



Arbres maximaux ayant au plus n sommets pendants

Jean-Claude Bermond

► To cite this version:

Jean-Claude Bermond. Arbres maximaux ayant au plus n sommets pendants. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1972, 274, pp.1878-1881. hal-02373332

HAL Id: hal-02373332

<https://inria.hal.science/hal-02373332>

Submitted on 20 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORIE DES GRAPHES. — Arbres maximaux ayant au plus n sommets
pendants. Note (*) de M. JEAN-CLAUDE BERMOND, présentée par
M. Jean Leray.

On détermine la meilleure fonction $f(n, h)$ telle que tout graphe connexe à n sommets et m arêtes avec $m > f(n, h)$ admette un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants, problème posé par Michel Las Vergnas (¹).

Les définitions sont celles de (¹). $G = (X, E)$ désigne un graphe simple, fini (non orienté, sans boucles, ni arêtes multiples). On pose $|X| = n$; $|E| = m$. On suppose que G est connexe et l'on s'intéresse aux arbres maximaux du graphe G , ayant au plus h sommets pendants (sommets de degré 1), avec h entier, $h \geq 2$. En particulier, un arbre maximal à deux sommets pendants est une chaîne hamiltonienne. (Les résultats donnés s'étendent au cas $h = 1$ en considérant dans les énoncés « un arbre maximal à un sommet pendant » comme un cycle hamiltonien.) Nous utiliserons le résultat suivant, cas particulier d'un théorème de M. Las Vergnas [proposition 2 (²)] : $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ désignant la suite des degrés des sommets de G rangés par ordre non décroissant; si pour tous les couples d'indices i, j avec $i < j$ tels que : $d_i \leq i - h + 1$ et $d_j \leq j - h$, on a : $d_i + d_j \geq n - h + 1$, alors le graphe G admet un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants. [Dans le cas $h = 1$, on a avec la convention ci-dessus, un résultat de Bondy-Nash-Williams sur l'existence d'un cycle hamiltonien : corollaire 2, p. 199 de (¹) ou (²).]

Dans ce qui suit, nous désignerons par $G(n, p, h)$ le graphe dont l'ensemble des sommets X est l'union de trois ensembles : A, B, C , non vides, deux à deux disjoints avec $|A| = n - 2p + h - 1$; $|B| = p - h + 1$; $|C| = p$, et où une arête appartient à $G(n, p, h)$ si elle a au moins une extrémité dans B , ou ses deux extrémités dans A . [On peut dire aussi que $G(n, p, h)$ est formé d'un graphe complet à $n - p$ sommets, dont $p - h + 1$ sont reliés à tous les éléments d'un ensemble stable à p éléments.] On a :

$$\begin{aligned} d(x) &= n - p - 1 \quad \text{si } x \in A; & d(x) &= n - 1 \quad \text{si } x \in B; \\ d(x) &= p - h + 1 \quad \text{si } x \in C. \end{aligned}$$

La suite des degrés de $G(n, p, h)$ est donc

$$\begin{aligned} d_1 = \dots = d_p &= p - h + 1; & d_{p+1} = \dots = d_{n-p+h-1} &= n - p - 1; \\ d_{n-p+h} = \dots = d_n &= n - 1. \end{aligned}$$

Enfin $G(n, p, h)$ a un nombre d'arêtes $m = E(n, p, h)$, où

$$E(n, p, h) = p(p - h + 1) + \binom{n-p}{2} = 1/2 (n^2 - (2p + 1)n + p(3p - 2h + 3)).$$

Remarques. — 1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ entraînent $h \leq p \leq n + h - 2/2$, donc en particulier $n \geq h + 2$.

2. $G(n, p, h)$ est le seul graphe ayant la suite de degrés ci-dessus et cette suite de degrés ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Las Vergnas.

On a même :

LEMME 1. — $G(n, p, h)$ ne contient pas d'arbres maximaux ayant moins de $h + 1$ sommets pendants.

En effet, on a au plus $|B| - 1$ sommets de C , qui sont de degré > 1 dans un arbre maximal quelconque, soit donc au moins h sommets de C qui sont pendants. S'il existe un arbre maximal avec exactement h sommets de C qui sont pendants, les sommets de B étant alors tous utilisés dans l'arbre et A étant un sous-graphe complet non vide, il y a au moins un sommet de A qui est pendent. Sinon tout arbre maximal a au moins $h + 1$ sommets de C qui sont pendants et donc dans tous les cas un arbre maximal de $G(n, p, h)$ a au moins $h + 1$ sommets pendants (et d'ailleurs il en existe au moins un ayant $h + 1$ sommets pendants).

