Le glossaire du maillage

Paul-Louis George, Frédéric Alauzet, Adrien Loseille

Le glossaire du maillage

Paul Louis George, Frédéric Alauzet et Adrien Loseille

TECHNICAL REPORT
N° 0515
Septembre 2021
Project-Team Gamma

ISSN 0249-0803 ISRN INRIA/RT-0515--FR+ENG

Le glossaire du maillage

Paul Louis George, Frédéric Alauzet et Adrien Loseille *

Équipe-Projet Gamma

Rapport technique n° 0515 — Septembre 2021 — 25 pages

Résumé : De A à Z,, le glossaire des mots et concepts utilisés en maillage (avec le biais y afférent) en notant que certains de ces mots ont un sens différent dans la vie courante ou dans d'autres contextes ou encore se trouvent dans wikipedia avec, parfois, quelques perles, une définition suspicieuse voire tout sauf claire ou encore si savante qu'on ne comprend pas grand chose.

Bien que contenant quelques formules, ce glossaire n'est pas un formulaire. Au-delà d'entrées évidentes sur le maillage, on en trouvera relatives à des techniques largement utilisées dans les algorithmes de maillage. Plus que des définitions, on trouvera quelques commentaires et pas mal d'informations qui nous semblent pertinentes. On verra aussi que des notions *a priori* simples et réputées connues n'ont pas nécessairement une définition évidente, non restrictive ou suffisamment naïve pour être comprise par le profane.

Mots-clés : Maillage. Triangulation. Structures de données et algorithmes de base. Structures de données. Tutti quanti.

* INRIA, Équipe-projet Gamma

RESEARCH CENTRE
SACLAY – ÎLE-DE-FRANCE

Bâtiment Turing,
1 rue Honoré d'Estienne d'Orves
91120 Palaiseau France

Mesh glossary

Abstract: From A to Z, this glossary provides definitions and gives a number of comments. Moreover, subtilities are given probably not so easy to understand even by people familiar with the french dialect.

Key-words: Mesh. Triangulation. Data structures and basic algorithms. Data structures. Tutti quanti.

Introduction

De A, $\boxed{\text{abscisse curviligne}}$, à Z, $\boxed{\text{courbe en Z}}$, le glossaire des mots et concepts utilisés en maillage (avec le biais y afférent) en notant que certains de ces mots ont un sens différent dans la vie courante ou dans d'autres contextes ou encore se trouvent dans wikipedia [1] avec, parfois, quelques perles, une définition suspicieuse voire tout sauf claire ou encore si savante qu'on ne comprend pas grand chose. Pour ce qui a trait aux courbes et aux surfaces, on supposera toujours qu'elles sont suffisamment régulières pour ne pas s'embarrasser outre mesure de précautions oratoires.

Bien que contenant quelques formules, ce glossaire n'est pas un formulaire. Au-delà d'entrées évidentes sur le maillage, on en trouvera relatives à des techniques largement utilisées dans les algorithmes de maillage. Plus que des définitions, on trouvera quelques commentaires pouvant susciter réflexions voire débats et pas mal d'informations qui nous semblent pertinentes. On verra aussi que des notions *a priori* simples et réputées connues n'ont pas nécessairement une définition évidente, non restrictive ou suffisamment naïve pour être comprise par le profane.

Enfin, pourquoi ne pas se reporter aux livres indiqués dans la bibliographie (on n'est jamais mieux cité que par soi-même mais, en même temps, les livres sur ce thème sont plutôt rares) pour revenir plus en détails sur un point ou une notion ayant éveillé votre curiosité.

A

$\boxed{\text{abscisse curviligne}}$ C'est le pendant de l'abscisse d'un point sur une droite, mesurée à partir d'un point origine, mais pour une courbe. Mesure donc la distance entre un point de la courbe et un point initial quand on se déplace sur la courbe.

$\boxed{\text{adaptation}}$ Tautologie, l'adaptation de maillage consiste à construire un maillage adapté au regard du phénomène étudié (résolution d'une équations aux dérivées partielles ou approximation géométrique précise d'une courbe ou d'une surface). Les éléments d'un maillage adapté doivent avoir la bonne taille dans toutes les directions (cas isotrope ou anisotrope si cette taille change selon la direction). La taille est définie via une métrique (voir métrique) qui dépend du but visé. Les méthodes d'adaptation reposent, du point de vue métrique, sur des estimateurs d'erreurs et, du point de vue maillage, sur des mailleurs (gouvernés), des remailleurs ou des optimiseurs. L'adaptation, dans le cas de la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, consiste en une boucle, maillage-calcul-estimateur, tant que.

$\boxed{\text{admissibilité}}$ Delaunay admissibilité pour une arête ou une face (un triangle), problème relatif à la triangulation de Delaunay. En deux dimensions, on se donne un ensemble de points (nuage) et des arêtes (d'extrémités certains de ces points). On construit la triangulation de Delaunay de ce nuage et on regarde si les arêtes prescrites sont formées. Les arêtes non formées ne sont pas Delaunay admissible, les autres l'étaient. S'etend à la trois dimensions pour des arêtes et des triangles. Ceci esquisse une différence importante entre triangulation et maillage. Question : trouver sous quelles conditions une arête, un triangle, est admissible.

$\boxed{\text{aire}}$ L'aire d'un élément est sa surface. Son calcul est immédiat, éléments droits, ou plus délicat, éléments courbes.

$\boxed{\text{aléatoire}}$ Voir randomisation.

$\boxed{\text{angle}}$ Plusieurs type d'angles, l'angle entre deux arêtes ou l'angle entre deux faces (angle dièdre).

$\boxed{\text{anisotropie}}$ Un phénomène anisotrope évolue de façon différente selon les directions, *A contrario*, un phénomène isotrope évolue de la même façon dans toutes les directions. Il en est de même pour les éléments d'un maillage (triangle étiré dans une direction) ou les figures géométrique (cercle, pas de directions privilégiées, versus ellipse, deux

1. Pour ne pas le nommer. Indiquons, néanmoins, que cette encyclopédie nous a fortement aidé dans l'élaboration de ce glossaire.

directions présentes, par exemple). Dans la résolution d'une équation aux dérivées partielles (modélisant un phénomène physique), si la solution cherchée présente une anisotropie, elle sera d'autant mieux captée avec le maillage sous-jacent s'il suit cette anisotropie, voir adaptation.

La flexibilité des simplexes font de ces éléments des solutions réalistes pour construire des maillages anisotropes. Voir aussi couche limite, un cas particulier d'anisotropie.

$\boxed{\text{anneau}}$ L'anneau relatif à une entité d'un maillage, un sommet, une arête, un élément, un anneau, est l'ensemble des éléments voisins de l'item (non déjà vus, pensons aux anneaux successifs d'un item donné). L'anneau d'un sommet est donc sa boule, l'anneau d'un triangle (maillage en triangles) est l'ensemble des triangles qui ont en commun un sommet avec le triangle initial donc partage un sommet ou une arête, etc.

$\boxed{\text{arbre}}$ Structure de données arborescente avec des branches donc. Dans les arbres les plus utilisés, un père a 0 ou 2 (arbre binaire), 0 ou 4 (quadtree), 0 ou 8 (octree) fils. La profondeur de l'arbre est la distance, en terme de génération, entre la racine de l'arbre et le dernier fils. Sert de structure de données pour faciliter des processus (par exemple de recherche) ou sert comme méthode de construction de maillage.

$\boxed{\text{arête}}$ Segment droit ou courbe joignant deux sommets (d'un élément d'un maillage). Une arête courbe, outre ses deux points extrémités, possède un ou plusieurs nœuds.

$\boxed{\text{arête vive}}$ Voir singularité.

$\boxed{\text{autocentrage}}$ Cette notion concerne les simplexes. Un simplexe est autocentré s'il contient le centre de sa boule circonscrite. Il y a un lien immédiat, pour les triangles, avec le fait que leurs angles soient aigus.

$\boxed{\text{autointersection}}$ Concerne soit un maillage dont deux éléments se coupent soit même un seul élément courbe (non valide donc) dont deux arêtes (faces) se coupent.

$\boxed{\text{avancée de front}}$ Méthode de construction de maillage, on part du bord du domaine et on remplit ce dernier en créant des couches successives d'éléments. En principe, on cherche à construire des éléments aussi réguliers que possible (équilatéraux en deux dimensions) mais il est facile d'introduire des critères anisotropes. Cette méthode crée naturellement des simplexes (voir ce mot), pour les autres éléments c'est plus que problématique.

B

$\boxed{\text{bascule}}$ Concerne essentiellement les simplexes. Pour deux triangles dans le plan, l'arête commune est supprimée et remplacée par l'arête joignant les deux sommets voyeur (voir voyeur) de cette arête commune. Pour une surface, même combat, mais la nouvelle arête peut exister, empêchant la bascule. En trois dimensions, pour des coquilles (voir coquille), suppression de l'arête définissant la coquille par remaillage du polygone (gauche) dont les sommets sont les points autres que les extrémités de l'arête considérée. Opération qui vise à optimiser un critère géométrique ou à modifier une topologie (voir topologie).

$\boxed{\text{base}}$ La base d'une pyramide est sa face posée sur terre, un carré certainement. La base d'un prisme est l'une de ses faces triangulaires, la base d'un hexaèdre est peut être sa face de paramètre $w = 0$.

La base d'un point est l'ensemble des éléments du maillage qui le contient, un (dedans), deux (sur une face, en trois dimensions, une arête en deux dimensions) ou plus (une arête en trois dimensions).

$\boxed{\text{Bernstein}}$ (1880-1968) Chef d'orchestre des polynômes qui portent son nom. Polynômes très simples à manipuler, fondamentaux dans la construction des formes de Bézier dont les courbes et les carreaux.

Pour une variable u de $[0, 1]$, un segment, et au degré d, il y a $d+1$ polynômes qui s'écrivent, pour $i = 0$ à $i = d$, $B_i^d(u) = C_i^d\, u^i\, (1-u)^{d-i}$ avec $C_i^d = \dfrac{d!}{i!\,(d-i)!}$ les coefficients du binôme.

Une vision barycentrique donne u dans $[0,1]$, $v = 1-u$, $B^d_{ij}(u,v) = C^d_{ij}\, u^i\, v^j$ avec $i+j=d$ et $C^d_{ij} = \dfrac{d!}{i!\,j!}$. Cette écriture s'étend d'un intervalle unité à un triangle ($u+v+w=1$ et $i+j+k=d$) ou à un tétraèdre ($u+v+w+t=1$ et $i+j+k+l=d$) et à tout simplexe "unité", voir Bézier.

$\boxed{\text{Bézier}}$ (1910-1999). Pierre. Les lettres de PostScript sont des courbes de Bézier. Les courbes de Bézier sont basées sur les polynômes de Bernstein et des points de contrôle que l'on peut bouger pour en modifier la forne.

Pour un paramètre u dans $[0,1]$, une courbe de Bézier est définie comme $\gamma(u) = \sum_i B^d_i(u)\, P_i$ où d est le degré de la courbe, $B^d_i(u)$ est le i^{ieme} polynône de Bernstein de degré d et les P_i sont les $d+1$ points de contrôle qui, justement, contrôlent la courbe, sa forme. La courbe ne passe pas par les points de contrôle, hormis les sommets, sauf si la courbe est un segment droit.

Ceci s'étend très simplement aux carreaux tensoriels donc à la définition de surfaces, deux paramètres u et v, ou la définition de volumes, trois paramètres. Pour une surface, (u,v) dans $[0,1]\times[0,1]$, on a $\sigma(u,v) = \sum_i \sum_j B^d_i(u)\, B^d_j(v)\, P_{ij}$.

