercle et porte habituellement une étiquette qui décrit la condition qu'elle modélise.

On définit le *marquage* d'un RdP comme étant la fonction $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque place un entier positif représentant le nombre de *jetons* (ou de *marques*) dans la place. Un jeton est représenté par un point (ou un disque) à l'intérieur d'une place.

- T est un ensemble non vide de *transitions* tel que $P \cup T = \emptyset$. Chaque transition est représentée par une barre horizontale ou verticale et porte une étiquette qui décrit l'événement qu'elle modélise.
- $A^- \subseteq P \times T$ et $A^+ \subseteq T \times P$ sont des ensembles d'*arcs de flux*. Un arc de flux est représenté par une flèche qui part d'une place vers une transition, si l'arc est un

élément de A^- . Si c'est un élément de A^+ , il est représenté par une flèche qui part d'une transition vers une place.

On désigne par $\bullet t$ (resp. $t\bullet$) l'ensemble de toutes les places en amont (resp. en aval) d'une transition t . $\bullet t$ (resp. $t\bullet$) est dit l'*ensemble de préconditions* (resp. *postconditions*) de la transition t .

- $L : A^- \cup A^+ \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ est une *fonction de flux* qui associe à chaque arc un entier naturel non nul fini. Cette valeur représente le nombre de jetons consommés ou produits par le tir d'une transition. Dans la représentation graphique des RdP, ces valeurs sont représentées sur les arcs. D'une manière exceptionnelle, une valeur n'est pas représentée lorsqu'elle est égale à 1.
- M_0 est le *marquage* initial. Il représente le nombre de jetons dans chaque place à l'état initial du RdP.

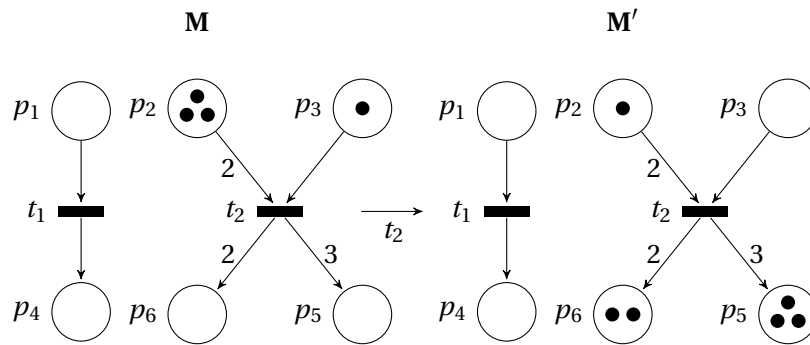


FIGURE 1 – Tir d'une transition dans un RdP

Un *état* du RdP est décrit par un marquage M . Le passage d'un état du RdP vers un autre se fait par le biais du *tir* (ou *franchissement*) d'une transition. Ceci reflète l'occurrence de l'événement qu'elle modélise. Pour qu'une transition t puisse tirer, il faut que chaque place $p \in \bullet t$ contienne au moins $L(p, t)$ jetons; quand c'est le cas, on dit qu'une transition est *activée*. Lorsqu'une transition t est tirée, des jetons sont consommés et/ou créés suivant A^-, A^+ et $L : L(p, t)$ jetons sont consommés de chaque place dans $\bullet t$ et $L(t, p)$ jetons sont créés dans chaque place dans $t\bullet$. Le nouvel état est donc décrit par le marquage M' tel que :

$$\forall p \in P, M'(p) = \begin{cases} M(p) - L(p, t) & \text{si } p \in \bullet t \\ M(p) + L(t, p) & \text{si } p \in t\bullet \\ M(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

4.1.2 Extensions et variantes des RdP

Au fil du temps, un grand nombre d'extensions des RdP a été proposé pour pallier aux limitations en matière d'expressivité des RdP classiques. Parmi celles-ci, on cite :

- Les RdP à arcs inhibiteurs qui dérivent des RdP contextuels présentés dans [12] : c'est des RdP dotés d'un ensemble d'arcs $A^\circ \subseteq P \times T$, dits *inhibiteurs*.

On note par ${}^\circ t$ l'ensemble des places inhibitrices d'une transition t . Il comporte les places liées à la transition t par un arc inhibiteur, i.e., ${}^\circ t = \{p \in P \mid \exists (p, t) \in A^\circ\}$.

Une transition ne peut être activée si, au moins, l'une de ses places inhibitrices $p \in {}^\circ t$ contient au moins un jeton. (Des définitions plus générales existent mais on se contentera de celle-ci.)

Les arcs inhibiteurs servent à modéliser le fait qu'un événement ne puisse se réaliser que si une condition n'est pas satisfaite. Dans le contexte du ferroviaire, cela pourrait servir pour représenter le fait qu'un train ne puisse rentrer dans un tronçon ferroviaire que si celui-ci n'est pas déjà occupé.

- Les RdP temporisés et temporels : cette branche des RdP introduit explicitement la notion du temps. Le passage d'un état du RdP vers un autre se fait en respect de certaines contraintes temporelles. Ces contraintes peuvent être attachées aux places, aux transitions ou aux arcs comme dans les modèles présentés respectivement dans [9], [2] et [4].

Les modèles temporels les plus utilisés sont ceux des RdP T-temporels (abrégé en RdPT) [11]. Ce sont les modèles où les temporisations sont représentées sur les transitions. Un RdPT est un RdP muni d'une fonction $I_s : T \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{Q}_{\geq 0})$ qui associe à chaque transition un intervalle de tir. Si l'on note $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle $I_s(t)$ associé à la transition t , celle-ci doit rester activée pendant au moins $\alpha(t)$ et au plus $\beta(t)$ unités de temps avant de pouvoir être tirée.

- Les RdP stochastiques (RdPS) : cette branche des RdP introduit l'indéterminisme. Un RdPS est un RdP classique muni d'une fonction $\Lambda : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ qui associe à chaque transition un taux. Le temps de tir de chaque transition suit une loi exponentielle. Si l'on note ζ_i la variable aléatoire définissant le temps de tir de la transition t_i , alors ζ_i est de fonction de répartition $F_{\zeta_i}(x) = 1 - e^{-\Lambda(t_i).x}$.

Dans un RdPS, au moment où une transition t_i est activée, son temps de tir est échantillonné aléatoirement à partir de la fonction de répartition F_{ζ_i} . Il est ensuite décrémenté avec le passage du temps jusqu'à ce qu'il atteigne 0. À

ce moment-là, la transition peut être tirée. Lorsque plusieurs transitions ont un temps de tir nul au même instant, la transition t à être tirée en premier est choisie avec une probabilité égale à $\Lambda(t) / \sum_{t_i \in \text{act}(M)} \Lambda(t_i)$ où $\text{act}(M)$ est l'ensemble des transitions activées par le marquage M .

Une extension des RdPS sont les réseaux de PETRI stochastiques généralisés (RdPSG) [10]. Dans cette variante, l'ensemble des transitions est composé de transitions à temps de tir aléatoire et de transitions discrètes qui tirent dès qu'elles sont activées. Quand plusieurs transitions discrètes sont tirables en même temps, le choix de la transition à tirer se fait avec une probabilité dépendant des poids de ces transitions ; chaque transition ayant un poids prédéfini.

- Les RdP temporels stochastiques (RdPTS) : ce modèle, proposé par A. Horváth et al. [6], est une extension qui nous intéresse particulièrement. Elle introduit les fonctions $\underline{T} : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $\overline{T} : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ qui, respectivement, associent à chaque transition un temps de tir au plus tôt et un temps de tir au plus tard ; ainsi qu'une fonction $\mathcal{F} : T \rightarrow \Sigma_{\mathcal{F}}$ qui associe à chaque transition t une fonction de répartition $\mathcal{F}(t)$ notée F_t et définie sur l'intervalle $[\underline{T}(t), \overline{T}(t)]$.

Lorsqu'une transition t est activée, un temps de tir est échantillonné à partir de la fonction de répartition F_t y étant attachée. Cette valeur est décrémentée au fil du temps et, quand elle atteint 0, la transition peut être tirée. De la même manière que dans les RdPSG, à chaque transition est associé un poids qui sert à déterminer quelle transition tirer en premier lorsque plusieurs transitions peuvent tirer au même instant.

Cette variante est particulièrement intéressante car elle permet non seulement de modéliser les contraintes minimales et maximales des opérations :

- contrainte sur la vitesse : un train ne peut faire moins de x unités de temps pour parcourir un tronçon ferroviaire ;
- contrainte sur le temps de séjour : un train ne peut rester en station plus de x unités de temps ;
- contrainte sur l'intervalle de passage de deux trains par le même point.

mais aussi de modéliser finement l'imprécision sur l'occurrence des événements de départ et d'arrivée des trains grâce aux fonctions de répartition.

Au cours de ce travail, une version légèrement modifiée de ce modèle de RdP est reprise ; elle est présentée dans une partie ultérieure du document.

D'une manière plus générale, la modélisation par réseaux de PETRI reprend fidèlement la topologie du système réel. Intuitivement, il est très facile de faire l'analogie

entre le système réel et le RdP. En effet, les places et les arcs forment un graphe qui est quasiment isomorphe au réseau ferroviaire modélisé. C'est un autre point qui a influencé le choix de prendre un modèle à base de RdP. Un inconvénient réside, toutefois, dans le fait qu'il n'est pas possible (ou très compliqué) de prendre en compte des politiques de régulation différentes qui régissent le comportement du système. De plus, dans les modèles de type RdPTS, il n'est pas possible de recalculer un temps de tir d'une transition une fois celui-ci défini. Ceci rend la reprogrammation du RdP, a priori, impossible en cas d'occurrence d'un événement à une date tardive qui impose un recalcul d'un nouveau planning pour les trains. Pour ces raisons, on a décidé de définir une partie distincte du modèle qui modélise la table horaire et sur laquelle il est possible d'appliquer une politique de régulation donnée afin de commander le système. Intuitivement, le système non régulé est modélisé au moyen d'un RdPTS et la table horaire modélise le planning des dates de départ et d'arrivée des trains de/aux stations.

On présente, dans la section suivante, le modèle des graphes d'alternatives pour les systèmes ferroviaires proposé par A. D'Ariano et al. dans [3]. Le modèle des tables horaires dérive directement de ce dernier.

4.2 Graphes d'alternatives

Les graphes d'alternatives sont un moyen utilisé pour résoudre les problèmes d'ordonnancement d'atelier à acheminements multiples (*job shop scheduling*). A D'Ariano et al. utilisent les graphes d'alternatives pour modéliser et résoudre les problèmes d'ordonnancement des trains qui pourraient survenir suite à des incidents qui causent des retards sur les arrivées des trains (typiquement deux trains qui arrivent dans un même intervalle de temps à un point d'embranchement).

Un graphe d'alternatives est un 4-uplet $\mathcal{G} = \langle N, F, A, \Lambda \rangle$ où

- N est un ensemble de nœuds. Chaque nœud est représenté par un cercle et modélise une opération qui peut être le déplacement d'un train d'un tronçon vers un autre ou son séjour dans une station. Cet ensemble comporte également deux nœuds particuliers n_s et n_f que l'on représente par des triangles et qui désignent respectivement le début et la fin du planning (ou de la partie du planning considéré) ;
- F est un ensemble d'arcs fixes. Un arc est une paire de nœuds $(n_i, n_j) \in N^2$. Il représente l'existence d'une contrainte temporelle entre le début de l'opération n_i et celui de l'opération n_j . Les arcs fixes représentent des contraintes qui doivent impérativement être prises en compte et qui sont toujours valables (e.g. le temps de course minimal que fait un train pour parcourir un tronçon

ferroviaire, le temps de séjour minimal d'un train dans une station, etc.). Dans un graphe d'alternatives, les arcs fixes sont représentés par des flèches d'un trait solide ;

- A est un ensemble de paires d'arcs alternatifs. Un arc alternatif est un arc qui indique une éventuelle priorité d'un événement sur un autre ; les deux événements impliquant deux trains différents. Les arcs alternatifs viennent toujours par paire et les contraintes représentées par ces arcs sont mutuellement exclusives. Les arcs alternatifs sont représentés par des flèches en trait pointillé. Dans la figure 2, soit l'événement représenté par n_{1e2} précède celui représenté par n_{2e1} , soit l'événement représenté par n_{2e2} précède celui représenté par n_{1e1} mais jamais les deux en même temps car cela créerait une boucle qui ne permet pas de trouver un ordonnancement des événements satisfaisant toutes les contraintes imposées par les arcs ;

Dans ce qui suit, on désigne par E , l'ensemble de tous les arcs du graphe d'alternatives (arcs fixes dans N et arcs alternatifs dans les paires de A) défini par :

$$e_{ij} \in E \iff \begin{cases} e_{ij} \in F \\ \vee \exists (e_{kl}, e_{ij}) \in A \\ \vee \exists (e_{ij}, e_{kl}) \in A \end{cases}$$

À des fins de simplification des notations, on écrira e_{ij} pour désigner tout arc (n_j, n_i) .

