

Méthodes numériques pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie

Amel Karoui

▶ **To cite this version:**

Amel Karoui. Méthodes numériques pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie. Optimisation et contrôle [math.OC]. 2017. hal-03086981

HAL Id: hal-03086981
https://inria.hal.science/hal-03086981

Submitted on 23 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





Projet de Fin d'études

Diplôme National d'Ingénieur en Modélisation pour l'Industrie et les Services

---

Méthodes numériques pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie

---

Réalisé par :
Amal Karoui

Classe : 3AMIndS

Encadrée par :
M.Nejib Zemzemi(Inria)
M.Moez Kallel (ENIT)

Soutenu le 11 Septembre 2017 devant le Jury composé de :

Président : Mme. Amel Ben Abda

Rapporteur : Mr. Moncef Mahjoub

Encadrant : Mr. Nejib Zemzemi

Encadrant : Mr. Moez Kallel

Année universitaire 2016/2017

Remerciements

Au terme de ce stage, c'est un devoir agréable d'exprimer ma reconnaissance que je dois à tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à l'élaboration de ce travail. Je présente mes profonds respects et mes reconnaissance à Mr Nejib Zemzemi, chargé de recherche à Inria Bordeaux Sud-Ouest pour son encadrement fructueux, son partage de savoir et d'expérience, sa disponibilité et sons sens d'écoute et d'échange.
Je tiens aussi à remercier tous les membres de l'équipe Carmen de INRIA qui ont été d'une aide précieuse à tavers leurs explications et leurs conseils.
De plus, je remercie Mr Moez Kallel, pour l'opportunité qui m'a offert pour réaliser ce stage et son suivi et ses conseils.
Je ne manquerai pas d'adresser mes remerciements à ma famille, mes amis et tous ceux qui ont cru en mes capacités et m'ont soutenu durant mon cursus académique.
Mes remerciements vont aussi à Mme Hedia Chaker et tous le corps professoral de l'ENIT qui nous ont fait bénéficié d'une formation pluridisciplinaire de haut niveau.

Résumé

Le but de ce rapport est de décrire le travail que j'ai réalisé durant mon stage de fin d'études. Il s'agit de résoudre le problème inverse en électrocardiographie, qui consiste à la détermination du potentiel électrique à la surface du coeur à partir de mesures réalisées sur la surface du torse. Pour ce faire, on a utilisé la méthode des solutions fondamentales basée sur une représentation intégrale en introduisant deux techniques de régularisation différentes, la régularisation de Tikhonov et la régularisation évanescente qui servent à l'élimination du caractère mal-posé du problème inverse. Les résultats trouvés affirment une bonne performance au niveau de la précision du calcul pour les deux méthodes. L'étude de la robustesse demande encore des efforts.

Mots clés : Méthode des solutions fondamentales, électrocardiographie, problème inverse, Régularisation de Tikhonov, Régularisation évanescente.

Abstract

The purpose of this report is to describe the work I did during my internship. It's a question of solving the inverse problem in electrocardiography which consists in the determination of the electrical potential on the surface of the heart from measurements made on the surface of the torso. To do this, we used the Fundamental Solutions Method based on an integral representation by introducing two different regularization techniques, the regularization of Tikhonov and the Fading regularization which serve to eliminate the ill-posed nature of the inverse problem. The results confirm a good performance in terms of the accuracy of calculation for the two methods. The study of robustness still requires more efforts.

Key words : Fundamental Solutions Method, Electrocardiography, Inverse problem, Tikhonov Regularization, Fading Regularization.

Contents

List of Figures **7**

List of Tables **9**

1 Introduction générale **10**

I Contexte et Étude bibliographique **1**

2 Organisme d'accueil **2**

2.1 INRIA 2

2.1.1 Organisation 4

2.1.2 Stratégie et politique 5

2.1.3 Missions 6

2.2 INRIA Bordeaux Sud-ouest : Carmen 6

3 Étude bibliographique **8**

3.1 Introduction 8

3.2 Anatomie cardiaque et activité électrique 8

3.2.1 Le coeur et son fonctionnement 8

3.2.2 L'activité électrique du coeur 12

3.2.3 L'électrocardiographie 13

3.3 Le problème inverse 14

3.3.1 Définition 14

3.3.2 Méthodes numériques pour le problème inverse 15

3.4 Problème inverse en électrocardiographie 15

3.4.1 Le modèle mathématique du Thorax 16

3.4.2 Méthodes numériques 17

3.5 Conclusion 18

II Étude numérique **19**

4 MUSIC **20**

4.1 Introduction 20
4.2 Présentation 20
4.3 Structure et fonctionnalités 21
4.3.1 segmentation 21
4.3.2 filtering 22
4.3.3 meshing 22
4.3.4 reformat 22
4.3.5 pipelines 22
4.4 Conclusion 23

5 La méthode des solutions fondamentales **24**

5.1 Introduction 24
5.2 La méthode des solutions fondamentales en utilisant la régularisation de Tikhonov 25
5.2.1 Principe de la méthode 25
5.2.2 Détermination de la surface auxiliaire 28
5.2.3 Écriture en système linéaire 29
5.2.4 La régularisation de Tikhonov 30
5.2.5 Choix du paramètre de régularisation λ 31
5.3 La méthode des solutions fondamentales en utilisant la régularisation évanescente 32
5.3.1 La régularisation évanescente 32
5.3.2 La méthode des solutions fondamentales en conjonction avec la régularisation évanescente 33
5.3.3 Critère d'arrêt 35
5.4 Résolution analytique 36
5.4.1 Définition du domaine 36
5.4.2 Solution analytique 37
5.5 Conclusion 37

6 Implémentation de la méthode de résolution **38**

6.1 Introduction 38
6.2 Outils de programmation utilisés 38
6.2.1 Eigen 39
6.2.2 VTK 39

6.3 Algorithme général de résolution 39
6.4 Obtention des fichiers VTK 41
6.5 L'écriture matricielle 42
6.6 Résolution du système linéaire 42
6.6.1 La décomposition matricielle 42
6.6.2 Résolution 44
6.7 Conclusion 44

7 Résultats et interprétations **45**
7.1 Introduction 45
7.2 Résultats numériques 45
7.3 Effet de la variation du rayon 47
7.4 Influence du nombre des points sources et de la fréquence spatiale du signal sur la qualité de la solution 49
7.5 Effet de l'ajout d'un bruit 50
7.6 Effet du paramètre de régularisation sur la MFS avec la régularisation évanescente 52
7.7 Conclusion 53

8 Application de la Méthode des Solutions Fondamentales sur des données simulées **55**
8.1 Obtention des maillages 55
8.2 Résultats 56
8.2.1 Premier cas clinique 56
8.2.2 Deuxième cas clinique 58

9 Conclusion générale **59**

List of Figures

2.1 Organigramme général de l'INRIA [1] 4

3.1 Les tissus cardiaques [2] 9
3.2 La structure anatomique du coeur [3] 10
3.3 Représentation des petite et grande circulations sanguines [4] 11
3.4 Circuit électrique du coeur [5] 12
3.5 L'ECG d'un cycle cardiaque normal [6] 13
3.6 Exemples d'ECG [5] 14

4.1 L'interface MUSIC 21
4.2 Exemple de traitement par pipeline avec le logiciel MUSIC 23

5.1 Configuration de la surface virtuelle 25
5.2 Domaine du test 37

6.1 Diagramme de l'algorithme de résolution 40
6.2 Traçage des normales sur la surface d'un torse 42

7.1 Distribution spatiale de la solution analytique 45
7.2 Résultats numériques 46
7.3 Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique en fonction du rayon 48
7.4 Variation du coefficient de corrélation entre les solutions analytique et numérique en fonction du rayon 48
7.5 Effet de l'ajout d'un bruit uniforme 51
7.6 Variation de l'erreur relative SRE en fonction du niveau de bruit 52

8.1 Électrocardiogrammes (mesurés et calculés superposés) en différents points de la surface de l'épicarde 56
8.2 Répartition de l'erreur relative sur la surface du coeur 57
8.3 Répartition du coefficient de corrélation spatiale sur la surface du coeur . . 57
8.4 Répartition de l'erreur relative sur la surface du coeur pour le deuxième cas 58

8.5 Répartition du coefficient de corrélation sur la surface du coeur pour le deuxième cas 58

List of Tables

6.1 Différentes méthodes de décomposition introduites par **Eigen** 43
6.2 Tableau de référence des différentes méthodes de décomposition 43

7.1 Mesures des SRE et SCC 47
7.2 Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique obtenue moyennant la MFS avec RT en fonction du pas du maillage pour différents ω 49
7.3 Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique obtenue moyennant la MFS avec RE en fonction du pas du maillage pour différents ω 49
7.4 Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique avec un taux de bruit (b%) en fonction du paramètre de régularisation λ . 53
7.5 Variation du Nombre d'itérations optimal en fonction du paramètre de régularisation λ 53

Chapter 1

Introduction générale

De nos jours, les maladies cardiovasculaires constituent une cause majeure de décès. En effet, avec environ 180000 décès par an en France, elles constituent la première cause de mortalité. Elles sont encore responsables de la moitié des décès aux États-Unis. Parmi les facteurs de risque majeurs, on cite le tabagisme, l'obésité, la sédentarité,le facteur d'hérédité, etc.

Plusieurs outils de diagnostic sont aujourd'hui mis à la disposition des corps médicaux pour observer le fonctionnement du coeur, organe principal du système cardiovasculaire responsable de la vie de l'être humain, tels que les techniques d'imagerie médicale (IRM, rayons X, Ultrasons) et l'électrocardiogramme à partir desquels ils peuvent élaborer leurs diagnostics.

L'électrocardiogramme est un outil qui a fait preuve depuis sa création d'une bonne performance en étant un outil non invasif, peu coûteux et facile à mettre en place. IL s'agit d'enregistrer un potentiel électrique à la surface du torse. Cet examen permet de diagnostiquer différentes pathologies au niveau du coeur qui peuvent être traitable comme la tachycardie, ou fortement graves et fatales tel que l'infarctus du myocarde.

Ce potentiel électrique mesurable à la surface du corps provient originalement de la surface du coeur. Or, les expériences et les recherches ont jusqu'aujoud'hui échoué à pouvoir mesurer ce potentiel d'une façon non-invasive et avec haute précision ce qui est l'objet d'un projet de recherche chez INRIA Bordeaux Sud-Ouest en partenariat avec IHU-Lyric. C'est un projet qui promet de développer un logiciel dont le but est d'aider les médecins au diagnostic des maladies cardiovasculaires et améliorer la lecture des moyens de diagnostic tel que l'électrocardiogramme. Avoir un outil numérique capable d'estimer des paramètres et des mesures non disponibles à travers la voie expérimentale serait un exploit pour la médecine.

Dans ce cadre, s'inscrit ce travail où on cherche principalement à déterminer le potentiel électrique à la surface du coeur à partir de mesures réalisées à la surface du torse en

utilisant des moyens de modélisation mathématique et informatique.

Part I

Contexte et Étude bibliographique

Chapter 2

Organisme d'accueil

2.1 INRIA

Durant mes cinq mois de stage, j'étais accueillie à INRIA Bordeaux Sud-ouest, Institut Nationale de la Recherche en Informatique et Automatique. Comme son nom l'indique, c'est un établissement public à caractère scientifique et technologique, spécialisé en la recherche dédiée aux technologies du numérique et placé sous la tutelle des ministères de la recherche et de l'industrie. L'INRIA est composé de huit unités de recherche situées à Paris, Rennes, Sophia Antipolis, Grenoble, Nancy, Bordeaux, Lille et Saclay, et dont le siège social qui est situé à Rocquencourt près de Paris. Actuellement, il y accueille 2400 collaborateurs et 1200 doctorants de 102 nationalités différentes. Cet effectif est réparti sur 183 équipes-projets dont 90 en collaboration avec des universités, et d'autres établissements de recherche (Ces chiffres datent du 31 Décembre 2016). INRIA publie en moyenne 4500 publications scientifiques par an dans plusieurs sujets de recherche actuels. Depuis sa création en 1967, INRIA a déposé 410 brevets en portefeuille regroupés dans 190 familles actives et possède aujourd'hui 126 logiciels déposés à l'Agence pour la Protection des Programmes[1] en 2016. Ayant l'ambition de garantir l'impact de ses recherches dans l'économie et leur application dans le domaine industriel, INRIA contribue depuis 1984 à la création d'entreprises. En effet, 44 start-up INRIA ont été créées depuis 2010. Les derniers rapports sortis en décembre 2016 mentionnent un budget total de 231 millions d'euros dont 25% sont des ressources propres [2].

Historiquement, l'INRIA a été créé en 1967 dans le cadre du plan Calcul, il comporte entre autres la création d'une délégation à l'informatique et d'un institut confié à Michel Laudet, un médecin de formation et mathématicien connu pour ses travaux en informa-

[1] Agence qui protège les droits d'auteurs des logiciels, bases de données et autres oeuvres numériques

[2] Ce sont des recettes de nature fiscale affectées une fois pour toutes à l'INRIA pour financer son budget

tique médicale (optique, hématologie et génétique). L'institut obtient rapidement une renommée internationale grâce aux différentes conférences qu'il a organisées en invitant les mathématiciens et les informaticiens connus de partout dans le monde [1].

2.1.1 Organisation



Figure 2.1 – Organigramme général de l'INRIA [1]

2.1.2 Stratégie et politique

Tous les quatre ans, INRIA veille sur l'élaboration de son plan stratégique pour répondre aux besoins de la révolution numérique dont on vit de nos jours. Les sciences informatiques et mathématiques, le coeur de leurs activités, jouent un rôle central dans cette révolution qui influence particulièrement l'activité de l'institut. Ils visent toujours à positionner leurs recherches et les innovations qui en sont issues, de façon qu'elles contribuent à cette révolution.
La stratégie d'Inria est fondée sur :[7]

- Une politique scientifique définie au niveau national, basée sur une programmation stratégique et sur la mise en place de dispositifs opérationnels de soutien à la recherche.
- Une politique de transfert au bénéfice de l'ensemble du système de recherche et d'innovation français.
- Une politique d'attractivité, d'originalité et de culture de talents, fondée aussi sur l'accueil de personnels en mobilité.
- Un ancrage régional au coeur des pôles universitaires et des écosystèmes économiques et sociaux innovants.
- Un déploiement européen et international à même donner un effet de levier aux acteurs français.
- Une implication dans les dispositifs d'enseignement, de médiation scientifique et de formation.

Les objectifs de sa stratégie sont :

- Augmenter la performance de l'institut pour les partenariats industriels.
- Accompagner la croissance des PME/ETI[3] de l'édition logicielle.
- Augmenter les interactions avec les leaders mondiaux.
- Assumer le rôle de leader français du transfert technologique dans le domaine logiciel.

[3]PME: Petites et Moyennes Entreprises / ETI : Entreprises de taille intermédiaire

2.1.3 Missions

INRIA a pour rôle de produire une recherche d'excellence dans les champs informatiques et mathématiques des sciences du numérique, et de garantir l'impact, notamment économique et sociétal, de cette recherche.
Ses missions sont principalement [7] :

- Entreprendre des recherches fondamentales et appliquées.
- Réaliser des systèmes expérimentaux.
- Organiser des échanges scientifiques internationaux.
- Assurer le transfert et la diffusion des connaissances et du savoir-faire.
- Contribuer à la valorisation des résultats des recherches.
- Contribuer, notamment par la formation, à des programmes de coopération pour le développement.
- Effectuer des expertises scientifiques.

2.2 INRIA Bordeaux Sud-ouest : Carmen

Le centre de recherche INRIA Bordeaux Sud-Ouest a été créé en 2008 et est implanté à Talence, sur le campus universitaire bordelais. Il compte, aujourd'hui, 21 équipes-projets impliqués dans différents domaines de recherche centrés sur quatre axes principaux :[8]

- Modélisation, calcul intensif et architectures parallèles,
- Gestion des incertitudes et optimisation,
- Modélisation et simulation pour la santé et la biologie
- Humain et numérique : intéraction et visualisation.

Le centre travaille intensément en collaboration avec des acteurs académiques locaux et internationaux tels que : CNRS, INSERM, Université de Bordeaux, Ensta Paris-tech, Institut Hospitalo-Universitaire LYRIC, CHU, Université de São Paulo,... ainsi que des partenaires industriels tels que Total, Thales, Airbus, etc.
Durant mon stage, j'étais affectée à l'équipe **Carmen**, qui effectue des recherches en mathématiques appliquées et en informatique pour simuler l'électrophysiologie cardiaque. Leur objectif principal est d'améliorer notre connaissance et le traitement des pathologies électriques cardiaques en exploitant tous les signaux électriques disponibles.

Dans ce cadre, une collaboration entre **Carmen** et **LAMSIN**, de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis a pour but de développer une plateforme expérimentale permettant de tester différentes méthodes aidant à construire de manière non invasive le potentiel électrique sur la surface cardiaque uniquement à partir des mesures du potentiel électrique sur le torse du patient. Ceci contribue à l'amélioration de l'information que nous pouvons extraire des signaux électriques mesurés sur les patients atteints de maladies cardiaques qui est une priorité majeure pour l'IHU LIRYC, partenaire de ce projet intitulé **EPICARD** [9].

Chapter 3

Étude bibliographique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter une étude bibilographique du problème inverse de l'électrocardiographie. En effet, le but de ce travail est de déterminer le potentiel électrique à la surface du coeur à partir des mesures du potentiel réalisées sur la surface du torse.
À travers ce chapitre, nous essayerons d'une part d'exposer l'anatomie du coeur et son fonctionnement afin de comprendre la génèse du signal électrique qui en provient, ainsi que l'électrocardiogramme qui nous permettra de comprendre l'utilité du signal électrocrdiographique.
D'autre part, le problème inverse et les méthodes de résolution déjà élaborées dans la littérature sont décrits pour pouvoir enfin choisir la méthode la plus adaptée à notre problème.