Pour un espace de paramètres en barycentriques et un carreau triangulaire, on trouve $u+v+w=1$ et $\sigma(u,v,w) = \sum_{i+j+k=d} B^d_{ijk}(u,v,w)\, P_{ijk}$. Idem pour un carreau tétraédrique.

Un prisme est vu comme le produit tensoriel d'une courbe et d'un triangle. Une pyramide, comme d'habitude, n'est pas claire à définir. Enfin, il existe des carreaux autres, par exemple basés sur des fonctions rationnelles (fraction de deux fonctions polynomiales).

Les carreaux classiques, Bernstein + points de contrôle, ne sont autres que des éléments finis de Lagrange, fonctions de forme de Lagrange + nœuds, et on passe facilement d'une écriture à l'autre.

$\boxed{\text{bissection}}$ Voir dichotomie.

$\boxed{\text{boule}}$ Deux types, les boules métriques et les boules topologiques.

La boule métrique relative à un point (dit centre) est le lieu des points dont la distance à ce centre est inférieure ou égale à une valeur donnée (le rayon de la boule). Le bord de cette boule est un cercle (une sphère) ou une ellipse (un ellipsoïde) dans le cas anisotrope. Boule unité, boule de rayon 1, voir métrique.

La boule topologique d'un sommet d'un maillage est l'ensemble des éléments dont ce sommet est l'un des sommets. Une boule est ouverte (le sommet est sur une frontière) ou fermée, elle est convexe ou pas.

$\boxed{\text{Bowyer}}$ Adrian. Voir Watson.

$\boxed{\text{B-spline}}$ Une spline est une courbe polynomiale définie par morceaux, une B-spline est un assemblage de courbes splines qui généralise les courbes de Bézier (qui sont des B-splines particulières) et, en fait, peut s'exprimer via ces courbes (via la définition de points de contrôle adéquats). L'avantage de ces courbes est leur continuité (au niveau des tangentes). Les B-splines se généralisent en les courbes NURBS, voir ce mot.

$\boxed{\text{bucket}}$ Vous rangez vos chaussettes dans les tiroirs de votre commode, un tiroir par couleur. Vous voulez chercher une chaussette rouge d'une taille donnée. Ce n'est pas la peine d'examiner toutes vos chaussettes de cette taille mais seulement celles du tiroir contenant les rouges. On voit immédiatement l'intérêt de cette structure de données pour minimiser des opérations de recherche en répartissant les données. Un bucket est un ensemble de cases (d'une grille qui englobe le domaine) dans lesquelles on range des données auxquelles il est ensuite rapide d'accéder.

C

$\boxed{\text{caillou}}$ Dans un maillage tétraédrique on regarde un triangle dont les sommets sont trois sommets du maillage. Ce triangle est une face ou non. Dans ce cas, il existe des tétraèdres dont une arête perce le triangle. L'ensemble de ces éléments (3 ou plus) constitue un caillou. Notion voisine de celle de tuyau.

$\boxed{\text{calcul flottant}}$ Voir précision infinie.

$\boxed{\text{CAO}}$ Les logiciels de CAO, Conception Assistée par Ordinateur, sont utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie et permettent de faire un grand nombre de choses, sauf peut être le café. Pour nous, dans un processus de simulation numérique, c'est l'étape initiale dans laquelle on définit la géométrie de l'objet à étudier. Ceci revient à construire des courbes et des surfaces au moyen de carreaux (Bézier, B-Spline, NURBS...) dans un format de description qui va être compris et lu par les mailleurs de surface. Voir aussi support.

$\boxed{\text{carreau}}$ Un carreau (par exemple de Bézier) est une portion de surface appuyée sur des points de contrôle (généralement définissant le bord du carreau mais pas toujours dès que l'on monte en degré où des points internes doivent être donnés), il s'agit habituellement d'un triangle ou d'un quadrilatère (droit ou courbe, plan ou gauche).

$\boxed{\text{Catalan}}$ (1814-1894). Belge malgré son nom. C'est le nombre de Catalan qui nous intéresse. Ce nombre donne le nombre de possibilités (topologiques, hors validation géométrique) de recouvrir un polygone ayant $n+2$ côtés à l'aide de triangles. 1 pour un triangle, 2 pour un quadrilatère, 5 pour un pentagone, etc., soit $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

$\boxed{\text{cavité}}$ Dans un maillage, la cavité d'un point est un ensemble d'éléments dont la frontière est visible par le point. La cavité d'un sommet est sa boule. La cavité d'un point pour le critère de Delaunay est l'ensemble des éléments qui viole ce critère. Hormis sous contrainte d'un tel critère la cavité n'est pas unique. Notons qu'une cavité n'est pas nécessairement convexe.

$\boxed{\text{cellule}}$ On rencontre des cellules ici ou là, dans les diagrammes de Voronoï, dans les arbres de type quadtree ou octree, dans les méthodes de volumes finis, etc.

$\boxed{\text{cercle}}$ Lieu des points à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre). Le cercle est la frontière du disque qui est le lieu des points situés à une distance plus petite ou égale au rayon. Nous intéresse particulièrement le cercle circonscrit à un triangle qui passe par ses trois sommets et qui est le plus petit cercle contenant le triangle.

$\boxed{\text{cercle osculateur}}$ d'une courbe. Le cercle osculateur en un point d'une courbe est une approximation d'ordre 2 de la courbe en ce point. Il est centré sur la normale et son rayon est le rayon de courbure de la courbe (l'inverse de sa courbure).

$\boxed{\text{chaînage}}$ Concerne les structures de données. Elles stockent des entités, le chaînage associe à une entité une autre entité, celle qui la suit, chaînage avant, ou celle qui la précéde, chaînage arrière ou les deux, double chaînage. Un chaînage permet ainsi de parcourir rapidement la structure et d'ajouter ou de supprimer une valeur.

$\boxed{\text{champ de métriques}}$ Voir métrique.

$\boxed{\text{coin}}$ Voir singularité.

$\boxed{\text{coloriage}}$ Technique simple facilitant et accélérant bien des algorithmes. On affecte une couleur, c, à une entité du maillage (les sommets, les éléments). Cette couleur porte une information importante sur le statut de l'entité, a t-elle été déja vue donc déja traitée, est t-elle classifiée dans un ensemble donné (voir composante connexe par exemple ou cavité, un autre exemple). Plutôt que d'utiliser deux couleurs (un booléen), le nombre de couleurs est ici infini, $c = c + 1$.

$\boxed{\text{complexe}}$ Les quelques définitions que nous avons vues ici ou là sont parfaitement incompréhensibles, en même temps, on arrive à survivre. Il semble simplement que ce soit un ensemble d'entités (arêtes, faces, ..., éléments) conformes (au sens éléments finis, intersection vide ou réduite à une entité de dimension inférieure). On peut aussi souligner le côté hybride (et/ou mixte) d'un complexe. Notons également qu'un complexe ne couvre pas, en général, une région (du à son aspect hybride) Si on voit ces entités comme des k-faces (voir k-face) et que ces dernières sont des simplexes, on parlera de complexe simplicial. Toutefois une triangulation ou un maillage simplicial sont des complexes très particuliers (on a perdu les aspects hybride, mixte..., on garde la conformité et une région est ici définie (enveloppe convexe ou domaine borné)).

$\boxed{\text{complexité}}$. La complexité d'un algorithme traduit son comportement en fonction de son nombre d'entrées et se voit (en principe, voir défaut de cache) au temps qu'il faut pour le dérouler. Si on double la taille du problème (le nombre d'entrées) et que le temps double ou peu s'en faut, on est linéaire, s'il est multiplié par 4, on est quadratique et cela peut être pire, catastrophe. La complexité peut même ne pas être polynomiale. Une méthode de maillage quadratique ou pire est inutilisable sauf à traiter un carré unité maillé avec une petite centaine d'éléments.

$\boxed{\text{composante connexe}}$ Dans un maillage, une composante connexe est l'ensemble des éléments qui sont voisins entre-eux sans jamais franchir une frontière. On passe d'un élément à ses voisins s'il n'y a pas de frontière entre eux. Partant d'un élément, au hasard, dit germe, on trouve tous les éléments vérifiant cette propriété, quand on est bloqué, la composante connexe associée à l'élément initial est trouvée. S'il reste des éléments non visités lors de ce parcours, on a une nouvelle composante connexe à découvrir. On voit immédiatement le rôle d'un coloriage pour marquer les éléments déjà visités ou déjà classifiés.

$\boxed{\text{conformité}}$ Un maillage est conforme si l'intersection entre deux éléments est vide ou réduite à une entité du maillage (face, arête, sommet).

$\boxed{\text{connexité}}$ Voir composante connexe.

$\boxed{\text{consistance}}$ Le produit scalaire des deux vecteurs u et v est égal à celui des vecteurs v et u. Le volume du tétraèdre a, b, c, d et celui du même tétraèdre permuté peuvent être différents, l'un positif, l'autre négatif, dommage. Que faire, rester consistant dans sa décision tout au long du déroulement de l'algorithme.

$\boxed{\text{continu}}$ Théorie du maillage continu. Un domaine dont la frontière discrétisée est donnée (par un maillage de la dimension inférieure) peut être maillé de différents façons, il n'y a pas unicité. La théorie du maillage continu remplace ces maillages discrets par un maillage unique, dit continu. Ce maillage continu est un champ (continu) de métriques qui est, lui, unique. Un maillage n'est alors qu'une instanciation de ce champ parmi toutes celles possibles, voir métrique.

$\boxed{\text{continuité}}$ Pour une courbe discrétisée (maillée) et en un point, la continuité (autre que 0) implique que la tangente à droite et celle à gauche sont les mêmes, même droite support, continuité de type G, et, si de plus même longueur, continuité de type C. La continuité est donc liée à celle des dérivées premières (G^1 ou C^1) ou d'ordre plus élevé (C^2 par exemple). Les courbes de Bézier sont localement continues mais le raccord entre deux morceaux de la courbe discrète n'est pas automatiquement plus que d'ordre 0. Pour une surface, c'est le plan tangent qui caractérise sa continuité aux bords et aux sommets des éléments (carreaux) de son maillage, ailleurs la continuité de la surface est, bon an mal an, celle de ses carreaux.

$\boxed{\text{contrainte}}$ Voir triangulation contrainte.

$\boxed{\text{convexité}}$ Le fait d'être convexe. Un polygone convexe est tel que tout segment joignant deux de ses sommets est interne au polygone ou en est un segment. S'applique aux polyèdres. Convexité et visibilité sont des notions voisines, la convexité est toutefois plus contraignante.

$\boxed{\text{coordonnées}}$ Naturelles, sphériques, paramétriques ou barycentriques. Donc (x, y, z), (r, θ, ϕ), t (ou u) ou (u, v) ou (u, v, w) et, dernier cas, (u, v) ou (u, v, w) avec $u + v = 1$ ou $u + v + w = 1$. S'étend à toutes dimensions (sauf peut être les coordonnées sphériques).

$\boxed{\text{coquille}}$ Ensemble des éléments d'un maillage qui partagent une arête.

$\boxed{\text{couche limite}}$ Couches d'éléments très minces dans une direction. Utile en mécanique des fluides autour du corps (avion) étudié. La direction ci-dessus est (doit ou devrait être au mieux) orthogonale à la surface du corps. On a donc des éléments fortement anisotropes dans les différentes couches de la couche.

Quand une couche limite rencontre une surface, elle va se projeter sur cette dernière en faisant son empreinte (ou imprinting). Ce procédé consiste à projeter la couche limite sur la portion de surface impactée. Il en résulte un maillage de surface composé de triangles et/ou de quadrilatères fortement étirés dans la direction d'extrusion.