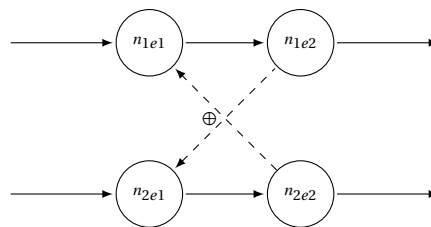


FIGURE 2 – Représentation d'une paire d'alternatives

- $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ est une fonction qui associe à chaque arc un nombre rationnel strictement positif fini représentant une contrainte temporelle.

Encore une fois, pour simplifier les notations, on écrira $\lambda_{ij} = \Lambda(e_{ij})$ pour désigner la contrainte de temps entre les événements représentés par les nœuds n_i et n_j .

Les contraintes de temps sur les arcs fixes représentent les temps de séjour et les temps de courses minimaux des trains tandis que les contraintes sur les arcs alternatifs représentent les *headways* entre les trains.

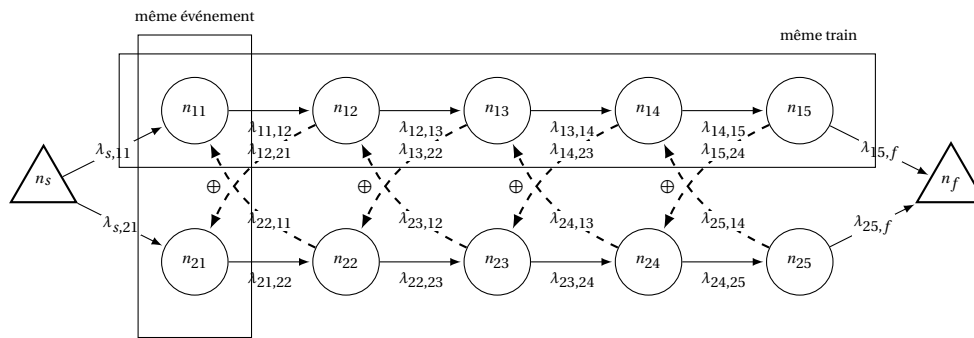


FIGURE 3 – Exemple de graphe d’alternatives

On désigne par *conflit*, le cas où deux ou plusieurs trains demandent à rentrer dans un même tronçon ferroviaire à un moment donné. La résolution des conflits dans [3] se fait au moyen d’un algorithme par séparation et évaluation (*branch and bound*). Cet algorithme essaye de retrouver une solution, i.e., un ordonnancement des trains en minimisant le retard maximum possible.

Une *solution* est un graphe $\mathcal{G}(S) = \langle N, F \cup S, \Lambda \rangle$ où S est une *sélection* d’arcs alternatifs. Une sélection S est un ensemble d’arcs qui contient au plus un élément de chaque paire dans A . Une sélection est dite *complète* si elle comporte un et un seul arc de toutes les paires d’arcs dans A . Une sélection est dite *consistante* si la solution $\mathcal{G}(S)$ construite à partir de cette sélection ne contient pas de cycle ; un cycle impliquant l’existence de contraintes contradictoires. La résolution d’un conflit consiste donc à retrouver une sélection complète et consistante.

Dans le contexte du ferroviaire où un graphe représente des trajectoires possibles de trains et les contraintes de temps (durée de déplacement, temps de stationnement) et de sécurité (headway obligatoire), une solution donne un planning faisable au plus tôt. À partir de ce planning il est possible de déduire une table horaire mais si l’on prend les dates au plus tôt, cette table horaire ne sera jamais robuste, i.e., il faudrait la recalculer dès que le moindre retard a lieu. C’est pourquoi, la table horaire est calculée à partir du planning en prenant des temps tampons (des marges temporelles). Lorsqu’un train arrive en retard à une station, par exemple, il suffit de déduire ce retard de la marge sur son temps de séjour en station pour ne pas avoir à recalculer une nouvelle date de départ qui aura pour conséquence de décaler toutes les dates des trains qui le suivent.

Les référents théoriques étant définis, il faut rappeler que l’objectif derrière la construction de ce modèle c’est d’arriver à évaluer des politiques de régulation afin de voir si celles-ci améliorent l’exploitation des systèmes ferroviaires et de les comparer. Une manière de procéder consiste à faire des jeux de simulation et de voir si les résultats satisfont des critères prédéfinis. Nous avons décidé de prendre pour critères un

ensemble d'indicateurs clés de performance (KPI, pour *Key Performance Indicators*) préconisés par L'Union internationale des transports publics (UITP) [1]. La section suivante est consacrée à la présentation de ces KPI.

4.3 Indicateurs clés de performance

Les KPI sont, comme souligné précédemment, des mesures qui permettent de juger de la performance d'un système ferroviaire. L'UITP exhorte tout exploitant de système ferroviaire à considérer les KPI suivants :

4.3.1 Régularité du service

Il y a deux manières de mesurer la régularité du service : le temps d'attente des passagers et le headway. Le temps d'attente est la mesure recommandée car elle reflète ce que ressentent les passagers. Le headway reflète, quant à lui, les performances réelles du système qui ne collent pas forcément avec le ressenti des passagers.

Temps d'attente

Ce KPI mesure le pourcentage des passagers qui ont dû attendre plus de x minutes dans des stations spécifiques. x peut également être exprimé en pourcentage de headway. La valeur de x varie en fonction de la période de la journée (heure de pointe, soir, etc.) et du type de jour (weekend, jour férié, etc.). Les incidents de "force majeure" ne doivent pas être inclus dans le calcul de ce KPI.

Si l'on considère que le taux d'arrivée des passagers est linéaire entre les trains, ce KPI se calcule avec le formule suivante :

$$\text{régularité du service} = \frac{\text{facteur de pondération} \times \text{temps d'attente maximal acceptable}}{\text{headway par rapport au métro précédent}}$$

Headway

Ce KPI mesure le pourcentage des départs des trains qui ont été effectués conformément aux headways planifiés. Une marge d'erreur de x minutes est prise en compte où x varie généralement entre -1.5min et 5min .

régularité du service =

$$\frac{\text{nombre de départs de stations données ayant respecté les headways planifiés avec une marge de } x \text{ minutes}}{\text{nombre total de départs de ces stations}}$$

4.3.2 Disponibilité du service

Cet indicateur mesure le pourcentage de la distance totale parcourue par tous les trains par rapport à celle planifiée. Il permet de vérifier le respect de l'engagement du fournisseur de service en cette matière.

disponibilité du service =

$$\frac{\text{voiture-km produits}}{\text{production en voiture-km prévue}}$$

N.B. La notion de voiture-km désigne le nombre de trains sur un réseau ferroviaire donné multiplié par la longueur moyenne de leurs trajets en kilomètres.

4.3.3 Ponctualité du service

Cet indicateur dépend de la fréquence du service et est défini de deux manières différentes en fonction de celle-ci.

Services à haute fréquence

Dans les cas des services où l'intervalle entre deux passages de trains par une station est court, comparer la date d'arrivée effective d'un train par rapport à celle planifiée n'est pas significatif. Ce qui importe le plus pour les passagers, c'est la durée totale du trajet. Ce KPI mesure donc le pourcentage de trains dont le trajet complet a été retardé de moins de x minutes.

ponctualité du service =

$$\frac{\text{nombre de voyages retardés de moins de } x \text{ minutes}}{\text{nombre de voyages total}}$$

Services à basse fréquence

Pour les services à basse fréquence de passage des trains, il est recommandé de considérer l'adhérence à la table horaire. Ce KPI mesure le pourcentage d'arrivées tardives à des stations spécifiques à x minutes près.

ponctualité du service =

$$\frac{\text{nombre de trains arrivant à des stations spécifiques avec moins de } x \text{ minutes de retard}}{\text{nombre d'arrivées totales à ces stations}}$$

4.3.4 Fiabilité du service

Cet indicateur mesure la distance en kilomètres entre deux missions annulées ou des trains retardés de plus de x minutes à cause d'une panne matérielle ou humaine.

fiabilité du service =

$$\frac{\text{voiture-km produits}}{\text{nombre total des pannes engendrant l'annulation d'une mission ou des retards supérieurs à } x \text{ minutes}}$$

5 Éléments du modèle

Comme indiqué précédemment, les modèles classiques ne permettent pas de modéliser des stratégies de régulation, la reprogrammation de départs de trains, etc. Nous proposons un modèle composé d'une partie réseau de PETRI, d'une table horaire, et d'une politique de régulation. La simulation synchronisée de ces éléments permet de définir un modèle de systèmes ferroviaires équipé d'une politique de régulation.

5.1 Réseaux de PETRI Temporels Stochastiques

Dans notre modèle, le comportement réel du système est décrit par un réseau de PETRI temporel stochastique (RdPTS).

À des fins d'abréviations, on reprendra souvent, dans le restant du document, l'expression réseau(x) de PETRI (resp. RdP) pour parler de réseau(x) de PETRI temporel(s) stochastique(s) (resp. RdPTS).

5.1.1 Syntaxe d'un RdPTS

Definition 1. Un RdPTS est un 10-uplet $RdPTS = \langle P, T, A^-, A^+, A^\circ, M_0, \underline{T}, \overline{T}, \mathcal{F}, \mathcal{W} \rangle$ où

- P, T, A^-, A^+, A° et M_0 sont les composantes d'un RdP à arcs inhibiteurs tels que défini dans la section 4.1.

À des fins de simplification, tous les arcs ont une multiplicité de 1 (pas de fonction de flux, uniquement des ensembles d'arcs de flux). On rajoute également la condition que les arcs inhibiteurs et les arcs de flux soient toujours mutuellement exclusifs, i.e., un arc (p, t) est soit dans A° ou dans A^- mais jamais dans les deux en même temps ;

- $\underline{T} : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ est une fonction qui associe à chaque transition un nombre rationnel positif fini représentant son temps de tir au plus tôt ;
- $\overline{T} : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ est une fonction qui associe à chaque transition un nombre rationnel positif représentant son temps de tir au plus tard ;
- $\mathcal{F} : T \rightarrow \Sigma_{\mathcal{F}}$ est une fonction qui associe à chaque transition une fonction de répartition (fonction de distribution cumulative). Pour chaque transition $t \in T$, on note par $F_t \triangleq \mathcal{F}(t)$ la fonction de répartition y étant associée ;

N.B. $\Sigma_{\mathcal{F}}$ dénote l'ensemble des fonctions de répartition ;

- $\mathcal{W} : T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction qui associe à chaque transition un poids. Ces poids permettent de déterminer quelle transition tirer en premier quand plusieurs transitions sont tirables au même instant.

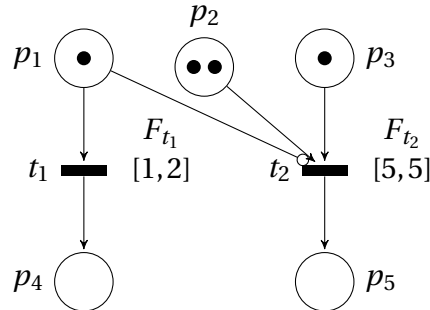


FIGURE 4 – Exemple de réseau de PETRI temporel stochastique

La figure 4 est un exemple de réseau de PETRI temporel stochastique. Ici, la transition t_2 ne peut pas être tirée car elle est liée à p_1 avec un arc inhibiteur et p_1 contient un jeton. C'est donc la transition t_1 qui peut être tirée après être restée activée pendant une durée dans l'intervalle lui étant associé ([1, 2]). Cette durée est échantillonnée depuis la fonction de répartition y étant associée. L'opération de tir d'une transition ainsi que la sémantique d'un RdPTS en général sont détaillés dans la section suivante.