3.2 Anatomie cardiaque et activité électrique

3.2.1 Le coeur et son fonctionnement

Le coeur est un organe musculaire creux qui assure, le long de la vie d'un être humain, la circulation du sang dans tout l'organisme, en pompant et propulsant le sang dans tout le corps par des contractions rythmiques assurées par trois couches musculaires :[2]

- L'endocarde, une mince membrane tapissant la face interne des cavités où passent les nerfs et les vaisseaux sanguins.

- Le myocarde, tissu musculaire du coeur. Il est assez mince au niveau des oreillettes et s'épaissit en allant vers le bas au niveau des ventricules.

- Le péricarde, c'est la couche externe du coeur formée de deux sous-couches: le péricarde fibreux qui est l'enveloppe externe inélastique et robuste du coeur et le péricarde séreux ou épicarde, formant la paroi interne du péricarde.

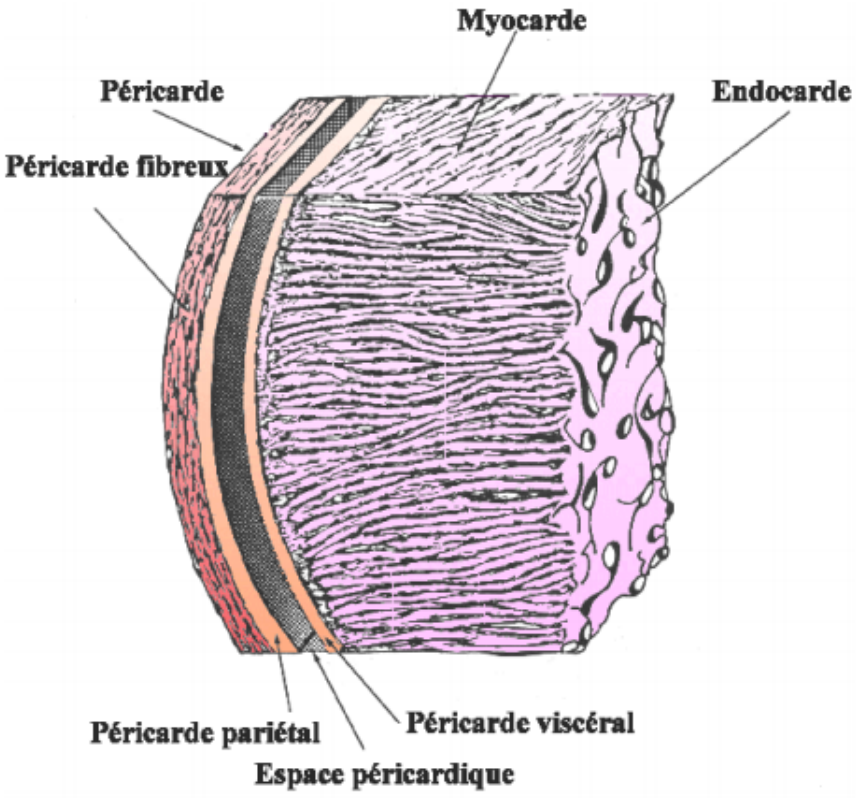


Figure 3.1 – Les tissus cardiaques [2]

Contenu au milieu du cage thoracique, le coeur se situe entre le sternum et la colonne vertébrale, délimité par les poumons sur les cotés gauche et droite.
Comme c'est illustré sur la figure 3.2, il est composé de quatre chambres : deux oreillettes et deux ventricules. Chaque oreillette est connectée au ventricule correspondant formant, chacune, le coeur droit et le coeur gauche. Ces deux cavités sont séparées par une valve qui correspond à la valve mitrale (VM) pour le coeur gauche et la valve tricuspide (VT) pour le coeur droit qui ont pour rôle d'empêcher le sang de revenir dans le mauvais sens, vu que ce dernier circule dans une seul sens.
Ces deux coeurs sont connectés au reste du corps par deux veines caves, supérieure (VCS) et inférieure (VCI) à travers l'oreillette droite (OD). Quant à l'oreillette gauche, elle reçoit le sang par quatre veines pulmonaires, gauches (VPG) et droites (VPD). Le sang est propulsé du ventricule gauche (VG) à travers l'aorte (Ao), et du ventricule droit (VD) en traversant l'artère pulmonaire (AP) [3].

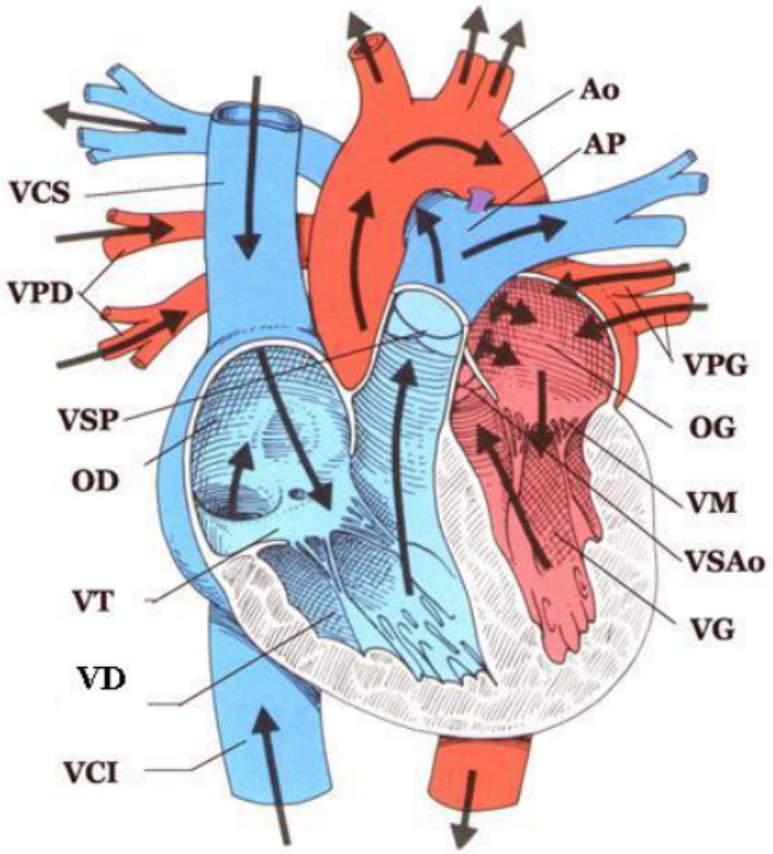


Figure 3.2 – La structure anatomique du coeur [3]

Le coeur possède un système de distribution composé des artères, des veines et des capillaires qui servent de conducteurs. Contrairement aux artères qui transportent le sang du coeur vers les organes, les veines ramènent le sang des organes vers le coeur. Le sang circule en passant par deux circulations, l'une où le coeur est relié seulement par les poumons (la petite circulation) et l'autre à travers laquelle tous les autres organes sont connectés au coeur (la grande circulation). Au niveau de cette dernière, le sang oxygéné part du ventricule gauche, et est expulsé à travers les artères, et le sang chargé de dioxyde de carbone est rentré par les veines vers l'oreillette droite. Quant à la petite circulation, l'artère pulmonaire ramène du sang chargé en dioxyde de carbone sortant du ventricule droit vers les poumons, qui retournent du sang oxygéné conduit par les veines pulmonaires vers l'oreillette gauche.

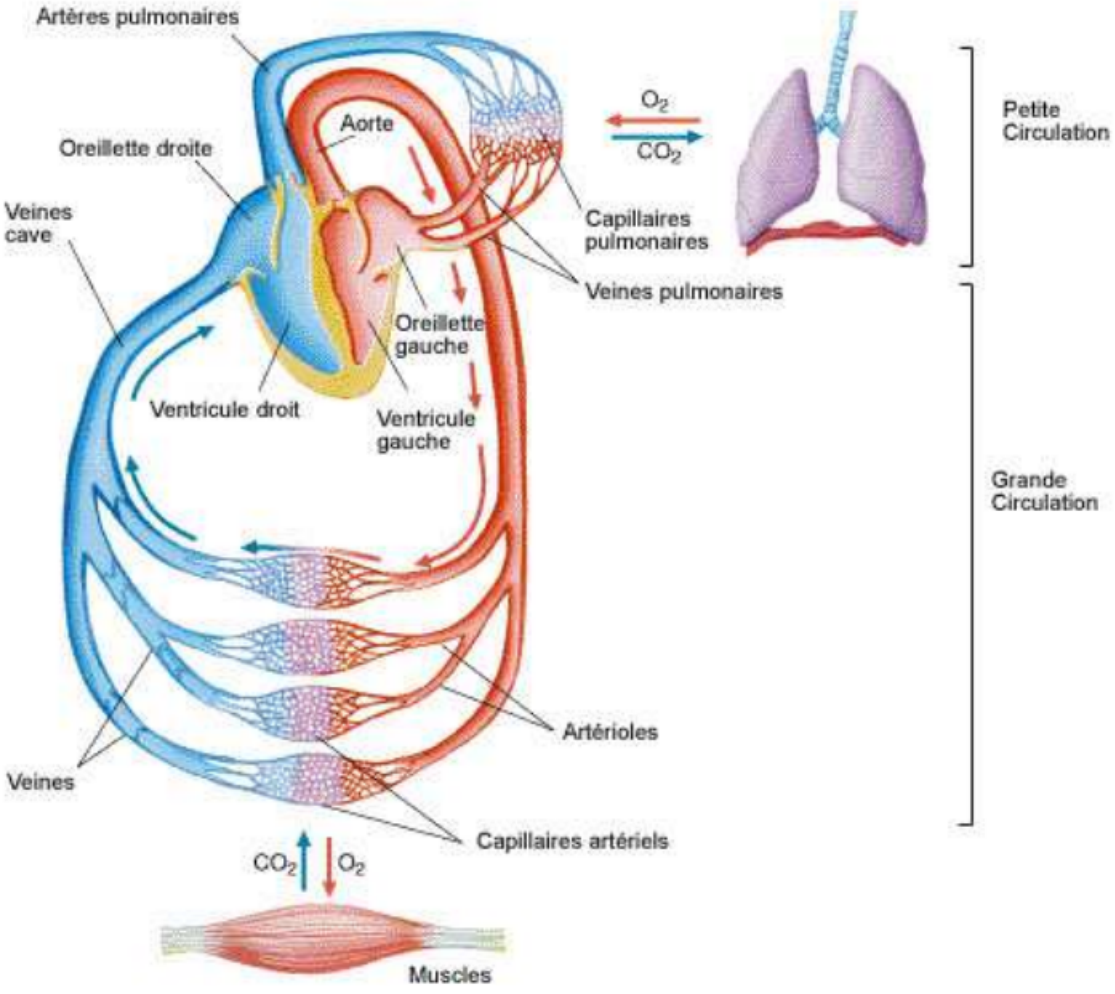


Figure 3.3 – Représentation des petite et grande circulations sanguines [4]

La fréquence cardiaque qui quantifie le nombre de battements du coeur par minute chez un homme en repos est de 60 à 80 battements par minute [10]. Chacun de ces battements entraîne une suite d'évènements appelée cycle cardiaque qui est la succession des phases de contraction (systole) et des phases de relaxation (diastole). En effet, dans un premier temps, les oreillettes sont remplies de sang ce qui y augmente la pression par rapport à la pression ventriculaire et ceci entraîne l'ouverture des valves auriculo-ventriculaires ce qui laisse passer le sang des oreillettes vers les ventricules. Ce passage est renforcé par la contraction des oreillettes. Ensuite, les ventricules commencent à se contracter, leur pression augmente et dépasse la pression auriculaire, les valves auriculo-ventriculaires se referment en produisant le son familier du battement du coeur. La pression n'est pas encore suffisante pour ouvrir les valves de l'aorte et du tronc pulmonaire. Par suite, une contraction isovolumique se lance pour atteindre la pression ventriculaire nécessaire pour ouvrir les valves et permettre l'éjection du sang dans les vaisseaux. Ceci résulte en la réduction du volume des ventricules. Cette phase de contraction s'appelle la systole ventriculaire.

La deuxième phase est marquée par le relâchement des ventricules, la chute de pression dedans et la fermeture des valves. Progressivement, en ayant toutes les valves fermées, la pression chute en dessous de celle des oreillettes qui se sont remplies à nouveau de sang, les valves auriculo-ventriculaires s'ouvrent et on a de nouveau une systole [11].
Cette composante mécanique du rythme cardiaque est engendrée directement par une activité électrique du coeur, l'objet de la partie suivante.

3.2.2 L'activité électrique du coeur

Afin d'assurer une contraction simultanée des cellules myocardiques pour pouvoir créer une pression capable d'expulser le sang hors des cavités, il existe un point de stimulation précis qui permet de déclencher d'une façon périodique le cycle cardiaque, appelé **le noeud sinusal** situé au sommet de l'oreillette droite et un réseau de conduction qui transmet cette stimulation aux différentes cellules myocardiques dans un ordre logique pour provoquer, en premier lieu, la contraction des oreillettes puis des ventricules. Ce système constitue le tissu nodal.

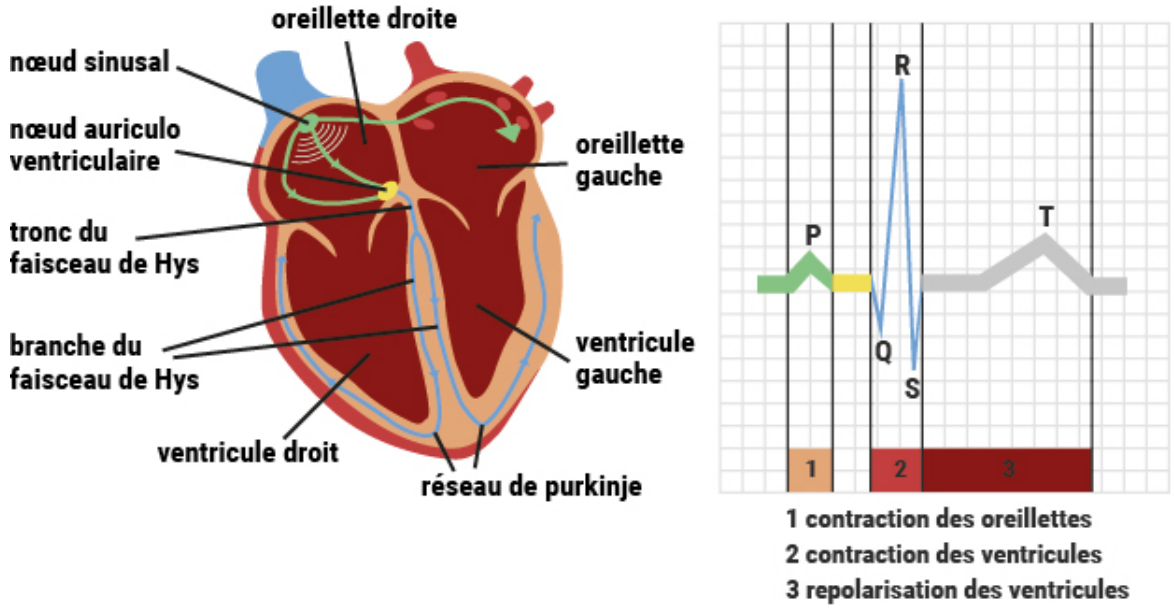


Figure 3.4 – Circuit électrique du coeur [5]

Étant constitué d'un ensemble de cellules capables de fabriquer un courant électrique, le noeud sinusal génère un courant électrique de quelques millivolts qui à son tour, crée un potentiel d'action se transmettant d'une cellule aux cellules voisines. Cette excitation se propage de proche en proche dans les voies de conduction du tissu nodal. En un premier temps, le courant circule dans les deux oreillettes jusqu'à leurs bases provoquant leur contraction, désignée par l'onde **P** sur la figure 3.4. Le segment entre l'onde P et le gros bloc central **QRS** correspond à l'intervalle de temps entre la dépolarisation des

oreillettes et la dépolarisation des ventricules. Il est le témoin du temps nécessaire à la transmission de l'influx électrique du noeud sinusal des oreillettes au tissu myocardique des ventricules. En effet, le bloc central, nommé, **le complexe QRS**, illustre la contraction (dépolarisation) des ventricules droite et gauche et comporte 3 onde [11] :

- Onde Q : première onde négative
- Onde R : onde positive du complexe
- Onde S : deuxième onde négative

La dernière onde (onde T) concerne la relaxation (repolarisation) des ventricules.

3.2.3 L'électrocardiographie

L'électrocardiographie est la technique qui permet de décrire l'activité électrique du coeur à travers le traçage d'électrocardiogrammes, qui en est une représentation graphique obtenue moyennant l'électrocardiographe, un appareil mesurant la différence du potentiel électrique entre différentes positions de la surface du corps. Ces mesures sont obtenues à travers des électrodes placées sur la peau et reliées à un galvanomètre. Elles sont ensuite représentées sur un papier millimétré par un instrument d'enregistrement.