$\boxed{\text{courbe}}$ Topologiquement, une courbe est de dimension un et vit dans un espace de dimension 2, 3... On peut la voir comme un point qui se déplace selon une règle fixée. Une courbe peut être courbe (!) ou droite. Un élément courbe est un élément dont au moins une arête est courbe ou, en trois dimensions, au moins une arête est courbe ou, sinon ou de plus, une face est courbe (un hexaèdre de degré 1 peut avoir une face gauche mais il n'est pas courbe pour autant).

On va rencontrer deux types de courbes. Celles qui sont des données et servent à décrire et définir la géométrie et celles qui constituent la discrétisation (maillage) construite à partir des courbes données. Les premières sont analytiques, $y = f(x)$, ou implicites, $f(x, y) = 0$, cas rares ou académiques, ou encore, et en pratique, elles sont définies par des segments droits ou courbes (des carreaux ou des bords de carreaux) basés sur les systèmes de description (courbes de Bézier...) utilisés en CAO. Les secondes sont des lignes polygonales formées de segments droits ou courbes [2] qui seront des arêtes d'élémemts du maillage. Les extrémités de ces segments sont le plus souvent des points singuliers (pas de souci de continuité mais potentiellement une tangente différente à droite et à gauche), par contre entre deux tels points la courbe est régulière.

$\boxed{\text{courbe de remplissage}}$. Voir Hilbert et courbe en Z mais il y en a d'autres.

$\boxed{\text{courbure}}$ La courbure (d'une courbe) indique, en un point, comment cette courbe dévie de la tangente en ce point. La courbure d'un segment droit est nulle. Le rayon de courbure est son inverse, il est infini pour un segment droit.

$\boxed{\text{couronne}}$ Voir anneau.

$\boxed{\text{critère de la boule vide}}$ Voir Delaunay.

D

$\boxed{\text{De Casteljau}}$ (1930-). Paul de Faget. Le compère de Bézier. Chez Citroën, en même temps que Bézier, lui, chez Renault, a proposé des algorithmes récursifs très simples (on ne voit pas les polynômes de Bernstein, en même temps $(1 - u) + u = 1$, sauf erreur), permettant de considérer et de manipuler les carreaux dits de Bézier (tant pis pour lui). Évaluation d'un point, subdivision, élévation du degré, etc.

$\boxed{\text{découpe}}$ Voir aussi subdivision. Un élément peut être découpé en éléments du même type (subdivision) ou d'un autre type, un quadrilatère peut être découpé au moyen de deux triangles, etc.

$\boxed{\text{défaut de cache}}$ Quand on veut accéder à une valeur dans la mémoire, on lit en fait un ensemble de valeurs qui vont dans le cache. Si on veut accéder à une autre valeur, soit elle est déjà dans le cache soit il faut effectivement effectuer une nouvelle lecture, on a alors un défaut de cache. Ces défauts sont gourmands en temps au point de dégrader significativement les performances d'un algorithme et de masquer sa complexité théorique.

$\boxed{\text{degré}}$ Voir ordre. Le degré d'un polynôme on voit ce que c'est. Le degré d'un élément (fini) ou d'un carreau est celui de ses polynômes sous-jacents. On parlera aussi d'ordre même si ce terme qualifie plutôt le comportement d'une méthode, méthode d'ordre 1, d'ordre 2, etc.

$\boxed{\text{degré de liberté}}$ Voir nœud.

$\boxed{\text{Delaunay}}$ (1890-1980). Boris pour les intimes. Descendant d'un Français qui pensait faire une courte visite en Russie dans les bagages de Napoléon. Élève de Voronoï, voit-on ici ou là (c'est pour le moins suspect vue la chronologie et la géographie, Delaunay avait 18 ans à la mort de Voronoï). Si on donne au mot élève, le sens de disciple, c'est plus plausible.

2. Les mailleurs construisent des segments droits et obtenir des segments courbes se fait par un post-traitement.

Pour nous c'est l'homme des triangulations qui portent son nom. Étant donné un ensemble (nuage) de points dans un espace de dimension quelconque, la triangulation de Delaunay est une triangulation ayant des propriétés particulières. Elle est constituée en principe de simplexes (voir simplexe) dont les sommets sont les points du nuage. La particularité est que ces éléments vérifient le critère de la boule vide. La boule circonscrite à un élément ne contient pas de sommets autres que ceux de cet élément. Le dual de cette triangulation n'est autre que le diagramme de Voronoï formé de cellules polygonales (polyédriques) entourant les points donnés, les sommets de ces cellules sont les centres des boules circonscrites des simplexes de la triangulation. En sens inverse, le dual de ce diagramme est "la"triangulation de Delaunay. "La"car elle est unique sous réserve de garder, le cas échéant (par exemple 4 points cocycliques en deux dimensions), des éléments autres que des simplexes (ici un quadrilatère). La notion de triangulation de Delaunay n'a pas de sens sur une surface, le triangle n'est pas de la bonne dimension topologique, c'est un 2-simplexe mais pas un 3-simplexe. Cependant, par abus de langage, on pourra encore parler de triangulation (voir triangulation) pour désigner un maillage (voir maillage) sur une surface.

Plusieurs méthodes permettent de construire cette triangulation (dans le plan ou un volume) dont la méthode incrémentale qui insère, l'un après l'autre, les points en modifiant la triangulation localement à chaque insertion. Ceci revient à localiser le point, trouver les éléments affectés, les détruire et les remplacer par la boule (voir ce mot) du point considéré. Cette boule est fermée (point interne) ou ouverte (point externe).

Bien que jouissant de nombreuses propriétés, les éléments de la triangulation de Delaunay ne sont pas, *stricto sensu*, de bonne qualité (au sens éléments finis), voir sliver. Obtenir une certaine qualité nécessite que les points soient correctement placés les uns par rapport aux autres.

La notion d'anisotropie n'est pas intrinsèque, on peut néanmoins torturer l'algorithme de construction pour obtenir un résultat anisotrope (que l'on pourra, si on veut, continuer à appeler une triangulation de Delaunay).

$\boxed{\text{diagramme}}$ Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points (ou sites) est un ensemble de cellules polygonales ou polyédriques bornées ou non qui sont le lieu des points plus proches d'un site que d'un autre. Laguerre propose aussi un diagramme mais les distances sont pondérées par des poids associés aux sites.

Les méthodes de volumes finis effectuent les calculs sur des cellules construites à cette fin, par exemple celles de Voronoï mais pas toujours.

$\boxed{\text{diamètre}}$ Le diamètre d'un élément (d'une figure géométrique) est le[3] segment de plus grande longueur d'extrémités deux points de sa frontière. Le diamètre d'un triangle (droit) est son arête la plus longue.

$\boxed{\text{dichotomie}}$ Par dichotomie ou bissection, on cherche en général le zéro d'une fonction. Les applications en maillage sont multiples, trouver l'intersection entre deux segments (même courbes), mesurer la longueur d'un segment dans un champ de métriques. L'idée est de couper récursivement un segment en deux, tant que, pour s'approcher du but.

$\boxed{\text{discrétisation}}$ Description d'une courbe ou d'un domaine en toute dimension connu continument par un ensemble fini (discret) d'entités de géométries simples (segments, triangles...).

$\boxed{\text{distance}}$ La distance entre deux points du plan ou de l'espace est la longueur du segment d'extrémités ces deux points. La distance entre un point et une droite est la longueur du plus petit segment joignant ce point à un point de la droite (ce segment est perpendiculaire à la droite). S'étend pour définir la distance d'un point à un plan. Ces distances sont liées à une norme donc un produit scalaire, on change de norme, on change la définition. La distance est une notion isotrope mais on peut la rendre directionnelle (anisotrope) en la calculant via une métrique - voir métrique.

La distance entre deux points d'une courbe est la longueur de l'arc de la courbe d'extrémités ces points (lien immédiat avec l'abscisse curviligne). La distance

3. Dans un cercle, il y a autant de diamètres que l'on veut.

entre deux points d'une surface est la longueur minimale des arcs d'éxtrémités ces deux points pour toutes les courbes tracées sur la surface reliant ces deux points.

La distance entre deux ensembles est le minimum des distances entre deux points quelconques parcourant chacun l'ensemble auquel il appartient. Voir aussi Hausdorff.

$\boxed{\text{diviser pour régner}}$ Méthode classique en algorithmique. Pour résoudre un problème, on le découpe en deux sous-problèmes (plus "petits" donc) tant que jusqu'à avoir en face un probème facile à résoudre, c'est la partie division. Ensuite, on fusionne (c'est la partie fusion) les sous-solutions pour obtenir le résultat cherché. Méthode utilisée également dans le monde politique ou dans le domaine militaire, cette fois juste pour régner (gagner).

E

$\boxed{\text{élément}}$ On pourrait demander à Euclide. Pour nous, néanmoins, un élément est un membre d'un maillage, un segment du maillage d'une courbe (mais pas l'arête d'un triangle), un triangle, etc., un tétraèdre (mais pas ses faces), une cellule d'un diagramme, etc. Voir entité (où on retrouvera bien les sommets, les arêtes, les faces).

$\boxed{\text{élément fini}}$ (complet ou réduit). Un élément fini est un élément géométrique (triangle, ...) sur lequel est défini un espace de fonctions (des polynômes mais pas toujours) qui permettent de calculer en tout point de l'élément la valeur d'une fonction inconnue à partir de ses valeurs en les seuls nœuds de l'élément (voir nœud). Le quadrilatère de Lagrange à 9 noeuds est un élément complet, celui à 8 nœuds est un élément réduit (l'espace polynomial ici est plus pauvre). Si on était méchant, on dirait un élément géométrique, des nœuds et une règle de trois améliorée.

$\boxed{\text{ellipse}}$ Accrochez vous, une ellipse est un cercle anisotrope pour une distance définie par une métrique (constante) présentant deux directions principales et deux longueurs caractéristiques. Les directions sont les vecteurs propres de la métrique, les longueurs sont liées à ses valeurs propres. Donc une ellipse est le lieu des points équidistants d'un point donné, ce dans une métrique, voir métrique.

$\boxed{\text{ellipsoïde}}$ Comme une ellipse mais en trois dimensions, trois directions et trois longueurs.

$\boxed{\text{empreinte}}$ Voir couche limite.

$\boxed{\text{entité}}$ Au-delà du point qui est un peu particulier, les entités d'un maillage sont tous les composants qui interviennent, sommets, arêtes, faces et éléments eux-même. Ensuite, il y a des entités formées d'entités, la boule d'un sommet, la coquille d'une arête, etc.

$\boxed{\epsilon}$ Petit, il pourrait s'appeler ι (iota), un petit chouïa donc.

$\boxed{\text{espace}}$ Deux espaces, l'espace lui-même x, y ou x, y, z dans un repère donné ou un espace de paramètres $t, u, (u, v)$, ... Dans ce cas, l'objet est l'image via une transformation d'un intervalle, d'un carré, d'un triangle sur lesquels varient le, les, paramètres.

$\boxed{\text{espace de contrôle}}$ Un espace de contrôle est une structure spatiale qui recouvre le domaine et que l'on peut interroger facilement pour connaître l'environnement, présence de sommets, d'éléments... dans une région donnée. Ce peut être une structure de données classique (bucket, quadtree, octree...) ou même un maillage - voir maillage de fond.