N.B. On remarque dans la figure 4 que la transition t_2 a un intervalle de temps de tir au plus tôt et au plus tard similaires $\underline{T}(t_2) = \overline{T}(t_2) = 5$. Cette transition est dite *déterministe* et a, par convention, une fonction de Dirac pour fonction de densité de probabilités. Intuitivement, son temps de tir est toujours égal à la valeur aux limites de l'intervalle, (ici 5).

5.1.2 Sémantique d'un RdPTS

Definition 2. Une transition t est *activée* par un marquage M si et seulement si toutes les places de son ensemble de préconditions sont marquées (contiennent au moins un jeton) et toutes ses places inhibitrices ne le sont pas. On note $\text{act}(M)$ le sous-ensemble de transitions activées par le marquage M défini par :

$$\text{act}(M) = \{t \in T \mid \forall p \in \bullet t, M(p) > 0 \wedge \forall p' \in \circ t, M(p') = 0\}$$

Definition 3. Le *tir* d'une transition t est une opération qui permet de faire évoluer le marquage d'un RdP. Elle se fait en deux étapes :

- D'abord, on consomme des jetons de l'ensemble de préconditions $\bullet t$ de la transition t à tirer, pour passer du marquage M à un marquage temporaire

M_{tmp} défini par :

$$\forall p \in P, M_{\text{tmp}}(p) = \begin{cases} M(p) - 1 & \text{si } p \in \bullet t \\ M(p) & \text{sinon ;} \end{cases}$$

- Ensuite, on produit des jetons dans son ensemble de postconditions t^\bullet pour passer du marquage temporaire M_{tmp} à un nouveau marquage M' défini par :

$$\forall p \in P, M'(p) = \begin{cases} M_{\text{tmp}}(p) + 1 & \text{si } p \in t^\bullet \\ M_{\text{tmp}}(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

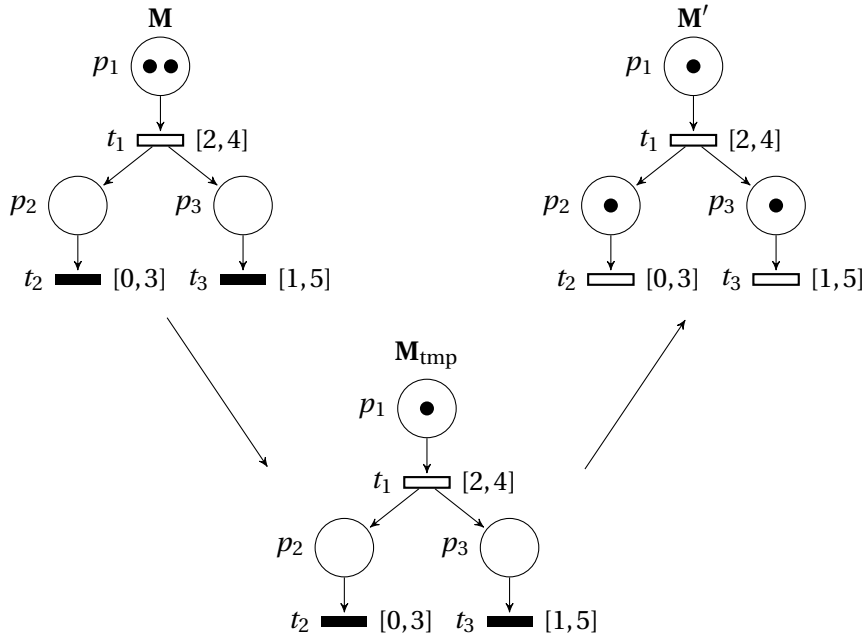


FIGURE 5 – Tir d'une transition dans un RdPTS

Definition 4. On note par $\text{prs}(M, t)$ l'ensemble des transitions *persistantes*, i.e., les transitions qui étaient activées par le marquage M et qui le sont aussi par le marquage M_{tmp} . Ce sont les transitions qui sont restées activées pendant l'opération de tir. De cet ensemble, on exclut toujours la transition tirée t qui n'est jamais considérée comme persistante.

$$\text{prs}(M, t) = (\text{act}(M) \cap \text{act}(M_{\text{tmp}})) \setminus \{t\}$$

On remarque que $\text{prs}(M, t) = \text{act}(M_{\text{tmp}}) \setminus \{t\}$ car $\text{act}(M_{\text{tmp}}) \subseteq \text{act}(M)$.

Definition 5. On note par $\text{nvl}(M, t)$ l'ensemble des transitions *nouvellement activées* par le tir de la transition t , i.e., les transitions qui n'étaient pas activées par le marquage M_{tmp} et qui le sont par le marquage M' . Si la transition t est activée par le marquage M_{tmp} , alors on considère, par convention, que t est par défaut incluse dans l'ensemble des transitions nouvellement activées. (D'autres sémantiques adoptent d'autres conventions.)

Cet ensemble inclut également la transition t si toutes ses places en amont comportaient plus d'un jeton et que son tir l'ait donc réactivée.

$$\text{nvl}(M, t) = \text{act}(M') \cap (\{t\} \cup (T \setminus \text{act}(M_{\text{tmp}})))$$

La figure 3 illustre les étapes du tir d'une transition (t_1 dans l'exemple). Les transitions représentées par des rectangles vides (à remplissage blanc) sont les transitions activées par le marquage. On remarque que la transition tirée reste activée pendant toute l'opération de tir et pourtant on ne la considère pas comme persistante. Ceci est dû à la perte du jeton qui l'activait dans le marquage M lors du passage au marquage M_{tmp} . Il faut imaginer qu'elle est immédiatement réactivée par le second jeton.

Definition 6. La fonction \mathcal{F} est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : T &\rightarrow \Sigma_{\mathcal{F}} \\ t &\mapsto F_t \triangleq \mathcal{F}(t) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_t : [\underline{T}(t), \overline{T}(t)] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F_t(x) = \int_0^x f_t(y) dy \end{aligned}$$

Intuitivement, F_t décrit la probabilité pour qu'un certain temps s'écoule, après que la transition t soit nouvellement activée, pour pouvoir tirer t . Cette durée doit se situer entre $\underline{T}(t)$ et $\overline{T}(t)$ unités de temps, i.e., pour toute densité de probabilité f_t associée à une fonction de répartition F_t d'une même variable aléatoire de temps de tir d'une transition t , on a :

$$\int_{\underline{T}(t)}^{\overline{T}(t)} f_t(y) dy = 1$$

N.B. L'indice t fait référence à la transition à laquelle est attachée la densité de probabilité f_t (et à la fonction de répartition F_t). Cette notation n'est pas à interpréter comme t étant la variable aléatoire continue de densité de probabilité f_t et de fonction de répartition F_t .

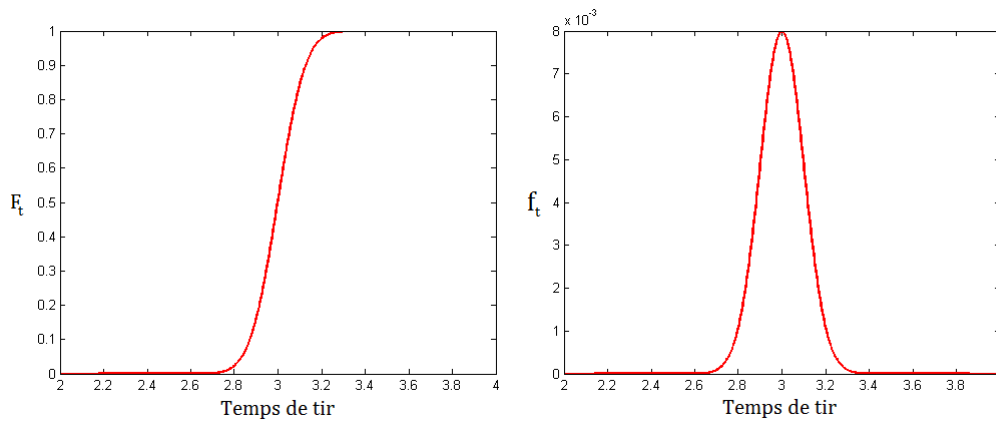


FIGURE 6 – Exemple de fonctions de répartition et de densité

Les RdPTS décrivent des comportements aléatoires et dépendant du temps. Leur sémantique n'est donc plus exprimée en termes d'évolution de marquages, mais en termes de changements de configurations. Une configuration d'un RdP mémorise l'état du réseau (un marquage de ses places), ainsi que le temps restant avant l'éventuel tir de chaque transition activée. La section suivante décrit le comportement dynamique d'un RdPTS.

5.1.3 Dynamique d'exécution

Definition 7. Une *configuration* (un *état*) d'un RdP est un couple $\mathcal{C}_N = \langle M, \tau \rangle$ dans lequel

- M est un marquage du RdP ;
- $\tau : \text{act}(M) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction qui associe à chaque transition t_i , activée par le marquage M , une valeur réelle positive notée $\tau_i \triangleq \tau(t_i)$ qui représente le temps restant pour pouvoir tirer la transition t_i .

La sémantique d'un RdP est définie telle que le passage d'une configuration d'un RdP vers une autre se fait soit à travers un mouvement temporel (écoulement du temps), soit via un mouvement discret (tir d'une transition).

Mouvement temporel

Un mouvement temporel s'effectue à travers l'écoulement d'une durée de temps δ . Il permet le passage d'une configuration $\mathcal{C}_N = \langle M, \tau \rangle$ vers une autre configuration $\mathcal{C}'_N = \langle M, \tau' \rangle$.

Le durée δ doit être strictement positive et inférieure aux temps de tir de toutes les transitions activées dans la configuration. Dans la nouvelle configuration atteinte à partir d'un mouvement temporel, les temps de tir de toutes les transitions activées sont donc diminués de la durée δ qui s'est écoulée. Formellement, ceci peut s'écrire comme :

$$\frac{\delta \in \mathbb{R}_{>0} \wedge \forall t \in \text{act}(M), 0 \leq \tau'(t) = \tau(t) - \delta}{\langle M, \tau \rangle \xrightarrow{\delta} \langle M, \tau' \rangle}$$

Mouvement discret

Un mouvement discret s'effectue à travers le tir d'une transition t . Il permet le passage d'une configuration $\mathcal{C}_N = \langle M, \tau \rangle$ à une autre configuration $\mathcal{C}'_N = \langle M', \tau' \rangle$.

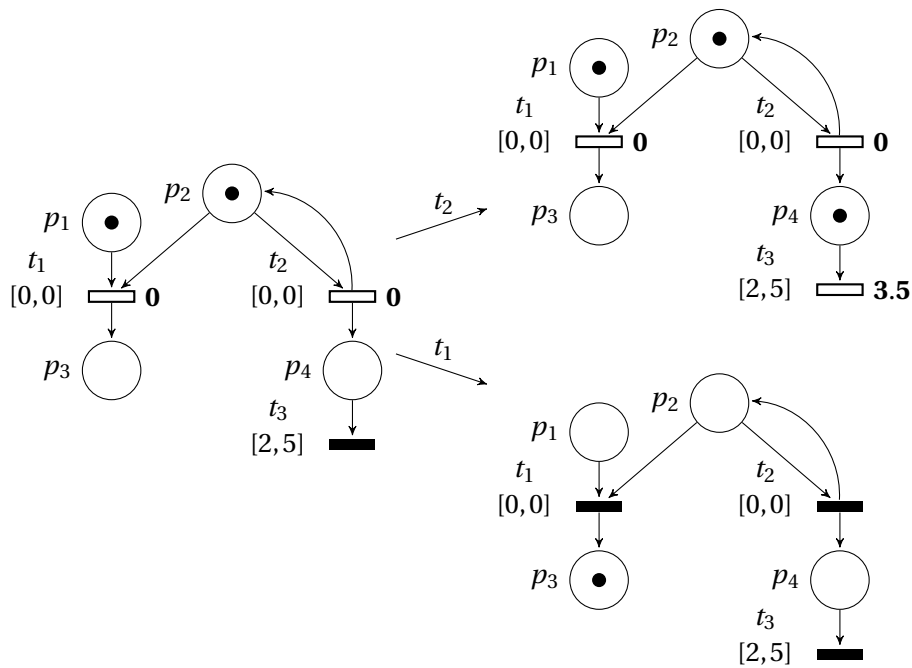


FIGURE 7 – Cas de plusieurs transitions tirables en même temps

Definition 8. Une transition t est *tirable* (ou *franchissable*) dans une configuration \mathcal{C}_N si elle est activée par le marquage M de la configuration et que son temps de tir $\tau(t)$ est égal à 0.