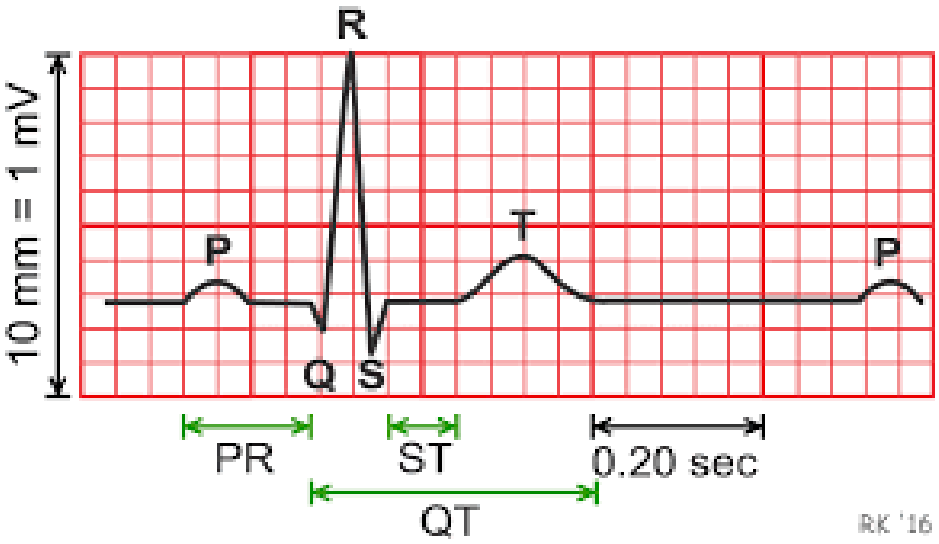


Figure 3.5 – L'ECG d'un cycle cardiaque normal [6]

Ces enregistrements permettent de vérifier l'état du système cardiaque. En effet, la mesure des amplitudes et des durées des ondes électriques permet le diagnostic d'hypertrophie des parois du coeur, de la dilatation des cavités ou de l'absence de dépolarisation dans certaines zones (infarctus du myocarde, etc.). Cet examen permet aussi de diagnostiquer des accélérations anormales du rythme cardiaque (tachycardies) ou des ralentissements

anormaux (bradycardies).[5] Ci-dessous 3 ECGs : le premier représentant une activité électrique normale, le second illustre le début d'une crise de tachycardie et le troisième présente des extrasystoles intermittantes.

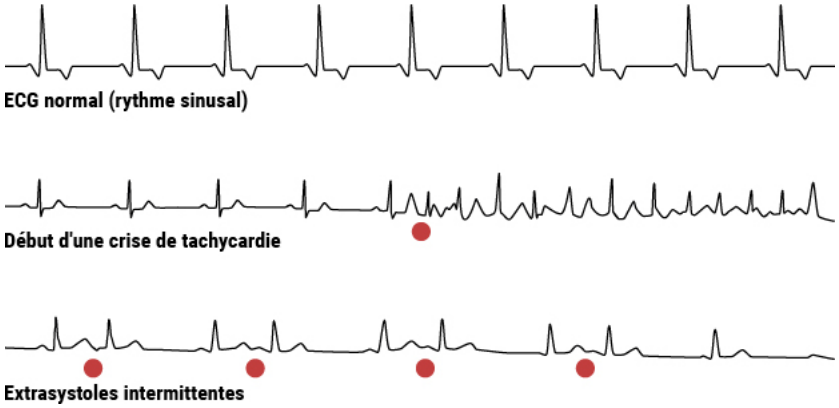


Figure 3.6 – Exemples d'ECG [5]

3.3 Le problème inverse

3.3.1 Définition

D'un point de vue physique ou expérimental, un problème inverse est toute situation où on veut déterminer une certaine grandeur physique inaccessible à l'expérience $\boldsymbol{p}$ à partir d'une autre grandeur physique $\boldsymbol{d}$, elle, accessible à l'expérience, en ayant un modèle mathématique qui illustre le problème direct, c-à-d la détermination de $\boldsymbol{d}$ à partir de $\boldsymbol{p}$. On distingue en général deux types de problèmes inverses :

- Problèmes bien posés : ceux qui ont une solution unique et continue.
- Problèmes mal posés au sens d'Hadamard : Ce sont les problèmes d'inversion où l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution ne sont pas garanties.

Du point de vue physique, ce caractère mal posé provient du fait qu'une mesure de $\boldsymbol{d}$, accompagnée d'un certain niveau d'incertitude , peut correspondre à plusieurs valeurs de p, très éloignées l'une de l'autre. Cette incertitude peut être due à [12] :

- Une erreur de mesure reliée à l'expérience.
- Un nombre fini de mesures engendrant une sous-détermination du problème.
- Un modèle mathématique idéalisé où on a plusieurs hypothèses simplificatrices éloignant le problème de la réalité physique.

3.3.2 Méthodes numériques pour le problème inverse

Les méthodes pour la résolution du problème inverse se répartissent selon Nashed [13] en 3 catégories principales :

- Les méthodes se basant sur l'analyse mathématique et la théorie des fonctions. Elles se contentent de transformer un problème mal posé en un problème bien posé en agissant sur les espaces et leurs topologies définissant les variables et leurs caractéristiques ainsi que les formules d'erreurs. Elles se permettent aussi de rajouter des contraintes globales sur les classes des solutions.

- La régularisation des problèmes mal posés évoquée en premier par Tikhonov. Cette technique cherchera à déterminer une solution régularisée, d'un problème régularisé, qui dépend continûment des données et s'approche de la solution exacte. En d'autres termes, il s'agit de remplacer le problème mal posé par un problème bien posé qui lui est équivalent.

- L'inversion stochastique développée par Tarantola [14] dont le principe est de considérer toutes les variables comme aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La solution du problème inverse est la fonction densité de probabilité associée à l'inconnue $\boldsymbol{p}$ et la mesure $\boldsymbol{d}$, à partir de laquelle on peut chercher des grandeurs caractéristiques : valeur moyenne, valeur de plus grande probabilité, dispersion, corrélations...

3.4 Problème inverse en électrocardiographie

Le problème inverse en électrocardiographie est un problème de complétion de données comme on a mentionné précédemment où on doit déterminer le potentiel à la surface du coeur (source) à partir des mesures réalisées sur la surface du torse (effet). En effet, le coeur peut être considéré comme un volume conducteur contenant un générateur électrique et suspendu dans un volume hétérogène et conducteur, le torse. Au cours du temps, le courant électrique créé au sein du coeur ne cesse de se propager dans le torse jusqu'à atteindre la surface où on peut enregistrer, d'une façon non-invasive, le potentiel électrique qui en résulte. Ce phénomène peut être modélisé mathématiquement par un système d'équations dérivées partielles.
Dans la littérature, plusieurs modèles sont développés pour simuler l'activité électrique du coeur tels que :

- Le modèle dipolaire : Ce modèle a été construit à l'origine par Waller et Eithoven qui ont considéré le coeur comme un dipôle. Il s'agit de reconstruire le vecteur cardiaque

(le moment du dipôle) à partir de mesures de l'ECG en trois points. Comme il est un vecteur tournant, ses caractéristiques permettent de diagnostiquer des anomalies. Pour plus de détails concernant cette approche, nous renvoyons à [15].

- Le modèle Eikonal : Ce modèle est basé sur le suivi de la dynamique du front d'onde de dépolarisation. Ceci se fait en suivant l'évolution des courants ioniques membranaires intervenants dans le cycle du potentiel d'action cellulaires. *Colli-Franzone et al.* ont proposé une analyse générale de ce modèle [16, 17, 18, 19].

- Le modèle bidomaine [4] : Ce modèle est développé à partir des bilans électriques des cellules cardiaques. En effet, le tissu cardiaque est composé de deux milieux, intra-cellulaire pour se referer aux cellules musculaires cardiaques et extra-cellulaire formé par le reste du volume cardiaque. Il s'agit de modéliser l'activité électrique dans chacun des deux domaines en utilisant la loi d'Ohm, vu qu'on les considère comme des milieux conducteurs. Ensuite, on procède à une homogénéisation pour assurer la continuité électrique. Pour plus de détails, on peut se referer à [20].

- Le modèle du Thorax : Dans cette approche, on procède au couplage du modèle du coeur avec un modèle électrique du tissu environnant. Dans ce qui suit, on adopte ce modèle pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie.

3.4.1 Le modèle mathématique du Thorax

Dans ce modèle, on considère le domaine Ω comme le domaine thoracique contenu entre la surface épicardiale et la surface extérieure du torse. Le thorax est considéré dans un état quasi-statique. En effet, il se comporte comme un conducteur passif dont le champ électrique $\boldsymbol{E}$ dérive du potentiel électrique thoracique $\boldsymbol{u}$. En d'autres termes, on a [4] :

$$E = -\nabla u \tag{3.1}$$

Par conséquent, en appliquant la loi d'Ohm, on aura :

$$j = -\sigma \nabla u \qquad dans \quad \Omega \tag{3.2}$$

avec :

- j est la densité volumique du courant électrique dans le thorax

- σ est le tenseur de conductivité du thorax, qui est, conformément à la réalité, très anisotrope.

Vu la complexité de la modélisation de cette anisotropie, on considère dans notre étude le cas de conductivité scalaire. De plus, en réalité, le domaine thoracique est hétérogène, constitué des poumons, la squelette et le reste du tissu musculaire du corps. Comme une hypothèse simplificatrice, on prend le cas homogène où la conductivité est constante.
Le courant étant de divergence nulle (pas de création de charges électriques), le potentiel électrique vérifie l'équation de Laplace dans le domaine Ω:

$$div(\sigma \nabla u) = 0 \qquad dans \quad \Omega \tag{3.3}$$

σ est une constante, par suite, l'équation (3.3) devient :

$$\Delta u = 0 \qquad dans \quad \Omega \tag{3.4}$$

Le bord du domaine Γ est divisé en deux parties, la partie intérieure qui correspond à la surface épicardiale Γ_E et la partie extérieure par référence à la surface extérieure du torse Γ_T. On considère que le torse est entouré par un milieu isolant (l'air) ce qui induit la nullité du flux :

$$\nabla u.n_T = 0 \qquad sur \quad \Gamma_T \tag{3.5}$$

où n_T est la normale unitaire sortante à la surface Γ_T

On rajoute les conditions de Dirichlet qui proviennent des mesures réalisées sur la surface Γ_T. Par conséquent, le système d'équation aux dérivées partielles qui illustre l'activité électrique du coeur s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = u_T(x) & x \in \Gamma_T \\ \nabla u.n_T = 0 & x \in \Gamma_T \end{cases} \tag{3.6}$$

3.4.2 Méthodes numériques

Pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie, les chercheurs en mathématiques et électrophysiologie ont adopté dans leurs revues plusieurs méthodes numériques qui sont bien adaptées au problème et font preuve d'une performance importante. Nous renvoyons vers les travaux de ***Chris R. Johnson et al.*** pour plus de détails concernant la solution basée sur la méthode des éléments finis. Or, pour la plupart des cas d'applications du problème inverse en électrocardiographie, la Méthode des Éléments de Frontière (BEM) est utilisée pour résoudre le problème de complétion des données [21, 22]. Ces deux méthodes ont en commun la nécessité de produire un maillage complet du torse et du coeur, qui sont en réalité des géométries complexes, ce qui peut induire des singularités dans le maillage. De plus, cette étape cruciale de maillage est gourmande en temps et en mémoire de calcul.

À l'instar de ces méthodes, on a eu recours à l'application des méthodes sans maillage comme la méthode des solutions fondamentales adoptée tout au long de ce travail.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté le problème inverse en électrocardiographie de son côté électrophysiologique ainsi que son côté mathématique ce qui nous permet de comprendre au mieux ce phénomène et de bien choisir les outils et les méthodes convenables pour le traiter.
Tout au long de ce travail, on va adopter le modèle du thorax pour modéliser l'activité électrique du coeur sous la forme d'une équation aux dérivées partielles accompagnée de conditions aux limites. Pour résoudre ce dernier, on va étudier la méthode des Solutions Fondamentales présentée comme une méthode simple et optimale pour ce genre de problèmes ce qui va être l'objet de la partie suivante.

Part II

Étude numérique

Chapter 4

MUSIC

4.1 Introduction

Durant la première période de mon stage, je me suis contentée de me familiariser avec le logiciel de traitement d'images médicales MUSIC, qui est un logiciel developpé par l'INRIA dans le but d'améliorer les techniques du diagnostic des anomalies et maladies cardiaques.

4.2 Présentation

MUSIC, pour MUlti-modality platform for Specific Imaging in Cardiology, est une plateforme multimodale pour l'imagerie cardiaque developpée par Inria-Asclepios[1] en collaboration avec IHU-Lyric[2]. Le but est de présenter des fonctionnalités pour améliorer la planification et l'orientation de l'intervention cardiaque [24]. Son développement est basé sur MedInria, une multi platforme de traitement et de visualisation d'images médicales.

[1]Équipe de recherche à Inria Sophia-Antipolis

[2]Liryc est un Institut Hospitalo-Universitaire (IHU) de recherche, de soin, d'innovation et d'enseignement, au service du patient. Il a pour vocation de mieux comprendre et traiter les dysfonctions électriques du coeur [23]

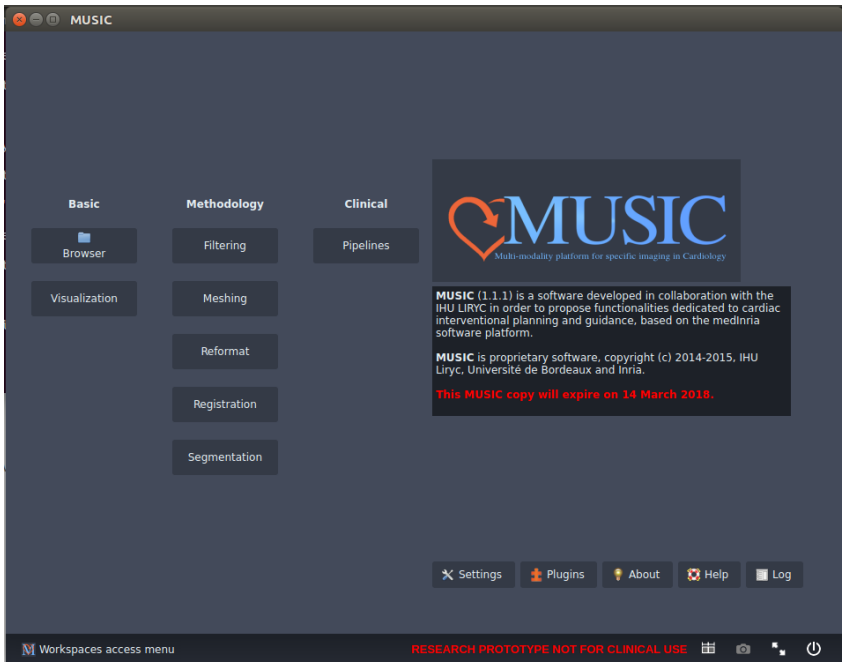


Figure 4.1 – L'interface MUSIC

4.3 Structure et fonctionnalités

Comme on voit sur la figure précédente, MUSIC contient plusieurs fonctions et modules dédiés au traitement des images du type IRM ou CT-Scan tels que :

4.3.1 segmentation

C'est un outil pour la segmentation des images médicales qui consiste en la détection des contours. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont implémentées telles que :

- Polygon ROI : Il s'agit de sélectionner une région d'intérêt (Region Of Interest) polygonale qui permet de découper l'image médicale en plusieurs régions (coeur, poumon, thorax...).

- Paint Segmentation : Cette méthode est utilisée pour sélectionner manuellement une région de l'image CT-Scan ayant une forme non définie.

- Vessel Segmentation : Cette commande permet de segmenter les veines et les vaisseaux sanguins.

4.3.2 filtering

Cet outil sert à appliquer des filtres tels que ceux de la bibilothèque ITK [3], des filtres de débruitage d'images ou encore des outils de masques (OR, XOR, NOT, AND).

4.3.3 meshing

Cette fonction encapsule plusieurs outils de traitement ou de création de maillage. En effet, on peut effectuer des transformations géométriques (rotation/translation) sur des maillages, modifier leurs paramètres pour effectuer un raffinement. De plus, des outils sont disponibles pour récupérer des informations du maillage.

4.3.4 reformat

Ce toolbox permet de modifier les images médicales en appliquant un rognage, une fusion, un redimensionnement..., des opérations de pré-traitement permettant d'améliorer la qualité des images médicales.

4.3.5 pipelines

Cette fonction du logiciel permet de traiter des images médicales selon une démarche spécifique en utilisant les différents outils mentionnés précédemment. Elle comporte 4 séquences de commandes distinguées selon le type de problème cardiaque à traiter. En effet on a :

- le module Ventricular Tachycardia
- le module Torso geometry
- le module Atrial Fibrillation
- le module Arrythmogenic right ventricular cardiomyopathy

Ci-après, la figure 4.2 représente un exemple de l'output de la pipeline Torso geometry. On observe des maillages du coeur, des poumons et du torse distingués l'un de l'autre par les couleurs. Les points bleus représentent les positions des électrodes du gilet de mesures.

[3]ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit) est une bibliothèque logicielle libre de classes C++ de traitement d'image. Elle contient des algorithmes de recalage d'image, de filtrage et de segmentation. Elle a été créée dans le but d'analyser toute sorte d'images médicales [25]

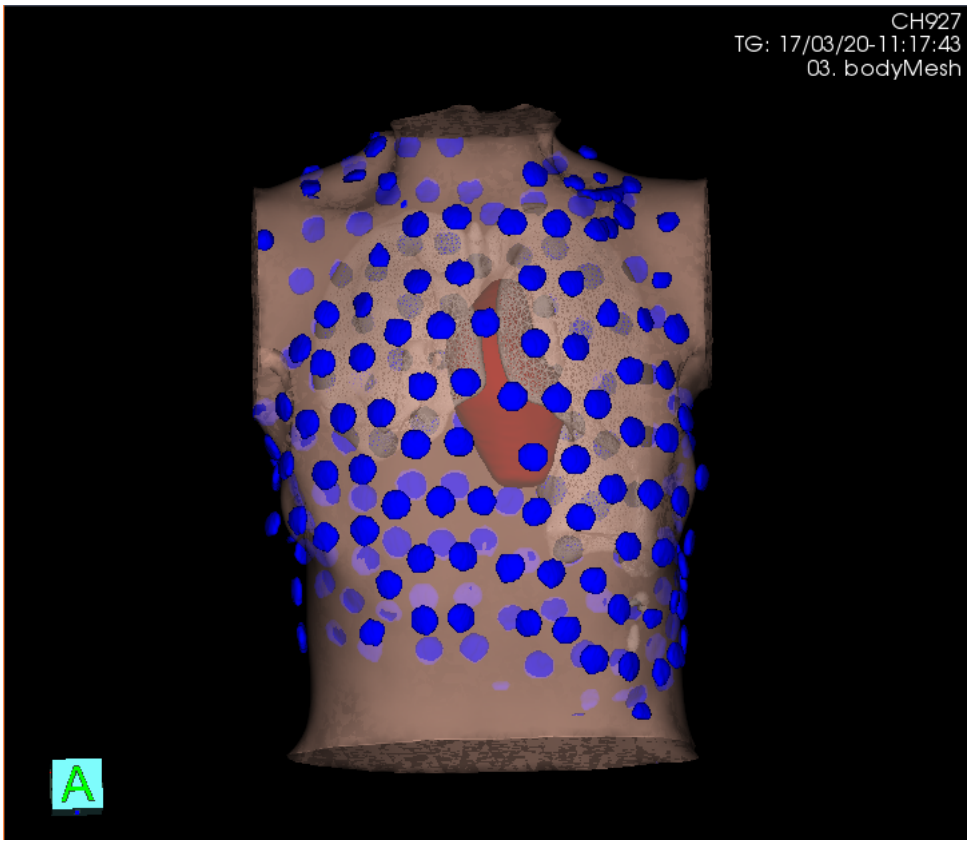


Figure 4.2 – Exemple de traitement par pipeline avec le logiciel MUSIC

4.4 Conclusion

Vu son caractère généraliste, la maîtrise de MUSIC est considérée comme une initiation à l'électrocardiographie où j'ai découvert l'anatomie du coeur, son rôle et son fonctionnement d'une part et d'autre part, ceci a suscité ma curiosité pour étudier les différentes méthodes utilisées pour le traitement d'images du côté mathématique et algorithmique. Enfin, cette tâche était un tremplin pour aborder la partie principale de mon stage qui consiste à développer une méthode numérique permettant de déterminer le potentiel électrique à la surface du coeur à partir de mesures réalisées sur la surface du torse, qui sera intégrée dans le logiciel MUSIC.