$\boxed{\text{estimateur d'erreur}}$ Vaste sujet où interviennent des interpolations, Taylor et des normes. Analyse mathématique qui permet d'évaluer l'erreur sur la solution numérique partout dans le domaine de calcul. Ces estimations de l'erreur peuvent servir à générer un nouveau maillage qui va essayer de les réduire, on dira un maillage adapté, voir adaptation. Il existe de nombreux types d'estimateurs d'erreur. Il y en a de nature géométrique (ignorant le problème traité) qui en général sont basés sur des développements de Taylor (voir Taylor). D'autres sont basés sur le schéma numérique et analysent l'erreur de troncature. Enfin, d'autres estimateurs d'erreur vont essayer de contrôler l'erreur sur une fonctionnelle d'intérêt (voir ce mot), on les dit ciblés à une fonctionnelle ou "goal-oriented", et cette fois on va utiliser le problème adjoint (ou dual) pour estimer l'erreur. On note deux grandes familles d'estimateurs d'erreur. Les estimateurs *a posteriori*, comme ci-dessus, qui utilisent la solution discrète et permettent une évaluation effective de l'erreur et les estimateurs *a priori* qui se basent plutôt sur la solution exacte (inconnue) et vont donner une estimation de l'erreur.

étoile Terme peu ou pas utilisé, équivalent de *star* en anglais, voir cavité. Ensemble d'éléments étoilés par rapport à un point.

étoilé Un polygone, un polyèdre, est étoilé par rapport à un point si son bord (ses arêtes ou ses faces) est visible de ce point. Cet ensemble peut être convexe ou non.

Euclide (IV siècle av. J .C.). Un vieux monsieur, père de la géométrie qui porte son nom avec des polyèdres et, pour nous, la définition de la distance (usuelle) entre deux points de l'espace.

Euler (1707-1783). Connu pour sa fluidité et ses nombreuses relations. Peut-être le père de une ou de plusieurs filles. Les relations d'Euler lient les nombres de sommets, d'arêtes, de faces et d'éléments de tout maillage et sont des invariants - voir invariants.

extrusion Méthode de construction de maillage par extrusion selon une ligne génératrice d'un maillage de dimension inférieure. Pensons à un cylindre dont le maillage se fait, couche par couche, en reliant des sections successives maillées comme (topologiquement) le maillage de sa base. Ce n'est pas un maillage en deux dimensions, ce n'est pas vraiment une méthode en trois dimensions, on parlera de méthode deux dimensions et demi.

F

face Voir k-face.

FIFO Voir queue.

filtre Technique qui permet de ne traiter que certaines entités (sommets, éléments). Une valeur est affectée aux entités, cette valeur est comparée au seuil du filtre qui indique si on doit agir ou pas. Ce seuil est statique (fixe) ou dynamique et, dans ce cas, on peut le faire évoluer pour traiter les entités dans un certain ordre.

Technique qui permet de filtrer des points en, par exemple, écartant des points proches ou, justement, en les retenant. Voir bucket.

flottant Voir précision infinie.

fonction de forme Peut être un polynôme mais pas seulement. Permet de créer une forme, la forme d'une courbe ou d'une surface à partir de la donnée de quelques points (voir Bézier entre autre). Permet de trouver les valeurs (donc le comportement) d'une fonction à partir de sa valeur en quelques points, les valeurs aux nœuds (voir nœud) d'un maillage dans les méthodes d'éléments finis. Si la fonction est scalaire et le maillage est plan, on définit une surface en considérant comme cote ces scalaires (et le lien est fait entre fonctions de forme géométrique et fonctions de forme de type éléments finis, c'est la même chose).

fonctionnelle d'intérêt C'est une fonction de la solution qui retourne un scalaire (comme la traînée d'une voiture) et permet à l'ingénieur d'évaluer tel ou tel aspect du concept étudié.

forme de Bézier Au-delà de la géométrie (carreaux), un polynôme à une ou plusieurs variables (dans [0,1] naturelles ou barycentriques) exprimé dans la base de Bernstein est une forme de Bézier. Un tel exemple est le jacobien des éléments finis de Lagrange (écrits sous la forme de carreaux de Bézier). Ce jacobien, dans le cas d'un triangle (courbe ou non) d'un certain ordre, est un polynôme de la forme $\sum_{i+j+k=d} B^d_{ijk}(u,v,w)A_{ijk}$ où d est le degré du polynôme, $u+v+w=1$ notent les paramètres (système barycentrique) et les A_{ijk} sont des coefficients (réels). Sauf exception, le degré du polynôme jacobien n'est pas celui de l'élément. Cette forme de Bézier facilite l'étude du signe du polynôme pour tout triplet (u,v,w) et, ainsi, permet de vérifier la validité géométrique de l'élément.

Frenet (1816-1900). Avec Jean Frédéric Frenet, on se repère et on est mobile. En un point (non singulier) d'une courbe, la tangente et la normale forment un repère (complété avec la binormale en trois dimensions, formant ainsi un trièdre). Ce repère est mobile car il change d'un point à un autre. Il facilite l'analyse locale de la courbe.

$\boxed{\text{frontale}}$ Méthode frontale pour la construction d'un maillage, voir avancée de front. Approche possible pour renuméroter les éléments et/ou les sommets d'un maillage en avançant par fronts successifs.

$\boxed{\text{fusion}}$ Fusion de deux sommets dans un maillage ou fusion de deux maillages (recollement). La fusion des deux extrémités d'une arête permet de supprimer cette dernière, sous réserve de maintenir la validité du maillage, et sert à supprimer des arêtes jugées trop courtes ou à déraffiner un maillage. La fusion de deux maillages, partageant une zone commune (généralement une portion de frontière) permet de créer un seul maillage. Deux points à traiter, l'identification (rapide) des entités communes et la renumérotation des sommets, nœuds (maillage d'ordre élevé) et éléments.

G

$\boxed{\text{Gabriel}}$ (1929-2003). K. Ruben. Le cercle (sphère) de Gabriel relatif à un segment est le cercle (sphère) dont ce segment est un diamètre. Notion voisine, la sphère équatoriale relative à un triangle est la sphére dont le cercle circonscrit du triangle est l'un des cercles équatoriaux.

$\boxed{\text{genre}}$ Le genre d'une surface (fermée donc sans bord) est un entier qui la caractérise. Il compte le nombre d'anses (où l'on pourrait, genre, passer son doigt en étant entouré par la surface) de cette surface. Pour une sphère, ou une surface analogue, le genre vaut 0, pour un tore (ou assimilé), il vaut 1, etc. Le genre est relié aux caractéristiques d'Euler - voir Euler.

$\boxed{\text{germe}}$ Élément initialisant un processus à partir duquel on trouve, par voisinage et de proche en proche, les autres éléments ayant une propriété donnée, voir composante connexe par exemple. Valeur (scalaire) initialisant un calcul - voir aussi aléatoire et randomisation.

$\boxed{\text{Gibbs}}$ Méthode ancienne (1976) de renumérotation des sommets et/ou des éléments d'un maillage. Méthode entièrement automatique très efficace dans une large gamme de situations, seulement relativement efficace dans d'autres cas.

$\boxed{\text{gradation}}$ Indique comment varie une quantité d'une position à sa voisine, par exemple la longueur des arêtes. En principe cette gradation doit rester relativement faible (sinon il n'est pas possible d'obtenir un maillage de qualité - voir qualité).

$\boxed{\text{grille}}$ Structure spatiale régulière recouvrant un domaine, un carré englobant découpé uniformément en petits carrés, un cube... en trois dimensions. Sert à localiser, à identifier, à filtrer... des points. Sert aussi à localiser rapidement des éléments- voir aussi bucket.

H

$\boxed{\text{hachage}}$ Technique de base permettant de manipuler facilement et rapidement des données (des entiers en général). Basée sur une clé, un détrompeur et un chaînage. Sert, par exemple, à identifier les éléments qui ont une arête d'extrémités données, d'indices a et b. Une clé simple est la somme $a + b$. Toutes les arêtes de même clé sont trouvées et rangées dans une liste chaînée. Comme une arête avec les indices c et d peut avoir la même clé, $c + d = a + b$, il faut un détrompeur pour les distinguer ou les identifier, le plus simple est le min des indices, $min(a, b)$. Le comportement de l'algorithme (ici portant sur des arêtes) est quasiment linéaire (un algorithme bestial serait quadratique). S'applique dans de nombreuses situations (voir par exemple voisinage).

$\boxed{\text{Hausdorff}}$ (1868-1942). A peut être fait l'X. Félix. Avec lui et sa bande, on garde ses distances. La distance de Hausdorff permet d'évaluer la proximité entre deux ensembles. Pour nous il s'agit de deux surfaces. Elle est utilisée pour quantifier la qualité de l'approximation d'un maillage de surface par rapport à une surface de référence (un carreau ou une surface paramétrique) ou par rapport à un autre maillage. L'approximation reste située dans une bande définie par un seuil sur cette distance, du moins c'est le but.

$\boxed{\text{Hermeline}}$ François. Voir Watson.

$\boxed{\text{hessien}}$ Déterminant de la matrice hessienne.

$\boxed{\text{hessienne}}$ Matrice (carrée) des dérivées partielles secondes d'une fonction de plusieurs variables à valeur scalaire.

$\boxed{\text{hexaèdre}}$ Polyèdre à 8 sommets, 6 faces (des quadrilatères) et 12 arêtes. Le cube en est un exemple. Les faces ne sont pas planes en général même si les arêtes sont droites. Sauf cas particulier ou situations précises, il est délicat de paver un domaine en hexaèdres - voir aussi quadrilatère.

$\boxed{\text{Hilbert}}$ (1862-1943). A fait pas mal de choses mais ce sont ses courbes de remplissage qui nous intéressent spécialement. Elles permettent de parcourir un espace de dimension quelconque en le projetant sur un espace mono-dimensionnel avec un trajet particulier. Ce trajet mélange proximité et sauts et, ainsi, donne un parcours qui combine un aspect séquentiel et un aspect aléatoire, propriétés recherchées dans certains algorithmes, renumérotation, parallélisation mais pas seulement.

La courbe est construite de manière récursive. En deux dimensions, l'espace est un carré découpé en 4. La courbe parcourt les 4 cases selon un motif précis (par exemple, on commence en bas à gauche, on monte, on passe à droite puis on descend). Chaque case est coupée en 4 et la courbe est modifée pour parcourir les 16 cases ainsi créées. Et la récursion continue jusqu'à une certaine profondeur (finesse des cases). En suivant la courbe finale, on accède aux cases dans l'ordre correspondant. Si on stocke dans les cases des informations (sommets, éléments...), on accède alors à ces entités avec cet ordre. Ceci est à la base de méthodes de renumérotation, de partition de maillage, ..., très simples et très efficaces.

$\boxed{\text{hybride}}$ Un maillage hybride (d'ailleurs s'agit-il d'un maillage, on peut ici initier une querelle de jésuites) est composé d'éléments de dimensions topologiques différentes, des arêtes, des triangles, des tétraèdres... mais ces arêtes sont des éléments en temps que tel et pas nécessairement des arêtes de tétraèdres et ces triangles ne sont pas nécessairement des faces de tétraèdres.

I

$\boxed{\text{immersion}}$ On se donne un maillage (quelconque) dans une région duquel on veut insérer un autre maillage (particulier). Cette opération d'immersion (de maillage) consiste à supprimer des éléments du maillage initial, à plaquer l'autre maillage à la place et à raccorder le tout de manière conforme (ou non).

$\boxed{\text{indicateur d'erreur}}$ Voir estimateur d'erreur et voir la différence entre ces deux notions. Indique si il y a potentiellement de l'erreur sur la solution numérique. En général, ils sont moins bien posés mathématiquement que les estimateurs d'erreur et sont plutôt qualitatifs.

$\boxed{\text{interpolation}}$ Procédé qui permet de trouver des valeurs (scalaires ou autres) à partir de valeurs connues, le tout sur un support géométrique. Sur un segment, trouver les valeurs d'une fonction à partir de ses valeurs aux extrémités, trouver un point à partir des deux extrémités, etc. Sur un triangle, trouver les valeurs d'une fonction à partir de ses valeurs aux sommets... La fonction d'interpolation est plus ou moins riche, une moyenne, un barycentrage (si loisible), un polynôme d'un certain degré (le nombre de valeurs connues est en accord avec ce degré), etc. La fonction interpolée, notée souvent $\Pi u(.)$, est en général une approximation plus ou moins précise de la fonction inconnue notée $u(.)$ - voir estimateur d'erreur.