Remarque. — Les graphes $G(n, p, h)$ sont maximaux en ce sens que l'adjonction d'une arête quelconque entraîne l'existence d'un arbre maximal à h sommets pendants dans le graphe obtenu.

LEMME 2. — Tout graphe connexe à n sommets n'ayant pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants (avec $n \geq h + 2$) a un nombre d'arêtes m :

$$m \leq \sup_{h \leq p \leq \frac{n+h-2}{2}} E(n, p, h),$$

où

$$E(n, p, h) = 1/2 (n^2 - (2p + 1)n + p(3p - 2h + 3))$$

et cette borne est la meilleure possible.

Si G n'a pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants il existe d'après le théorème de Las Vergnas deux indices p et q , $p < q$, tels que $d_p \leq p - h + 1$, $d_q \leq q - h$ et $d_p + d_q \leq n - h$. Soit p_0 le plus petit indice p tel que $d_p \leq p - h + 1$, alors $d_{p_0} = p_0 - h + 1$ (car $p_0 > 1$) :

- $d_{p_0} \geq 1$ (G connexe) $\Rightarrow p_0 - h + 1 \geq 1$, soit $p_0 \geq h$;
- $d_{p_0} \leq d_q$ et $d_{p_0} + d_q \leq n - h \Rightarrow d_{p_0} \leq (n - h)/2$, soit $p_0 \leq (n - h + 2)/2$.

Un tel graphe a, d'autre part, au plus

$$p_0(p_0 - h + 1) + \binom{n - p_0}{2} = E(n, p_0, h) \text{ arêtes}$$

(p_0 sommets de degré inférieur ou égal à $p_0 - h + 1$, les autres sommets formant un sous-graphe complet à $n - p_0$ éléments). On a bien le résultat annoncé; la borne est atteinte pour les graphes $G(n, p, h)$.

Remarque. — Parmi les graphes vérifiant $d_{p_0} = p_0 - h + 1$ et ayant le nombre maximal d'arêtes $E(n, p_0, h)$, seul $G(n, p_0, h)$ n'admet pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants. En effet, un graphe vérifiant $d_{p_0} = p_0 - h + 1$ et ayant $E(n, p_0, h)$ arêtes est formé d'un stable à p_0 éléments et d'un graphe complet à $n - p_0$ sommets avec $p_0(p_0 - h + 1)$ arêtes entre, et le seul cas où l'on n'ait pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants se produit lorsque ces arêtes relient les p_0 sommets du stable à $p_0 - h + 1$ sommets, c'est-à-dire pour $G(n, p_0, h)$. Ceci signifie que les graphes, n'ayant pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants, avec le maximum d'arêtes sont à rechercher parmi les $G(n, p, h)$.

THÉORÈME 1. — Tout graphe connexe $G = (X, E)$ avec $|X| = n$ et $|E| = m$ ayant un nombre d'arêtes $m > f(n, h)$ admet un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants, où :

$$\begin{aligned} f(n, h) &= n - 2 && \text{pour } n \leq h + 1, \\ f(n, h) &= E\left(n, \left[\frac{n+h-2}{2}\right], h\right) && \text{pour } h + 2 \leq n \leq 5h - 2, \\ f(n, h) &= E(n, h, h) && \text{pour } n > 5h - 2. \end{aligned}$$

($E(n, p, h) = 1/2 (n^2 - (2p + 1)n + p(3p - 2h + 3))$ et $[x]$ désigne la partie entière du nombre x).

Démonstration. — Si $n \leq h + 1$, tout graphe connexe admet un arbre maximal à au plus $n - 1$ sommets pendants et donc $m > n - 2$. Si $n \geq h + 2$, on a d'après les lemmes 1 et 2 :

$$f(n, h) = \sup_{h \leq p \leq \frac{n+h-2}{2}} E(n, p, h).$$

Pour établir la proposition nous allons comparer $E(n, p, h)$ et $E(n, q, h)$ pour p et q compris entre h et $(n + h - 2)/2$. On a

$$2(E(n, p, h) - E(n, q, h)) = (q - p)(2n - 3p - 3q + 2h - 3),$$

donc pour $p < q$

$$E(n, p, h) < E(n, q, h) \iff 2n \leq 3p + 3q - 2h + 2.$$

— En particulier, on a

$$E(n, h, h) < E(n, q, h) \iff 2n \leq h + 3q + 2.$$

Comme $q \leq (n + h - 2)/2$, on a

$$E(n, h, h) \geq E(n, q, h) \text{ pour tout } q$$

si $4n > 2h + 3(n + h - 2) + 4$, soit $n > 5h - 2$ et alors

$$f(n, h) = E(n, h, h).$$

— Si $h + 2 \leq n \leq 5h - 2$. Soit

$$p_0 = \left[\frac{n+h-2}{2}\right], \text{ alors } f(n, h) = \sup_{h \leq p \leq p_0} E(n, p, h).$$