Chapter 5

La méthode des solutions fondamentales

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va utiliser une méthode numérique pour la résolution du problème inverse, sur laquelle plusieurs chercheurs ont travaillé appliquée à différents domaines. Il s'agit de la Méthode des Solutions Fondamentales. Cette dernière est reconnue comme une méthode numérique simple qui ne nécessite pas un maillage complexe de tout le domaine d'étude mais seulement de son surface. Ceci contribue à l'allègement du temps de calcul et de la complexité des outils informatiques nécessaires au calcul tout en offrant une performance qui égalise et dépasse parfois les méthodes connues comme la méthode des Éléments de Frontière. Cette constatation est le fruit de nombreux travaux de recherche parmi lesquels on cite l'article de **Yong Wang** et **Yoram Rudy** intitulé "**Application of the method of fundamental solutions to potential-based inverse electrocardiography**" [26] sur lequel on s'est basé pour développer la partie suivante.
La première partie est consacrée à l'étude de la Méthode des Solutions Fondamentales en conjonction avec la régularisation de Tikhonov. Quant à la deuxième partie, on étudiera une deuxième technique de régularisation introduite par **Alain Cimetière** et **Franck Delvare** appelée régularisation évanescente [27].

5.2 La méthode des solutions fondamentales en utilisant la régularisation de Tikhonov

5.2.1 Principe de la méthode

Le but de l'électrocardiographie inverse est de déterminer le potentiel électrique à la surface épicardiale à partir des mesures du potentiel réalisées à la surface du torse. Ceci se traduit par un problème de Cauchy pour le Laplacien :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = u_T(x) & x \in \Gamma_T \text{ la surface du torse} \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = c_T(x) & x \in \Gamma_T \end{cases} \tag{5.1}$$

Où :

- Ω est le domaine tridimensionnel entre la surface du torse Γ_T et la surface de l'épicarde Γ_E.
- $u(x)$ est le potentiel électrique au point x de Ω.
- $u_T(x)$ et $c_T(x)$ sont respectivement le potentiel et sa dérivée normale à la surface du torse.

Le principe de la méthode est d'approcher la solution de l'équation aux dérivées partielles par une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'opérateur différentiel qui est, dans notre cas, le Laplacien calculées en un ensemble de points appelés **points sources virtuels** localisés sur **une surface auxiliaire** du domaine $\hat{\Omega}$ contenant le domaine d'étude Ω comme le montre la figure ci-dessous.

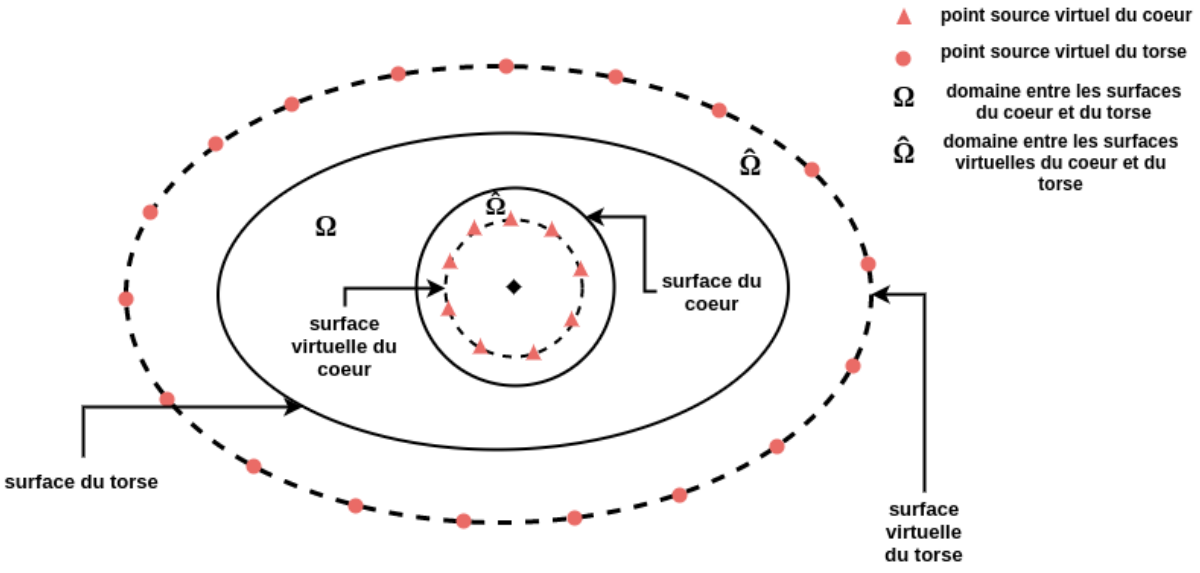


Figure 5.1 – Configuration de la surface virtuelle

Cette surface auxiliaire est obtenue en suivant une technique qui s'appelle la technique de l'inflation-déflation expliquée un peu plus loin.
La solution fondamentale du Laplacien peut être obtenue par la résolution de l'équation suivante :

$$\nabla^2 f(r) = \delta(r) \tag{5.2}$$

où :

- δ est la distribution de Dirac
- $r = \| x - y \|$ est la distance euclidienne tridimensionnelle entre deux points x et y de Ω.

$f(r)$ a pour expression en 3D :

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{5.3}$$

Soit le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = b(x) & x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

L'approche de la représentation intégrale de la solution du système donne l'équation suivante :

$$u(x) = \int_{\widehat{\Gamma}} f(\| x - y \|) e(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad y \in \widehat{\Gamma} \tag{5.5}$$

où $\widehat{\Gamma}$ est la surface du domaine auxiliaire $\widehat{\Omega}$ contenant Ω.
On observe que la méthode des Solutions Fondamentales est très similaire à la méthode des Éléments de Frontière sauf que cette dernière calcule les intégrales sur des éléments de la surface réelle Γ qui peut contenir des artéfacts dûs à l'application du maillage à une surface réelle complexe. Ceci engendrera soit le calcul d'intégrales singulières soit la nécessité d'optimiser le maillage qui est une tâche gourmande en temps de calcul et qui demande parfois une intervention manuelle.
La méthode des Solutions Fondamentales présente une alternative qui permet de résoudre ce problème en ramenant le calcul vers des points sources placés sur une surface virtuelle qui nous évite le calcul d'intégrales singulières complexes.
L'écriture de la condition aux limites selon la représentation intégrale donne l'équation suivante :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} f(\| x - y \|) e(y) dy = b(x), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \widehat{\Gamma} \tag{5.6}$$

où $e(y)$ est une distribution de densité à déterminer. La représentation intégrale de la condition aux limites implique l'existence d'un nombre infini de points sources sur la surface $\widehat{\Gamma}$. Pour pouvoir appliquer des méthodes numériques, il faut évidemment discrétiser $e(y)$. Pour ce faire, on utilise l'approximation de Gauss, selon laquelle, on a :

$$e(y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi_i(y), \quad y \in \widehat{\Gamma} \tag{5.7}$$

où $\psi_i(y)$ est une série de fonctions bien définies sur $\widehat{\Gamma}$
Si on remplace $e(y)$ dans (5.6) par l'expression (5.7), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_{\widehat{\Gamma}} f(\parallel x_k - y \parallel)\Psi_i(y)dy = b(x_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad y \in \widehat{\Gamma} \tag{5.8}$$

avec N est le nombre de points de la surface Γ.
Vu que la surface $\widehat{\Gamma}$ est située à l'extérieur du domaine Ω, la fonction $f(\parallel x - y \parallel)$ ne représente plus des singularités et les règles de la quadrature de Gauss peuvent s'appliquer donnant :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} f(\parallel x_k - y \parallel)\Psi_i(y)dy \approx \sum_{j=1}^{M} \omega_j f(\parallel x_k - y_j \parallel)\Psi_i(y_j), \quad y_j \in \widehat{\Gamma}, \quad j = 1, 2, ..., M \tag{5.9}$$

Où :

- w_j est un facteur de pondération
- M est le nombre de points de la surface limite virtuelle $\widehat{\Gamma}$

À partir des deux dernières équations (5.8) et (5.9), on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \sum_{j=1}^{M} \omega_j f(\parallel x_k - y_j \parallel)\Psi_i(y_j) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi_i(y_j)\right] f(\parallel x_k - y_j \parallel) = b(x_k), \quad 1 \leq k \leq N \tag{5.10}$$

Par suite,

$$\sum_{j=1}^{M} a_j f(\parallel x_k - y_j \parallel) = b(x_k), \quad 1 \leq k \leq N \tag{5.11}$$

Avec :

$$a_j = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Psi_i(y_j) \tag{5.12}$$

Pour des raisons physiques concernant la non nullité de la fonction u sur les bords, on rajoute une constante a_0 à l'équation (5.11) :

$$a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j f(\parallel x_k - y_j \parallel) = b(x_k), \quad 1 \leq k \leq N \tag{5.13}$$

La résolution de l'équation (5.13) permet de déterminer une solution approchée du Laplacien définie par :

$$u_a(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j f(\| x - y_j \|), \quad x \in \Omega, \quad y_j \in \widehat{\Gamma} \tag{5.14}$$

Pour le problème de Cauchy en électrocardiographie, on a, mis à part la condition de Dirichlet, une condition de Neumann:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = c_T(x), \quad x \in \Gamma_T \tag{5.15}$$

Dans ce cas, on peut utiliser la MFS pour discrétiser les deux conditions Neumann et Dirichlet comme suit :

Condition de Dirichlet :

$$a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i f(\| x_k - y_i \|) = u_T(x_k) \qquad 1 \leq k \leq N,\ x_k \in \Gamma_T,\ y_i \in \widehat{\Gamma} \tag{5.16}$$

Condition de Neumann :

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\partial f(\| x_k - y_i \|)}{\partial n} = c_T(x_k) = 0 \qquad 1 \leq k \leq N,\ x_k \in \Gamma_T,\ y_i \in \widehat{\Gamma} \tag{5.17}$$

Où :

- n est la normale à la surface du torse
- Les coefficients a_i quantifient la condutivité du volume.
- M est le nombre des points sources virtuels et N est le nombre des points sources de la surface du torse.
- $\widehat{\Gamma}$ est la surface du domaine auxiliaire $\widehat{\Omega}$ comme il est représenté sur la figure ci-dessus.

On remarque que dans l'équation (5.17), $c_T(x_k) = 0$. Ceci est dû à la physique du problème où le torse est en contact avec l'air, un milieu isolant, d'où la nullité du flux de potentiel à la surface du torse.

5.2.2 Détermination de la surface auxiliaire

Malgré la simplicité de la Méthode des Solutions Fondamentales, son développement provoque plusieurs interrogations parmi lesquelles on parle du choix des points sources virtuels. Dans la littérature, deux méthodes sont présentées comme les plus performantes : une méthode dynamique et une méthode statique.

Suivant l'approche dynamique, les points sources virtuels sont déterminés simultanément avec la solution moyennant un algorithme complexe d'optimisation non linéaire qui est évalué comme gourmand en mémoire et en temps. Concernant l'approche statique adoptée dans notre cas, les points sources virtuels sont fixés à partir des points sources réels placés sur la surface réelle du domaine d'étude et selon une liste de critères bien déterminés qui correspond, à présent, à la règle de l'inflation et déflation. En effet, cette technique était développée et approuvée à partir des expériences réalisées à l'aide d'un dispositif appelé torse-réservoir ayant la forme humaine et qui fournit des mesures du potentiel épicardial utilisés comme référence pour évaluer différents résultats [28].
Cette technique consiste en l'inflation de la surface extérieure, associée à la surface du torse, d'un facteur 1.2 relativement au centre de la géormétrie intérieure, par référence au coeur, et la déflation de la surface de ce dernier avec un facteur de 0.8. Ces facteurs ont été fixés empiriquement [26].
Cette approche est estimée efficace et performante grâce au caractère convexe de la surface épicardiale. En effet, il faut toujours vérifier que la surface virtuelle englobe la surface réelle du domaine. Elle n'est sûrement pas la méthode optimale mais elle a fait preuve d'une précision importante et d'une facilité d'implémentation remarquable dans la résolution de problèmes d'ingénierie en utilisant MFS.

5.2.3 Écriture en système linéaire

Après avoir discrétisé les conditions aux limites, les expressions obtenues (5.16) et (5.17) s'écrivent sous la forme d'un système linéaire comme suit :

$$\widehat{A}a = b \tag{5.18}$$

tel que :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & f(\| x_1 - y_1 \|) & \cdots & f(\| x_1 - y_M \|) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & f(\| x_N - y_1 \|) & \cdots & f(\| x_N - y_M \|) \\ 0 & \dfrac{\partial f(\| x_1 - y_1 \|)}{\partial n} & \cdots & \dfrac{\partial f(\| x_1 - y_M \|)}{\partial n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{\partial f(\| x_N - y_1 \|)}{\partial n} & \cdots & \dfrac{\partial f(\| x_N - y_M \|)}{\partial n} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} u_T(x_1) \\ \vdots \\ u_T(x_N) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

$\widehat{A}$ est une matrice de taille $2N * (M + 1)$, a et b sont deux vecteurs de dimensions respectivement $M + 1$ et $2N$, avec M est le nombre des points sources virtuels et N est le nombre des points sources sur la surface extérieure.

Vu le caractère malconditionné de la matrice du problème $\widehat{A}$ et l'erreur de mesure que peut contenir les mesures du potentiel à la surface extérieure qui font du système linéaire (5.18) un problème mal-posé au sens d'Hadamard, on doit faire recours à une méthode de régularisation qui nous permettra d'obtenir un système linéaire équivalent, inversible et ayant une solution unique. Pour ce faire, on introduira un peu plus loin la régularisation de Tikhonov qui servira à la stabilisation du système linéaire et assurera sa convergence.

Une fois qu'on a déterminé les coefficients du vecteur a, le calcul du potentiel à n'importe quel point du domaine obéit à l'expression suivante :

$$u(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j f(\| x - y_j \|) \qquad x \in \Omega, \qquad y_j \in \widehat{\Gamma} \tag{5.21}$$

Par suite, le potentiel à la surface de l'épicarde peut être calculé en utilisant la même formule :

$$u_E(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j f(\| x - y_j \|) \qquad x \in \Gamma_E, \qquad y_j \in \widehat{\Gamma} \tag{5.22}$$

5.2.4 La régularisation de Tikhonov

La résolution du système linéaire (5.18) est équivalente à la résolution d'un problème de minimisation de la forme :

$$\underset{a \in \mathbb{R}^n}{min} \|\widehat{A}a - b\| \tag{5.23}$$

La régularisation de Tikhonov permet de déterminer une approximation de la solution a en remplaçant le problème de minimisation (5.23) par un problème de moindre carré avec une pénalisation de la forme :[29]

$$\underset{a \in \mathbb{R}^n}{min} \{\|\widehat{A}a - b\|^2 + \|L_\mu a\|^2\} \tag{5.24}$$

L_μ est une matrice appelée matrice de régularisation et en général, elle est prise égale à μI avec I est la matrice identité et $\mu > 0$ est un paramètre de régularisation à préciser.

Le problème s'écrit désormais comme suit :

$$\underset{a\in\mathbb{R}^n}{min}\{\|\widehat{A}a-b\|^2+\mu^2\|a\|^2\} \tag{5.25}$$

Comme tout problème de minimisation sans contraintes, le minimum est atteint pour un gradient nul du critère de la minimsation. Par suite, le minimum recherché a_μ vérifie :

$$\langle\nabla J_\mu(a_\mu),\phi\rangle=0 \qquad \forall\phi\in\mathbb{R}^n \tag{5.26}$$

avec $J_\mu(x)=\|\widehat{A}x-b\|^2+\mu^2\|x\|^2$
En effet :

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= \|\widehat{A}x-b\|^2+\mu^2\|x\|^2 \\ &= \langle\widehat{A}x-b,\widehat{A}x-b\rangle+\lambda\langle x,x\rangle \end{aligned} \tag{5.27}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \langle\nabla J_\mu(a_\mu),\phi\rangle &= 2\langle\widehat{A}a_\mu-b,\widehat{A}\phi\rangle+2\lambda\langle a_\mu,\widehat{A}\phi\rangle \qquad \forall\phi\in\mathbb{R}^n \\ &= 2\langle\widehat{A}^T\{\widehat{A}a_\mu-b\},\phi\rangle+2\lambda\langle\widehat{A}^Ta_\mu,\phi\rangle \end{aligned} \tag{5.28}$$

En appliquant l'équation (5.26), tout calcul fait donne un système linéaire à résoudre de la forme :

$$\left[\widehat{A}^T\widehat{A}+\lambda I\right]a_\mu=\widehat{A}^Tb \tag{5.29}$$

avec $\lambda=\mu^2$

5.2.5 Choix du paramètre de régularisation λ

Dans la littérature, plusieurs méthodes sont élaborées pour déterminer la valeur optimale du paramètre de régularisation pour un problème inverse telque la méthode L-curve, la plus utilisée, qui consiste à tracer la courbe de variation du résidu $\|Aa_\lambda-b\|_2$ sur l'axe des abscisses et la courbe de variation de la norme euclidienne de la solution $\|a_\lambda\|_2$ sur l'axe des ordonnées à l'échelle logarithmique. Cette courbe a l'allure de la lettre L, d'où le nom de la méthode. La valeur optimale de λ correspond au coin de la courbe.
Dans notre cas, on s'est contenté de déterminer λ empiriquement en effectuant plusieurs simulations.