$\boxed{\text{interpolation transfinie}}$ Méthode de construction de maillage s'appliquant à un domaine (plan) assimilable à un quadrilatère déformé. Utilise une fonction qui transporte donc déforme une grille triviale sur le domaine donné en s'appuyant sur le bord du domaine dont un maillage (une discrétisation) est donné. Existe aussi pour d'autres géométries.

Assure un aspect structuré au résultat, est rapide mais peu robuste. Notons un lien entre cette interpolation et les éléments finis réduits sans nœuds internes.

$\boxed{\text{intersection}}$ Intersection géométrique et intersection de métriques (voir métrique).

L'intersection de deux entités géométriques consiste soit à calculer effectivement le(s) point(s) où les deux entités se coupent ou simplement à savoir si elles se coupent (sans avoir à faire ce calcul). En maillage, le problème d'intersection se résume le plus souvent à regarder si deux segments se coupent, qu'ils soient droits ou courbes. Mais, *in fine*, se réduit à traiter deux segments droits via une approche itérative si les segments initiaux étaient courbes.

L'intersection de deux métriques consiste à trouver une métrique unique qui reflète au mieux les propriétés des deux métriques initiales (longueurs et directions). Une métrique permet de définir des longueurs dans toutes les directions, elle est représentée par une ellipse en deux dimensions et un ellipsoïde en trois dimensions. Si on se donne plusieurs métriques en un point, l'intersection des métriques va nous donner la métrique qui vérifie les plus fortes contraintes de longueurs dans toutes les directions données par toutes les métriques. On cherche la plus grande ellipse (ellipsoïde) incluse dans l'intersection géométrique de toutes les ellipses (ellipsoïdes) données.

$\boxed{\text{invariants}}$ Voir Euler. Les relations d'Euler lient les nombres de sommets, d'arêtes, de faces et d'éléments de tout maillage (simplicial ou non), elles dépendent du genre (cas d'une surface) et du nombre de composantes connexes de la frontière du domaine maillé. Elles permettent d'estimer, par exemple et sauf cas particuliers, le nombre d'élements en fonction du nombre de sommets, $2\,n$ triangles pour n sommets, $6\,n$ tétraèdres pour n sommets...

Pour une surface triangulée sans bord, la relation s'écrit (notations évidentes) : $s - a + e = 2$. De manière générale, pour un polygone ou une surface, on a $s - a + e = 2 - n_c - 2g$ avec n_c le nombre de composantes connexes de la frontière et g le genre (nul si on est dans le plan). En volume, même formule $s - a + f - e = 2 - n_c - 2g$.

$\boxed{\text{isotropie}}$ Voir anisotropie. Un phénomène anisotrope évolue de manière différente selon les directions au contraire d'un phénomène isotrope. Un élément isotrope (triangle équilatéral par exemple) ne montre pas de directions particulières, *a contrario*, un triangle anisotrope est étiré dans une direction.

J

$\boxed{\text{jacobien}}$ Déterminant d'une matrice jacobienne dans le cas où elle est carrée. Le jacobien d'un triangle plan de degré 1 et celui d'un tétraèdre de degré 1 mesure, à un facteur près, son aire, son volume. Pour les éléments plans et volumiques de degré élevé, le jacobien est un polynôme dont les coefficients sont, à un facteur près, des aires ou des volumes de triangles ou de tétraèdres selon la dimension de l'espace et, ce, quelle que soit la géométrie de l'élément.

$\boxed{\text{jacobienne}}$ Matrice (carrée ou non) des dérivées partielles premières d'une fonction vectorielle.

K

$\boxed{k\text{-face}}$ Maillages simpliciaux. Désigne une face de dimension topologique k dans un espace de dimension d. Enveloppe convexe (voir simplexe) de $k + 1$ sommets. Un sommet est une 1-face, une arête une 2-face, un triangle est une 3-face en trois dimensions (et les dimensions supérieures) et l'élément lui-même en deux dimensions. La d-face est ainsi l'élément lui-même.

$\boxed{k\text{-simplexe}}$ En fait une k-face d'un simplexe - voir simplexe et revoir k-face.

L

Lagrange (1736-1813). Nous concerne par les éléments finis dits de Lagrange basés sur les polynômes de Lagrange, eux mêmes construits à partir des fonctions de Lagrange. Ces éléments, sans le dire, sont des carreaux de Bézier - voir Bézier.

Pour le degré d, pour u une variable barycentrique, les fonctions de Lagrange sont $\phi_0(u) = 1$ et $\phi_i(u) = \frac{1}{i!}\Pi_{l=0}^{i-1}(du - l)$ pour i de 1 à d. En variables naturelles, elles s'écrivent $\phi_i(u) = \frac{(-1)^i}{i!\,(d-i)!}\Pi_{l=0,l\neq i}^{d}(l - du)$. Les polynômes de Lagrange sont alors $p_{ijk}(u, v, w) = \phi_i(u)\phi_j(v)\phi_k(w)$ pour un triangle et $p_{ij}(u, v) = \phi_i(u)\phi_j(v)$ pour un quadrilatère...

Laguerre (1834-1886). Antérieur à Voronoï, a proposé des diagrammes construits sur des points (sites) affectés de poids ce qui modifie la distance entre points. Ainsi, dans le plan, la médiatrice d'un segment ne passe pas nécessairement par le milieu de celui-ci. Les cellules sont construites en utilisant ces médiatrices qui forment les séparateurs entre les points.

Laplace (1749-1827). Un homme qui a du ressort. L'opérateur de Laplace (le laplacien) sert pour optimiser les maillages pour un critère (de qualité) donné en modifiant la place des sommets du maillage considéré.

LIFO Voir pile.

ligne polygonale Frontière d'un polygone si fermée, ensemble de segments consécutifs de toute façon.

liste Sur wikipedia, on comprend rien mais bon. Une liste est une structure de données (un tableau) contenant des données, des entiers ou des scalaires, auxquelles on accède via un seul indice, $v = liste(i)$. Plus riches sont les listes chaînées où on connaît le suivant d'indice $next(i)$ et/ou le précédent d'indice $prev(i)$ ou les deux. Listes simplement ou doublement chaînées. Voir aussi tableau.

localisation Opération fréquente dans un maillage, localiser rapidement un point, dans quel(s) élément(s) se trouve-t-il ? Pour être rapide (et pas quadratique), il faut s'aider en mettant en place une structure accélératrice (grille, quadtree, octree...) qui permet de s'approcher au plus près de la solution et ainsi de réduire le nombre de calculs à effectuer. En pratique, ces calculs se résument à savoir si on est à "droite" ou à "gauche" d'une arête (d'une face) et reposent sur le signe d'aires ou de volumes.

M

maillage Recouvrement (découpage) d'un domaine (continu) par un ensemble d'éléments de géométrie simple (segment, triangle, quadrilatère, polygone, tétraèdre, prisme (pentaèdre), hexaèdre, pyramide, polyèdre quelconque), donc approximation discrète du domaine, Les éléments ne se chevauchent pas, intersection vide des intérieurs des éléments. Plusieurs types de maillages, conformes ou non (voir conforme), hybrides (élément de dimension topologique différente) ou mixtes (élément de géométrie différente), structurés ou non-structurés, droits ou courbes. Dans un maillage droit, les arêtes des éléments sont des segments droits, les faces sont (triangles) ou ne sont pas (quadrilatères) planes, on parlera de maillage de degré 1. Dans un maillage de degré autre, donc dit de degré élevé, les arêtes peuvent être courbes et les faces gauches (même si les arêtes sont droites). Ces maillages, outre leurs sommets, peuvent posséder des nœuds sur les arêtes, dans les faces voire à l'intérieur des éléments eux-mêmes.

maillage de fond Un maillage de fond sert d'espace de contrôle (voir ce mot) lors de la construction d'un nouveau maillage. Dans le cas d'un processus itératif, le maillage de fond à une étape est le maillage de l'étape précédente. En interrogeant ce maillage de fond, on a des information utiles à la construction du maillage actuel.

Dans le cas de maillages courbes (ou simplement de frontières courbes avec des maillages droits), les domaines couverts par le maillage de fond et le maillage actuel peuvent être légèrement différents (au niveau de ces frontières courbes).

manifold, Voir surface à variété uniforme.

métrique Nos amis américains (on dit toujours nos amis dans ce genre de phrases) appelent métriques toutes mesures de qualité. Pour nous une métrique est ce qui définit en premier une distance (donc une norme et un produit scalaire puis *tutti quanti*, angle, aire, volume..). Une métrique est une forme quadratique symétrique et définie positive. On peut la caractériser par une matrice $d \times d$, d la dimension de l'espace. Les vecteurs propres de cette matrice sont des directions principales (voir anisotropie) tandis que les valeurs propres indiquent ce que sont les longueurs dans ces directions (voir produit scalaire). Permet de définir les longueurs dans toutes les directions.

Étant donné une métrique, définie en tout point, on dispose d'un champ de métriques dit continu. Ce cas reste académique et, en pratique, les métriques ne sont données qu'en certains points. À partir de ces données discrètes, on peut reconstruire un champ continu.

mixte Un maillage mixte est composé d'éléments de géométrie différente. En deux dimensions, des triangles et des quadrilatères, en trois dimensions un mélange de tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, pyramides.

N

nœud Les nœuds d'un élément sont des points particuliers qui permettent de définir la géométrie (nœud(s) sur une arête courbe...) et/ou, dans un élément fini, sont les points qui supportent le ou les degrés de liberté de la fonction inconnue cherchée (valeurs, dérivées...).

normale Pour une courbe, la normale est orthogonale à la tangente, plusieurs tangentes, plusieurs normales. La normale en un point de la courbe porte le centre du cercle osculateur de la courbe, le plus grand cercle tangent en ce point à la courbe qui en constitue une approximation locale, son rayon est le rayon de courbure, l'inverse de la courbure locale. La normale est portée par la dérivée seconde de la courbe. Pour une surface la normale en un point (non singulier) est portée par une droite perpendiculaire (au plan tangent en ce point). Elle porte le centre de la sphère osculatrice en ce point.

norme Découle du produit scalaire donc de la métrique sous-jacente donc de la boule unité définie par cette métrique.

notation Vaste programme comme aurait pu dire un grand monsieur. Choisir une bonne notation est source de clarté, une mauvaise pouvant prêter à confusion. Exemple, soit t la pression et p la température, on a compris. Certaines notations sont évidentes et acceptées par tous, d'autres le sont moins et même sont sources de débats. Exemple, comment noter un maillage [4] ? Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage d'un domaine Ω... voit-on ici ou là, le h fait référence à la taille des éléments, par contre le $\mathcal{T}$ fait trop penser à une triangulation. Alors M, $\mathbf{M}$, $\mathcal{M}$. M est plutôt un point ou un milieu (d'un segment), $\mathcal{M}$ semble plutôt approprié pour désigner une métrique, $\mathbf{M}$, pourquoi pas (et ca marche en anglais, mesh). Un maillage du domaine (continu) Ω recouvre un domaine discret qui est souvent noté Ω_h, h la taille des arêtes. Donc Ω_h n'est autre qu'un maillage (pour h), alors pourquoi ne pas noter un maillage par Ω_h tout comme le domaine discret. Discussion sans fin, mes (PLG parle) collègues préferent $\mathcal{H}$ qui fait bien référence aux tailles mais aussi, malheureusement, à une hessienne.

nuage Un nuage de points n'est autre qu'un ensemble (fini) de points.