On note par $\text{tir}(\mathcal{C}_N)$ l'ensemble des transitions tirables dans une configuration \mathcal{C}_N .

Lorsque plusieurs transitions sont tirables au même instant, le choix de la transition à tirer se fait aléatoirement parmi les transitions de l'ensemble $\text{tir}(\mathcal{C}_N)$ avec une probabilité qui dépend des poids $\mathcal{W}(t_i)$ de toutes les transitions de cet ensemble $t_i \in \text{tir}(\mathcal{C}_N)$. Si l'on note par t_{sel} la transition à tirer, cette probabilité se calcule avec la formule suivante :

$$\forall t \in \text{tir}(\mathcal{C}_N), \text{Prob}(t_{\text{sel}} = t) = \frac{\mathcal{W}(t)}{\sum_{t_i \in \text{tir}(\mathcal{C}_N)} \mathcal{W}(t_i)}$$

Une fois la transition à tirer choisie, elle est tirée. Ceci conduit vers une nouvelle configuration $\mathcal{C}'_N = \langle M', \tau' \rangle$. Le marquage M' se déduit en appliquant la règle de tir explicitée dans la définition 3. La nouvelle fonction d'affectation des temps de tirs τ' a pour domaine le nouvel ensemble $\text{act}(M')$ des transitions activées par le nouveau marquage M' . Les transitions persistantes gardent leur ancien temps alors que l'on affecte aux transitions nouvellement activées un nouveau temps de tir échantillonné à partir de leurs fonctions de répartition respectives.

N.B. Le fait que plusieurs transitions soient tirables en même temps ne signifie pas forcément qu'elles vont toutes être tirées. Dans la figure 7, les transitions activées sont représentées par un rectangle vide et les temps de tir à droite des transitions. On peut voir qu'en tirant la transition t_1 , par exemple, t_2 n'est plus activée et donc plus tirable.

Definition 9. On définit $\text{éch} : \Sigma_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ comme étant une fonction qui permet de choisir aléatoirement une valeur suivant la loi de probabilité donnée par la fonction de répartition F_t . La valeur renvoyée $\zeta_t \triangleq \text{éch}(F_t)$ correspond au nouveau temps de tir de la transition t à laquelle est attachée F_t . ζ_t se situe toujours entre $\underline{T}(t)$ et $\overline{T}(t)$ avec une probabilité définie par F_t .

$$\forall x \in [\underline{T}(t), \overline{T}(t)], \text{Prob}(\zeta_t < x) = F_t(x)$$

Les temps de tir des transitions activées par M' sont donc décrits par :

$$\forall t \in \text{act}(M'), \tau'(t) = \begin{cases} \tau(t) & \text{si } t \in \text{prs}(M, t) \\ \text{éch}(F_t) & \text{sinon (si } t \in \text{nl}(M, t)) \end{cases}$$

La règle sémantique qui regroupe les conditions nécessaires pour effectuer un mouve-

ment discret dans un RdPTS peut alors s'écrire comme :

$$\begin{array}{l}
 \forall p \in P, M_{\text{tmp}}(p) = \begin{cases} M(p) - 1 & \text{si } p \in \bullet t \\ M(p) & \text{sinon} \end{cases} \\
 \wedge \quad M'(p) = \begin{cases} M_{\text{tmp}}(p) + 1 & \text{si } p \in t \bullet \\ M_{\text{tmp}}(p) & \text{sinon} \end{cases} \\
 \wedge \quad \forall t \in \text{act}(M'), \tau'(t) = \begin{cases} \text{éch}(F_t) & \text{si } t \in \text{nvl}(M, t) \\ \tau(t) & \text{sinon (si } t \in \text{prs}(M, t)) \end{cases} \\
 \hline
 \langle M, \tau \rangle \xrightarrow{t} \langle M', \tau' \rangle
 \end{array}$$

Les deux règles ci-dessus permettent l'écoulement du temps, et le tir probabilisé d'une transition, symbolisant un événement dans un réseau ferroviaire. Par la suite, nous aurons besoin de faire apparaître des consignes de départ, lancées en fonction des horaires prévus dans une table horaire. Ceci se modélise par l'ajout spontané de jetons dans des places qui conduit à un changement contextuel du marquage du RdP.

Changement contextuel de marquage

Ce type de mouvement particulier ne dépend pas des éléments du RdP (transitions activées, tirables, temps de tirs, etc.) mais provient d'une entité de commande externe à celui-ci. Ce contrôleur est, dans notre cas, la table horaire.

L'injection d'un jeton dans une place s'effectue quand la date de départ d'un train depuis une station particulière est atteinte. Elle correspond à un ordre de départ donné à ce train-ci. Cette partie sera détaillée ultérieurement.

Nous nous contenterons ici de présenter la règle sémantique qui définit un changement contextuel de marquage dû à l'injection d'un jeton. Pour ce faire, on a besoin de redéfinir les notions de transitions persistantes et nouvellement activées suite à un tel mouvement.

Definition 10. Soit M et M' deux marquages d'un même RdP. Une transition t est dite persistante suite à un changement contextuel de marquage depuis M vers M' si t est activée par les deux marquages. L'ensemble des transitions persistantes est, dans ce cas, défini comme :

$$\text{prs}(M, M') = \text{act}(M') \cap \text{act}(M)$$

Une transition t est dite nouvellement activée suite à un changement contextuel de marquage depuis M vers M' si t est activée par le marquage M' mais pas par M . L'ensemble des transitions nouvellement activées est, ici, défini comme :

$$\text{nvl}(M, M') = \text{act}(M') \setminus \text{act}(M)$$

Un changement contextuel de marquage conduit également à un changement éventuel dans les dates de tir des transitions. Les transitions persistantes parmi les transitions activées par le nouveau marquage gardent leurs temps de tir alors que les transitions nouvellement activées obtiennent un nouveau temps de tir échantillonné à partir de leurs fonctions de répartition respectives.

Si l'on note par p_{inj} la place où le jeton est injecté, la règle sémantique qui définit un changement contextuel de marquage s'écrit donc comme :

$$\frac{\forall p \in P, M'(p) = \begin{cases} M(p) + 1 & \text{si } p = p_{\text{inj}} \\ M(p) & \text{sinon} \end{cases} \quad \wedge \quad \forall t \in \text{act}(M'), \tau'(t) = \begin{cases} \text{éch}(F_t) & \text{si } t \in \text{nlv}(M, M') \\ \tau(t) & \text{sinon (si } t \in \text{prs}(M, M')) \end{cases}}{\langle M, \tau \rangle \xrightarrow{p_{\text{inj}}} \langle M', \tau' \rangle}$$

La composante RdP du modèle étant bien définie, on passe maintenant à la présentation de la seconde composante qui est la table horaire.

5.2 Tables horaires

Une table horaire modélise une entité de supervision et de commande régie par un planning, i.e., un ensemble de dates de départ et d'arrivée prédéfinies. La définition de ce qu'est une table horaire repose essentiellement sur celle des graphes d'alternatives.

Dans la partie restante du document, on redéfinit un graphe d'alternatives comme étant le 4-uplet $\mathcal{G} = \langle N, F, A, \Lambda \rangle$ où :

- N est composé uniquement de deux sous-ensembles de nœuds de départ Nd et d'arrivée Na ; $N = Nd \cup Na$. Un nœud représente un événement et non une opération.

On notera souvent n_{idj} (resp. n_{iaj}) pour décrire le nœud qui correspond à l'événement de départ (resp. d'arrivée) du train i de (resp. à) la section (tronçon ferroviaire) j . On utilisera également la notation n_{iej} lorsque la nature de l'événement n'a pas d'importance particulière.

- F est un ensemble d'arcs fixes qui ne représentent que des contraintes ;
- A et Λ gardent leur définition présentée dans la section 4.2.

On peut maintenant définir une table horaire.

Definition 11. Une table horaire (TH) est un couple $TH = \langle \mathcal{G}(S), \Delta_0 \rangle$ où :

- $\mathcal{G}(S)$ est une solution d'un graphe d'alternatives, issue d'une sélection complète et consistante ;
- $\Delta_0 : N \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ est une fonction de datation initiale qui associe à chaque nœud une date planifiée de l'occurrence de l'événement y étant associé. Le choix de ces dates doit être tel que $\forall e_{ij} \in F \cup S : \Delta_0(n_j) - \Delta_0(n_i) \geq \lambda_{ij}$.

5.2.1 Dynamique d'exécution

L'*exécution* d'une table horaire consiste en un écoulement du temps au cours duquel l'occurrence d'événements de départ et d'arrivée est enregistrée et des décisions de commande sont faites. Comme pour les RdP, on considère l'exécution d'une table horaire comme une succession de passage du temps et d'événements discrets. Afin de pouvoir décrire le procédé d'exécution d'une table horaire, on a, d'abord, besoin de définir ce qu'est une *configuration* d'un table horaire.

Definition 12. Une *configuration* (ou un *état*) d'une table horaire est un triplet $\mathcal{C}_T = \langle X, D, \Delta \rangle$ où :

- $X \subseteq N$ est un sous-ensemble de nœuds représentant l'ensemble des nœuds (événements) exécutés dans la table horaire ;
- $D \subseteq Nd$ est un sous-ensemble de nœuds de départ qui indique les ordres de départs qui ont déjà été donnés ;
- $\Delta : N \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ est une fonction de datation qui associe une date d'occurrence effective à chaque nœud exécuté (ceux de X) et une date estimée aux nœuds inexécutés (ceux de $N \setminus X$).

La configuration initiale d'une table horaire est $\mathcal{C}_T^0 = \langle \emptyset, \emptyset, \Delta_0 \rangle$.

N.B. Lorsqu'un ordre de départ est donné, cela ne signifie pas forcément que le train est bien parti. L'introduction de l'ensemble D permet de faire la distinction entre ces deux événements. Cela permet de modéliser, par exemple, l'arrêt temporaire d'un train dans une station à cause du blocage des portes ou simplement du retard sur le départ. Par souci de simplicité, on considère qu'un ordre de départ n'est donné qu'une seule fois et est toujours pris en compte. (Il n'est jamais perdu.)

La figure 8 est un exemple d'une représentation d'une — partie d'une — table horaire avec 2 trains et 5 événements pour chaque train. Les dates $\Delta(n)$ de chaque nœud n ainsi que les contraintes λ_{ij} existantes entre les nœuds ne sont pas représentées ici afin d'alléger le graphe. La représentation graphique des éléments de la configuration de la table horaire est faite comme suit :

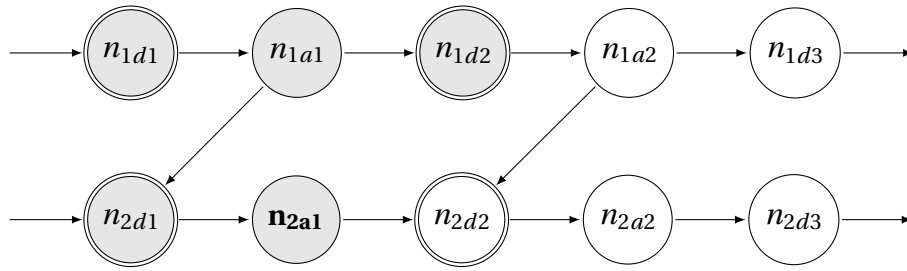


FIGURE 8 – Exemple de configuration d'une table horaire

- des cercles à remplissage gris pour les événements exécutés

$$X = \{n_{1d1}, n_{1a1}, n_{1d2}, n_{2d1}, n_{2a1}\};$$

- des cercles à remplissage blanc pour les événements planifiés dans la table horaire mais non encore exécutés

$$N \setminus X = \{n_{1a2}, n_{1d3}, n_{2d2}, n_{2a2}, n_{2d3}\};$$

- des cercles à double contour pour les ordres de départ donnés

$$D = \{n_{1d1}, n_{1d2}, n_{2d1}, n_{2d2}\};$$

- un cercle à remplissage gris et une étiquette à caractères gras pour le nom du dernier événement exécuté (n_{2a1}).