5.3 La méthode des solutions fondamentales en utilisant la régularisation évanescente

5.3.1 La régularisation évanescente

On part du même problème :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = \phi_d(x), & x \in \Gamma_d \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \psi_d(x), & x \in \Gamma_d \end{cases} \tag{5.30}$$

avec : Ω est le domaine de calcul et $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_u$ est le bord du domaine Ω
Tout d'abord, on définit l'espace des solutions de l'équation de Laplace :

$$H(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \right\} \tag{5.31}$$

$H(\Omega)$ est un espace de Hilbert. D'où, on définit les dérivées normales des fonctions appartenant à cet espace comme des fonctions de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par suite, l'espace des données compatibles se définit comme :

$$H(\Gamma) = \left\{ \chi = (\phi, \psi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \exists v \in H(\Omega) \mid v_{|\Gamma} = \phi \; et \; \partial_n v_{|\Gamma} = \psi \right\} \tag{5.32}$$

$H(\Gamma)$ est un sous-espace fermé de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, d'où on peut le considérer comme un espace de Hilbert quand il est muni du produit scalaire suivant :

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_\Gamma = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{-\frac{1}{2},\Gamma} \tag{5.33}$$

On définit aussi l'espace $H(\Gamma_d)$, contenant la restriction des éléments de $H(\Gamma)$ sur Γ_d tel que si $\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}$, sa restriction γ_d vérifie :

$$\langle \gamma_d, \theta_d \rangle = \left\langle \gamma, \tilde{\theta}_d \right\rangle \qquad \forall \theta_d \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\gamma_d) \quad et \; \tilde{\theta}_d \text{ est le prolongement de } \theta_d \text{ sur } \Gamma \text{ par des zéros} \tag{5.34}$$

Une formulation équivalente du problème (5.30) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} Trouver \; V = (U, U') \in H(\Gamma) \; tel \; que : \\ V = \tilde{V} \quad sur \; \Gamma_d \\ \tilde{V} = (\phi_d, \psi_d) \end{cases} \tag{5.35}$$

Comme on a mentionné précédemment, ce problème est mal posé au sens d'Hadamard. Par conséquent, une régularisation doit être appliquée pour avoir un problème bien posé et stable. Dans ce cas, on va introduire la régularisation évanescente.

L'idée générale est de résoudre un problème d'optimisation ayant une fonction coût définie comme suit :

$$J_\lambda(V) = \|V - \tilde{V}\|^2_{\Gamma_d} + \lambda \|V - \Phi\|^2_{\Gamma} \tag{5.36}$$

avec :

- $\lambda > 0$ est un paramètre de régularisation
- $\Phi \in H(\Gamma)$ est une fonction gabarit qui intervient dans le terme de régularisation

Le terme $\|V - \Phi\|^2_{\Gamma}$ est défini sur tout le bord et il est considéré comme un terme de régularisation. En effet, suite à son introduction, le problème devient bien posé au sens d'Hadamard. Pour obtenir une solution indépendante des paramètres λ ou Φ, il suffit d'utiliser un algorithme de régularisation itératif où Φ à l'itération k est prise égale à la solution du problème à l'itération $k-1$. Par conséquent, on est face à un problème où la solution est le point fixe d'un opérateur défini sur le bord Γ.
L'algorithme de résolution du problème (5.35) prend la forme suivante :

algorithme 1 Régularisation évanescente

Initialisation $U^0 = 0$
for $k \geq 1$ **do**
Résoudre le problème de minimisation suivant :
Trouver $U^k \in H(\Gamma)$ tel que :
$J^{k-1}_\lambda(U^k) \leq J^{k-1}_\lambda(V) \; \forall \; V \in H(\Gamma)$
où $J^{k-1}_\lambda(V) = \|V - \tilde{V}\|^2_{\Gamma_d} + \lambda \|V - U^{k-1}\|^2_{\Gamma}$
end for

5.3.2 La méthode des solutions fondamentales en conjonction avec la régularisation évanescente

En utilisant la régularisation évanescente, à chaque itération, on calcule une approximation des données sur le bord connues et inconnues. En effet, pour formuler le système à résoudre, on doit écrire l'approximation par les solutions fondamentales des données de Dirichlet et Neumann ainsi que les conditions de Dirichlet et Neumann sur les bords qu'on

cherche à déterminer. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
u(x_j) &= a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i f(\parallel x_j - y_i \parallel) \qquad x_j \in \Gamma_d, j = 1...N \quad y_i \in \widehat{\Gamma}, i = 1...M \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x_j) &= \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel x_j - y_i \parallel) \qquad x_j \in \Gamma_d, j = 1...N \quad y_i \in \widehat{\Gamma}, i = 1...M \\
u(z_j) &= a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i f(\parallel z_j - y_i \parallel) \qquad z_j \in \Gamma_u, j = 1...L \quad y_i \in \widehat{\Gamma}, i = 1...M \\
\frac{\partial u}{\partial n}(z_j) &= \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel z_j - y_i \parallel) \qquad z_j \in \Gamma_u, j = 1...L \quad y_i \in \widehat{\Gamma}, i = 1...M
\end{aligned} \tag{5.37}$$

À partir de ces expressions, on obtient un système linéaire de la forme :

$$Aa = b \tag{5.38}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & f(\parallel x_1 - y_1 \parallel) & \cdots & f(\parallel x_1 - y_M \parallel) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & f(\parallel x_N - y_1 \parallel) & \cdots & f(\parallel x_N - y_M \parallel) \\
0 & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel x_1 - y_1 \parallel) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel x_1 - y_M \parallel) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel x_N - y_1 \parallel) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel x_N - y_M \parallel) \\
1 & f(\parallel z_1 - y_1 \parallel) & \cdots & f(\parallel z_1 - y_M \parallel) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & f(\parallel z_L - y_1 \parallel) & \cdots & f(\parallel z_L - y_M \parallel) \\
0 & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel z_1 - y_1 \parallel) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel z_1 - y_M \parallel) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel z_L - y_1 \parallel) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial n}(\parallel z_L - y_M \parallel)
\end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} \; et \; b = \begin{pmatrix} \phi_d(x_1) \\ \vdots \\ \phi_d(x_N) \\ \psi_d(x_1) \\ \vdots \\ \psi_d(x_N) \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

En appliquant la régularisation évanescente, on obtient un autre système linéaire. En effet, la fonctionnelle J_λ à minimiser s'écrit à chaque itération comme suit :

$$J_\lambda^k(a) = \parallel Aa^k - b \parallel_{\Gamma_d}^2 + \lambda \parallel Aa^k - Aa^{k-1} \parallel_{\Gamma}^2 \tag{5.40}$$

En terme de produit scalaire, l'expression précédente devient :

$$J_\lambda^k(a) = \langle Aa^k - b, Aa^k - b \rangle_{\Gamma_d} + \lambda \langle Aa^k - Aa^{k-1} \rangle_{\Gamma} \tag{5.41}$$

On peut montrer qu'on a :

$$\langle Aa^k - b, Aa^k - b\rangle_{\Gamma_d} = \langle (Aa^k)_{|\Gamma_d} - b, (Aa^k)_{|\Gamma_d} - b\rangle_{\Gamma} \tag{5.42}$$

Par suite :

$$J_\lambda^k(a) = \langle (Aa^k)_{|\Gamma_d} - b, (Aa^k)_{|\Gamma_d} - b\rangle_{\Gamma} + \lambda\langle Aa^k - Aa^{k-1}\rangle_{\Gamma} \tag{5.43}$$

En étant la matrice d'un opérateur linéaire, la restriction de A sur Γ_d est égale à un bloc de la matrice A qui contient les coefficients représentant les conditions au bord Γ_d qu'on note A_{Γ_d}. Par suite :

$$A_{\Gamma_d} = \begin{pmatrix} 1 & f(\| x_1 - y_1 \|) & \cdots & f(\| x_1 - y_M \|) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & f(\| x_N - y_1 \|) & \cdots & f(\| x_N - y_M \|) \\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial n}(\| x_1 - y_1 \|) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial n}(\| x_1 - y_M \|) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial n}(\| x_N - y_1 \|) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial n}(\| x_N - y_M \|) \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

la fonction coût J_λ s'écrit désormais :

$$J_\lambda^k(a) = \langle A_{\Gamma_d}a^k - b, A_{\Gamma_d}a^k - b\rangle_{\Gamma} + \lambda\langle Aa^k - Aa^{k-1}\rangle_{\Gamma} \tag{5.45}$$

Le minimum est obtenu en calculant le gradient et déterminant la solution a pour laquelle $\nabla J_\lambda(a) = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_\lambda^k(a), \zeta\rangle_\Gamma = 2\langle A_{\Gamma_d}a^k - b, A_{\Gamma_d}\zeta\rangle_\Gamma + 2\lambda\langle Aa^k - Aa^{k-1}, A\zeta\rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \zeta \in H(\Gamma) \\ \Rightarrow \quad \langle A_{\Gamma_d}^T(A_{\Gamma_d}a^k - b), \zeta\rangle_\Gamma + \lambda\langle A^T(Aa^k - Aa^{k-1}), \zeta\rangle_\Gamma = 0 \\ \Rightarrow \quad \langle A_{\Gamma_d}^T(A_{\Gamma_d}a^k - b) + \lambda A^T(Aa^k - Aa^{k-1}), \zeta\rangle_\Gamma = 0 \\ \Rightarrow \quad A_{\Gamma_d}^T(A_{\Gamma_d}a^k - b) + \lambda A^T(Aa^k - Aa^{k-1}) = 0 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Par conséquent, le système linéaire régularisé à résoudre à chaque itération est de la forme :

$$(A_{\Gamma_d}^T A_{\Gamma_d} + \lambda A^T A)a^k = A_{\Gamma_d}^T b + \lambda A^T A a^{k-1} \tag{5.47}$$

5.3.3 Critère d'arrêt

Le choix du critère d'arrêt de l'algorithme est basé sur le principe de Morozov [30]. Pour ce faire, on introduit l'expression de l'erreur suivante :

$$E_k = \|U^k - \tilde{V}\|_2 \tag{5.48}$$

tel que :

- $U^k = A_{\Gamma_d} a^k$ le vecteur des conditions de Dirichlet et Neumann sur Γ_d calculées à l'itération k.

- $\|.\|_2$ est la norme euclidienne

Le principe suivi affirme que l'algorithme s'arrête à l'itération optimale k_{opt} où l'erreur de convergence définie par (5.48) est du même ordre que le bruit qui sera rajouté aux conditions aux limites quantifié par la formule suivante :

$$\epsilon = \|\tilde{V} - \tilde{V}^{\epsilon}\| \tag{5.49}$$

où $\tilde{V}^{\epsilon}$ est le vecteur des conditions aux limites bruitées.
En somme,

$$k_{opt} = \{\min k \geq 1 \mid E_k \leq \epsilon\} \tag{5.50}$$

5.4 Résolution analytique

Avant de procéder à l'application de la méthode sur le problème inverse de l'électrocardiographie, on a choisi d'utiliser une solution analytique du problème de Cauchy pour tester la méthode et évaluer sa performance. Dans ce qui suit, on va définir notre domaine de calcul qui rapproche, entre autre, la géormétrie du coeur et du torse. Ensuite, on va déterminer la solution analytique vérifiée dans ce domaine.

5.4.1 Définition du domaine

L'analyse de stabilité et convergence de la méthode des Solutions Fondamentales menée par Cheng [31] affirme que la méthode converge exponentiellement vers la solution du problème pour des bords et des conditions de bords représentés par des fonctions lisses en 2D. Ceci est confirmé par Golberg et Chen [32] en 3D.
Pour cela, on va résoudre le problème de Cauchy dans le domaine exprimé par :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid R_{int} \leqslant \|x\| \leqslant R_{ext}\} \tag{5.51}$$

tel que $R_{int} = 1$ et $R_{ext} = 1.5$.
En d'autres termes, on peut dire qu'on a rapproché le coeur et le torse par des sphères et le domaine à étudier serait l'espace contenu entre les deux surfaces intérieures et extérieures des sphères comme représenté sur la figure ci-après:

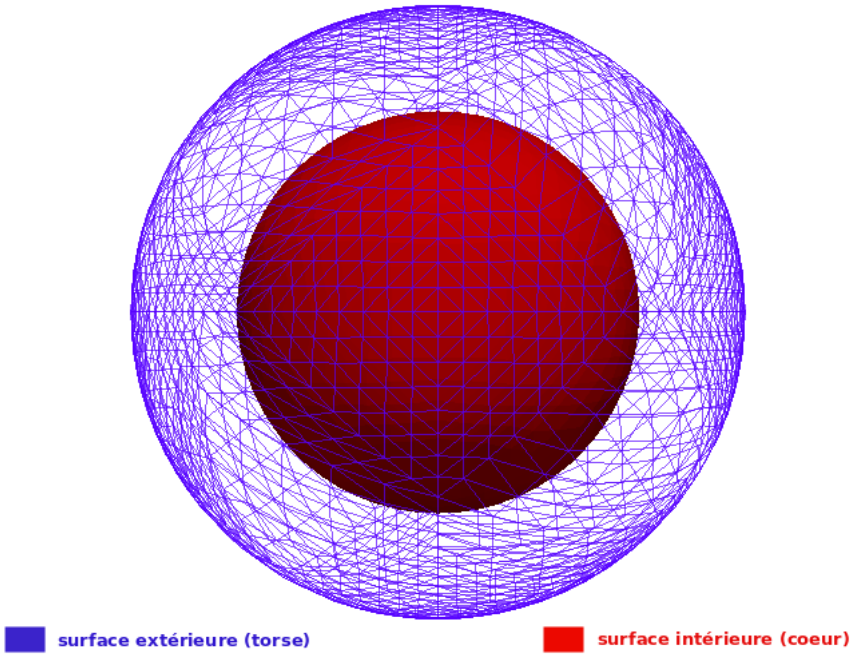


Figure 5.2 – Domaine du test

5.4.2 Solution analytique

Pour tester la méthode, on a choisi une solution analytique du Laplacien en 3D qui s'écrit de la forme suivante :

$$u^{an}(x) = [\cos(\omega(x - x_0)) + \sin(\omega(y - y_0))]\, e^{\omega(z-z_0)} \tag{5.52}$$

avec x_0, y_0 et z_0 sont les coordonnées du centre du domaine et ω quantifie la fréquence des oscillations spatiales de la fonction. Cette fonction vérifie les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann sur les bords du domaine.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a détaillé le développement des deux méthodes de résolution du problème inverse qu'on va implémenter, tester et évaluer leur performance dans les chapitres suivants pour enfin adopter la meilleure approche au problème de l'électrocardiographie.

Chapter 6

Implémentation de la méthode de résolution

6.1 Introduction

Après avoir developpé la méthode des Solutions Fondamentales de deux façons différentes, on a abouti dans les deux cas à un système linéaire qu'on peut résoudre en utilisant des outils informatiques consacrés au traitement des problèmes de l'algèbre linéaire.
Dans ce chapitre, on va présenter les outils mis à disposition pour l'implémentation de la méthode, l'algorithme mis en oeuvre pour la résolution du problème et enfin, une partie est consacrée à l'évaluation des méthodes de décomposition utilisés.

6.2 Outils de programmation utilisés

Comme on a mentionné précédemment, ce travail s'inscrit dans le cadre du projet EPI-CARD. Il s'agit de monter un logiciel d'aide au diagnostic des maladies cardiovasculaires MUSIC. Ce dernier est developpé sous la forme de plusieurs pipelines, chacune permet d'acquérir des informations concernant le système cardiaque.
Dans ce cadre, l'une des pipelines se charge de la détermination de la distribution du potentiel électrique sur la surface du coeur durant un cycle cardiaque. Vu que ce logiciel est developpé en langage de programmation orienté objets C++, l'implémentation est nécessairement réalisé avec ce langage en utilisant une librairie d'analyse numérique developpée par INRIA : Eigen.

6.2.1 Eigen

Eigen est une bibliothèque d'analyse numérique developpée en C++ par Benoît Jacob et Gaël Guennebaud à l'INRIA. Elle est composée d'entêtes de templates servant à traiter des problèmes d'algèbre linéaire. Elle est basée essentiellement sur des structures matricielles et vectorielles [33].
Eigen [34] est distinguée des autres librairies disponibles par :

- **Sa polyvalence** : Elle supporte tous les types de matrices, denses et creuses, de dimension fixe ou dynamique allant des plus petites aux plus larges matrices et elle accepte tous les types numériques (réel, complexe). De plus, plusieurs méthodes de décompositions matricielles y sont intégrées.

- **Sa rapidité** : Des techniques de parallélisation sont utilisées ainsi que des algorithmes d'optimisation de calcul.

- **Sa fiabilité** : Les algorithmes sont minutieusement sélectionnés pour répondre au critère de fiabilité. Elle est aussi testé à travers des suites de test standards tel que BLAS [35] et LAPACK [36].