NURBS Non uniform rationnal B-spline. Fonctions servant à construire des courbes non polynomiales. Très puissant mais pas vraiment simple, utilisées en CAO (conception assistée par ordinateur).

4. Les 3 auteurs ne sont même pas d'accord sur ce simple exemple.

O

$\boxed{\text{octree}}$ Deux utilisations, structure de donnée spatiale (arbre) ou méthode de construction de maillage. Généralisation à la trois dimensions du quadtree, la racine est le plus souvent un cube, le nombre de fils est 0 ou 8, les cases (cellules) s'appelent des octants - voir quadtree.

$\boxed{\text{optimalité}}$ Ce maillage est optimal, la triangulation de Delaunay est optimale, voila deux phrases dénuées de sens. Il faut préciser par rapport à quel critère. Ensuite, ceci fait, peut on atteindre cette optimalité et à quel coût et, surtout, est-ce vraiment strictement nécessaire ? Contentons nous d'être le meilleur possible (ou le moins mauvais possible) pour le critère. En lien avec adaptation et optimisation, voir ces mots.

$\boxed{\text{optimisation}}$ Les mailleurs s'escriment à construire des maillages de bonne qualité quel que soit le sens que l'on donne à ce mot. Le but d'une optimisation est d'améliorer encore la qualité de ces maillages. Si le critère de qualité se traduit par une fonction coût, on peut penser à optimiser cette fonction globalement. Ceci va conduire à résoudre un système global de taille celle du maillage (nombre de sommets), cette solution est clairement peu adaptée aux maillages de grande taille. Les optimiseurs sont donc plutôt locaux, une suite d'opérateurs locaux qui traite localement le maillage au niveau de leurs différents motifs présents, boules et coquilles essentielllement (voir ces mots). En fait, les outils locaux sont peu nombreux, bougé des sommets, bascule d'arêtes, suppression d'une arête et ajout de points ou une combinaison. Ceci dit, l'efficacité et la rapidité d'un optimiseur dépendent de la stratégie utilisée et des structures de données utilisées.

$\boxed{\text{ordre}}$. Voir degré.

$\boxed{\text{orientabilité}}$ Concerne les surfaces, une surface est elle orientable ? Certaines le sont, d'autres non. Pour s'en assurer, on regarde un maillage de la surface, par exemple en triangles. Elle sera orientable si l'orientation des triangles est cohérente. Une arête $[1, 2]$ d'un triangle devra être $[2, 1]$ dans le triangle voisin. C'est d'ailleurs comme cela que l'on teste cette propriété. On part d'un triangle (germe), on décide de son orientation et on visite, de proche en proche, les voisins en les orientant convenablement, c'est-à-dire en les retournant si nécessaire. Si on demande de retourner une arête déjà vue, la surface n'est pas orientable.

$\boxed{\text{orientation}}$ En éléments finis mais aussi dans les mailleurs, les éléments géométriques sont orientés afin de donner un sens au signe de leur surface ou de leur volume, le triangle $[1, 2, 3]$ est dans un sens, le triangle $[1, 3, 2]$ "tourne"dans l'autre sens. Les éléments d'une surface n'ont pas d'orientation particulière - voir orientabilité.

P

$\boxed{\text{partition}}$ Réaliser une partition d'un maillage consiste à le découper en blocs si possible connexes, convexes c'est pas plus mal et, tant qu'à faire, de tailles équilibrées. On peut ainsi traiter, non pas le maillage, mais les blocs qui sont, évidemment, de taille moindre. Permet de faire des calculs en parallèle.

$\boxed{\text{pavage}}$ Recouvrement (maillage donc) d'un domaine (plan, surfacique ou volumique) par des polygones (polyèdres). Pas de propriétés particulières si ce n'est non chevauchement. Ou, au contraire, des propriétés qui donnent des pavages particuliers (réguliers, périodiques, uniformes, conformes...). On peut penser à une mosaïque et avoir plusieurs types d'éléments.

$\boxed{\text{pentaèdre}}$ Polyèdre à 6 sommets, 5 faces (deux triangles et trois quadrilatères joignant ces triangles) et 9 arêtes. Les faces triangulaires sont planes sauf si on monte en degré, les faces quadrilatérales ne sont pas planes en général. On dit aussi prisme ou cylindre à base triangulaire.

$\boxed{\text{pile}}$ Liste (voir liste) à laquelle on accède par sa fin (ou sommet), dernier arrivé, premier servi (LIFO, last in first out).

$\boxed{\text{plan tangent}}$ Généralise la notion de tangente - voir ce mot - au cas d'une surface. En un point régulier d'une surface, le plan tangent est engendré par les tangentes en ce point, donc coplanaires ça vaut mieux. Pour une surface paramétrique, de paramètres u et v, la dérivée en u et celle en v, en un point régulier, définissent ce plan et sa normale est portée par le vecteur produit vectoriel de ces deux vecteurs. Localement, en un point régulier, le plan tangent est une approximation d'ordre 1 de la surface.

point Entité élémentaire de la géométrie, non sécable, sans dimension, sans longueur, sans aire, sans volume. Juste une position dans l'espace. Dur à dessiner seul si ce n'est via une croix ou un petit cercle par exemple. Prend du galon dans certains cas et porte alors un nom précis, sommet, nœud, intersection entre 2 segments, point de contrôle, point de Gauss...

polyèdre Solide (volume), région délimitée par une surface fermée dont les éléments sont des polygones plans, Ces polygones sont les faces du polyèdre. On voit parfois région définie par l'intersection de demi-espaces, c'est restrictif car on est alors convexe.

polygone Région du plan délimitée par une suite de segments qui forment une ligne brisée (ligne polygonale) fermée. Un polygone est convexe ou pas, simple si ces segments ne se coupent pas, sauf deux segments consécutifs qui se coupent en leur sommet commun. Sinon, la notion d'intérieur n'est pas clairement définie. Nous appelerons aussi polygone une surface discrétisée par des éléments dont les arêtes frontières sont une ligne brisée fermée dans l'espace.

polynôme Si vous voulez comprendre exactement rien, allez donc sur wikipedia, amusant. Bon, si x désigne une variable, $a_i x^i$ est un monôme avec le coefficient a_i (un scalaire, un point (pondéré) de l'espace, ...) et le degré i pour la variable et un polynôme est la somme de plusieurs monômes de cette forme. Un polynôme peut dépendre de plusieurs variables, x, y, ... ou u, v, ... ou encore ce que vous voulez. Deux variables, x et y, et des quantités écrites $a_{ij}x^iy^j$, le polynôme correspondant s'écrit comme une combinaison de ces $a_{ij}x^iy^j$. C'est pas plus simple comme cela. Voir Bézier et Lagrange pour leurs polynômes.

polytope Le polytope est la généralisation de la notion de polygone et de polyèdre en toute dimension. D'autres définitions existent mais nous retenons celle-la.

précision infinie Tout calcul (ici géométrique) sur ordinateur est effectué par des opérations portant sur des réels mais au sens d'un ordinateur, ce ne sont pas des réels mais des flottants donc des nombres représentés par un nombre donné et réduit de bits, par suite en général différents (mais proches) de la vraie valeur. Selon le nombre de bits, un calcul est donc plus ou moins entaché d'erreur. Une erreur de quelques % dans un calcul donne une solution juste à quelques %, en géométrie elle peut donner un résultat non pas presque juste mais tout simplement faux et conduire un algorithme à échouer. Typiquement, on n'écrira jamais un test comme, si $x = r$ faire, mais si $x = r$ à ϵ près faire, test absolu ou relatif - voir consistance.

Nous ne croyons pas que recourir à des calculs en précision infinie soit une bonne solution. Et ce pour plusieurs raisons. Au delà du coût, est ce qu'un maillage juste au sens de cette précision sera juste dans son utilisation dans un solveur par exemple qui, lui, travaille en précision standard (simple ou double précision). Le simple fait d'écrire un maiilage juste en précision infinie peut le rendre faux quand on va le lire.

L'arithmétique d'intervalles, pour les mêmes raisons, ne nous semble pas non plus très utile.

prédicat Un prédicat est une expression, en général polynomiale, dont on détermine le signe. Celui-ci conduit à une décision, faire ou ne pas faire. En principe (sur le papier), la décision dictée par le signe du prédicat conduit à un résultat juste mai ce n'est malheureusement pas toujours le cas. On peut vivre sans savoir que ceci est un prédicat.

prisme Voir pentaèdre.

produit mixte Aussi dit triple produit. Défini en toute dimension, concerne donc n vecteurs (n cette dimension). C'est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs. Noté $(u, v, ...)$, peut s'écrire, en trois dimensions $(u, v, w) =< u \wedge v, w >$, il mesure six fois le volume du tétraèdre construit sur trois vecteurs incidents. À ce titre, permet de vérifier la validité géométrique des éléments de tout type et de tout degré.

produit scalaire Le produit scalaire de deux vecteurs u et v de dimension quelconque est noté $< u, v >$, parfois $u \,.\, v$. Si $u = (u_i)$ et $v = (v_i)$, on a $< u, v >= \sum_i u_i v_i = ||u|| \, ||v|| \cos \theta$ ou $||.||$ désigne une norme et θ est l'angle entre les deux vecteurs. De là la distance entre deux points, la longueur du vecteur, u, d'extrémités ces points, $d^2 =< u, u >= ||u||^2$ car $\theta = 0$ et le cosinus saute. En modifiant la définition du produit scalaire (voir métrique), on modifie la norme et la notion de distance et même celle d'angle.

produit vectoriel Défini dans un espace de dimension trois, il intéresse deux vecteurs u et v. Leur produit vectoriel est noté $u \wedge v$ ou $u \times v$ selon le pays. Le résultat est un vecteur w, $w = u \wedge v = ||u|| \, ||v|| \sin \theta$ avec $||.||$ la norme et θ l'angle entre u et v. Si $u = (u_i)$ et $v = (v_i)$, on a $w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$ et $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. La norme de w est le double de l'aire du triangle formé par u et v, supposés incidents. À ce titre, permet de vérifier la validité géométrique des éléments plans de tout type et de tout degré, sous réserve de se placer en trois dimensions.

projection inverse Principe consistant à retrouver à partir des coordonnées (x, y, z) d'un point sur une surface, les paramètres (u, v) correspondant - voir carreau et surface paramétrique. Une méthode de Newton est généralement employée pour résoudre ce problème souvent non linéaire.

Problème également rencontré pour un simple quadrilatère, même en deux dimensions. Retrouver (u, v) à partir de (x, y). Pour un triangle de degré 1, c'est trivial.

pyramide Polyèdre à 5 sommets, 5 faces (quatre triangles et un quadrilatère, base de ces triangles) et 8 arêtes. Les faces triangulaires sont planes sauf si on monte en degré, la base n'est pas plane en général. On dit aussi prisme. Élément bizarroïde pour lequel définir des fonctions de forme est délicat, le sommet commun aux triangles est une singularité. Malheureusement, utile pour raccorder de manière conforme des tétraèdres avec des prismes ou des hexaèdres.

Q

quadrangle Outre-Quiévrain, désigne un quadrilatère, mais bon. En fait, c'est la figure formée par 4 sommets non alignés 3 à 3. Un quadrangle possède 6 côtés, chacun joignant 2 sommets.

quadrilatère Polygone à 4 sommets et 4 cotés. Plan ou non (surface ou face d'un hexaèdre, d'un prisme ou d'une pyramide). Dans le plan, convexe ou non. Un tel élément non convexe est invalide en temps que carreau ou élément fini.

quadtree Structure de données spatiale basée sur le découpage récursif de ses cases (ou quadrants) en 4 selon un critère (sinon, la case est terminale). Il s'agit donc d'un arbre. En pratique, on définit un carré (ou un quadrilatère) qui est la racine de l'arbre puis on découpe cette case et ses fils tant que (selon un critère de finesse).