Une partie de l'exécution d'une table horaire consiste à calculer de nouvelles dates cohérentes pour les nœuds représentant des événements à venir. Lorsqu'un événement se produit en retard, par exemple, cela a un impact direct sur les événements qui sont contraints à se produire une certaine durée minimale après cet événement. Pour permettre ce calcul, on a besoin des définitions ci-dessous.

Definition 13. Un nœud $n_j \in N$ est un *prédécesseur direct* (resp. *successeur direct*) d'un nœud $n_i \in N$ s'il existe un arc $e_{ji} \in E$ (resp. $e_{ij} \in E$), i.e., s'il existe une contrainte de temps directe et explicite entre les deux événements représentés par ces nœuds.

N.B. Un nœud peut avoir plus d'un prédécesseur direct (resp. successeur direct) et peut lui-même être le prédécesseur direct (resp. successeur direct) de plusieurs nœuds.

On note par $d\sigma^-(n)$ (resp. $d\sigma^+(n)$) l'ensemble de tous les prédécesseurs directs (resp. successeurs directs) du nœud n .

$$\forall n_i \in N, \quad d\sigma^-(n_i) = \{n_j \in N \mid \exists e_{ji} \in E\}$$

$$d\sigma^+(n_i) = \{n_j \in N \mid \exists e_{ij} \in E\}$$

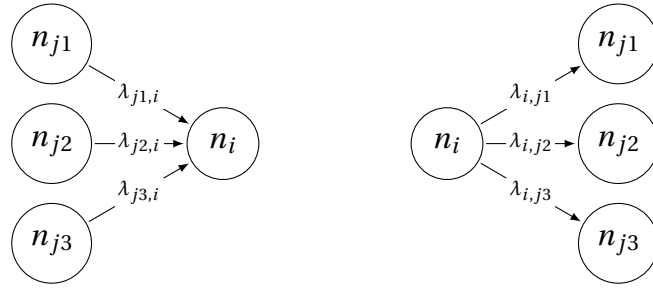


FIGURE 9 – Prédécesseurs et successeurs directs d'un nœud

Definition 14. Un nœud $n_j \in N$ est un *prédécesseur* (resp. *successeur*) d'un nœud $n_i \in N$ s'il existe une succession de nœuds (n_0, n_1, \dots, n_k) dans laquelle le premier élément n_0 est le nœud n_j (resp. n_i) ; le dernier élément n_k est le nœud n_i (resp. n_j) ; et chaque paire de nœuds successifs dans la suite est un arc de la table horaire : $\forall l \in [0, k), e_{l,l+1} \in E$.

On note par $\sigma^-(n)$ (resp. $\sigma^+(n)$) l'ensemble de tous les prédécesseurs (resp. successeurs) du nœud n .

Dans la figure 8, les successeurs du nœud n_{1a2} sont $\sigma^+(n_{1a2}) = \{n_{1d3}, n_{2d2}, n_{2a2}, n_{2d3}\}$.

Au cours de l'exécution d'une table horaire, il est nécessaire de définir les prochains nœuds à exécuter dans une configuration donnée. La définition suivante présente une fonction qui permet de retrouver ces nœuds-là.

Definition 15. On note par $\text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) = \{n \in N \setminus X \mid d\sigma^-(n) \subseteq X\}$ l'ensemble des nœuds qui n'ont pas de prédécesseur direct si l'on ne garde que la partie non encore exécutée de la table horaire, i.e., les nœuds minimaux au sens du graphe. Ces nœuds représentent les prochains événements qui peuvent être exécutés à partir de la configuration \mathcal{C}_T .

La définition des événements exécutables permet de définir les prochains ordres de départ à être donnés que l'on note $\text{pdep}(TH, \mathcal{C}_T) = \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap Nd \setminus D$. Les prochains ordres de départ correspondent aux événement de départ qui peuvent avoir lieu car les événements d'arrivée les précédant — s'il y en a — ont bien eu lieu et pour lesquels un ordre de départ n'a pas encore été donné.

5.2.2 Règles sémantiques

On rappelle que l'exécution d'une table horaire s'effectue à travers un mouvement temporel, l'observation et l'enregistrement de l'occurrence d'un événement (de départ

ou d'arrivée) ou l'envoi d'un ordre de départ. Ces mouvements font évoluer la table horaire d'une configuration vers une autre et obéissent aux conditions suivantes :

- Les ordres de départs sont donnés lorsque l'on atteint la date prévue de départ dans la table horaire ;
- Les événements de départ ne peuvent pas se produire avant la date prévue pour leur occurrence. Ils peuvent, toutefois, être retardés ;
- Les événements d'arrivée peuvent se produire plus tôt ou plus tard que la date prévue pour leur occurrence ;
- Le système peut laisser passer le temps tant que la date courante ne coïncide pas avec un ordre de départ à donner.

Afin de pouvoir présenter les règles sémantiques pour les différents types de mouvements, on introduit une variable d qui indique la date courante, i.e., la date réelle à chaque instant. d peut-être un compteur dont la valeur est 0 au début de l'exécution de la table horaire et croît au fil du temps.

Les règles sémantique d'exécution d'une table horaire sont les suivantes :

Mouvement temporel

À partir d'une configuration $\mathcal{C}_T = \langle X, D, \Delta \rangle$ à une date d , on peut laisser passer le temps à condition que la nouvelle date atteinte ne dépasse pas celle du prochain départ à donner. Ce qui s'écrit comme :

$$\frac{\begin{array}{l} \delta < \min_{n \in \text{pdep}(TH, \mathcal{C}_T)} (\Delta(n)) - d \\ \wedge \quad d' = d + \delta \end{array}}{\langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{\delta} \langle X, D, \Delta \rangle, d'}$$

Ordre de départ

Un ordre de départ est donné dès que la date prévue pour le départ correspondant est atteinte. Il ne peut être donné que si l'événement d'arrivée — s'il y en a — qui précède ce départ a bien eu lieu, i.e., il faut que le train soit bien en station. Une autre condition est que l'on ne peut donner un ordre de départ que s'il n'a pas déjà été donné.

$$\frac{\begin{array}{l} n \in \text{pdep}(TH, \mathcal{C}_T) \\ \wedge \quad d = \Delta(n) \\ \wedge \quad D' = D \cup \{n\} \end{array}}{\langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{\text{dep}(n)} \langle X, D', \Delta \rangle, d}$$

Arrivée précoce

Lorsqu'un événement d'arrivée se produit plus tôt que prévu, on ne fait qu'enregistrer l'occurrence de cet événement et sa date.

$$\begin{array}{l} n \in \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap Na \\ \wedge \quad d < \Delta(n) \\ \wedge \quad X' = X \cup \{n\} \\ \wedge \quad \Delta' = \Delta[n \mapsto d] \\ \hline \langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{n} \langle X', D, \Delta' \rangle, d \end{array}$$

Arrivée tardive

Lorsqu'un train arrive à une station avec du retard, on peut se retrouver devant plusieurs situations : soit le retard peut être absorbé en diminuant le temps de séjour du train en station, soit il est nécessaire de replanifier le prochain départ du train ainsi que tous les événements futurs qui en dépendent (tous ces successeurs). On considère que le calcul des nouvelles dates se fait au moyen d'une fonction de régulation qu'on note γ . Cette fonction prend en compte les contraintes initiales du graphe, l'ensemble des événements exécutés, le dernier événement exécuté et la date courante. L'algorithme décrivant cette fonction est détaillé ultérieurement dans le document.

$$\begin{array}{l} n \in \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap Na \\ \wedge \quad d > \Delta_0(n) \\ \wedge \quad X' = X \cup \{n\} \\ \wedge \quad \Delta' = \Delta[\sigma^+(n) \mapsto \gamma(X, \Delta, n, d)] \\ \hline \langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{n} \langle X', D, \Delta' \rangle, d \end{array}$$

Départ tardif

La règle pour un événement de départ tardif reste la même que pour un événement d'arrivée tardive avec la condition qu'un ordre de départ ait déjà été donné avant l'occurrence de l'événement de départ effectif. On rappelle qu'un train ne peut jamais partir avant sa date de départ prévue dans la table horaire.

$$\begin{array}{l} n \in \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap D \\ \wedge \quad d > \Delta_0(n) \\ \wedge \quad X' = X \cup \{n\} \\ \wedge \quad \Delta' = \Delta[\sigma^+(n) \mapsto \gamma(X, \Delta, n, d)] \\ \hline \langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{n} \langle X', D, \Delta' \rangle, d \end{array}$$

Arrivée à temps

Lorsqu'une arrivée se produit à la date y étant prévue dans la table horaire, la seule action à faire c'est d'enregistrer l'occurrence de cet événement. Le planning de la table horaire reste, quant à lui, inchangé.

$$\frac{\begin{array}{l} n \in \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap Na \\ \wedge \quad d = \Delta_0(n) \\ \wedge \quad X' = X \cup \{n\} \end{array}}{\langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{n} \langle X', D, \Delta \rangle, d}$$

Départ à temps

La règle pour un événement de départ à temps est la même que pour un événement d'arrivée à temps avec la condition qu'un ordre de départ ai déjà été donné avant l'occurrence de l'événement de départ effectif.

$$\frac{\begin{array}{l} n \in \text{pexe}(TH, \mathcal{C}_T) \cap D \\ \wedge \quad d = \Delta_0(n) \\ \wedge \quad X' = X \cup \{n\} \end{array}}{\langle X, D, \Delta \rangle, d \xrightarrow{n} \langle X', D, \Delta \rangle, d}$$

5.3 Fonctions de régulation

Avant de préciser les calculs faits par les fonctions de régulation, rappelons les règles sémantiques utilisées pour définir l'exécution d'une table horaire : les ordres de départ sont donnés aux dates dictées par la table horaire ; les départs peuvent avoir lieu plus tard que la date prévue ; les arrivées peuvent avoir lieu plus tôt ou plus tard que la date prévue ; et les retards peuvent imposer un changement dans le planning. Ces changements sont le résultat d'un calcul qui est effectué au moyen d'une fonction notée γ . Dans cette section, nous donnons une formulation générale de ce qu'est une fonction de régulation ainsi qu'un exemple de celle-ci.

Definition 16. Soit \mathcal{G} l'ensemble des graphes d'alternatives, \mathcal{T} l'ensemble des tables horaires et \mathcal{C} l'ensemble de leurs configurations possibles. Une fonction de régulation est une fonction $\gamma : \mathcal{G} \times \mathcal{T} \times \mathcal{C} \times N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{T}$. Elle prend en argument une table horaire et sa configuration, le graphe d'alternatives à partir duquel la table horaire a été construite, l'identité d'un événement (un nœud) et sa date d'occurrence (un réel positif fini) et retourne une nouvelle table horaire.

Le calcul d'une nouvelle table horaire peut consister en un simple décalage des dates des événements à venir en prenant compte des contraintes sur les arcs de la table

horaire. Il peut aussi être une fonction plus complexe : il peut, par exemple, consister à faire un nouveau choix d'arcs alternatifs pour la partie non encore exécutée de la table horaire. Ceci rend, par exemple, le dépassement entre deux trains possible, comme il permet de choisir un nouveau chemin pour un train si la situation l'impose.

Definition 17. On définit la fonction de régulation γ_1 comme étant une fonction qui décale simplement les dates d'un ensemble d'événements à venir. Cet ensemble regroupe tous les successeurs d'un nœud donné, i.e., tous les événements futurs qui en dépendent. Le décalage se fait jusqu'à la date au plus tôt qui satisfait toutes les contraintes liées à ces événements. Une fenêtre temporelle au delà de laquelle le calcul doit s'arrêter est également définie. Elle est souvent de l'ordre de l'heure et est choisie avec la perspective de revenir à la table horaire originale, si possible, dans un temps inférieur à cette fenêtre. L'idée aussi c'est de limiter le temps de recalcul des dates.