- **Son adaptabilité à plusieurs compilateurs** : Différentes suites de tests ont été réalisées avec de nombreux compilateurs pour garantir la fiabilité et contourner les problèmes de compilation.

6.2.2 VTK

VTK, pour Visualization ToolKit, est une bibliothèque logicielle libre de classes C++ pour la visualisation de données 2D/3D et le traitement d'image développée depuis 1993 par le centre de recherche du groupe General Electric [37].
L'usage de cette bibilothèque se justifie par son intégrabilité avec une bibilothèque d'interface graphique QT, qu'ils utilisent dans le développement du logiciel MUSIC. En effet, ce dernier génère des fichiers de maillages 3D sous l'extension ***vtk***, dont on se sert pour implémenter la méthode numérique de résolution du problème inverse, qui à son tour retourne des fichiers ***vtk*** contenant les résultats prêts à visualiser avec le logiciel.

6.3 Algorithme général de résolution

La première étape consiste à charger les géométries à partir de fichiers VTK pour ensuite récupérer les points sources réels placés sur les surfaces extérieures et intérieures et à partir desquels construire les points sources virtuels moyennant une opération géométrique

: l'homothétie par rapport au centre du domaine intérieur. Une fois que les données géométriques sont chargées, on procède à la définition de la matrice du problème qui nécessite le calcul des dérivées normales de la solution fondamentale par rapport à la surface extérieure. Ces dernières sont déterminées à l'aide d'un algorithme simple qui consiste à définir les normales à la surface extérieure servant ensuite au calcul du produit scalaire du gradient de la fonction solution fondamentale par la normale en un point donné, qui est enfin égal à la dérivée normale en ce point.
Comme on a mentionné précédemment, cette matrice est malconditionnée et requiert l'application d'une régularisation. Une méthode affiliée à la classe de la méthode numérique se charge de modifier la matrice du problème de façon à aboutir à la matrice finale prête à la résolution.
L'étape suivante consiste à la résolution du système linéaire. Une fois qu'on a acquis le vecteur des coefficients, solution du système linéaire, on peut désormais calculer le potentiel en tout point du domaine suivant la formule (5.21).
Enfin, les résultats trouvés sont représentés sous la forme de fichiers VTK affichant la distribution spatiale de la solution de l'équation aux dérivées partielles, une fois pour la solution analytique et puis pour le potentiel électrique à chaque pas du temps du cycle cardiaque. Tout ceci peut être représenté par le schéma suivant :

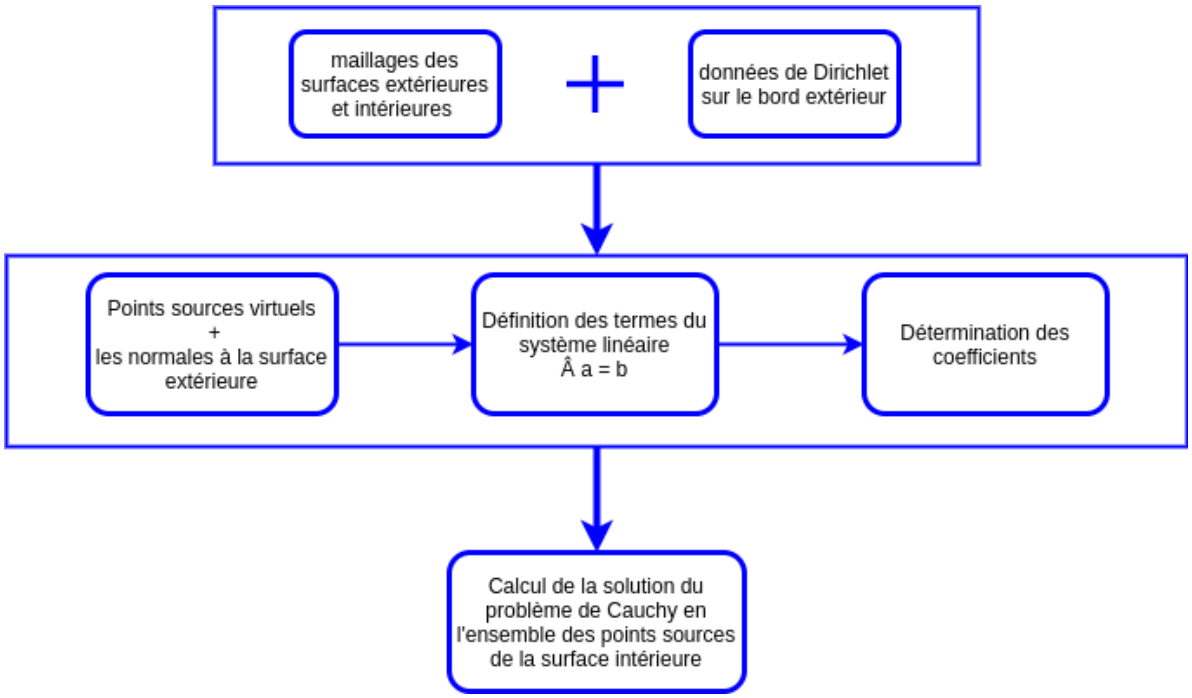


Figure 6.1 – Diagramme de l'algorithme de résolution

Chaque étape de cet algorithme est détaillé dans ce qui suit.

6.4 Obtention des fichiers VTK

La création des fichiers VTK s'est fait à l'aide du logiciel de maillage GMSH. Vu le format du fichier, ce dernier fournit les coordonnées des points sources des surfaces extérieures et intérieures à partir desquelles on détermine les points sources virtuels d'une part et les normales à la surface extérieure d'une autre part. Tout ceci se fait à l'aide des méthodes prédéfinies de la bibilothèque VTK. Concernant la définition des normales, on a adopté un algorithme classique qui consiste à la démarche suivante :

algorithme 2 Définition des normales

for E_i un élément du maillage surfacique défini par 3 noeuds e_{1i},e_{2i} et e_{3i} et une surface SE_i **do**
  définir la normale à l'élément E_i tel que :
    $N_i = (e_{2i} - e_{1i}) \wedge (e_{3i} - e_{1i})$
end for
for P_i un point du maillage surfacique **do**
  initialisation $NP_i = \vec{0}$
  for E_j un élément du maillage surfacique **do**
    if P_i un point appartenant à E_j **then**
      $NP_i \mathrel{+}= SE_j * N_j$
    end if
  end for
  $NP_i = \dfrac{NP_i}{\|NP_i\|}$
end for

Ci-dessous, un exemple du résultat de l'exécution de l'algorithme de définition des normales en utilisant un maillage surfacique d'une géométrie thoracique après avoir l'intégré dans un fichier VTK et le visualiser avec ParaView.

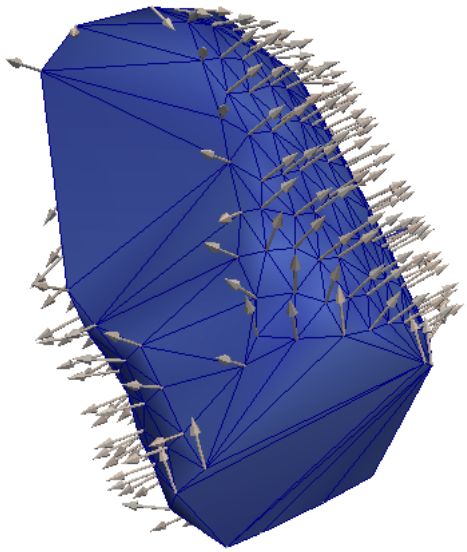


Figure 6.2 – Traçage des normales sur la surface d'un torse

6.5 L'écriture matricielle

Une fois que les points sources virtuels et les normales sont déterminés, la définition de la solution fondamentale nous permet de construire la matrice $\widehat{A}$ définie par (5.19) pour la première méthode et la matrice A (5.39) pour la deuxième.
Concernant le vecteur des conditions aux limites (5.20), un fichier contenant les données de Dirichlet et de Neumann sur les points sources réels de la surface extérieure est fourni et lu par le programme pour remplir le vecteur.
Le système (5.18) nécessite, comme on a mentionné précédemment, une régularisation pour obtenir le système final à résoudre (5.29) ou (5.47). L'ensemble des opérations arithmétiques à effectuer tel que l'inversion et le produit matriciel sont prédéfinies dans la bibiliothèque **Eigen** qui nous permet d'obtenir les formes finales des matrices.

6.6 Résolution du système linéaire

La résolution numérique d'un système linéaire ayant une solution se fait sur deux étapes : la décomposition matricielle suivie par la résolution.

6.6.1 La décomposition matricielle

Suivant le type de la matrice à inverser, plusieurs méthodes de décompositions sont disponibles dans la bibiliothèque **Eigen**. Ci-après un tableau détaillant les différentes méthodes et leurs critères d'applications ainsi que leur évaluation de performance [34].

Méthode	nature de la matrice	rapidité (moyenne et petite matrice)	rapidité (large matrice)	précision
PartialPivLU	inversible	++	++	+
FullPivLU	∅	-	–	+++
HouseholderQR	∅	++	++	+
ColPivHouseholderQR	∅	++	-	+++
FullPivHouseholderQR	∅	-	–	+++
LLT	définie(+)	+++	+++	+
LDLT	semi-définie (+/-)	+++	+	++
JacobiSVD	∅	–	—	+++

Table 6.1 – Différentes méthodes de décomposition introduites par **Eigen**

Pour choisir la méthode la plus adéquate à utiliser pour la décomposition, on a effectué des tests sur toutes les méthodes en variant la dimension de la matrice indépendemment de sa nature. Ces derniers sont réalisés avec un ordinateur ayant un Intel core i7 @ 2.00GHz×4. Les résultats de ces tests sont résumés dans le tableau suivant. Les mesures du temps de décomposition sont en millisecondes :

Méthode	4951*4951	1284*1284	637*637	355*355
LLT	3736.55	78.086	15.724	2.189
LDLT	16864.9	136.421	23.032	3.54
PartialPivLU	7403.31	157.481	27.218	4.687
FullPivLU	114244	1496.32	118.024	21.072
HouseholderQR	21059	301.187	46.187	12.588
ColPivHouseholderQR	116795	1412.61	79.362	15.388
FullPivHouseholderQR	137434	2298.69	150.873	25.785
JacobiSVD	$1.13664e+07$	133971	11996	1414.63

Table 6.2 – Tableau de référence des différentes méthodes de décomposition

En somme, on remarque bien que la décomposition LLT est la plus rapide avec un résidu presque le même pour toutes les méthodes de décomposition de l'ordre de 10^{-15}, le zéro numérique. Pour les matrices de large dimension, les méthodes adaptant une stratégie de décomposition par bloc sont les plus adaptés telles que LLT, PartialPivLU et HouseholderQR. Ceci explique les résultats pour une matrice de taille 4951*4951.

6.6.2 Résolution

Après avoir effectué la décomposition, on procède à la résolution en fournissant le vecteur des conditions aux bords moyennant une méthode simple définie dans **Eigen** : **solve**. Cette étape nous permet d'obtenir le vecteur des coefficients qui va nous servir à calculer la solution de l'équation aux dérivées partielles en un point donnée suivant la formule (5.21).

6.7 Conclusion

Grâce à la bibiliothèque **Eigen**, l'implémentation de la méthode est devenue simple et optimisée en temps et en fiabilité. En effet, les opérations connues comme gourmandes en mémoire et en temps sont développées par Eigen de façon à assurer une certaine optimalité. Reste à étudier les résultats et vérifier la fiabilité et la performance de la méthode numérique, qui est l'objet du chapitre suivant.

Chapter 7

Résultats et interprétations

7.1 Introduction

On présentera dans ce chapitre les résultats numériques des deux méthodes développées précédemment pour le problème inverse en électrocardiographie. On élaborera en plus une comparaison entre les deux méthodes basée sur des critères de performance et on donnera enfin des interprétations et conclusions.
Ces résultats sont élaborés pour le cas analytique en variant les différents paramètres agissant sur la solution du problème tels que le paramètre de régularisation, le terme ω de la solution analytique, le rapport entre les rayons des deux sphères, le nombre des points sources et enfin on va évaluer la performance des méthodes vis à vis de l'ajout d'un bruit aux données d'entrées.

7.2 Résultats numériques

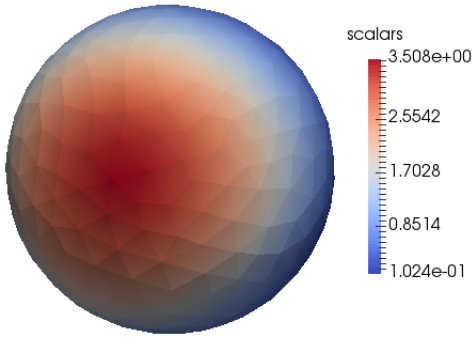
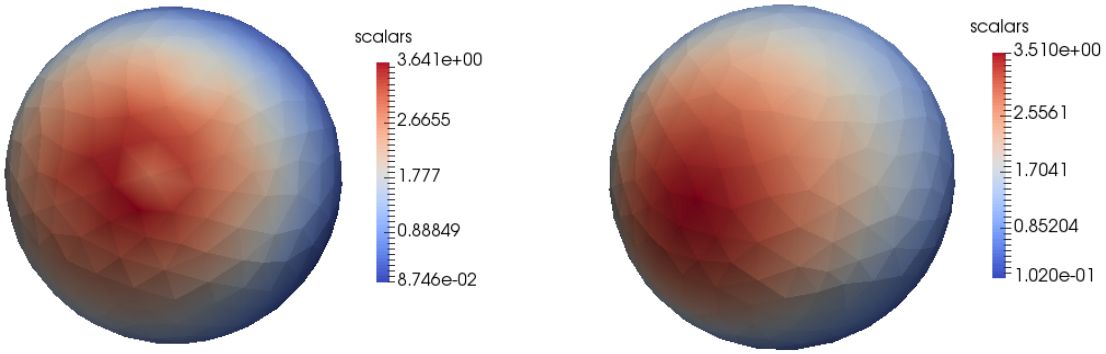


Figure 7.1 – Distribution spatiale de la solution analytique

Ci-dessus la carte de la solution analytique définie par (5.52) sur la surface intérieure qu'on cherche à reconstruire moyennant les méthodes numériques. Cette carte est tracée

pour une solution analytique avec une fréquence $\omega = 1$.
Les figures 7.2a et 7.2b représentent les résultats numériques obtenus avec les deux méthodes : MFS avec la régularisation de Tikhonov d'une part et MFS avec la régularisation évanescente d'une autre part. Ces solutions numériques sont obtenues avec un paramètre de régularisation choisi empiriquement égal à $\lambda = 0.01$. Soient, de plus, N le nombre des points sources sur la surface extérieure et M le nombre des points sources sur la surface intérieure. Dans ce cas, $N = 896$ et $M = 387$. On observe bien que les résultats de la



(a) Distribution spatiale de la solution numérique en utilisant la MFS avec la régularisation évanescente

(b) Distribution spatiale de la solution numérique en utilisant la MFS avec la régularisation de Tikhonov

Figure 7.2 – Résultats numériques

méthode des solutions fondamentales avec la régularisation de Tikhonov est plus proche de la solution analytique que ceux obtenus avec la méthode en conjonction avec la régularisation évanescente. Ceci est visible en observant les figures ainsi qu'en lisant l'échelle des valeurs. En effet, les valeurs de la solution analytique répartie sur la surface intérieure appartiennent à l'intervalle [0.1024 3.508] qui est très proche de celui observé avec la MFS en utilisant la régularisation de Tikhonov égal à [0.1020 3.510], tandis que les valeurs de la solution numérique obtenue avec la régularisation évanescente sont comprises entre 0.0874 et 3.641.
Ceci se confirme avec le calcul de l'erreur relative et le coefficient de corrélation spatiaux entre la solution analytique et la solution numérique suivant les formules ci-dessous :

$$SRE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{L}(V_i^N - V_i^A)^2}{\sum_{i=1}^{L}(V_i^A)^2}} \tag{7.1}$$

$$SCC = \frac{\sum_{i=1}^{L}(V_i^A - \bar{V}^A)(V_i^N - \bar{V}^N)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{L}(V_i^A - \bar{V}^A)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{L}(V_i^N - \bar{V}^N)^2}} \tag{7.2}$$

avec :

- V_i^N est la valeur numérique au point i
- V_i^A est la valeur analytique au point i
- $\bar{V}^A$ est la moyenne spatiale de la solution analytique
- $\bar{V}^N$ est la moyenne spatiale de la solution numérique
- L est le nombre des points sources sur la surface intérieure

Ces mesures fournissent une description de la précision de la méthode. En effet, pour la méthode des solutions fondamentales, on a enregistré les mesures suivantes :

Mesures	MFS avec régularisation de Tikhonov	MFS avec régularisation évanescente
SRE	1.069e-06	1.066e-03
SCC	0.9999	0.9994

Table 7.1 – Mesures des SRE et SCC

On en déduit que dans ces conditions, la méthode des Solutions Fondamentales associée à la régularisation de Tikhonov est plus performante, en terme de précision de calcul, que l'associée à la régularisation évanescente.
Dans ce qui suit, on va réaliser plusieurs tests des deux méthodes en variant, en premier lieu le rapport des rayons des deux sphères, ensuite, le nombre des points sources des deux surfaces, la fréquence ω, le paramètre de régularisation λ et enfin, on va procéder à un ajout de bruit aux données de Dirichlet sur la surface extérieure et observer le comportement des deux méthodes.

7.3 Effet de la variation du rayon

Dans cette partie, on a fixé le rayon de la sphère extérieure $R_{ext} = 1.5$ et on a varié le rayon de la sphère intérieure de 0.1 à 0.9 en vue d'évaluer l'effet du rapport des deux rayons sur la performance de la méthode.
Ci-dessous on a deux courbes, une qui affiche la variation de l'erreur relative SRE en fonction du rayon et l'autre représente la variation du coefficient de corrélation spatiale SCC.