Cette structure est également utilisée comme méthode de construction de maillage. Le domaine à mailler est englobé dans la racine, celle-ci est raffinée puis on examine les quadrants terminaux pour en extraire un maillage. Il faut considérer les quadrants intersectés par la frontière du domaine des autres et appliquer à chacun le traitement idoïne pour définir les éléments du maillage. Voir aussi octree.

qualité Métrique disent les usiens. On va préférer donner à ce mot le sens vu plus haut - voir métrique. C'est donc une fonction continue ou discrète qui définit les distances, surfaces, volumes et des rapports entre ces quantités voire d'autres (rayon inscrit, rayon circonscrit...) dans un monde isotrope ou anisotrope.

Un critère de qualité sera alors évalué au travers de cette métrique. Les critères habituels sont donc vus sous cet angle. Par exemple, pour un critère de longueur (des arêtes) c'est clair, pour les critères de qualité en forme, la métrique a un rôle important. Le triangle équilatéral dans une métrique n'est, bien sûr et en général, pas celui auquel on est habitué.

queue Liste (voir liste) à laquelle on accède par son début, premier arrivé, premier servi (FIFO, first in first out).

quotient d'anisotropie Quantifie l'anisotropie d'un élément. En deux dimensions, c'est le ratio entre sa plus grande taille et sa plus petite taille. Par exemple, pour un triangle, ce serait le ratio entre le plus grand côté (diamètre) et la hauteur issue du sommet opposé à ce côté. Pour une ellipse, c'est la racine carré du rapport de ses valeurs propres. En trois dimensions, c'est le rapport entre le produit de ses trois longueurs principales et sa plus petite longueur au cube. Pour un ellipsoïde, c'est la racine carrée du rapport de la plus grande valeur propre au cube et le produit de ses valeurs propres.

R

randomisation Technique qui traitent des données dans un ordre aléatoire (quoique déterministe, heureusement pour que l'on ait des calculs reproductibles [5]). Améliore notoirement les performances de nombreux algorithmes.

ratio d'anisotropie Voir quotient d'anisotropie.

rayon de courbure Voir courbure pour une courbe. Pour une surface, ce rayon en un point change selon chaque courbe tracée sur la surface passant ce point, sauf, justement, pour des points particuliers, très particuliers.

recollement Voir fusion.

relations de voisinage Elles indiquent, pour un élément donné, quels sont les éléments qui partagent une arête (deux dimensions ou surface) ou une face (trois dimensions), les maillages étant réputés conformes, une arête (une face) n'est partagée que par au plus deux éléments. Le cas des surfaces peut être plus subtil car une arête peut être partagée par plus de deux éléments.

Construire rapidement ces relations se fait par hachage (des arêtes ou des faces en trois dimensions) - voir hachage.

remaillage Le monde se divise en deux, ceux qui ont un revolver et ceux qui creusent. Le remaillage consiste à modifier un maillage par un ensemble d'opérations, suppressions et ajouts de sommets, bascules d'arêtes... Il semble clair que remailler est plus facile que mailler et que les maillages simpliciaux, de par leur flexibilité, permettent d'effectuer les opérations utiles. Le remaillage a pour but d'obtenir un nouveau maillage satisfaisant plus certains critères (que ne le fait le maillage initial). Une question importante est de savoir si on remaille les frontières et comment on les remaille pour tenir compte de la géométrie sous-jacente - voir aussi support. Le remaillage est une des techniques utilisées pour adapter des maillages - voir adaptation.

renumérotation Les mailleurs numérotent les sommets et les éléments construits selon la méthode utilisée. Ces numérotations n'ont donc *a priori* aucun caractère d'optimalité au regard de quel que critère que ce soit. La renumérotation a donc pour but de satisfaire tel ou tel critère (minimiser l'écart entre les numéros de deux sommets voisins par exemple).

Riemann (1826-1866). Bernhard. Pour embêter Euclide, a défini des espaces non euclidiens pour lesquels la distance entre deux points est définie comme une fonction dépendant de la position où on l'évalue.

rondeur C'est le rapport entre le diamètre, h, d'un élément simplicial et son rayon inscrit, mesure usuelle (purement géométrique en l'absence de champ de métriques et intervenant dans les théorèmes de convergence des méthodes d'éléments finis quand on suppose que h tend vers 0).

5. Pas si sûr, sans entrer dans les détails, en cas de multithreading.

S

sapin Un sapin est une coquille dans laquelle l'arête d'enroulement n'a pas ses extrémités complétement séparées par le polygone (gauche) de sommets les autres sommets de la coquile, voir coquille.

Schönhardt (1891-1979). Erich. Un type tordu qui a exhibé des polyèdres tordus dont le maillage en tétraèdres est plus que complexe, voire en temps non polynomial, voire même impossible sauf à créer des points internes et en faire des sommets d'éléments. D'autres auteurs ont également proposé de tels polyèdres. Phénomène qui ne se présente pas en deux dimensions.

sérendipité Princier, trouver quelque chose que l'on ne cherchait pas, par hasard en somme. S'applique aux éléments finis (carreaux) réduits. Ils ont moins de nœuds que leurs homologues complets (mais les mêmes sur les arêtes) et leurs fonctions de forme sont moins riches. C'est le cas du quadrilatère de degré 2 à 8 nœuds (au lieu de 9), du triangle de degré 3 à 9 nœuds (contre 10), de l'hexaèdre de degré 2 à 20 nœuds (contre 27)...

seuil dynamique Seuil dont la valeur change lors du déroulement du processus - voir aussi filtre.

sigle Avec la LEPP et la méthode BRIO, j'ai construit une ODT pour faire une résolution par l'approche DG. Sans commentaires.

simplexe Enveloppe convexe de $d+1$ points dans un espace de dimension d, notion qui n'existe pas pour les points d'une surface (dans laquelle on n'aura pas de 3-simplexes mais des 2-simplexes alors que $d = 3$). Ca se discute. Si on triangule des points d'une surface de l'espace, on n'obtient pas des triangles mais des tétraèdres. Un simplexe est un k-simplexe avec $k = d$. Pour les faces, on parlera de k-simplexe (mais par commodité on pourra oublier le k).

Triangle en deux dimensions, tétraèdre en trois dimensions, en dimensions supérieures, on dira simplexe ou on continuera à dire tétraèdre. Les arêtes, faces, ..., d'un simplexe sont ses k-faces, voir k-face, qui sont donc des k-simplexes. Distinguo subtil sans grand intérêt, d'ailleurs.

singularité Notre acception de ce terme reste très terre à terre. Une singularité est une entité où une courbe ou une surface n'est pas lisse. Cela regarde *a minima* les tangentes ou les plans tangents. Le sommet coin d'un carré est une singularité, tout point d'un côté itou également. Les arêtes d'un cube sont des singularités, l'angle dièdre entre les deux faces incidentes est éloigné de 180 degrés. D'un point de vue discret, ce sont effectivement des angles qui distinguent des points singuliers (coins) ou des arêtes singulières (ou vives) avec, évidemment, un effet, non sans incidence, du choix du seuil pour ces angles.

site Un simple point promu au rang de site, c'est-à-dire jouant un rôle particulier (site d'une cellule...).

sliver Tétraèdre dont les sommets sont pratiquement coplanaires et dont la boule circonscrite est bornée voir petite. Une peste. Il y en a de plusieurs types et certains peuvent être construits dans une triangulation de Delaunay car pouvant vérifier le critère de la boule vide.

sommet Les sommets d'un élément sont les points d'incidence de deux arêtes.

sphère Lieu des points à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre). La sphère est la frontière de la boule qui est le lieu des points situés à une distance plus petite ou égale au rayon. Nous intéresse particulièrement la sphère circonscrite à un tétraèdre qui passe par ses quatre sommets et qui est la plus petite sphère contenant le tétraèdre.

Steiner (1796-1863). Jacob. Une personne très pointilleuse. Dans une triangulation, en deux dimensions, les angles des triangles peuvent prendre toutes les valeurs, de très aigus à très obtus (même dans une triangulation de Delaunay). On peut ajouter des points pour modifier ces angles et certains nomment ces points points de Steiner. Nous proposons également une autre définition valable en trois dimensions. Certains polyèdres ne sont pas triangulables en ne prenant comme sommets que les sommets du bord, il faut ajouter un ou plusieurs points, que nous nommons points de Steiner, ils permettent de trouver une solution.

$\boxed{\text{structure de données}}$ Structures élémentaires de base et structures évoluées basées justement sur les structures de base. La structure la plus simple est un tableau à un ou plusieurs indices, on accède aux valeurs via ce(s) indice(s). Traités de différentes façons, ces tableaux sont vus comme des piles, des queues... (voir ces mots). Ils peuvent être chaînés, accés au suivant et/ou au prédécesseur. Les structures de données évoluées sont construites à l'aide des structures simples. Ce sont généralement des ensembles de plusieurs tableaux qui stockent les valeurs décrivant une entité plus ou moins complexe, un maillage par exemple. À ces structures sont associés des moyens d'écriture et de lecture. Ces structures sont en clair (ascii) ou plutôt en binaire (très net gain en taille et en temps d'écriture ou de lecture) quand on les reporte sur un fichier.

$\boxed{\text{subdivision}}$ Voir aussi découpe. Concerne les éléments d'un maillage ou les carreaux définissant une géométrie. Subdiviser un élément consiste à le découper en éléments du même type via un motif régulier. Ainsi, en introduisant les milieux d'arêtes on découpe un triangle en quatre triangles. Subdiviser un carreau revient à le découper, conformément à sa définition, en introduisant un nouveau point, par exemple, pour un quadrilatère le point de paramètre $(0.5, 0.5)$. La simple évaluation de ce point (De Casteljau ou Bézier dans notre cas) permet de construire la subdivision et, le cas échéant, les autres points à ajouter.

$\boxed{\text{support}}$ Pour pouvoir être indépendant du système de CAO, par exemple au cours d'un processus d'adaptation de maillage. L'idée est de remplacer la description géométrique plus ou moins compliquée par un simple maillage, suffisament fin pour refléter correctement la vraie géométrie. Au lieu d'interroger la CAO, on se base sur ce maillage que l'on peut utiliser pour redéfinir localement la géométrie par plus que des entités droites.

$\boxed{\text{surface}}$ Le pendant des courbes, voir courbe. Topologiquement et dans notre cas, une surface est de dimension deux mais vit dans un espace de dimension 3. On peut la voir voir comme un point qui se déplace selon une règle fixée. Une surface peut être courbe (gauche) ou plane.

On va rencontrer deux types de surfaces. Celles qui sont des données et servent à décrire et définir la géométrie et celles qui constituent la discrétisation (maillage de la frontière d'un domaine) construite à partir des surfaces données. Les premières sont analytiques, $z = f(x, y)$, ou implicites, $f(x, y, z) = 0$, cas rares ou académiques, ou encore, en pratique, paramétriques et définies par des carreaux basés sur les systèmes de description (carreaux de Bézier...) utilisés en CAO. Les secondes sont des surfaces polyédriques formées d'éléments plans ou non qui sont des faces d'éléments du maillage. Les sommets de ces carreaux sont le plus souvent des points singuliers et leurs arêtes peuvent être vives (pas de souci de continuité mais potentiellement non pas un mais plusieurs plans tangents selon le carreau), par contre hormis en ses bords la surface est régulière (autant que le carreau mais vue de manière discrète).

