



Requêtes complexes sur des réseaux de Croyance-Faisabilité-Désir

Cédric Pralet, Gerard Verfaillie, Thomas Schiex

► **To cite this version:**

Cédric Pralet, Gerard Verfaillie, Thomas Schiex. Requêtes complexes sur des réseaux de Croyance-Faisabilité-Désir. Premières Journées Francophones de Programmation par Contraintes, CRIL - CNRS FRE 2499, Jun 2005, Lens, France. pp.129-138. inria-00000053

HAL Id: inria-00000053

<https://hal.inria.fr/inria-00000053>

Submitted on 25 May 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Requêtes complexes sur des réseaux de Croyance-Faisabilité-Désir

Cédric Pralet¹

Gérard Verfaillie²

Thomas Schiex³

¹ LAAS-CNRS, 7, av. du Colonel Roche, 31077 Toulouse, France

² ONERA, Centre de Toulouse, BP 4025, 31055 Toulouse Cedex 4

³ INRA, Chemin de Borde Rouge, BP27, 31326 Castanet Tolosan, France

cpralet@laas.fr, gerard.verfaillie@onera.fr, tschiex@toulouse.inra.fr

Résumé

Dans ce papier, nous proposons un cadre algébrique général dont les briques de base sont des relations locales de croyance, de faisabilité et de désir. L'objectif principal est de construire un cadre permettant d'unifier de nombreux formalismes qui ont été développés pour manipuler des contraintes, des préférences ou des incertitudes, tels que les problèmes de satisfaction de contraintes (dures, souples, mixtes, quantifiées, stochastiques), les réseaux bayésiens et les réseaux de Gibbs, les graphes chaînés, les diagrammes d'influence, les processus décisionnels de Markov partiellement ou complètement observables. . . A partir du cadre proposé, nous pensons qu'il sera possible de mieux comprendre les liens entre différents formalismes existants et de développer des algorithmes généraux paramétrables, capables de répondre à des requêtes variées sur un problème donné.

Abstract

In this paper, we propose a generic algebraic framework, the basic components of which are belief, feasibility, and desire local relations. Its first purpose is to gather in a common framework numerous formalisms that were separately developed to deal with constraints, preferences and uncertainties, such as hard, soft, mixed, quantified, or stochastic constraint satisfaction problems, Bayesian and Gibbsian networks, chain graphs, influence diagrams, completely or partially observable Markov decision process. . . On this basis, we think that it will be possible to get a more thorough understanding of the links between existing frameworks and then to develop generic parameterized algorithms, able to answer various queries on a problem instance.

1 Motivations

Au cours des dernières décennies, le domaine de l'Intelligence Artificielle a vu naître de nombreux cadres

permettant de modéliser des contraintes, des préférences et des incertitudes.

Les CSP [12] (*problèmes de satisfaction de contraintes*) ont été introduits pour représenter des problèmes dans lesquels des contraintes locales entre variables discrètes expriment des faits certains ou des exigences dures. Le cadre des CSP a ensuite été étendu pour représenter, en plus des contraintes dures usuelles, des contraintes souples exprimant des faits incertains ou des exigences souples, avec notamment les CSP *valués* (VCSP) et les *semiring-based CSP* [1], qui englobent les CSP classiques, flous, additifs, lexicographiques et probabilistes. Les *CSP mixtes* [6] ont quant à eux introduit une distinction entre variables contrôlables et variables incontrôlables. De manière similaire, les *CSP quantifiés* [2] et les *CSP stochastiques* [19] ont fait intervenir des variables quantifiées universellement et aléatoirement, en plus des variables quantifiées existentiellement qui interviennent dans les CSP classiques. Des travaux similaires ont également été accomplis dans la communauté des problèmes SAT (satisfaisabilité booléenne) [11].

D'autre part, les *réseaux bayésiens* [14] ont été introduits pour représenter des problèmes faisant intervenir des dépendances locales orientées entre variables aléatoires discrètes. Les *graphes chaînés* [7] ont étendu les réseaux bayésiens en ajoutant, en plus des dépendances orientées, des dépendances non orientées, comme dans les *réseaux de Gibbs*. Les *diagrammes d'influence* [9] ont quant à eux étendu le cadre des réseaux bayésiens en ajoutant, en plus des variables aléatoires, des variables de décision non aléatoires et des variables d'utilité.

D'un autre côté, les *processus décisionnels de Markov* (MDP), partiellement ou complètement observa-

bles [15, 13], ont été développés afin de représenter des problèmes de décision séquentielle sous incertitude. Les MDP ne raisonnent pas sur des variables, mais sur des états et des décisions agrégés. Les *MDP factorisés* [3] ont étendu le concept des MDP et les méthodes de résolution à une représentation à base de variables.

Des travaux similaires ont également été effectués en partant de la théorie des possibilités [5], ou en utilisant la théorie de Spohn des croyances épistémiques [8].

On peut remarquer de nombreuses ressemblances entre ces formalismes : nombre d’entre eux font intervenir des variables à domaines finis et des relations locales entre variables; la combinaison de toutes les relations locales définit implicitement une relation globale sur toutes les variables; les relations de base étant locales, des requêtes d’optimisation ou de comptage peuvent être résolues sans avoir à expliciter la relation globale en question. Cette idée a notamment été utilisée pour développer des algorithmes généraux efficaces indépendants de la sémantique des relations en jeu [17, 4, 10]. Partant de ce constat et partant de ce que nous cherchons à modéliser, les exigences suivantes ont été retenues en termes de besoin de représentation :

1. des *variables à domaines finis* pour représenter les observations, les états et les décisions, avec une distinction entre variables non déterministes (qui ont une incertitude sur la valeur qu’elles prennent) et les variables déterministes (dont la valeur est fixée de manière déterministe par un agent);
2. des *relations locales* entre variables, permettant de représenter des croyances d’un agent sur les variables non déterministes, des contraintes de faisabilité sur les décisions, et des désirs sur les variables déterministes ou non;
3. des *ensembles ordonnés* pour mesurer les croyances et les désirs, avec des éléments spécifiques représentant l’impossible ou l’inacceptable;
4. des *opérateurs de combinaison* permettant de combiner des degrés de croyance entre eux, des degrés de désir entre eux, et de combiner des degrés de croyance avec des degrés de désir;
5. des *opérateurs d’élimination*, pour extraire une information synthétique d’un ensemble de degrés de croyance ou de désir, et pour répondre à des requêtes sur le problème complet.

Nous présentons dans ce papier un cadre qui satisfait ces exigences, et qui a pour but d’unifier des efforts séparés de communautés scientifiques distinctes pour développer des cadres de représentation et des algorithmes de résolution (mais le formalisme proposé n’englobe pas tous les formalismes existants : par exemple, les *semiring-based CSP* [1] et les *fonctions de croyance* [16] ne sont pas inclus). Nous utilisons également un petit exemple illustratif.