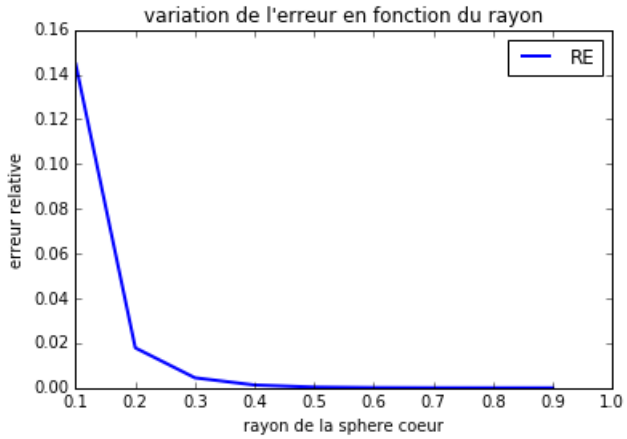


Figure 7.3 – Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique en fonction du rayon

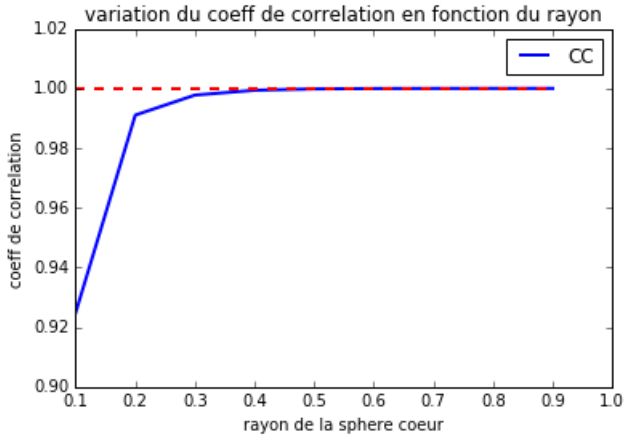


Figure 7.4 – Variation du coefficient de corrélation entre les solutions analytique et numérique en fonction du rayon

D'après ces figures, on observe que la courbe de l'erreur a l'allure de l'inverse d'une exponentielle en fonction du rayon ce qui est encore confirmée par la courbe du coefficient de corrélation qui a une allure exponentielle croissante.
On remarque aussi qu'à partir d'un rayon égal à 0.4, la valeur de l'erreur SRE s'est stabilisée très proche de zéro ainsi que le coefficient de corrélation qui s'est rapproché étroitement de 1.
Ceci permet d'en déduire deux conclusions reliées l'une à l'autre :

- La distance entre les deux surfaces agit sur la précision de la méthode. En effet, on peut définir un intervalle de confiance qui assure l'obtention des résultats optimaux.

- Les paramètres de l'homothétie à partir desquels on détermine la surface auxiliaire ont un effet remarquable sur les résultats. En effet, la distance entre les deux surfaces apparaît dans les coefficients de la matrice en calculant les distances entre les points sources de la surface extérieure et tous les points sources virtuels. C'est à

ce niveau que la distance entre les deux surfaces réelles ou les paramètres peuvent modifier les résultats. Par conséquent, de même que pour la distance, en effectuant plusieurs simulations, on en déduit que les reconstructions optimales sont obtenues avec un paramètre de déflation compris entre 0.6 et 0.9 et un paramètre d'inflation appartenant à l'intervalle $[1.1, 1.5]$

7.4 Influence du nombre des points sources et de la fréquence spatiale du signal sur la qualité de la solution

Pour étudier l'effet du nombre des points sources sur la performance de la méthode, on a varié le pas du maillage de 0.1 à 0.5, ce qui est inversement proportionnel au nombre des points sources, en parallèle avec le paramètre ω qui illustre la fréquence spatiale de la solution analytique. Les résultats des tests effectués sont représentés ci-dessous pour les deux méthodes :

ω \ h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	$1.556e^{-10}$	$1.672e^{-8}$	$2.2058e^{-6}$	$1.7528e^{-5}$	$8.721e^{-5}$
1	$4.417e^{-9}$	$1.069e^{-6}$	0.00026	0.00299	0.01610
2	$6.487e^{-7}$	$1.635e^{-5}$	0.002943	0.024739	0.11055
5	0.00441	0.01798	0.31145	0.76940	0.723339
10	0.59729	0.98117	0.99653	1.00	1.00

Table 7.2 – Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique obtenue moyennant la MFS avec RT en fonction du pas du maillage pour différents ω

ω \ h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	$1.834e^{-4}$	$1.095e^{-4}$	$7.81e^{-5}$	$1.31e^{-4}$	$7.12e^{-4}$
1	7.382 e^{-3}	$2.354e^{-3}$	0.0029	$6.477e^{-3}$	$2.476e^{-2}$
2	0.0169	0.0156	0.0189	$8.401e^{-2}$	0.298
5	0.1178	0.2307	0.623	0.94	0.94

Table 7.3 – Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique obtenue moyennant la MFS avec RE en fonction du pas du maillage pour différents ω

À partir des deux tableaux précédents, on observe bien que les deux méthodes sont sensibles à la variation du nombre des points sources en ayant ω fixé. En effet, plus on a des

points sources d'information sur la surface extérieure, l'estimation de la solution sur la surface intérieure s'améliore et devient plus précise.
D'autre part, en ayant h fixé, les deux méthodes ont le même comportement vis à vis de la variation de ω. On remarque que l'augmentation de la fréquence génère une déterioration de la précision des résultats ce qui peut être expliquée par le fait que plus la solution du système oscille dans l'espace, la méthode des Solutions Fondamentales trouvera des diffucités à détecter toutes ses fluctuations à moins qu'on raffine le maillage de la surface extérieure pour pouvoir enregistrer le maximum d'informations.
Ceci est visible sur les tableaux précédents. En effet, on observe que l'erreur relative pour un pas de maillage $h = 0.2$ et $\omega = 1$ est presque de même ordre que l'erreur pour $h = 0.3$ et $\omega = 0.1$. De même pour le cas où $h = 0.4$, $\omega = 0.1$ et $h = 0.2$, $\omega = 2$.
Il est clair aussi que la méthode des Solutions Fondamentales moyennant la régularisation de Tikhonov est beaucoup plus performante vis à vis des variations des deux paramètres. En effet, on a une différence de l'ordre de 10^{-3} entre les erreurs relatives enregistrées pour les deux méthodes au profit de la régularisation de Tikhonov.

7.5 Effet de l'ajout d'un bruit

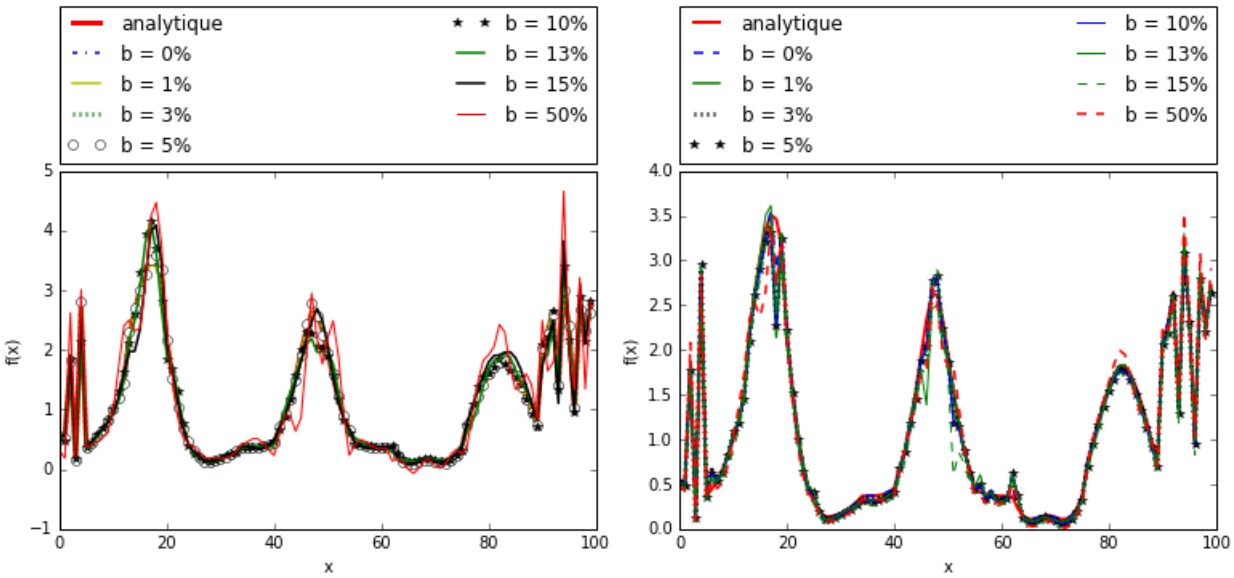
Pour évaluer la robustesse des deux méthodes vis à vis des données bruitées, on a procédé à l'ajout d'un bruit uniforme aux données de Dirichlet sur le bord extérieur. En effet, on assume que les données de Dirichlet on été perturbées tel que :

$$\tilde{u}_T(x) = (1 + b\rho)u^{an}(x) \qquad \forall x \in \Gamma_T \tag{7.3}$$

avec :

- b est le taux de bruit à rajouter aux données $u_T(x)$ avec $0 \leq b \leq 1$
- ρ est un nombre aléatoire généré par une distribution uniforme appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$

Pour effectuer les simulations, on a choisi une configuration standard assurant des bons résultats. En fait, on a pris un maillage de la surface construit avec un pas $h = 0.2$, $\omega = 1$ et $\lambda = 0.01$.
Les deux figures suivantes illustrent la solution numérique obtenue par les deux méthodes, calculée en 100 points choisis aléatoirement de la surface intérieure en rajoutant différents niveaux de bruit.

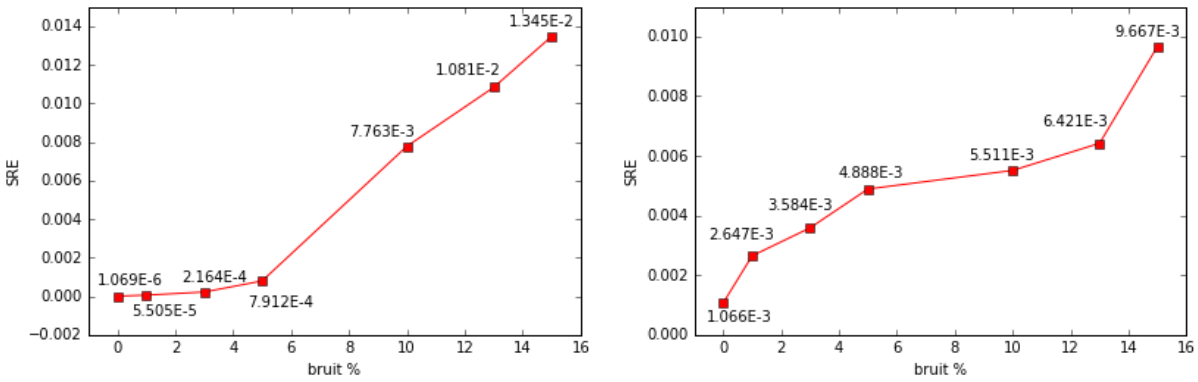


(a) Effet du bruit sur les résultats d'estimation du potentiel sur la surface du coeur en utilisant MFS RT

(b) Effet du bruit sur les résultats d'estimation du potentiel sur la surface du coeur en utilisant MFS RE

Figure 7.5 – Effet de l'ajout d'un bruit uniforme

On remarque, d'après les figures que les deux méthodes sont assez robustes vis à vis de différents niveaux de bruit allant de 1% jusqu'à 50%. Par contre, on observe que la méthode des solutions fondamentales avec la régularisation évanescente est moins sensible aux bruits élevés. En effet, pour un niveau de bruit égal à 50%, l'erreur relative enregistrée est de l'ordre de 1% alors que pour la régularisation de Tikhonov, on a enregistrée une erreur de l'ordre de 10%.
Ceci est visible sur les traces suivantes de l'évolution de l'erreur relative SRE en fonction du niveau de bruit rajouté.



(a) Évolution de l'erreur SRE en fonction du niveau de bruit en utilisant la régularisation de Tikhonov

(b) Évolution de l'erreur SRE en fonction du niveau de bruit en utilisant la régularisation évanescente

Figure 7.6 – Variation de l'erreur relative SRE en fonction du niveau de bruit

On voit bien que la relation du niveau de bruit à l'erreur est linéaire à partir de 5% pour la régularisation de Tikhonov ce qui n'est pas le cas pour la régularisation évanescente. Cette dernière est connue comme capable de déblayer le bruit des données [38].
Ceci est confirmée à travers les résultats enregistrés. En effet, on observe que la courbe 7.6b se stabilise entre 5% et 13%. Néanmoins, la méthode des solutions fondamentales en conjonction avec la régularisation de Tikhonov reste plus robuste pour des faibles niveaux de bruit appartenants à l'intervalle $[0, 5]$ en pourcent.

7.6 Effet du paramètre de régularisation sur la MFS avec la régularisation évanescente

Il est affirmé dans la littérature que le choix du paramètre λ n'affecte pas les résultats numériques de la méthode. Néanmoins, il agit sur le nombre des itérations nécessaires pour aboutir à la convergence. Dans le tableau suivant, on étudie l'effet du paramètre de régularisation λ sur les résultats en affichant l'erreur relative SRE en fonction de λ pour différentes valeurs du niveau de bruit b.
Les simulations sont effectuées sur des maillages avec un pas $h = 0.2$ et une fréquence $\omega = 1$.

λ \ b (%)	0	1	3	5
0.1	$2.354e^{-3}$	$2.478e^{-3}$	$4.457e^{-3}$	$7.892e^{-3}$
0.05	$1.917e^{-3}$	$2.253e^{-3}$	$6.249e^{-3}$	$7.297e^{-3}$
0.01	$1.273e^{-3}$	$1.635e^{-3}$	$4.707e^{-3}$	$6.826e^{-3}$
0.005	$1.066e^{-3}$	$1.845e^{-3}$	$4.758e^{-3}$	$2.926e^{-3}$
0.001	$7.040e^{-4}$	$1.736e^{-3}$	$3.167e^{-3}$	$3.250e^{-3}$
0.0001	$3.702e^{-4}$	$1.189e^{-3}$	$7.034e^{-3}$	$1.704e^{-2}$

Table 7.4 – Variation de l'erreur relative entre les solutions analytique et numérique avec un taux de bruit (b%) en fonction du paramètre de régularisation λ

En analysant les résultats de ces simulations, on observe bien que le choix du paramètre λ n'intervient pas pour modifier la précision de la méthode. En effet, pour un taux de bruit constant, l'erreur relative est presque la même avec une marge de différence faible. Concernant le fait que le choix de λ agit sur le nombre d'itérations nécessaire pour aboutir à la convergence, on a tracé le tableau ci-dessous contenant le nombre d'itérations pour chacune des simulations précédentes :

λ \ b (%)	0	1	3	5
0.1	151	146	123	111
0.05	63	55	53	51
0.01	25	21	19	18
0.005	12	11	11	9
0.001	7	5	3	3
0.0001	2	2	2	2

Table 7.5 – Variation du Nombre d'itérations optimal en fonction du paramètre de régularisation λ

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les résultats des différentes simulations et tests qu'on a effectué pour évaluer les deux méthodes et choisir celle qui est la plus adaptée à la résolution du problème inverse en électrocardiographie, celui de la détermination du potentiel électrique à la surface de l'épicarde à partir de mesures réalisées sur la surface du torse. On a testé, en premier lieu, le comportement de la MFS avec régularisation de Tikhonov vis à vis la variation de la distance entre les deux surfaces. Ensuite, on a dressé une compara-

ison entre les deux méthodes de régularisation basée sur leurs réponses à la variation du nombre des points sources ainsi que l'ajout d'un bruit aux données de Dirichlet sur la surface extérieure. Enfin, on s'est contenté de réaliser des tests sur la variation du paramètre de régularisation et se referer à la littérature pour confirmer l'indépendance des résultats de la méthode itérative avec la régularisation évanescente du choix de ce paramètre contrairement à la régularisation de Tikhonov qui est étroitement liée au paramètre λ nécessitant du soin pour le déterminer.

Chapter 8

Application de la Méthode des Solutions Fondamentales sur des données simulées

8.1 Obtention des maillages

Pour appliquer le code développé, on a besoin des géométries du torse et du coeur sous format ***.vtk*** [1] alors que les données fournies par l'IHU sont sous format ***.csv*** [2]. Ceci a nécessité l'implémentation d'un programme C++ en utilisant principalement la bibliothèque VTK, permettant de créer un fichier ***.vtk*** à partir des fichiers ***.csv*** contenant les coordonnées des noeuds et leurs indices formant les éléments du maillage surfacique. Ces fichiers peuvent être visualisés avec un logiciel de visualisation appelé ParaView [3].
Les simulations ont été effectuées en utilisant deux cas : un premier cas clinique où les mesures sur le torse sont obtenues à l'aide d'un dispositif spécial de mesure présent chez l'IHU. Il s'agit d'un gilet d'électrodes qui mesurent le potentiel électrique détecté à la surface du torse. Quant aux mesures du potentiel à la surface de l'épicarde nécessaires pour l'évaluation des résultats, on a utilisé des données simulées. De même pour le deuxième cas.

[1] C'est un format permettant la visualisation 3D des résultats de simulation

[2] C'est un format représentant des données tabulaires sous la forme d'un texte contenant des valeurs séparées par une virgule

[3] ParaView est un logiciel libre de visualisation de données fondé sur la bibliothèque VTK

8.2 Résultats

8.2.1 Premier cas clinique

Dans ce cas, le choix de λ s'est fait d'une manière empirique. En effet, $\lambda = 10^{-4}$ est la valeur optimale qui fournit les résultats suivants. En effet, en effectuant plusieurs simulations avec des valeurs de λ allant de 10^{-6} à 1, cette valeur correspond au minimum de l'erreur relative enregistrée.
Sur la figure 8.1, des électrocardiogrammes sont tracés en différents points de la surface de l'épicarde.