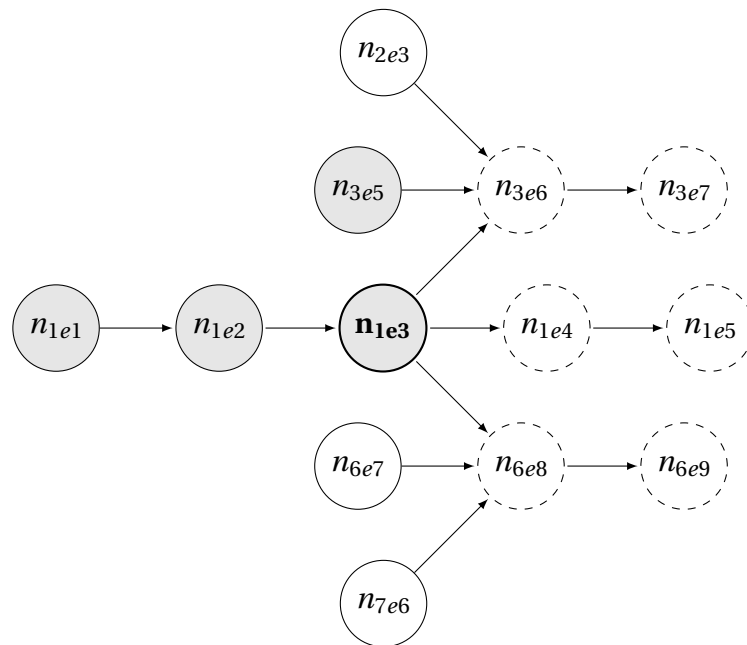


FIGURE 10 – Illustration des nœuds à mettre à jour par γ_1

La solution $\gamma_1(TH, \mathcal{C}_T, n_{\text{der}}, d)$ est un ensemble de nouvelles dates $\Delta'(n_l)$ pour tout $n_l \in \sigma^+(n_{\text{der}})$. L'argument n_{der} étant le dernier événement exécuté dans la table horaire.

N.B. Ici, le graphe \mathcal{G} ne figure pas dans la liste des paramètres de γ_1 car celui-ci n'est pas nécessaire lorsqu'il s'agit de faire des simples calculs de dates.

Le calcul de la nouvelle date d'un nœud n_l doit respecter les contraintes temporelles imposées par la table horaire (tous les arcs liant aux prédécesseurs directs) :

$$\forall n_k \in d\sigma^-(n_l), \Delta'(n_l) - \Delta'(n_k) \geq \lambda_{kl}$$

Il doit également faire en sorte que la nouvelle date calculée soit celle au plus tôt en prenant le maximum entre la date calculée en fonction des contraintes et l'ancienne date du nœud $\Delta(n_l)$.

$$\forall n_l \in N \setminus X, \Delta(n_l)' \geq \Delta(n_l)$$

La formule de calcul de la date de chaque nœud est donc la suivante :

$$\Delta'(n_l) = \max\left(\Delta(n_l), \max_{n_k \in d\sigma^-(n_l)} (\Delta'(n_k) + \lambda_{kl})\right)$$

L'algorithme 1 décrit comment le calcul des dates de tous les successeurs d'un nœud est effectué par γ_1 .

Si l'on se réfère à la figure 10 où le nœud n_{1e3} est le dernier nœud exécuté, γ_1 calcule les nouvelles dates de tous les nœuds à contour pointillé, i.e., ceux dans $\{n_{3e6}, n_{1e4}, n_{6e8}, n_{3e7}, n_{1e5}, n_{6e9}\}$.

Algorithme 1: Calcul des nouvelles dates

```

lire( $n_{\text{der}}$ ); // entrer le dernier nœud exécuté
lire( $d$ ); // entrer la valeur de la date actuelle
 $t_{\text{lim}} := 1\text{h}$ ; // définir la taille de la fenêtre temporelle
 $V := d\sigma^+(n_{\text{der}})$ ;
 $\Delta' := \Delta$ ;
tant que  $V \neq \emptyset$  faire
     $V_{\text{min}} := \{n \in V \mid \Delta(n) = \min_{n_i \in V} \Delta(n_i)\}$ ;
    choisir un nœud  $n_l \in V_{\text{min}}$  aléatoirement;
     $V := V \setminus \{n_l\}$ ;
     $\Delta'(n_l) := \max\left(\Delta'(n_l), \max_{n_k \in d\sigma^-(n_l)} (\Delta'(n_k) + \lambda_{kl})\right)$ ;
    si  $\Delta'(n_l) < d + t_{\text{lim}}$  alors
        |  $V := V \cup d\sigma^+(n_l)$ ;
    fin
fin

```

5.4 Modèle complet

Les événements de départ et d'arrivée des trains dans un système ferroviaire sont dictés par un planning. Ce planning est préétabli et ne consiste qu'en une version théorique de ce qui se passe réellement. En réalité, ce planning n'est jamais tout à

fait respecté à cause des imprévus qui viennent perturber le système et qui imposent souvent des changements dans ce planning. Face à ces perturbations les opérateurs font appel à des politiques de régulation pour essayer de coller au mieux au planning initial.

Un modèle d'un système ferroviaire tel que défini dans ce document est une combinaison d'une partie simulant les aspects physiques, représentée par un RdP ; d'une exécution d'une table horaire qui dicte les dates désirées d'occurrence des événements dans le système réel et d'une politique de contrôle qui permet de réguler le système en cas de perturbation.

Les sections précédentes décrivent les processus d'exécution des RdP ainsi que des tables horaires, i.e., les règles des mouvements temporels et discrets pour chacun. Nous présentons, ci-après, comment la composition des deux sous-modèles est effectuée :

- La table horaire agit comme un contrôleur qui dicte les dates de départ des trains. Pour ce faire, elle injecte des jetons dans des places dites *de commande* qui permettent de donner les ordres de départs aux trains.
- Les tirs des transitions dans le RdP correspondent aux occurrences effectives d'événements. Le tir d'une transition du RdP implique donc une exécution simultanée du nœud qui lui correspond dans la table horaire ; puisque chaque nœud correspond à un événement. Chaque transition est tirée en fonction d'un temps échantillonné à partir de sa fonction de distribution. De ce temps-là découle directement la date d'exécution des nœuds dans la table horaire et donc l'éventuel besoin de recalculer les dates d'occurrences planifiées des événements suivants dans la table horaire.

Un système ferroviaire est composé de trains et de sections (tronçons ferroviaires). On note par Σ_{tr} , l'ensemble de tous les trains et par Σ_{sc} , l'ensemble de toutes les sections. On considère également un sous-ensemble particulier de sections noté $\Sigma_{st} \subseteq \Sigma_{sc}$ qui regroupe l'ensemble des stations. Une station est une section où les trains doivent s'arrêter et rester au moins pendant un temps de séjour minimum prédéfini. Ce temps correspond habituellement au temps de chargement et de déchargement des passagers. Un train n'est, a priori, pas censé s'arrêter dans une section autre qu'une station. Un train ne peut quitter une station que lorsqu'il en a reçu l'ordre. Ceci se traduit par : la transition qui correspond à son départ ne peut être tirée que si sa place de commande contient un jeton (en plus de toutes les autres places de son ensemble de préconditions).

On note par $Ta \subset T$ (resp. $Td \subset T$) le sous-ensemble de transitions qui regroupe les *transitions d'arrivée* (resp. *transitions de départ*). Le tir d'une transition d'arrivée

représente l'entrée de la tête d'un train à une section. Le tir d'une transition de départ représente le début de l'opération de départ d'un train depuis une station. i.e., le moment où le train commence à bouger. On considère que le train a quitté la station qu'au moment où il entre dans la section suivante de la ligne et qu'une transition d'arrivée est donc tirée. On peut imaginer qu'un train s'arrête à un endroit spécifique qui se situe au début de la station à condition que toute la longueur du train soit rentrée dans le nouveau tronçon (la station). Le point où se situe la tête du train divise la station en deux parties. Le départ d'un train est à interpréter comme son entrée dans la seconde partie de la station. L'arrivée a une station est, quant à elle, interprétée comme le moment où le train s'arrête de bouger après être entré en station. Ceci est une simplification qui permet de réduire le nombre de sections considérées. La figure 11 illustre la position d'arrêt d'un train en station telle que considérée dans le modèle.

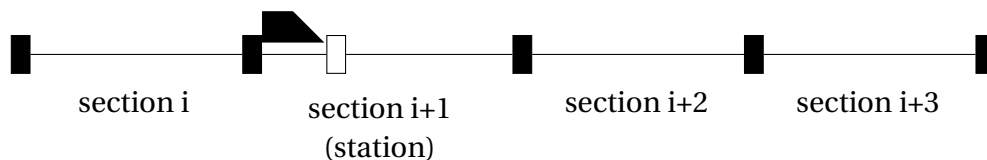


FIGURE 11 – Position d'arrêt d'un train dans une station

On note par $P_r \subset P$ (resp. $P_s \subset P$) le sous-ensemble de places qui regroupe les *places de course* (resp. *places de séjour*). Une place de course est une place qui décrit, quand elle contient un jeton, un train en mouvement. Une place de séjour décrit, quant à elle, un train en station.

On note par $P_c \subset P$ le sous-ensemble de places qui regroupe les *places de commande*. Une place de commande est une place qui sert à donner un ordre de départ ; lorsqu'elle contient un jeton cela signifie qu'un ordre de départ a été donné.

Le lien entre les éléments d'un RdP et un système réel se fait au moyen de fonctions d'étiquetage. À chaque section est affectée une transition d'arrivée $ta \in Ta$ qui indique qu'un train est arrivé à cette section ; et une place de course $pr \in Pr$ qui indique qu'un train est entrain de parcourir cette section. De plus, à chaque station est affectée une place de séjour $ps \in Ps$ qui indique qu'un train est à l'arrêt dans la station ; une place de commande $pc \in Pc$ qui sert à donner les ordres de départ ; et une transition de départ $td \in Td$ qui indique quand le départ effectif se produit. Les arcs de flux liants ses composants du RdP sont toujours tels que présentés dans la figure 12.

N.B. Sur la figure 12 sont représentées les fonctions de densité (et non les fonction de répartition) car celles-ci donnent une image plus intuitive de la distribution de probabilités.

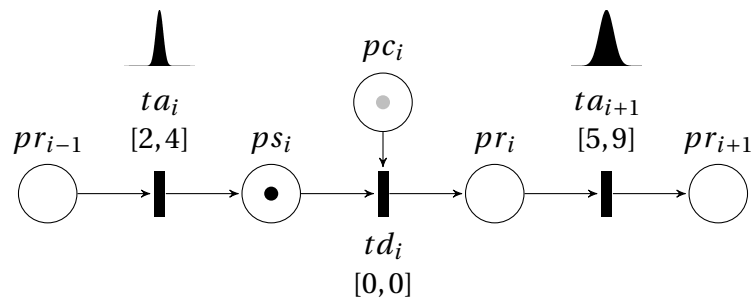


FIGURE 12 – Places et transitions dans un modèle RdPTS de réseau de métro

Par ailleurs, un train ne peut rentrer dans une section que si celle-ci est restée inoccupée pendant un certain temps égal au headway minimal h par rapport au train l'ayant précédé. Une façon de modéliser cette contrainte est présentée la figure 13 où po_i est une place qui indique que la section i est occupée, pl_i indique qu'elle s'est libérée et contient toujours un jeton quand c'est le cas. Ce jeton est une ressource qui est prise quand la section est occupée et remise quand elle se libère. La transition th_i a pour intervalle $[h, h]$ où h est la durée pendant laquelle la section i doit rester libre après que le train l'est quittée.

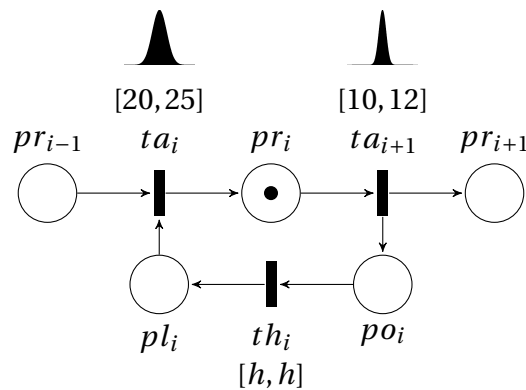


FIGURE 13 – Modélisation d'une contrainte en termes de headway minimal

De même, du côté de la table horaire, chaque nœud de départ $n \in Nd$ est étiqueté par un numéro de station et de train et indique le départ de ce train de cette station ; et chaque nœud d'arrivée $n \in Na$ est étiqueté par un numéro de section et de train et indique l'arrivée de ce train à cette section.

En supposant que l'étiquetage des composants du modèle est réalisé d'une manière cohérente, on introduit, dans ce qui suit, des fonctions de liaison entre le RdP et la table horaire.