Pierre invite Jean et Marie (un couple divorcé) à un repas d’affaire afin de les convaincre d’investir dans son entreprise. Pierre sait que si Jean est présent à la fin du dîner, il sera d’accord pour investir 10 k€. Le même genre de conjecture peut être faite concernant Marie, avec un montant de 50 k€. Pierre sait que Jean ou Marie viendra, mais qu’ils ne viendront pas tous les deux (l’un d’eux doit garder leur fils) et que le cas “Jean vient et Marie ne vient pas” se produit avec une probabilité 0.6. Concernant le menu, Pierre peut commander du poisson ou de la viande pour le plat, et du rouge ou du blanc pour le vin. Cependant, il ne peut pas commander du poisson avec du vin rouge, car le restaurant le refuse. Jean n’aime pas le vin blanc et Marie n’aime pas la viande. Si le menu ne leur convient pas, ils quitteront le dîner. Si Jean vient, Pierre veut absolument qu’il reste jusqu’à la fin.

Notre formalisme est présenté en trois temps. Nous définissons tout d’abord dans la Section 2 la structure algébrique sur laquelle les croyances sur les variables non déterministes, les faisabilités sur les variables déterministes et les désirs sur les deux types de variables sont exprimés; cette structure algébrique fait intervenir des ensembles ordonnés et des opérateurs satisfaisant des propriétés algébriques de base. Des problèmes sont ensuite définis sur cette structure comme des ensembles de croyances locales, de faisabilités locales et de désirs locaux (Section 3). Enfin, des requêtes pour répondre à des questions sur ces problèmes sont introduites (Section 4).

2 Définition de la structure algébrique

Les croyances sur les variables non déterministes sont exprimées sur une structure appelée **structure de croyance**. Une structure de croyance est un tuple $S_b = \langle E_b, \preceq_b, \oplus_b, \otimes_b \rangle$ (“b” comme belief) tel que

- E_b est un ensemble d’éléments appelés degrés de croyance, totalement ordonné par \preceq_b , et qui contient un élément minimum 0_b (0_b sera associé à l’impossibilité).
- \oplus_b est un opérateur binaire clos sur E_b (opérateur d’élimination) qui est associatif, commutatif, monotone, et avec 0_b comme élément neutre.
- \otimes_b est un opérateur binaire clos sur E_b (opérateur de combinaison) qui est associatif, commutatif, monotone, avec un élément neutre $1_b \in E_b$ et avec 0_b comme élément absorbant. De plus, \otimes_b est distributif par rapport à \oplus_b .

Cette structure est un semi-anneau commutatif. Dans l’exemple du dîner, les croyances seront des probabilités; la combinaison sur les probabilités se fera avec

$\otimes_b = \times$, et l'élimination sur les probabilités (aussi appelée marginalisation) se fera avec $\oplus_b = +$.

Les faisabilités sur les variables déterministes seront exprimées sur une structure appelée **structure de faisabilité**, qui sera toujours la structure $S_f = \langle \{true, false\}, \preceq_f, \vee, \wedge \rangle$, où \preceq_f est l'ordre total qui vérifie $false \prec_f true$: les faisabilités sont combinées par \wedge (une conjonction de décisions est faisable si et seulement si chaque décision de la conjonction l'est), et l'élimination sur les faisabilités est faite avec \vee (une disjonction de décisions est faisable si et seulement si au moins une décision de la disjonction est faisable). S_f est aussi une structure de croyance (cette remarque nous permettra par la suite de définir certaines notions à la fois pour les croyances et pour les faisabilités).

Les désirs sur les variables (déterministes ou non) seront exprimés sur une structure appelée une **structure de désir**. Une structure de désir est un tuple $S_d = \langle E_d, \preceq_d, \oplus_d, \otimes_d \rangle$ tel que

- E_d est une ensemble d'éléments appelés degrés de désir, totalement ordonné par \preceq_d , et qui contient un élément minimum \perp_d (\perp_d sera associé à l'inacceptabilité).
- \oplus_d est un opérateur binaire clos sur E_d (opérateur d'élimination) qui est associatif, commutatif, monotone, avec un élément neutre $0_d \in E_d$ (0_d représente l'indifférence, à la frontière entre désirs positifs et désirs négatifs).
- \otimes_d est un opérateur binaire clos sur E_d (opérateur de combinaison) qui est associatif, commutatif, monotone, avec un élément neutre $1_d \in E_d$ et \perp_d comme élément absorbant.

Une structure de désir S_d est différente d'une structure de croyance S_b : par exemple 0_b est l'élément minimum de E_b alors que 0_d n'est pas nécessairement l'élément minimum de E_d . Ainsi, la structure de désir peut être bipolaire (des désirs positifs et négatifs peuvent exister). De plus, on ne suppose pas que \otimes_d est distributive par rapport à \oplus_d . Dans l'exemple du repas d'affaire, les désirs seront des utilités (ou gains), combinées avec $\otimes_d = +$, et un raisonnement en termes d'utilité espérée probabiliste (formule du type $\sum_i p_i \times U_i$) conduit à combiner croyances et désirs par le produit, et à éliminer sur les désirs avec $\oplus_d = +$.

Dans le cas général, pour prendre en compte simultanément les informations fournies par les croyances et les désirs, nous utilisons un **opérateur de combinaison entre croyances et désirs** $\otimes_{bd} : E_b \times E_d \rightarrow E_d$ (dans l'exemple du dîner, $\otimes_{bd} = \times$) tel que :

- \otimes_{bd} est monotone: la combinaison d'un degré de croyance donné avec un désir d donne un degré de désir d'autant plus élevé que d est élevé, et la combinaison d'un degré de croyance b avec un désir positif (resp. négatif) donne un degré de désir

d'autant plus élevé que b est élevé (resp. faible) :

$$\begin{aligned} (d_1 \preceq_d d_2) &\rightarrow (b \otimes_{bd} d_1 \preceq_d b \otimes_{bd} d_2) \\ ((b_1 \preceq_b b_2) \wedge (0_d \preceq_d d)) &\rightarrow (b_1 \otimes_{bd} d \preceq_d b_2 \otimes_{bd} d) \\ ((b_1 \preceq_b b_2) \wedge (d \preceq_d 0_d)) &\rightarrow (b_2 \otimes_{bd} d \preceq_d b_1 \otimes_{bd} d) \end{aligned}$$

- les désirs sont pondérés par les croyances (axiomes de linéarité)

$$\begin{aligned} b_1 \otimes_{bd} (b_2 \otimes_{bd} d) &= (b_1 \otimes_b b_2) \otimes_{bd} d \\ b \otimes_{bd} (d_1 \oplus_d d_2) &= (b \otimes_{bd} d_1) \oplus_d (b \otimes_{bd} d_2) \\ (b_1 \oplus_b b_2) \otimes_{bd} d &= (b_1 \otimes_{bd} d) \oplus_d (b_2 \otimes_{bd} d) \\ 1_b \otimes_{bd} d &= d, 0_b \otimes_{bd} d = 0_d \text{ and } b \otimes_{bd} 0_d = 0_d \end{aligned}$$

Ces axiomes couvrent les cadres classiques à base d'utilité espérée et sont principalement justifiés par des considérations algorithmiques.