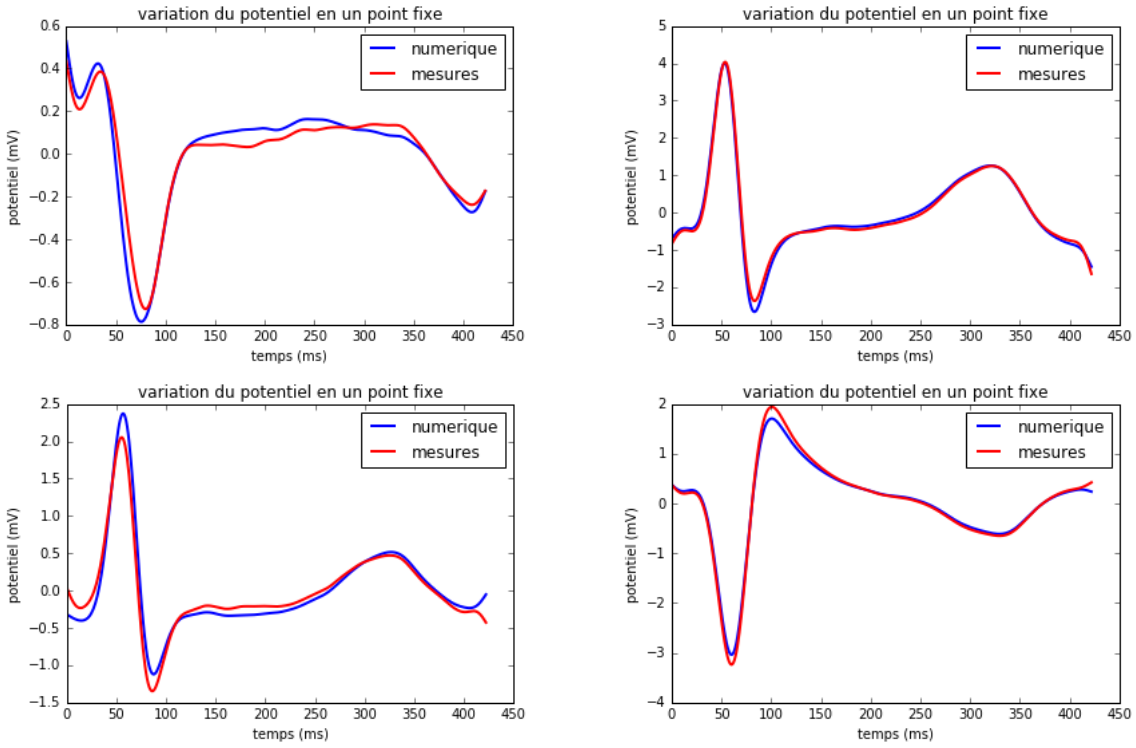


Figure 8.1 – Électrocardiogrammes (mesurés et calculés superposés) en différents points de la surface de l'épicarde

Une grande ressemblance entre les éléctrocardiogrammes calculés et ceux simulés est visible dans les 4 points choisis aléatoirement.
Dans ce qui suit, des cartes de la répartition de l'erreur relative et le coefficient de corrélation spatiaux calculés moyennant les formules (7.1) et (7.2), respectivement.

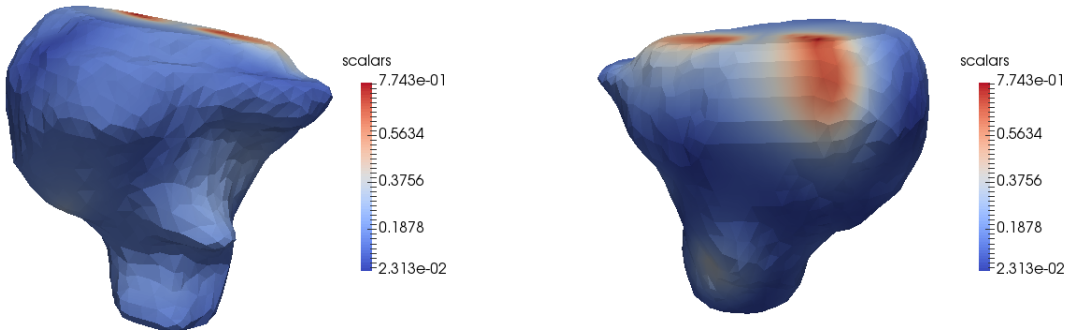


Figure 8.2 – Répartition de l'erreur relative sur la surface du coeur

D'après les figures ci-dessus, on observe que l'erreur relative qui illustre la précision de l'amplitude est majoritairement comprise entre 2% et 40% avec quelques régions où elle atteint 70%. Ceci peut être expliqué par l'hétérogénéité du milieu qui n'est pas prise en compte dans l'équation de Laplace. Cette question reste, pour le moment, sans réponse et nécessite encore plus de recherche et de tests.
Sinon, pour la majorité de la surface du coeur, on a enregistré des résultats prometteuses et qui sont, en comparant avec la littérature, meilleures que d'autres obtenus moyennant différentes méthodes, par exemple, la méthode des Éléments de Frontière.[26]
La figure suivante confirme la robustesse de la méthode des Solutions Fondamentales en conjonction avec la régularisation de Tikhonov appliquée au problème inverse de l'électrocardiographie. En effet, elle représente la répartition du coefficicent de corrélation spatiale, indice de similitude .

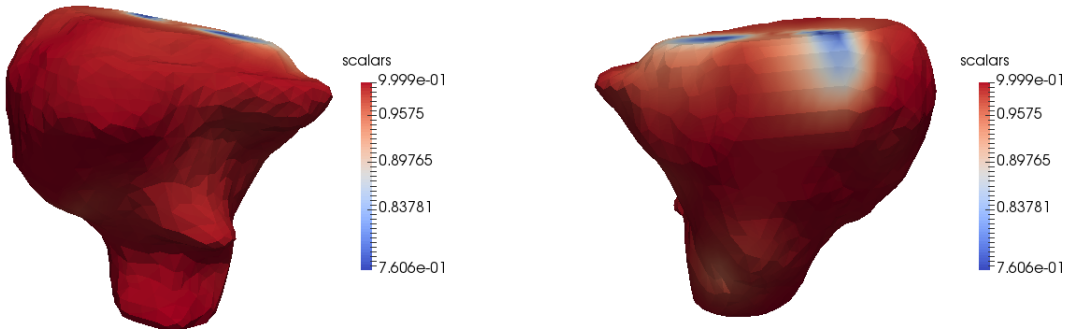


Figure 8.3 – Répartition du coefficient de corrélation spatiale sur la surface du coeur

On en déduit que la carte du potentiel électrique calculé numériquement suit parfaitement celle du potentiel électrique de référence avec des zones de données abérrantes qui correspondent aux mêmes endroits où l'erreur atteint 70%.

8.2.2 Deuxième cas clinique

Comme pour le premier cas, on représente ici la répartition de l'erreur relative sur la figure 8.4 et la répartition du coefficient de corrélation spatiale sur la figure 8.5.

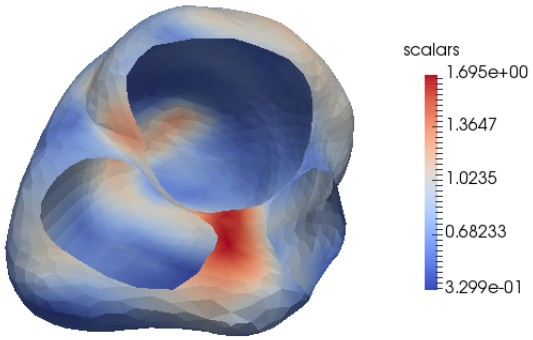


Figure 8.4 – Répartition de l'erreur relative sur la surface du coeur pour le deuxième cas

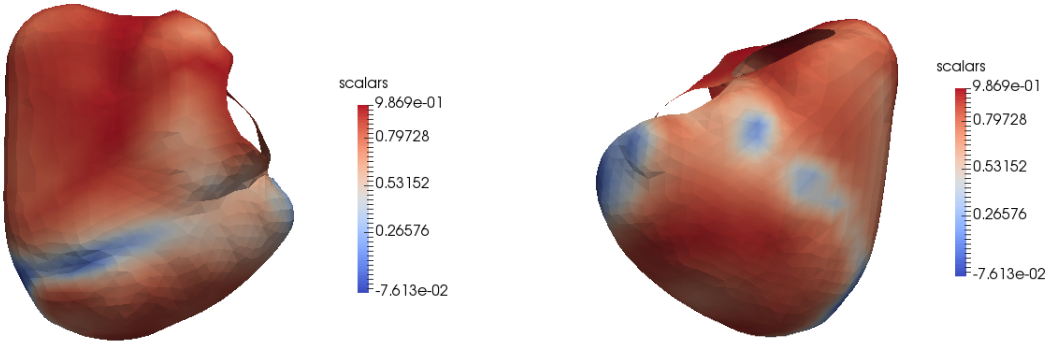


Figure 8.5 – Répartition du coefficient de corrélation sur la surface du coeur pour le deuxième cas

Les résultats ci-dessus confirment la robustesse de la méthode. On observe que l'erreur relative est comprise, pour la majorité des points entre 30% et 60% avec un coefficient de corrélation spatiale qui atteint 98%.

Malgré l'enregistrement de plusieurs résultats prometteurs, il reste quelques questions à étudier pour pouvoir aboutir à une estimation optimale du potentiel électrique à la surface du coeur comme la prise en compte de l'hétérogénéité du milieu épicardial qui représente une source majeure d'erreur de calcul. Ceci fera l'objet de recherches avancées dans les années qui suivent.

Chapter 9

Conclusion générale

Dans le cadre de ce projet de fin d'études, on a étudié le problème inverse en électrocardiographie qui est un probème de complétion de données. Le but étant de déterminer le potentiel électrique à la surface du coeur à partir de mesures réalisées à la surface du torse, en premier lieu, on a réalisé une étude bibliographique du problème à travers laquelle on s'est familiarisé avec non seulement son côté électrophysiologique mais aussi la partie mathématique et numérique.
Une fois qu'on a choisi nos outils de travail et les méthodes numériques qu'on va adopter, la première étape de l'étude numérique était de comparer deux techniques de régularisation : la régularisation de Tikhonov et la régularisation évanescente, en conjonction avec la méthode des solutions fondamentales. Pour ce faire, on a eu recours à une solution exacte du problème inverse modélisé par un problème de Cauchy pour évaluer les performances des deux méthodes, en terme de rapidité, précision et robustesse. L'implémentation de ces deux méthodes s'est faite en langage orienté objet C++ en suivant des algorithmes créés pour répondre aux critères d'optimalité surtout en temps d'exécution.
La deuxième étape consistait à évaluer le comportement des deux méthodes face à différents types de perturbations tels que l'ajout d'un bruit au signaux d'entrées, la modification de la géométrie du domaine d'étude ou encore la modification des paramètres du maillage. En somme, on a conclu que la méthode des solutions fondamentales en utilisant la régularisation de Tikhonov est plus performante en terme de rapidité et de précision alorsqu'il s'est avéré qu'elle a des limites au niveau de la tolérance au bruit. En effet, à un certain niveau, la régularisation évanescente donne de meilleurs résultats.
Enfin, on a consacré la dernière partie de ce projet à la validation des résultats obtenus pour un cas analytique en utilisant des données cliniques fournis par CHU Bordeaux.
En perspective, il serait intéressant d'approfondir les recherches sur la résolution du problème inverse en électrocardiographie tout en considérant le problème réel sans

tenir compte des hypothèses simplificatrices et de développer de nouvelles approches pour la résolution du problème inverse en électrocardiographie, qui va être l'objet de ma thèse à l'Institut des Mathématiques de Bordeaux pendant les trois prochaines années. Le but sera d'adapter en premier lieu des méthodes de traitement d'images à la résolution du problème inverse. Ensuite, nous nous intéresserons à l'application de méthodes variationnelles d'assimilation de données et pourquoi pas pousser encore plus les recherches moyennant des nouvelles technologies tel que l'intelligence artificielle.

Bibliography

[1] Pôle Digital de la Direction de la communication de Inria : site inria, 2011. https://www.inria.fr/.

[2] CHU Montréal : Système cardiaque. http://www.chumontreal.qc.ca/sites/default/files/documents/DEGE/SI/Intregation-specifique/tronc-commun/anatomie-physiologie-cardiaque.pdf, 2017.

[3] Balkine Khaddoumi : *Analyse et modélisation d'électrocardiogrammes dans le cas de pathologies ventriculaires.* Thèse de doctorat, UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences, 2005.

[4] Nejib Zemzemi : *Étude théorique et numérique de l'activité électrique du coeur: Applications aux électrocardiogrammes.* Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, 2009.

[5] Fédération Française de Cardiologie : L'activité électrique du coeur, 2017. https://www.fedecardio.org/Je-m-informe/Le-coeur/lactivite-electrique-du-coeur.

[6] Richard E. Klabunde : Cardiovascular physiology concepts, 2016. http://www.cvphysiology.com/Arrhythmias/A009.

[7] Inria : Objectif inria 2020, plan stratégique 2013-2017. Rapport technique, Inria, 2013.

[8] Inria : Présentation du centre de recherche inria bordeaux sud-ouest, 2016. https://fr.slideshare.net/INRIA/presentation-du-centre-de-recherche-bordeaux-sud-ouest.

[9] Inria : Équipe problèmes inverses en électrophysiologie cardiaque (epicard), 2016. https://team.inria.fr/carmen/research/epicard/.

[10] Wikipédia : Coeur wikipédia l'encyclopédie libre, 2017. http://fr.wikipedia.org/Coeur.

[11] Hugues Jacobs : Battements de coeur, fréquence cardiaque et électrocardiogramme, dossier le coeur, organe de vie, 2016. http://www.futura-sciences.com/sante/dossiers/medecine-coeur-organe-vie-1474.

[12] Marc Bonnet : Problèmes inverses, master recherche, École centrale paris, 2008.

[13] M. Zuhair Nashed : *Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations*, pages 289–332. Springer Berlin Heidelberg, 1974.

[14] Albert Tarantola : *Inverse Problem Theory*. Elsevier Science, 1987.

[15] Malmivuo Jaakko et Plonsey Robert : *Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*. Oxford University Press, New York, 1995.

[16] Piero ColliFranzone et LucianoGuerri : Spreading of excitation in 3-d models of the anisotropic cardiac tissue. i. validation of the eikonal model. *Elsevier*, 1993.

[17] Franzone PC1, Guerri L, Pennacchio M et Taccardi B. : Spread of excitation in 3-d models of the anisotropic cardiac tissue. ii. effects of fiber architecture and ventricular geometry. *Elsevier*, 1998.

[18] Piero Colli Franzone, Luciano Guerri et S. Rovida : Wavefront propagation in an activation model of the anisotropic cardiac tissue: asymptotic analysis and numerical simulations. *Journal of Mathematical Biology*.

[19] Piero Colli Franzone, Luciano Guerri et Stefania Tentoni : Mathematical modeling of the excitation process in myocardial tissue: influence of fiber rotation on wavefront propagation and potential field. *Mathematical Biosciences*, pages 155–235, 1990.

[20] Tung Leslie : *A bi-domain model for describing ischemic myocardial D-C potentials.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology. Department of Electrical Engineering and Computer Science, 1978.

[21] Ping Jia, Charulatha Ramanathan, Raja N. Ghanem, Kyungmoo Ryu, Niraj Varma et Yoram Rudy : Electrocardiographic imaging of cardiac resynchronization therapy in heart failure: Observation of variable electrophysiologic responses. *Heart Rythm, Elsevier*, pages 296–310, 2006.

[22] Yoram Rudy, John E. et Burnes M.S. : Noninvasive electrocardiographic imaging. *In Annals of noninvasive electrocardiology*, pages 340–359. 1999.

[23] IHU Lyric : site ihu lyric, 2015. https://www.ihu-liryc.fr/.

[24] Inria : Music, 2017. https://team.inria.fr/asclepios/software/music/.

[25] Wikipédia : Insight toolkit wikipédia l'encyclopédie libre, 2017. https://fr.wikipedia.org/wiki/Insight_ToolKit.

[26] Yong Wang et Yoram Rudy : Application of the method of fundamental solutions to potential-based inverse electrocardiography. *Annals of Biomedial Engineering*, 2005.

[27] Alain Cimetière et Franck Delvare : Une méthode inverse à régularisation évanescente. *Elsevier*, 2000.

[28] Oster HS, Taccardi B., Lux RL., Ershler PR. et Rudy Y. : Noninvasive electrocardiographic imaging: reconstruction of epicardial potentials, electrograms, and isochrones and localization of single and multiple electrocardiac events. *Circulation*, 1996.

[29] Martin Fuhry et Lothar Reichel : *Numerical Algorithms, A new Tikhonov regularization method*. Springer US, 2012.

[30] Stephan Anzengruber et Ronny Ramlau : Morozov's discrepancy principle for tikhonov-type functionals with nonlinear operators. *Inverse Problems*, 26, 2009.

[31] Raymond Sheng-Chieh Cheng : The delta-trigonometric method using the single-layer potential representation. *Global Associates*, 1980.

[32] M.A. Golberg et CS. Chen : Discrete projection methods for integral equations. *Southampton UK, Computational Mechanics Publications*, 1996.

[33] Wikipédia : Eigen (bibliothèque c++) wikipédia l'encyclopédie libre, 2017. https://fr.wikipedia.org/wiki/Eigen_(bibliotheque).

[34] Doxygen : Eigen 3.3.3, 2017. https://eigen.tuxfamily.org/dox/.

[35] Netlib : Blas (basic linear algebra subprograms), 2017. http://www.netlib.org/blas/.

[36] Netlib : Lapack???linear algebra package, 2017. http://www.netlib.org/lapack/.

[37] Wikipédia : Vtk wikipédia l'encyclopédie libre, 2017. https://fr.wikipedia.org/wiki/VTK.

[38] Franck Delvare, Alain Cimetière, Jean-Luc Hanusa et Patrice Bailly : An iterative method for the cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect. *Elsevier B.V.*, 199:3336–3344, 2010.