On note par $\Psi_t : T \rightarrow 2^N$ la fonction qui associe à chaque transition d'arrivée $ta \in Ta$ un ensemble de nœuds d'arrivée $\Psi_t(ta) \subseteq 2^{Na}$; et à chaque transition de départ un ensemble de nœuds de départ $\Psi_t(td) \subseteq 2^{Nd}$. En effet, dans le RdP, chaque tir de transition représente un événement et donc une transition peut représenter plusieurs événements (donc nœuds) si elle est tirée plusieurs fois.

De même, on note par $\psi_c : Nd \rightarrow Pc$ la fonction qui associe à chaque nœud de départ $nd \in Nd$ de la table horaire une place de commande $pc \in Pc$ du RdP. Lorsque l'on souhaite donner un ordre de départ à partir d'un nœud de départ, on injecte un jeton dans la place de commande qui lui est affectée. Dans la figure 12, ce jeton est représenté en gris. Une fois la place de commande remplie, les jetons de l'ensemble de préconditions de la transition de départ td_i sont consommés et un jeton est produit dans la place de départ suivante indiquant que le train est bien parti.

N.B. Le jeton injecté n'est représenté en gris qu'à titre indicatif, il n'y a aucune notion de couleur dans les RdPTS tels que définis dans ce document. Il ne s'agit pas de réseaux de PETRI colorés.

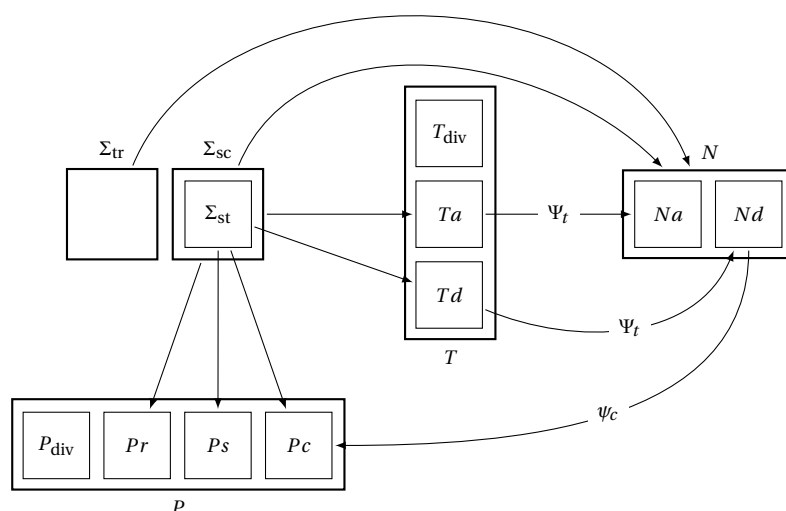


FIGURE 14 – Fonctions d'étiquetage et de liaison entre RdP et TH

On remarque qu'il n'y a pas de fonction d'étiquetage pour les trains vers le RdP. Ceci est dû au fait qu'ils soient représentés implicitement par cette composante du modèle. Chaque tir de transition est lié à un train. En revanche, dans la table horaire chaque nœud est lié à un train.

Pour retrouver quel nœud correspond au tir d'une transition, on introduit la fonction $\text{corr} : \Sigma_X \times T \rightarrow N$ où Σ_X est l'ensemble de toutes les exécutions de nœuds X possibles.

Lorsqu'une transition t est tirée, $\text{corr}(X, t)$ regarde l'ensemble des nœuds $\Psi_t(t)$ de cette transition et déduit le nœud qui correspond à cet événement de tir. C'est toujours le premier nœud non exécuté $\Psi_t(t)$, i.e., le nœud dont tous les prédécesseurs directs sont dans X . Formellement, $\text{corr}(X, t) = \{n \in \Psi_t(t) \mid \Psi_t(t) \cap d\sigma^-(n) \subseteq X\}$.

La figure 14 illustre les différentes fonctions d'étiquetages (anonymes) ainsi que les fonctions de liaison entre le RdP et la TH. Les ensembles T_{div} et P_{div} dans la figure sont des ensembles de transitions et de places diverses qui peuvent faire partie du RdP.

Ces fonctions de liaison entre le RdP et la TH étant définies, on peut maintenant décrire comment les deux composantes du modèles sont exécutées de manière synchronisée.

5.4.1 Règles sémantiques

L'exécution synchronisée mène à deux types de mouvements : des mouvements temporels où l'on ne fait que faire passer le temps et des mouvements discrets qui regroupent les événements dans le RdP et l'enregistrement de ces derniers ainsi que la prise de décision depuis la table horaire. Au cours de cette exécution, on fait évoluer conjointement une configuration du RdP et une configuration de la TH.

Mouvement temporel

Un mouvement temporel consiste à laisser passer le temps si le RdP et la table horaire le permettent tous les deux. Le temps écoulé est égal à une durée δ telle que $\delta + d$ est égale à la date au plus tôt entre la prochaine occurrence d'événement dans le RdP (tir d'une transition) et le prochain ordre de départ à donner depuis la table horaire. Tout mouvement temporel est décrit par la règle sémantique suivante :

$$\begin{array}{c}
 d' = d + \delta \\
 \wedge \quad \langle M, \tau \rangle \xrightarrow{\delta} \langle M, \tau' \rangle \\
 \wedge \quad \langle \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{\delta} \langle \langle X, D, \Delta \rangle, d' \rangle \\
 \hline
 \langle \langle M, \tau \rangle, \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{\delta} \langle \langle M, \tau' \rangle, \langle X, D, \Delta \rangle, d' \rangle
 \end{array}$$

Mouvement discret

Il existe deux types de mouvements discrets : celui dû à l'occurrence effective d'un événement suite à un tir de transition dans le RdP et celui dû à un ordre de départ imposé par la table horaire.

Lorsque des transitions sont tirables dans une configuration du RdP, un mouvement discret est imposé par celui-ci à travers le tir d'une transition t . Cette transition correspond au nœud $n = \text{corr}(X, t)$ de la TH. Une fois le nœud n retrouvé, il suffit d'appliquer la règle sémantique de table horaire qui correspond à un départ ou une arrivée (selon le type de transition tirée) à temps, précoce ou tardif/tardive (selon la valeur de la date absolue d). La règle sémantique décrivant un mouvement discret d'occurrence d'événement est donc la suivante :

$$\begin{array}{l}
n = \text{corr}(X, t) \\
\wedge \langle M, \tau \rangle \xrightarrow{t} \langle M', \tau' \rangle \\
\wedge \langle \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{n} \langle \langle X', D, \Delta' \rangle, d \rangle \\
\hline
\langle \langle M, \tau \rangle, \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{t} \langle \langle M', \tau' \rangle, \langle X', D, \Delta' \rangle, d \rangle
\end{array}$$

N.B. La règle sémantique de la table horaire regroupe toutes les règles d'arrivée et de départ. La règle choisie entre celles-ci dépend de la valeur de d (événement précoce, à temps, tardif). Même si Δ ne change pas dans le cas d'un événement à temps ($\Delta' = \Delta$) on inclut cette règle ici, par abus de notation, afin d'éviter une répétition.

Lorsque la date absolue d coïncide avec celle d'un ordre de départ à donner d'un nœud de départ $n \in Nd \setminus D$, un mouvement discret imposé par la table horaire s'effectue. La règle de départ vue en section 5.2.2 s'applique pour passer d'une configuration de table horaire à une autre. Du côté du RdP, un jeton est injecté dans la place de commande $p = \psi_c(n)$ qui correspond à ce nœud de départ. La règle sémantique de changement contextuel de marquage vue en section 5.1.3 s'applique alors. Ceci se résume dans la règle sémantique suivante :

$$\begin{array}{l}
p = \psi_c(n) \\
\wedge \langle M, \tau \rangle \xrightarrow{p} \langle M', \tau' \rangle \\
\wedge \langle \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{\text{dep}(n)} \langle \langle X, D', \Delta \rangle, d \rangle \\
\hline
\langle \langle M, \tau \rangle, \langle X, D, \Delta \rangle, d \rangle \xrightarrow{n} \langle \langle M', \tau' \rangle, \langle X, D', \Delta \rangle, d \rangle
\end{array}$$

6 Prototypage

Notre choix de l'outil d'implémentation du modèle s'est porté vers MATLAB. Celui-ci étant un puissant outil de calcul matriciel particulièrement utile dans le cas de modélisation par réseaux de PETRI car ils peuvent être représentés sous une forme matricielle. MATLAB dispose également d'une boîte à outils permettant la génération de nombres aléatoires à partir de différentes fonctions de répartition (uniforme, gaussienne, etc.), ce qui correspond très bien à ce que l'on souhaite implémenter.

Durant la période du stage, la partie réseaux de PETRI temporels stochastiques du modèle a pu être implémentée, mais dans son état actuel, le modèle n'est pas complètement exploitable. En effet, comme il a été déjà précisé, le réseau de PETRI seul ne permet de modéliser que le système non régulé. De plus, il ne peut pas être exécuté séparément puisqu'une fois les trains en station, ils attendront toujours d'avoir un ordre de départ : les places de commande sont toujours vides ce qui implique que le RdP se retrouvera rapidement dans une configuration bloquante, i.e., à partir de laquelle il n'est plus possible d'évoluer. Comme il est nécessaire de tester le bon fonctionnement de cette partie, une idée a été de remplir toutes les places de commande avec un jeton et de rajouter un arc partant de chaque transition de départ vers la place de commande qui lui correspond. Ceci permet de tester un réseau sans avoir besoin des ordres de départ issus de la simulation d'une table horaire.

N.B. Cette solution est préférée à celle d'enlever toutes les places de départ car elle est plus facilement appliquée. Il suffit de remplacer des valeurs dans les matrices de pré et de postconditions et de modifier le marquage initial. Enlever les places de départ implique, quant à lui, de modifier la structure de ces matrices.

Une partie importante du RdP est l'aspect aléatoire des tirs de transitions. On rappelle qu'à chaque transition est affectée une fonction de répartition. La section suivante décrit comment s'effectue un tir aléatoire à partir d'une fonction de répartition définie.

6.1 Tir aléatoire des temps de tir

Les fonctions de répartition choisies sont des fonctions qui reprennent la forme d'une gaussienne mais qui sont définies sur un intervalle donné. On rappelle que la formule de la fonction de densité d'une gaussienne est :

$$f_g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Les fonctions de densités de nos transitions (à partir desquelles sont déduites les fonction de répartition par intégration) se calculent à partir de la formule de la fonction gaussienne comme suit :

$$f(x) = \frac{f_g(x) - f_g(\underline{T}(t))}{\int_{\underline{T}(t)}^{\overline{T}(t)} f_g(y) dy - (\overline{T}(t) - \underline{T}(t)) \times f_g(\underline{T}(t))}$$

Pour un temps de tir minimal $\underline{T}(t) = 2$, un temps de tir maximal $\overline{T}(t) = 4$, une moyenne $\mu = 3$ et un écart type de la fonction gaussienne $\sigma = 0.2$, on obtient la fonction de

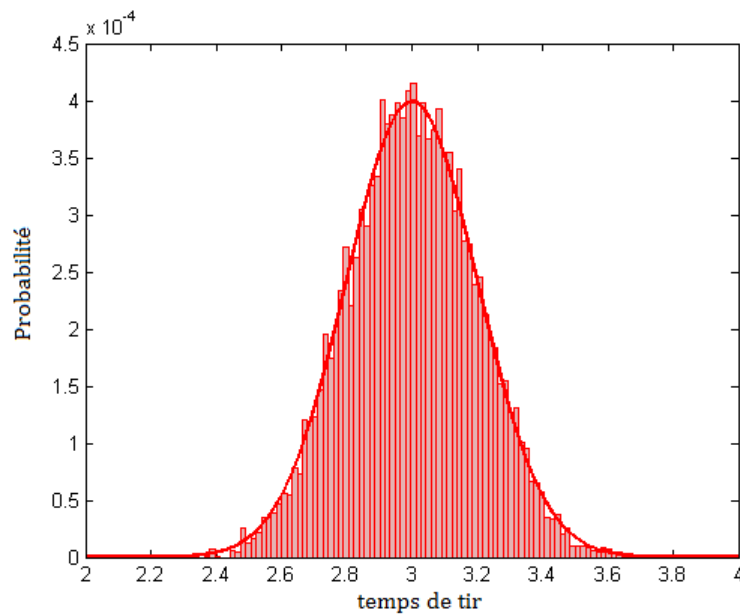


FIGURE 15 – Exemple de fonction de densité

densité représentée par un trait continu dans la figure 15. La fonction de répartition associée se calcule par intégration directe :

$$F(x) = \int_x^{\bar{T}(t)} f(y) dy$$

Un tir aléatoire s'effectue à partir d'une fonction de répartition en tirant une valeur ζ entre 0 et 1 à partir de la distribution uniforme. Il suffit ensuite de retrouver l'image de ζ par la fonction inverse $F^{-1}(\zeta)$.