Montrons que pour $h \leq p \leq p_0$, $E(n, p, h) \leq E(n, p_0, h)$, ce qui entraînera le résultat annoncé. Or

$$E(n, p, h) \leq E(n, p_0, h) \text{ si } 2n \leq 3p + 3p_0 - 2h + 3.$$

Comme $p \geq h$ et $p_0 \geq (n + h - 3)/2$, ceci est réalisé si

$$4n \leq 2h + 6 + 3(n + h - 3), \text{ soit } n \leq 5h - 3.$$

Pour $n = 5h - 2$, on a

$$p_0 = 3h - 2 \text{ et } 2n = 10h - 4 < h + 3(3h - 2) + 3 = 10h - 3.$$

THÉORÈME 2. — La fonction $f(n, h)$ de la proposition 1 est la meilleure possible en ce sens que pour tout n et pour tout h il existe au moins un graphe

ayant $f(n, h)$ arêtes et pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants. Pour $n \geq h + 2$ les graphes extrémaux sont :

— pour $h + 2 \leq n \leq 5h - 2$: les seuls $G(n, [(n + h - 2)/2], h)$ sauf pour $n = 5h - 3$, auquel cas on a en plus $G(5h - 3, h, h)$;

— pour $n > 5h - 2$: les seuls $G(n, h, h)$ sauf pour $n = 5h$, auquel cas on a en plus $G(5h, 3h - 1, h)$.

Démonstration. — D'après la remarque suivant le lemme 2, les graphes extrémaux sont à rechercher pour $n \geq h + 2$ parmi les $G(n, p, h)$. (Pour $n \leq h + 1$ les graphes extrémaux sont non connexes.) Une étude des inégalités strictes dans la démonstration du théorème 1 donne le résultat. Ainsi $E(n, h, h) > E(n, q, h)$ pour tout q si $n > 5h$. Pour $n = 5h$,

$$E(5h, h, h) = E(5h, 3h - 1, h).$$

Pour $n = 5h - 1$, $E(n, h, h) = E(n, q, h)$ entraînerait $3q = 9h - 5$, impossible.

Dans le cas $h + 2 \leq n \leq 5h - 2$,

$$E(n, p, h) < E(n, p_0, h) \quad \text{si } n < 5h - 3.$$

Pour $n = 5h - 3$, on a

$$E(5h - 3, 3h - 3, h) = E(5h - 3, h, h)$$

et pour $n = 5h - 2$, on avait inégalité stricte.

L'application des résultats ci-dessus au cas $h = 1$, avec la convention donnée au début et en remarquant que seul se produit $n > 5h - 2$, donne :

COROLLAIRE 1 [Ore ⁽⁶⁾]. — Si $m > E(n, 1, 1) = 1/2(n^2 - 3n + 4)$, G admet un cycle hamiltonien, la borne étant la meilleure possible.

COROLLAIRE 2 [Bondy ⁽³⁾]. — Les seuls graphes non hamiltoniens ayant $1/2(n^2 - 3n + 4)$ arêtes sont les seuls $G(n, 1, 1)$ sauf $n = 5$ où on a en plus $G(5, 2, 1)$.

Dans le cas $h = 2$ on a les résultats suivants :

COROLLAIRE 3. — G étant un graphe à au moins quatre sommets avec un nombre d'arêtes $m > g(n)$ admet une chaîne hamiltonienne où

$$g(n) = 1/2(n^2 - 5n + 10) \quad \text{pour } n = 4, 5 \quad \text{et } n > 8;$$

$$g(6) = 9; \quad g(7) = 12; \quad g(8) = 18.$$

Les seuls graphes à $g(n)$ arêtes n'ayant pas de chaîne hamiltonienne sont :

— pour $n = 4, 5, 9$ et $n > 10$: $G(n, 2, 2)$; pour $n = 6$: $G(6, 3, 2)$;
pour $n = 7$: $G(7, 3, 2)$ et $G(7, 2, 2)$; pour $n = 8$: $G(8, 4, 2)$;
pour $n = 10$: $G(10, 2, 2)$ et $G(10, 5, 2)$.

(*) Séance du 24 mai 1972.

(1) C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

(2) J. A. BONDY, *Stud. Scient. Math. Hung.*, 4, 1969, p. 473-475.

(3) J. A. BONDY, *Variations on the hamiltonian theme* (à paraître).

(4) M. LAS VERGNAS, *Thèse*, Faculté des Sciences, Paris (à paraître).

(5) M. LAS VERGNAS, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 1297.

(6) O. ORE, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 55, 1961, p. 315-321.

G. M. S.,

54, boulevard Raspail,
75006 Paris.