Toutes les structures algébriques définies auparavant sont regroupées dans une structure appelée **structure de croyance-désir**: une structure de croyance-désir est un triplet $\langle S_b, S_d, \otimes_{bd} \rangle$ tel que S_b est une structure de croyance, S_d est une structure désir et \otimes_{bd} est un opérateur de combinaison entre croyances et désirs. La structure sur laquelle les faisabilités sont définies n'est pas rappelée, car il s'agit toujours de $S_f = \langle \{true, false\}, \preceq_f, \vee, \wedge \rangle$. Des structures de croyance-désir classiques satisfaisant les axiomes précédents sont présentées dans le Tableau 1 (dans le cas de l'utilité espérée possibiliste, d'autres choix que ceux présentés sont possibles). Notre problème du repas d'affaire utilise la structure de l'utilité espérée probabiliste.

	1	2	3	4	5
E_b	\mathbb{R}^+	\mathbb{R}^+	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
\preceq_b	\leq	\leq	\leq	\leq	\geq
\oplus_b	$+$	$+$	max	max	min
\otimes_b	\times	\times	min	min	$+$
$0_b, 1_b$	$0, 1$	$0, 1$	$0, 1$	$0, 1$	$+\infty, 0$
E_d	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$	\mathbb{R}^+	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
\preceq_d	\leq	\leq	\leq	\leq	\geq
\oplus_d	$+$	$+$	max	min	min
\otimes_d	$+$	\times	min	min	$+$
\perp_d	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
$0_d, 1_d$	$0, 0$	$0, 1$	$0, 1$	$1, 1$	$+\infty, 0$
\otimes_{bd}	\times	\times	min	$\max(1-b, d)$	$+$

TAB. 1 – Structure de croyance-désir avec - 1. l'utilité espérée probabiliste - 2. la satisfaction espérée probabiliste - 3. l'utilité espérée qualitative possibiliste version optimiste - 4. l'utilité espérée qualitative possibiliste version pessimiste - 5. l'utilité espérée avec des croyances épistémiques de Spohn, avec uniquement des désirs positifs.

3 Définition de problèmes

On peut maintenant utiliser des structures de croyance-désir pour exprimer de l'information sur un ensemble V de variables à domaines finis, partitionné entre V_{ndet} , l'ensemble des variables non déterministes, et V_{det} , l'ensemble des variables déterministes. Notre but est d'exprimer un degré de croyance global \mathcal{B}_V sur les variables non déterministes, un degré de faisabilité global \mathcal{F}_V sur les variables déterministes, et un degré de désir global \mathcal{D}_V sur toutes les variables. La première étape (de la définition 1 jusqu'à la propriété 1) consiste à factoriser ces quantités globales, pour qu'elles soient exprimées de manière concise, comme une combinaison de relations locales appelées fonction à scope (de la même manière que dans un CSP, les contraintes locales définissent implicitement une contrainte globale sur toutes les variables).

Définition 1 (*Fonction à scope*) Une fonction à scope f sur un ensemble E est une paire (S, φ) où $S = \{x_j, j \in J\}$ est un ensemble de variables appelé le scope de f et où $\varphi : \text{Dom}(S) \rightarrow E$ est une fonction (avec $\text{Dom}(S) = \times_{j \in J} \text{Dom}(x_j)$, $\text{Dom}(x_j)$ désignant le domaine de valeurs d'une variable x_j).

Pour une affectation A d'un sur-ensemble de S , $A[S]$ correspond à la projection de A sur S et $\varphi(A[S])$ est noté $f(A)$. Si E admet a_\otimes et n_\otimes comme élément absorbant et élément neutre de son opérateur de combinaison \otimes , et si φ prend ses valeurs dans $\{a_\otimes, n_\otimes\}$ (i.e. dans $\{0_b, 1_b\}$ pour les croyances, dans $\{false, true\}$ pour les faisabilités, et dans $\{\perp_d, 1_d\}$ pour les désirs), alors f peut être représentée par une contrainte dure : les tuples interdits recevront la valeur a_\otimes et les tuples autorisés recevront la valeur n_\otimes . Une fonction à scope sur E_b (resp. $\{true, false\}$, E_d) est appelée une relation de croyance (resp. de faisabilité, de désir).

La factorisation de \mathcal{D}_V est $\mathcal{D}_V = \otimes_d D_i$, où les D_i sont des relations locales de désir. Aucune condition n'est imposée sur ces désirs locaux, qui peuvent toujours être combinés sans que cela génère d'impossibilité (cela peut seulement générer de l'inacceptable). La situation est différente en ce qui concerne les degrés de croyance et de faisabilité globaux, qui doivent satisfaire des conditions de normalisation :

- pour \mathcal{B}_V , la disjonction de toutes les situations possibles est certaine; on lui associe le degré de croyance 1_b ;
- pour \mathcal{F}_V , la disjonction de toutes les décisions est faisable; ceci est justifié sur un plan sémantique car par exemple ne rien faire est toujours possible (même si cela peut être inacceptable).

Formellement, cela signifie que pour toute affectation A_{det} de V_{det} , $\mathcal{B}_V(A_{det})$ doit être une distribution de

croyance sur V_{ndet} , et que pour toute affectation A_{ndet} de V_{ndet} , $\mathcal{F}_V(A_{ndet})$ doit être une distribution de faisabilité sur V_{det} , les notions de distribution de croyance et de distribution de faisabilité étant définies par :

Définition 2 (*Distributions de croyance et de faisabilité*) Soit $(E_b, \preceq_b, \oplus_b, \otimes_b)$ une structure de croyance. Une distribution de croyance sur $S \subset V$ est une fonction $\gamma_S : \text{Dom}(S) \rightarrow E_b$ telle que $\oplus_{bA \in \text{Dom}(S)} \gamma_S(A) = 1_b$ (condition de normalisation). À partir d'une telle distribution, on peut définir une distribution de croyance $\gamma_{S'}$ sur tout $S' \subset S$ en définissant pour tout $A' \in \text{Dom}(S')$, $\gamma_{S'}(A') = \oplus_{bA'' \in \text{Dom}(S-S')} \gamma_S(A'.A'')$. Si S_b est la structure de faisabilité $(\{true, false\}, \preceq_f, \vee, \wedge)$, alors on parle de distribution de faisabilité au lieu de parler de distribution de croyance.