$\boxed{\text{surface à variété uniforme ou non}}$ Comme c'est un peu long, on va utiliser le terme anglais (qui d'ailleurs est allemand), à savoir manifold ou non manifold. Vu sous l'angle discret, un maillage de surface est manifold si ses arêtes sont partagées par au plus deux éléments. En cas contraire, on dira que le maillage (la surface) est non manifold et alors la normale le long d'une arête non manifold n'est pas définie, il y a plusieurs normales.

$\boxed{\text{surface polyédrique}}$ Frontière d'un polyèdre si fermée, ensemble de polygones dans l'espace de toute façon.

T

$\boxed{t}$ Variable qui désigne souvent le temps mais sert aussi de quatrième variable barycentrique après (u, v, w) pour un tétraèdre avec $u + v + w + t = 1$.

$\boxed{\text{tableau}}$ Un tableau est une structure de données contenant donc des données, des entiers ou des scalaires, auxquelles on accède via un ou plusieurs indices, $v = tab(i, j)$ si on a deux indices - voir aussi liste.

$\boxed{\text{tangente}}$ Faut-il parler de la tangente en un point d'une courbe ou des tangentes ? Cela dépend de la régularité de la courbe. En un point d'une surface, il y a autant de tangentes que l'on veut, une par arc de courbe tracé sur la surface passant par ce point. Sont elles coplanaires, that is the question (voir plan tangent) ? La (si unique) tangente est portée par la dérivée première de la courbe et constitue localement une approximation linéaire de la courbe. Pour calculer la longueur d'une courbe, on intègre (la norme de) sa tangente (voir ce qu'est une abscisse curviligne).

$\boxed{\text{Taylor}}$ (1685-1731). Brook de son petit nom. A fait beaucoup de développements (dev). Pour une fonction suffisamment dérivable (régulière), le développement de Taylor est une expression polynomiale qui donne localement le comportement en un point de la fonction en fonction de ses dérivées successives en ce point. Permet donc l'analyse locale d'une fonction ou, pour nous également, d'une courbe ou d'une surface. Est utilisé pour estimer une erreur (voir estimateur d'erreur) ou regarder une courbe ou une surface en utilisant les tangentes à l'ordre un et les dérivées d'ordre supérieure (courbure...).

$\boxed{\text{tesselation}}$ Découpe en éléments d'un domaine, une triangulation est une tesselation mais une tesselation n'est pas nécessairement une triangulation. On pourrait parler de pavage ou de mosaïque.

$\boxed{\text{tétraèdre}}$ Polyèdre à 4 sommets, 4 faces (des triangles) et 6 arêtes. Les faces sont planes sauf si on monte en degré. Permet de paver l'espace. Le tétraèdre est le simplexe de la trois dimensions.

$\boxed{\text{tétraédralisation}}$ Néologisme équivalent à triangulation, concept qui, de fait, s'applique en toute dimension d'espace, donc en trois dimensions as well.

$\boxed{\text{topologie}}$ Sujet large. Regardez dimension topologique dans wikipedia, c'est tout simplement du chinois, regarder espace topologique, un mal au crâne vous attend. Pour nous, simples mortels, c'est plus naïf. La dimension topologique d'une arête est un, un seul paramètre permet de la définir, pour une face c'est 2... Autre sens, la topologie d'un élément est définie par les liens qui unissent (relient) ses entités, sommets, arêtes, faces. À partir de la liste des sommets, la topologie définit les arêtes et les faces (l'arête i relie le sommet j au sommet k dans ce sens...)

$\boxed{\text{torsion}}$ Concerne une courbe en trois dimensions. Pensons à une hélice.

$\boxed{\text{tri}}$ Opération classique qui permet de ranger des données (entières ou réelles) dans un ordre croissant ou décroissant selon un critère donné, par exemple trier des arêtes selon leur longueur. Ensuite, les données sont traitées dans l'ordre du tri ou dans l'ordre inverse. Plusieurs algorithmes plus ou moins rapides.

$\boxed{\text{triangle}}$ On pourait dire trigone, trois angles. Donc, polygone possédant trois angles, trois côtés, trois sommets. Trois points étant vraiment souvent coplanaires, un triangle de degré 1 (en trois dimensions) est plan. Le triangle est le simplexe de la deux dimensions.

$\boxed{\text{triangulation}}$ Technique historique permettant de calculer la distance entre deux points. Pour nous, plutôt, un ensemble d'éléments géométriques (triangles, tétraèdres, le plus souvent) recouvrant un certain domaine de manière conforme. La triangulation de Delaunay en est un exemple, elle est composée essentiellement de simplexes (ceux de la dimension de l'espace considéré).

Un problème de triangulation consiste à se donner un ensemble de points (sites) et à les connecter en formant les éléments (les simplexes de la dimenson de l'espace pour simplifier et on voit à nouveau que ce n'est pas ce qui se passe sur une surface). On obtient au mieux un recouvrement de l'enveloppe convexe des points donnés. Une triangulation est donc un maillage particulier, celui de l'enveloppe convexe des points donnés, sa frontière est donc le bord de cette enveloppe. Réciproquement un maillage est une triangulation particulière contrainte par le bord du domaine (convexe ou non). Malgré cette apparente similitude, les algorithmes de triangulation et ceux de maillage présentent des difficultés nettement différentes.

triangulation contrainte Au-delà de points sont données des aretes (des faces) et ces dernières doivent se retrouver dans le résultat. Ce problème est ainsi sensiblement plus compliqué que le précédent.

tuyau Ensemble des éléments d'un maillage (ou d'une triangulation) coupés par un segment (droit) joignant deux sommets quelconques.

U

u Sert à désigner un paramètre (dans un espace paramétrique), on préfere u..., à ξ..., car plus simple à écrire et à prononcer bien que moins savant. Notons que la littérature éléments finis utilise la notation $\hat{x}$, dommage. Utilisé aussi pour désigner une foncion $u(x), u(x, y)$..., de une ou plusieurs variables [6],

V

v Voir u, même punition.

valence La valence d'un sommet (dans un maillage) est le nombre d'éléments dont il est sommet (on dira aussi degré).

validité Concerne un élément ou un maillage.

variété Au lieu de dire courbe ou surface, on va dire variété. Une variété, pour nous dans un espace en deux ou trois dimension, est définie par un paramètre ou par deux paramètres, c'est quand même plus docte. La variété vit dans un espace de dimension supérieure. Avec seulement ce(ces) paramètre(s), on peut se situer sur la variété donc. S'étend à toute dimension d'espace.

voisin Voir relations de voisinage.

volume Mesure la portion de l'espace occupée par un élément (en 3 dimensions). Évident à calculer pour un tétraèdre, voir consistance, plus subtil pour les autres éléments. Encore plus subtil pour des éléments courbes. Pour les éléments de Lagrange, on passe en Bézier et on intègre le polynôme jacobien et ca marche à la main.

volume fini Cellule de base pour effectuer des calculs par une méthode de volumes finis. Peut être construit au vol en s'appuyant sur les éléments du maillage. Base de la méthode numérique des volumes finis qui permet de calculer efficacement des problèmes de transport via des bilans de flux locaux autour des volumes de contrôles, les cellules. Les éléments d'un maillage peuvent être ces volumes finis, on dira que la méthode est "cell-centered". Les bilans flux s'effectueront via les faces des éléments. Ou alors, on construit des cellules autour de chaque sommet, la méthode est dite "vertex-centered" ou "node-centered". Dans ce cas, il faut construire des volumes de contrôles autour de chaque sommet ce qui nous donne un maillage dual formé de polygones (ou polyèdres) quelconques. Il existe de nombreux exemples de maillage dual, le diagramme de Voronoï en est un (voir ce mot). On peut aussi construire les cellules médianes où la frontière de la cellule est donnée par les médianes des éléments sous-jacents.

Voronoï (1868-1908). Gueorgui. Le gars des cellules et des diagrammes qui portent son nom mais certainement pas leur inventeur (d'ailleurs on en trouve dans la nature, regardez le pelage d'une girafe par exemple). On se donne des points, dits sites, la cellule de Voronoï d'un site est l'ensemble des points plus proches d'un site que d'un autre. Des polygones ou des polyèdres selon la dimension de l'espace, bornés ou pas, ils recouvrent l'espace. En deux dimensions, les séparateurs entre deux cellules sont les médiatrices des segments joignant deux sites voisins. Le dual de ces cellules (dit diagramme de Voronoï) est la triangulation de Delaunay des sites. Voir aussi Delaunay et Laguerre.

La tentative d'étendre ces diagrammes à des métriques non euclidiennes ressemble furieusement à un *fiasco*, du moins pour en déduire des maillages anisotropes

6. Il serait alors facétieux de nommer u la variable, $u(u)$.

utilisables. Les cellules ne sont pas connexes et l'espace n'est pas recouvert. On pourrait, en sens inverse, essayer de définir ce que serait le diagramme dual d'un maillage anisotrope donné.

voyeur Dans un simplexe, le voyeur d'une arête (face) est le sommet en face de cette entité. En trois dimensions, il y a deux voyeurs pour une arête. Ambigu pour les autres éléments.

W

w. Voir u et v, même punition.

Watson David. Avec Bowyer (et Hermeline pour l'hexagone) a proposé un algorithme élémentaire pour construire la triangulation de Delaunay. La méthode est incrémentale et insère un à un les points donnés dans la triangulation actuelle, après initialisation. Les trois auteurs ne se connaissent pas mais ont développé cet algorithme en même temps, 1981.

X

x Désigne l'abscisse d'un point (ou une inconuue qu'on ne connaît pas et que l'on cherche desespérement).

Y

y Le pendant de x, l'ordonnée d'un point.

Z

courbe en Z Courbe de remplissage (voir Hilbert) construite récursivement en passant de cases en cases selon un Z (ou un Ƨ) (par exemple, en deux dimensions, on commence en bas à gauche, on passe à droite, puis vers le haut en biais vers la gauche et enfin à droite ou l'inverse), ce pour les 4 cases initiales et on itère en subdivisant les cases en 4.

z Inséparable du couple (x, y), la cote d'un point.

zéro La quête du zéro s'apparente à celle de l'infini. Débutons par l'infini, soit v un flottant très grand et ε un autre flottant très petit, alors il est des cas où $v + \varepsilon = v - \varepsilon = v$. À l'inverse, on peut contruire une situation où en faisant décroître une valeur positive, on n'arrive jamais à zéro et c'est même pire. Soit v un flottant positif et h un autre flottant positif (plus petit par exemple). On calcule $v = v - h$, si v reste positif, on recommence. Sinon, on pose $h = 0.5\,h$ et on calcule $v = v + h$ Si v reste négatif, on recommence. Sinon on fait $h = 0.5\,h$ et on recommence au départ. Comme h diminue, on peut revenir au cas précédent, $v + h$ ou $v - h$ reste égal à v. Cherchons alors la plus petite valeur de h telle que $v + h$ ou $v - h$ diffère de v. On a trouvé un exemple dans lequel $v - h = -v$, autrement dit, la valeur suivant v est $-v$, le zéro n'est jamais atteint. Toute valeur comprise entre $-\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$ a un signe imprécis. Ceci fait partie des joies de la géométrie dans le monde des flottants.

Références

[Borouchaki, George 2017] H. Borouchaki et P.L. George, Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 1, ISTE eds, 2017.

[George *et al.* 2018] P.L. George, H. Borouchaki, F. Alauzet, P. Laug, A. Loseille et L. Maréchal, Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 2, ISTE eds, 2018.

[George *et al.* 2020] P.L. George, F. Alauzet, A. Loseille et L. Maréchal, Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 3, ISTE eds, 2020.

RESEARCH CENTRE
SACLAY – ÎLE-DE-FRANCE

Bâtiment Turing,
1 rue Honoré d'Estienne d'Orves
91120 Palaiseau France

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-0803