L'histogramme dans la figure 15 illustre l'ensemble de 10^4 tirs aléatoires fait de cette manière. On peut très bien voir que ces tirs suivent la fonction de densité de probabilité f à partir de laquelle la fonction de répartition F a été calculée.

6.2 Simulation

Afin de tester le bon fonctionnement du programme, nous avons choisi de l'exécuter sur une topologie en anneau avec deux trains en circulation. Cette topologie est illustrée par la figure 17 où les sections sont représentés par des traits et les points d'entrée dans les sections par des rectangles pleins ; les stations² sont représentées

2. On rappelle qu'une station est définie comme étant une section où le train doit s'arrêter et rester une durée minimale

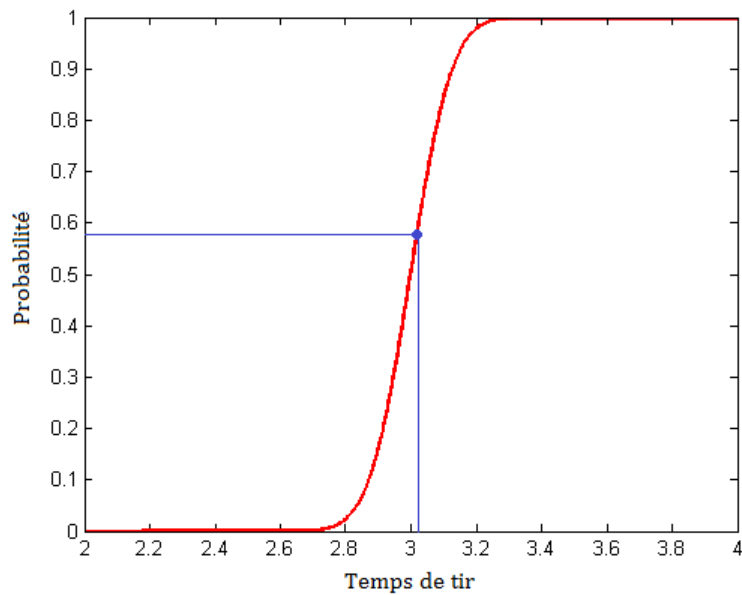


FIGURE 16 – Tir aléatoire à partir d’une fonction de répartition

par des traits épais. GR_1 et GR_2 représentent les zones de garage des trains, EN la zone d’entrée dans le circuit, A et B deux stations (réelles) et ZR les zones de retournement des trains permettant à ceux-ci de changer de direction ; ces zones sont considérées de la même manière que les stations (le temps de retournement est considéré comme un temps de séjour dans la zone). Les indices ht et bs (pour *haut* et *bas*) indiquent le sens de déplacement des trains.

Le réseau de PETRI qui modélise cette topologie est construit comme expliqué dans la section 5.4. La figure 18 illustre une partie de ce réseau de PETRI. On voit bien que le RdP est isomorphe à la topologie originale.

Le réseau de PETRI est représenté par des matrices de taille 36×27 (places \times transitions). Parmi les données retournées par l’exécution, figure une succession de marquages décrivant l’évolution du marquage du RdP ainsi que les dates de tir de toutes les transitions tirées.

Les 10 premiers marquages des 8 premières places sont représentés dans la matrice

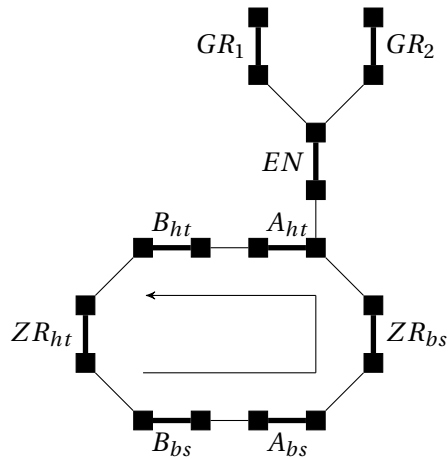


FIGURE 17 – Exemple d’une topologie en anneau

suivante :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
p_0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
p_1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
p_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
p_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_4	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
p_5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
p_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
p_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Les tirs des transitions ayant abouti à ces marquages sont :

	t	d
$M_0 \rightarrow M_1$	3	0.0000
$M_1 \rightarrow M_2$	0	0.0000
$M_3 \rightarrow M_4$	1	2.3208
$M_5 \rightarrow M_6$	4	2.7913
$M_7 \rightarrow M_8$	2	4.5137
$M_8 \rightarrow M_9$	6	4.5137

On voit bien que certaines transitions sont tirées à la même date, ceci étant dû au fait que les transitions de départ ont des intervalles de tirs égaux à $[0, 0]$. Du côté des marquages, on voit que certains marquages successifs sont les mêmes, ceci est dû

aux mouvements temporels qui modifient les dates de tirs des transitions mais pas le marquage.

Le temps d'exécution d'une simulation du modèle est de 0.5935 secondes pour 10^3 tirs de transitions sur un ordinateur d'un microprocesseur à 4 cœurs de 2.8 Ghz. Si l'on fait l'analogie qu'un tir de transition équivaut à un passage d'un train par une station, on peut juger que ce temps d'exécution est tout à fait adéquat pour faire de la simulation intensive. Le partie de régulation ne devrait pas pénaliser le temps d'exécution d'une manière excessive étant donné qu'elle n'est pas très complexe (cf. algorithme 1) et qu'elle n'est appelée que pour un sous-ensemble de tirs de transitions.

Cette partie étant finie, il ne reste plus qu'à implémenter la table horaire, une politique de régulation et de combiner le tout pour pouvoir enfin afin des résultats à partir desquels il sera possible d'évaluer cette politique de régulation.

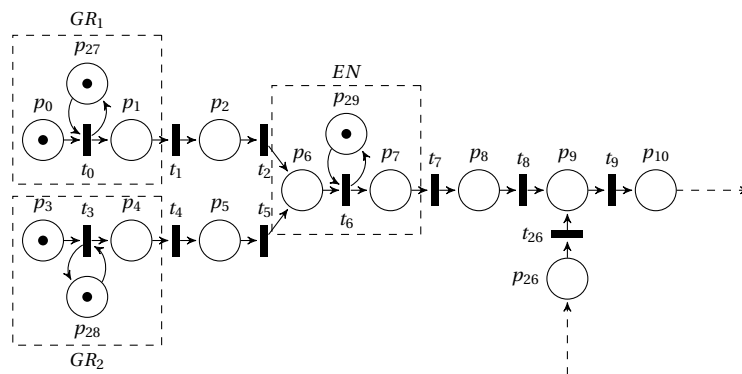


FIGURE 18 – Illustration partielle du RdP modélisant la topologie choisie

7 Conclusion

L'approche adoptée au cours ce travail a conduit à la naissance d'un modèle pour les systèmes ferroviaires (particulièrement pour les réseaux de métro) composé de deux éléments principaux : un réseau de PETRI temporel stochastique comme modèle décrivant le comportement du système réel ; et une table horaire agissant comme entité de commande en ayant comme consigne un planning initial et se basant sur une politique de régulation prédéfinie.

Bien que ce modèle comporte une certaine redondance (e.g. événements modélisés par des nœuds et des tirs de transitions), elle est tout à fait justifiée car elle permet de bien différencier ce qui se passe dans le système réel non régulé et la composante de régulation. Un aspect intéressant consiste en la fidélité de la modélisation par réseaux de PETRI à la topologie du système réel.

Le modèle dans son état actuel est exploitable mais peut et doit être amélioré afin d'être en mesure de fournir des résultats qui reflètent au mieux la réalité. Toutefois, en cette phase d'amélioration, vont certainement se présenter un nombre d'obstacles parmi lesquels on peut citer : la difficulté à avoir des fonctions de répartition fidèles au comportement stochastique réel ; ou encore celle de trouver le bon niveau d'abstraction sans trop dégrader le temps d'exécution, celui-ci étant l'un des facteurs les plus importants à considérer.

Un travail postérieur à celui-ci, d'une durée estimée à trois ans, est prévu pour le développement de ce modèle. Les objectifs poursuivis consistent à :

- étudier d'autres politiques de régulation plus élaborées telles que : la récupération progressive des retards et non dès que possible afin de ne pas trop pénaliser le temps de séjour des trains en station ; la considération des intervalles entre les passages des trains par les stations ; ou encore, une politique hybride qui prend en compte l'intervalle entre les trains et le respect de la table horaire ;
- étendre le modèle pour inclure la possibilité de jouer des scénarios tels qu'un changement dans les conditions climatiques ou l'occurrence d'un incident majeur causant la fermeture partielle d'une ligne ;
- augmenter le niveau d'abstraction en distinguant les phases de démarrage et de freinage des trains ; en incluant éventuellement de la couleur dans nos RdP pour différencier les trains ; en rendant possible la commande du système à travers des ordres de changement de profil de vitesse des trains en cours de route ; en prenant compte de la signalisation ; en incluant la possibilité de dépassement entre les trains, leur réacheminement. . .

Toutefois, il est très important de considérer les conséquences d'éventuelles exten-

sions en matière de temps d'exécution qui reste un facteur très important du modèle. Étant donné que l'on est censé faire de la simulation intensive, toute extension du modèle peut mener à ralentir considérablement le temps d'exécution total de simulation.

Le prototype est également à compléter en implémentant la partie de commande (table horaire et politique de régulation). Par la suite, une composante d'évaluation à partir d'indices clés de performance devra y être greffée. Une phase du projet consiste à tester le programme sur une topologie d'un système réel.

Par ailleurs, ce sujet ouvre une question intéressante sur la possibilité d'inclure des temps de tir reprogrammables en fonction de l'évolution d'un réseau de PETRI temporel stochastique ou encore celle de la possibilité de générer une composante de commande au sein d'un réseau de PETRI (greffe d'un sous-RdP au RdP initial) pour diriger son comportement suivant une politique de régulation donnée.

Références

- [1] International Association of Public Transport. Metro service performance indicators, 2011.
- [2] Bernard BERTHOMIEU and Michel DIAZ. Modeling and verification of time dependent systems using time petri nets. *IEEE Trans. on Soft. Eng.*, 1991.
- [3] Andrea D'ARIANO et al. A branch and bound algorithm for scheduling trains in a railway network. *European Journal of Operational Research*, 2007.
- [4] David DE FRUTOS ESCRIG et al. Decidability of properties of timed-arc petri nets. In *Lecture Notes in Computer Science : 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, 2000.
- [5] Alessandro GIUA. Modeling and supervisory control of railway networks using petri nets. *IEEE Trans. Aut. Sci. & Eng.*, 2008.
- [6] András HORVÁTH et al. Transient analysis of non-markovian models using stochastic state classes. *Perf. Eval.*, 2012.
- [7] Laurent HOUSSIN. *Contribution à la commande des systèmes (max,+)-linéaires. Applications aux réseaux de transport*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, 2006.
- [8] Chris W. JANCZURA. *Modelling and Analysis of Railway Network Control Logic using Coloured Petri Nets*. PhD thesis, School of Mathematics and Institute for Telecommunications Research, 1998.
- [9] Wael KHANSA et al. P-time petri nets for manufacturing systems. In *Workshop Series on Discrete Event Systems*, 1996.
- [10] Marco A. MARSAN et al. A class of generalized stochastic petri nets for the performance evaluation of multiprocessor systems. *ACM Trans. on Comp. Sys.*, 1984.
- [11] Philip M. MERLIN. *A study of the recoverability of computing systems*. PhD thesis, University of California, 1974.
- [12] Ugo MONTANARI and Francesca ROSSI. Contextual nets. *Acta Informatica*, 1994.
- [13] Carl A. PETRI. *Kommunikation mit Automaten*. Doktorarbeit, Institut für Instrumentelle Mathematik, 1962.