Ainsi, sur l'exemple du problème du dîner, il faudra en fait spécifier une distribution de probabilité $P(V_{ndet} | V_{det})$ des variables non déterministes sachant les variables déterministes. La condition de normalisation $\sum_{V_{ndet}} P(V_{ndet} | V_{det}) = 1$ doit alors bien entendu être vérifiée : $P(V_{ndet} | V_{det})$ est bien une distribution de croyance sur les variables non déterministes pour chaque affectation des variables déterministes. La condition de normalisation sur \mathcal{B}_V implique qu'une combinaison de relations de croyance ne donne pas nécessairement une distribution de croyance, et la condition de normalisation sur \mathcal{F}_V implique qu'une combinaison de relations de faisabilité ne donne pas nécessairement une distribution de faisabilité. Pour factoriser \mathcal{B}_V et \mathcal{F}_V tout en satisfaisant les exigences de normalisation, on utilise les notions de croyance conditionnelle, de faisabilité conditionnelle, ainsi que la notion d'indépendance conditionnelle. Afin de définir ces notions, nous introduisons une hypothèse supplémentaire sur S_b : nous supposons l'existence d'un opérateur \circ_b appelé opérateur de conditionnement, défini sur $\{(b_1, b_2) \in E_b \times E_b \mid b_1 \preceq_b b_2, 0_b \prec_b b_2\}$, et vérifiant les propriétés suivantes : $(b_1 \circ_b b) \oplus_b (b_2 \circ_b b) = (b_1 \oplus_b b_2) \circ_b b$ (linéarité), $0_b \circ_b b = 0_b$, $b \circ_b b = 1_b$, $(b_1 \circ_b b_2) \otimes_b b_2 = b_1$ et $(b_1 \circ_b b) \otimes_b ((b_2 \otimes_b b) \circ_b b) = (b_1 \otimes_b b_2) \circ_b b$ (propriétés de simplification). Si \circ_b peut être défini (ce qui est vrai pour tous les cas présentés dans le Tableau 1), alors la structure de croyance est dite *conditionnable*. Par exemple, \circ_b correspond à la division dans le cas des probabilités; si $S_b = (\{true, false\}, \preceq_f, \vee, \wedge)$, alors $\circ_b = \wedge$ convient. Dans le cas où les croyances représentent des possibilités, alors on peut prendre \circ_b défini par : $b_1 \circ_b b_2 = \min(b_1, b_2)$ si $b_1 < b_2$, 1 sinon (on obtient alors une des définitions classiques des distributions de possibilité conditionnelles).

Définition 3 (*Distribution de croyance conditionnelle, indépendance conditionnelle*) Soit $(E_b, \preceq_b, \oplus_b, \otimes_b)$

une structure de croyance conditionnable, soit γ_S une distribution de croyance sur S , et soient S_1, S_2, S_3 trois ensembles disjoints de S .

La quantité $\gamma_{S_1 \cup S_3} \otimes_b \gamma_{S_3}$, aussi notée $\gamma_{S_1 | S_3}$, est appelée distribution de croyance conditionnelle sur S_1 sachant S_3 ; elle est définie sur les affectations A telles que $\gamma_{S_3}(A) \neq 0_b$. On peut montrer que $\gamma_{S_1 | S_3}$ est une distribution de croyance sur S_1 pour toute affectation de S_3 , et qu'elle vérifie l'équation $\gamma_{S_1 \cup S_3} = \gamma_{S_1 | S_3} \otimes_b \gamma_{S_3}$. Si S_b est la structure de faisabilité, alors on parle de distribution de faisabilité conditionnelle au lieu de parler de distribution de croyance conditionnelle.

Enfin, S_1 et S_2 sont dits conditionnellement indépendants sachant S_3 si et seulement si $\gamma_{S_1 \cup S_2 | S_3} = \gamma_{S_1 | S_3} \otimes_b \gamma_{S_2 | S_3}$. Autrement dit, dans ce cas le problème peut être décomposé en une partie dépendant de $S_1 \cup S_3$, et une autre partie dépendant de $S_2 \cup S_3$.

Dans le cas où les croyances sont des probabilités, on retrouve la définition des probabilités conditionnelles: si x_1, x_2, x_3 sont trois variables aléatoires, alors la distribution de probabilité conditionnelle sur x_1 sachant x_3 est $P(x_1 | x_3) = P(x_1, x_3) / P(x_3)$ (et c'est une distribution de probabilité pour chaque affectation de x_3). De plus, x_1 et x_2 sont dites conditionnellement indépendantes sachant x_3 si $P(x_1 | x_2, x_3) = P(x_1 | x_3)$, ce qui est équivalent à $P(x_1, x_2 | x_3) = P(x_1 | x_3) \times P(x_2 | x_3)$. La définition de l'indépendance conditionnelle, qui satisfait les axiomes d'un semi-graphoïde [14], va nous permettre de factoriser \mathcal{B}_V et \mathcal{F}_V en introduisant un graphe acyclique orienté (*Directed Acyclic Graph* ou *DAG*) décrivant les indépendances conditionnelles. De manière similaire à ce qui est fait dans le cadre des graphes chaînés [7], soit G un DAG dont les sommets sont des ensembles de variables appelés *composantes*, qui forment une partition de V et qui sont tels que chaque composante est un ensemble de variables de même nature (déterministe ou non). On note \mathcal{C}_{ndet} l'ensemble des composantes non déterministes, \mathcal{C}_{det} l'ensemble des composantes déterministes, et $pa(c)$ l'ensemble des variables qui appartiennent à une composante parente dans G d'une composante c . Le DAG G est implicitement composé de 2 DAGs: l'un avec des arcs orientés vers les composantes non déterministes, noté G_b , et l'autre avec des arcs orientés vers les composantes déterministes, noté G_f . Une première factorisation de \mathcal{B}_V et \mathcal{F}_V peut ensuite être obtenue grâce à la proposition suivante (dont l'analogie pour le cas réseaux bayésiens serait: si on a un DAG qui représente des indépendances conditionnelles sur des variables aléatoires x_1, \dots, x_n , alors la distribution de probabilité $P(x_1, \dots, x_n)$ se factorise sous la forme $P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i \in [1, n]} P(x_i | pa(x_i))$).

Propriété 1 Si le DAG G décrit des indépendances conditionnelles de $\overline{\mathcal{B}}_V = \mathcal{B}_V \otimes_b b_0$ avec $b_0 = 1_b \otimes_b (\oplus_{b_{A_{det} \in Dom(V_{det})}} 1_b)^1$ et $\overline{\mathcal{F}}_V = \mathcal{F}_V$, i.e. si pour $\overline{\mathcal{B}}_V$, toute composante non déterministe est conditionnellement indépendante de ses non descendants dans G_b sachant ses parents, et pour $\overline{\mathcal{F}}_V$, toute composante déterministe est conditionnellement indépendante de ses non descendants dans G_f sachant ses parents, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \bigotimes_{c \in \mathcal{C}_{ndet}} \overline{\mathcal{B}}_c |_{pa(c)} \\ \mathcal{F}_V &= \bigwedge_{c \in \mathcal{C}_{det}} \overline{\mathcal{F}}_c |_{pa(c)} \end{aligned}$$

Il est possible de factoriser encore plus \mathcal{B}_V et \mathcal{F}_V , en factorisant chaque $\overline{\mathcal{B}}_c |_{pa(c)}$ (resp. chaque $\overline{\mathcal{F}}_c |_{pa(c)}$) comme une combinaison de relations locales de croyance B_i (resp. comme une combinaison de relations locales de faisabilité F_i). Si $c(B_i) = c$ (resp. $c(F_i) = c$) représente " B_i est un facteur de $\overline{\mathcal{B}}_c |_{pa(c)}$ " (resp. " F_i est un facteur de $\overline{\mathcal{F}}_c |_{pa(c)}$ "), alors cette seconde factorisation est $\overline{\mathcal{B}}_c |_{pa(c)} = \bigotimes_{c(B_i)=c} B_i$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}_c |_{pa(c)} = \bigwedge_{c(F_i)=c} F_i$). On peut maintenant définir des problèmes sans faire mention des distributions globales de croyance et de faisabilité.

Définition 4 Un problème Pb sur une structure de croyance-désir $\langle S_b, S_d, \otimes_{bd} \rangle$ est un tuple $\langle V, G, B, F, D \rangle$ tel que:

- $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ est un ensemble fini de variables. A chaque variable x_i est associé un ensemble fini $Dom(x_i)$, qui définit son domaine de valeurs. V est partitionné entre V_{ndet} , l'ensemble des variables non déterministes, et V_{det} , l'ensemble des variables déterministes.
- G est un graphe acyclique orienté (DAG) dont les sommets sont appelés composantes. Les composantes forment une partition de V telle que chaque composante est un ensemble de variables inclus soit dans V_{ndet} , soit dans V_{det} . On note \mathcal{C}_{ndet} (resp. \mathcal{C}_{det}) l'ensemble des composantes incluses dans V_{ndet} (resp. V_{det}) et pour une composante c , on note $pa(c)$ l'ensemble des variables qui appartiennent à une composante parente de c dans G .
- $B = \{B_1, B_2, \dots\}$ est un ensemble fini de relations de croyance; chaque $B_i = (S, \varphi)$ est associé à une unique composante $c \in \mathcal{C}_{ndet}$ notée $c(B_i)$, telle que $S \subset (c \cup pa(c))$. Pour tout $c \in \mathcal{C}_{ndet}$, $\bigotimes_{B_i \in \mathcal{B} | c(B_i)=c} B_i$ doit être une distribution de croyance sur c pour toute affectation de $pa(c)$.

1. $\overline{\mathcal{B}}_V$ est défini à partir de \mathcal{B}_V en attribuant un même degré de croyance b_0 à chaque affectation de V_{det} . Cette manipulation permet d'éviter certains problèmes liés à l'existence de variables déterministes et non déterministes. De plus, on peut montrer que $\overline{\mathcal{B}}_V$ est une distribution de croyance sur V .

- $F = \{F_1, F_2, \dots\}$ est un ensemble fini de relations de faisabilité; chaque $F_i = (S, \varphi)$ est associé à une unique composante $c \in \mathcal{C}_{det}$, notée $c(F_i)$, telle que $S \subset (c \cup pa(c))$. Pour tout $c \in \mathcal{C}_{det}$, $\wedge_{F_i \in F | c(F_i) = c} F_i$ doit être une distribution de faisabilité sur c pour toute affectation de $pa(c)$.
- $D = \{D_1, D_2, \dots\}$ est un ensemble fini de relations de désir.

La structure de DAG rend les relations de croyance et de faisabilité implicitement orientées (entre variables d'une composante c et variables de $pa(c)$) ou non (entre variables d'une même composante). Notons qu'il ne peut pas exister de relation non orientée entre une variable non déterministe et une variable déterministe, puisque ces variables ne peuvent pas appartenir à une même composante. Ainsi, si on a une relation entre une décision et l'environnement, alors soit cette décision influence l'environnement, soit l'environnement restreint les décisions possibles. On peut prouver que le degré de croyance (resp. de faisabilité) global défini à partir d'un problème comme $B'_V = \otimes_{B_i \in B} B_i$ (resp. $\mathcal{F}'_V = \wedge_{F_i \in F} F_i$) est une distribution de croyance (resp. de faisabilité) sur V_{ndet} (resp. V_{det}) pour toute affectation de V_{det} (resp. V_{ndet}) dont des indépendances conditionnelles sont décrites par G_b (resp. G_f).

Modélisation du problème du repas d'affaire Le problème du repas d'affaire peut être modélisé en utilisant six variables: deb_J et deb_M (valeur t ou f), représentant la présence de Jean et Marie au début, fin_J et fin_M (valeur t ou f), représentant leur présence à la fin, pl (valeur *poisson* ou *viande*), pour le choix du plat, et v (valeur *blanc* ou *rouge*), pour le choix du vin. pl et v sont des variables déterministes, deb_J , deb_M , fin_J , fin_M sont des variables non déterministes. Une méthode possible pour construire un DAG des composantes représentant des indépendances conditionnelles consiste à utiliser la notion de causalité (d'autres méthodes sont envisageables). Le résultat est donné à la Figure 1a. Les composantes non déterministes sont représentées par des ellipses, les composantes déterministes par des rectangles.

Concernant les croyances, nous devons spécifier une distribution de croyance de chaque composante non déterministe sachant ses parents comme une combinaison de relations de croyances. $\overline{B}_{deb_J, deb_M}$ peut être exprimé en utilisant une première relation de croyance binaire spécifiant la probabilité de présence de Jean et Marie au début : $B_1 = (\{deb_J, deb_M\}, \varphi)$ avec $\varphi(deb_J = t, deb_M = f) = 0.6$, $\varphi(deb_J = f, deb_M = t) = 0.4$, et $\varphi(deb_J = t, deb_M = t) = \varphi(deb_J = f, deb_M = f) = 0$. Ensuite, $\overline{B}_{fin_J | deb_J, deb_M, pl, v}$ peut être exprimé comme la combinaison de deux relations de croyance B_2 et B_3 . La première, B_2 , qui va représenter $P(fin_J | deb_J = f)$,

spécifie que si Jean n'est pas présent au début, alors il ne sera pas présent à la fin : $B_2 = (\{fin_J, deb_J\}, \varphi)$ avec $\varphi(fin_J = t, deb_J = f) = 0$ et $\varphi(fin_J = t, deb_J = t) = \varphi(fin_J = f, deb_J = t) = \varphi(fin_J = f, deb_J = f) = 1$. De manière équivalente, B_2 est la contrainte $(deb_J = f) \rightarrow (fin_J = f)$. La seconde, B_3 , est $(deb_J = t) \rightarrow ((fin_J = t) \leftrightarrow \neg(v = blanc))$. De même, $\overline{B}_{fin_M | deb_J, deb_M, pl, v}$ peut être exprimé comme la combinaison de deux relations de croyance B_4 et B_5 définies comme des contraintes. Notons que contrairement aux réseaux bayésiens ou aux diagrammes d'influence, il est possible de spécifier la distribution de probabilité d'une variable sachant ses parents par plusieurs relations.

Au niveau des faisabilités, $\overline{\mathcal{F}}_{pl, v}$ peut être spécifié par une relation de faisabilité unique, exprimant que Pierre ne peut pas commander du poisson avec du vin rouge : $F_1 : \neg((pl = poisson) \wedge (v = rouge))$. La description de quelle relation est affectée à quelle composante est fournie à la Figure 1a.

Quant aux désirs, une relation de désir binaire exprime le fait que Pierre ne veut pas que Jean parte au cours du dîner : $D_1 : (deb_J = t) \rightarrow (fin_J = t)$. Deux relations de désir unaires D_2 et D_3 sur fin_J et fin_M respectivement spécifient les gains espérés de la présence de chacun des convives à la fin du repas : par exemple, $D_2 = (\{fin_J\}, \varphi)$ avec $\varphi(fin_J = t) = 10$, $\varphi(fin_J = f) = 0$.

Toutes ces relations sont décrites à la Figure 1b. Les variables non déterministes sont représentées par des cercles, les variables déterministes sont représentées par des carrés. Chaque relation de croyance (resp. de faisabilité, de désir) (S, φ) est représentée par une hyper-arête dessinée en trait continu (resp. en double trait continu, en trait pointillé) qui lie les variables de S . Pour l'affectation complète $A : pl = viande, v = rouge, deb_J = fin_J = t, deb_M = fin_M = f$, nous avons $B_V(A) = 0.6$, $\mathcal{F}_V(A) = true$ et $\mathcal{D}_V(A) = 10$.

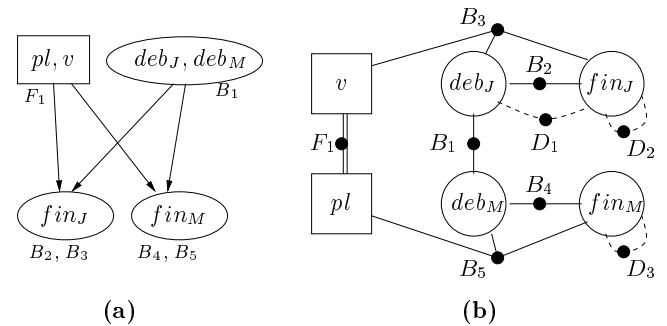


FIG. 1 - (a) DAG des composantes et relations affectées aux composantes (b) réseau de Croyance-Faisabilité-Désir.

Retour sur les cadres existants Pour représenter un CSP classique, on peut utiliser uniquement des variables déterministes et des relations de désir (à valeur dans $\{true, false\}$) qui décrivent les contraintes. La combinaison des relations de désir (par \wedge) correspond alors bien à la contrainte globale définie implicitement sur toutes les variables. On peut en fait tout modéliser par des désirs car dans le cas des CSP durs, aucune distinction n'est faite entre les exigences, les faits certains et les décisions faisables. Il en est de même pour les VCSP et les CSP quantifiés.

Dans les CSP stochastiques, deux types de variables sont présents (les variables stochastiques et les variables de décision), et plusieurs types de relations sont définis : on a des distributions de probabilité sur les variables stochastiques et des contraintes sur toutes les variables. Dans notre formalisme, les variables stochastiques seront des variables non déterministes, les variables de décision seront des variables déterministes, les distributions de probabilité sur les variables stochastiques seront des relations de croyance, et les contraintes seront représentées par des relations de désir.

Dans un réseau bayésien, on dispose d'un ensemble V de variables aléatoires et d'un DAG sur ces variables, et on définit pour chaque variable $x_i \in V$ une distribution de probabilité sur x_i sachant ses parents $P(x_i | pa(x_i))$. On représente ainsi la distribution de probabilité globale $P(V)$ par une combinaison des distributions conditionnelles locales (ce qui permet par la suite de faire des calculs sans avoir à expliciter la relation globale), au même titre que dans les CSP on représente une contrainte globale sur toutes les variables par une combinaison de contraintes locales. Pour représenter un réseau bayésien dans notre formalisme, on modélise les variables aléatoires par des variables non déterministes, et les distributions de probabilité conditionnelles sont modélisées par des relations de croyance. Dans les diagrammes d'influence, on ajoute, en plus des variables aléatoires, des variables de décision dont on peut fixer la valeur, ainsi que des variables dites d'utilité qui décrivent les préférences. Un diagramme d'influence peut être représenté de la manière suivante : les variables aléatoires sont encore représentées par des variables non déterministes, les variables de décision sont représentées par des variables déterministes, les probabilités conditionnelles sur les variables aléatoires correspondent aux relations de croyance et les variables d'utilité deviennent des relations de désir. Notons que dans un diagramme d'influence, la notion de faisabilité n'est pas du tout présente.

La notion de faisabilité est présente si l'on veut modéliser un problème de planification à la STRIPS : dans un tel problème, le monde est décrit par des variables, on spécifie un état initial du monde, et on peut passer

d'un état du monde à un autre en appliquant certaines actions. Pour chaque action, on donne des préconditions d'application (qui indiquent dans quels cas une action est faisable), ainsi que l'effet des actions sur le monde. Enfin, on spécifie un ou des états buts. Ceci se traduit de la manière suivante dans notre formalisme : les variables qui décrivent le monde sont non déterministes, les variables qui décrivent les actions choisies sont déterministes, les effets des actions sur le monde correspondent à des relations de croyance, les préconditions d'application des actions sont représentées par des relations de faisabilité, et le ou les états buts sont modélisés par des relations de désir.

Prenons maintenant un cadre issu de la théorie des possibilités : celui des MDP possibilistes (à horizon fini). Dans un MDP possibiliste, l'évolution du monde est découpée en pas de temps. On a une variable d'état s_t et une variable de décision d_t pour chaque pas de temps t . On spécifie l'évolution du monde en donnant une distribution de possibilité $\pi(s_{t+1} | s_t, d_t)$ donnant la possibilité d'être dans un état s_{t+1} à l'instant $t + 1$ sachant l'état s_t à l'instant t et la décision d_t prise à l'instant t . Enfin, on donne des préférences $\mu(s_t, d_t)$ sur chaque couple état-décision. Pour représenter un tel problème dans le formalisme des réseaux de croyance-faisabilité-désir, les variables d'état s_t sont modélisées par des variables non déterministes, les décisions d_t correspondent à des variables déterministes, les distributions de possibilité $\pi(s_{t+1} | s_t, d_t)$ sont des relations de croyance, et les préférences $\mu(s_t, d_t)$ sont des relations de désir.

Par contre, un cadre tel que celui des *semiring-based* CSP [1] n'est pas inclus dans notre formalisme (pour pouvoir l'englober, il faudrait que la relation d'ordre sur les désirs puisse être partielle).

4 Définition des requêtes

Etant donné un problème, notre objectif est maintenant de pouvoir formuler des requêtes sur ce problème. Informellement, une requête va correspondre à une séquence d'éliminations de variables, permettant de répondre à des questions du type : "*comment maximiser l'investissement espéré si tout d'abord le restaurant choisit le plat principal et Pierre est pessimiste au niveau de ce choix, et ensuite Pierre choisit le vin avant de savoir qui sera présent au début et à la fin*" (la séquence d'élimination sera $\langle \min, \{pl\} \rangle \cdot \langle \max, \{v\} \rangle \cdot \langle \oplus_d, \{deb_J, deb_M, fin_J, fin_M\} \rangle$ dans ce cas). Nous introduisons d'abord une définition formelle des requêtes, puis nous fournissons deux définitions de la valeur d'une requête avant d'établir un théorème d'équivalence entre ces deux définitions.

Définition 5 Une requête Q est un couple $\langle Pb, Sov \rangle$ où

- Pb est un problème $\langle V, G, B, F, D \rangle$ comme défini auparavant
- Sov est une séquence de couples opérateur-variables telle que les opérateurs utilisés sont \min , \max ou \oplus_d , et telle que toute variable apparaît au plus une fois dans Sov . La séquence Sov est en fait utilisée pour spécifier comment une variable est quantifiée. Les variables de V qui n'apparaissent pas dans Sov sont appelées variables libres (les autres sont appelées variables quantifiées).

Une requête est dite *correcte* si et seulement si :

- si une variable est quantifiée, alors l'opérateur qui lui est appliqué vaut \oplus_d si cette variable est non déterministe, et \min ou \max si cette variable est déterministe (adéquation entre la nature d'une variable et l'opérateur qui lui est appliqué)²;
- pour toute paire de variables x et y de natures différentes (l'une est déterministe, l'autre ne l'est pas), si la composante à laquelle x appartient est ascendante dans le DAG du problème de la composante à laquelle y appartient, alors ou bien x apparaît à gauche de y dans la séquence Sov , ou bien x est une variable libre (respect de la causalité).

Propriété 2 Du fait de la structure de DAG, il existe au moins une requête correcte sans variable libre sur un problème.

Sens d'une requête Soit S_1, S_2 deux ensembles disjoints de V et A_1, A_2 des affectations de S_1 et S_2 respectivement. Pour des raisons de clarté de notation, la croyance en $S_1 = A_1$ sachant $S_2 = A_2$, $\mathcal{B}_{S_1|S_2}(A_1.A_2)$, sera aussi notée $\mathcal{B}_V(A_1|A_2)$. De même, la faisabilité de $S_1 = A_1$ sachant $S_2 = A_2$, $\mathcal{F}_{S_1|S_2}(A_1.A_2)$, sera aussi notée $\mathcal{F}_V(A_1|A_2)$.

La réponse $Ans(Q)$ à une requête correcte $Q = \langle Pb, Sov \rangle$ est définie comme une fonction des variables libres de Q . Soit A' une affectation de ces variables. Si A' n'est pas faisable, i.e. si $\mathcal{F}_V(A'[V_{det}]|A'[V_{ndet}]) = false$, alors $(Ans(Q))(A')$ est noté \emptyset (réponse vide). Sinon, si A' n'est pas cru, i.e. si $\mathcal{B}_V(A'[V_{ndet}]|A'[V_{det}]) = 0_b$, la réponse est 0_d . Sinon, $(Ans(Q))(A')$ vaut $\mathcal{B}_V(A'[V_{ndet}]|A'[V_{det}]) \otimes_{bd} Qs(Pb, Sov, A')$, avec Qs défini récursivement de la manière suivante :

$$Qs(Pb, \emptyset, A'') = \mathcal{D}_V(A'')$$

$$Qs(Pb, \langle op, x_i \rangle, Sov', A'') =$$

- si $x_i \in V_{det}$ et $op = \min$:

$$\min_{a \in Dom(x_i), \mathcal{F}_V(x_i=a|A'')=true} Qs(Pb, Sov', A''.(x_i = a))$$
- si $x_i \in V_{det}$ et $op = \max$:

$$\max_{a \in Dom(x_i), \mathcal{F}_V(x_i=a|A'')=true} Qs(Pb, Sov', A''.(x_i = a))$$
- si $x_i \in V_{ndet}$ et $op = \oplus_d$:

$$\oplus_d_{a \in Dom(x_i), \mathcal{B}_V(x_i=a|A'') \succ_b 0_b} \mathcal{B}_V(x_i = a|A'') \otimes_{bd} Qs(Pb, Sov', A''.(x_i = a))$$

En d'autres termes, d'une part, chaque étape où une variable non déterministe est traitée est considérée comme une loterie [18] dont les récompenses sont les $Qs(Pb, Sov', A''.(x_i = a))$ et telle que la croyance attribuée à chaque récompense vaut $\mathcal{B}_V(x_i = a|A'')$; d'autre part, une étape à laquelle une variable déterministe est traitée est vue comme une étape d'optimisation parmi les décisions possibles. Par rapport à la théorie des loteries, une hypothèse supplémentaire que nous faisons implicitement est qu'il est possible d'associer à chaque croyance et chaque récompense une contribution élémentaire au degré de désir global. Il est possible de montrer que si la structure de croyance est conditionnable (existence de \otimes_b), les quantités qui interviennent dans la définition des requêtes ont toutes un sens. Lorsque l'opérateur \min ou \max est utilisé, on veut en général connaître une décision optimisante. Nous supposons qu'il est possible de mémoriser ou non cette information (complètement ou partiellement) au cours de l'évaluation de la valeur d'une requête.

Une autre définition de la valeur d'une requête Les quantités $\mathcal{B}_V(x_i = a|A'')$ et $\mathcal{F}_V(x_i = a|A'')$ peuvent être coûteuses à calculer. Heureusement, il est possible de donner une autre définition de la valeur d'une requête, qui sera équivalente à la première, mais qui utilisera directement les données du problème, c'est-à-dire qui utilisera directement les relations de croyance, de faisabilité et de désir exprimées. Afin d'introduire cette seconde définition, nous définissons l'opération $\otimes_{fd} : \{true, false\} \times (E_d \cup \{\emptyset\}) \rightarrow (E_d \cup \{\emptyset\})$ telle que $\forall d \in E_d \cup \{\emptyset\}$, $true \otimes_{fd} d = d$ et $false \otimes_{fd} d = \emptyset$, et nous imposons $\emptyset \oplus_d \emptyset = \emptyset$ et $\max(d, \emptyset) = \min(d, \emptyset) = d^3$. La réponse $Ans(Q)$ à une requête correcte $Q = \langle Pb, Sov \rangle$ est alors définie de la manière suivante (A' est une affectation des variables libres) :

$$(Ans(Q))(A') = Qs'(Pb, Sov, A') \quad (1)$$

$$Qs'(Pb, \langle op, x_i \rangle, Sov', A'') = op_{a \in Dom(x_i)} Qs'(Pb, Sov', A''.(x_i = a)) \quad (2)$$

$$Qs'(Pb, \emptyset, A'') = \mathcal{F}_V(A'') \otimes_{fd} (\mathcal{B}_V(A'') \otimes_{bd} \mathcal{D}_V(A'')) \quad (3)$$

2. Une variable non déterministe peut quand même être quantifiée par \min ou \max , car il se peut que l'on ait $\oplus_d = \min$ ou $\oplus_d = \max$.

3. Imposer $\max(d, \emptyset) = \min(d, \emptyset) = d$ n'est pas incorrect car \preceq_d est un ordre total sur E_d uniquement (et non sur $E_d \cup \{\emptyset\}$).

L'équation 3 indique que si toutes les variables du problème sont affectées, la réponse à la requête correspond à la combinaison des degrés globaux de croyance, de faisabilité et de désir. L'équation 2 exprime que si les variables ne sont pas toutes affectées et si x_i est la première variable quantifiée, avec op comme opérateur d'élimination, alors la réponse à la requête correspond à une élimination sur toutes les valeurs du domaine de x_i . Les propriétés algébriques d'une structure de croyance-désir, la définition des croyances et des faisabilités conditionnelles ainsi que la définition de l'opération \otimes_{fd} impliquent :

Propriété 3 *Si la structure de croyance est conditionnable, alors les deux définitions de la valeur d'une requête correcte sont équivalentes.*

Notons que la seconde définition s'applique même si la structure de croyance n'est pas conditionnable (*i.e.* même si \odot_b ne peut pas être défini). La contrepartie est que l'on perd la sémantique en termes de loteries.

La seconde définition fournit un premier algorithme naïf de calcul de la valeur d'une requête correcte. Sa nature récursive définit implicitement une recherche arborescente utilisant un ordre d'élimination des variables fixes (celui indiqué par Sov) qui collecte les croyances, les faisabilités et les désirs élémentaires pour trouver la réponse à la requête. En fonction de la nature de l'opérateur utilisé, chaque niveau de l'arbre correspond à l'application d'un min, d'un max ou d'un \oplus_d sur les valeurs collectées. L'utilisation simultanée d'algorithmes d'établissement de la cohérence locale pour trouver des bornes, d'algorithmes traitant des contraintes globales, de mécanismes de branch and bound pour exploiter les bornes trouvées, ainsi que des mécanismes de mémorisation exploitant la structure du problème, devrait permettre d'améliorer de façon conséquente ce schéma de résolution.

Requêtes sur le problème du dîner Quel est l'investissement maximal que Pierre peut espérer (et quelle(s) décision(s) doit-il prendre) s'il doit choisir le menu sans savoir qui sera présent au début du repas? La requête associée est :

$$\langle Pb, \langle \max, \{pl, v\} \rangle \rangle \cdot \langle \oplus_d, \{deb_J, deb_M, fin_J, fin_M\} \rangle$$

La réponse vaut 6 (k€) avec $\{(pl = viande), (v = rouge)\}$. Si on se place maintenant dans la situation où Pierre sait qui est présent au début, la séquence Sov utilisée est :

$$\langle \oplus_d, \{deb_J, deb_M\} \rangle \cdot \langle \max, \{pl, v\} \rangle \cdot \langle \oplus_d, \{fin_J, fin_M\} \rangle$$

La réponse est 26 (k€), soit un gain de 20 (k€) résultant de l'observation de la présence de Jean et Marie au début. La décision associée est $\{(pl = viande), (v = rouge)\}$ si Jean est présent au début et Marie ne l'est

pas, et $\{(pl = poisson), (v = blanc)\}$ sinon. Considérons maintenant la séquence introduite au début de la section sur les requêtes :

$$\langle \min, \{pl\} \rangle \cdot \langle \max, \{v\} \rangle \cdot \langle \oplus_d, \{deb_J, deb_M, fin_J, fin_M\} \rangle$$

La réponse vaut $\perp_d = -\infty$: dans le pire des cas concernant le choix du plat, la situation peut être inacceptable quel que soit le choix du vin. Enfin, la séquence

$$\langle \oplus_d, \{deb_J, deb_M, fin_J, fin_M\} \rangle \cdot \langle \max, \{pl, v\} \rangle$$

n'est pas correcte, car le menu doit être choisi avant que l'on sache qui est présent à la fin. Ces exemples montrent comment une requête permet de considérer des situations variées en termes de comportement optimiste, pessimiste ou moyennant, et en termes d'observabilité (notons que les variables non observables apparaissent systématiquement à la fin d'une requête).

Retour sur les cadres existants Les requêtes classiques associées aux CSP durs ou aux VCSP impliquent uniquement l'opérateur max : en effet, la requête de recherche d'une solution pour un CSP peut être vue comme une requête de maximisation de la quantité donnée par la conjonction des contraintes. Dans les CSP quantifiés, les opérateurs d'élimination min et max sont utilisés (car il s'agit de calculer la valeur de vérité de formules du type $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 (c_1 \wedge c_2 \wedge c_3)$, les opérateurs \exists et \forall correspondant respectivement à un max et un min sur les booléens). Avec les CSP stochastiques, les opérateurs d'élimination max et \oplus_d sont utilisés (on fait du max sur les variables de décision et du \oplus_d sur les variables stochastiques). Avec les réseaux bayésiens, les requêtes de calcul ou de mise à jour de probabilités utilisent uniquement l'opérateur \oplus_d . Avec les diagrammes d'influence, l'unique requête (production d'une politique qui maximise l'utilité espérée) fait intervenir les opérateurs d'élimination max (sur les décisions) et \oplus_d (sur les variables aléatoires). En fait, dans un diagramme d'influence, on spécifie "en dur" quelle variable sera observée à quel moment, alors que dans notre formalisme, cela apparaît uniquement dans la requête : on fait apparaître de manière explicite que le fait d'observer telle variable à tel ou tel moment ne modifie par les relations locales qui existent entre les variables. Enfin, avec les MDP et les POMDP à horizon fini (qu'ils soient probabilistes ou possibilistes), on a une alternance de max sur les variables de décision et de \oplus_d sur les variables d'état.

5 Conclusion

Au cours des dernières décennies, de nombreux formalismes permettant de raisonner sur les incertitudes, les contraintes et les préférences, ont été développés

dans le domaine de l'IA. Nous avons tenté de capturer la structure mathématique sous-jacente à ces formalismes, pour finalement construire un cadre unificateur qui couvre les réseaux de contraintes, les réseaux bayésiens, les diagrammes d'influence, les MDP... Notre seconde définition de la valeur d'une requête, bien qu'exponentielle en temps à calculer, est opérationnelle dans le sens où elle permet de répondre à des requêtes en utilisant uniquement l'information brute disponible. Sa définition récursive définit de plus une procédure de recherche arborescente qui pourrait être simplifiée en prenant en compte des propriétés structurales dans un algorithme de type programmation dynamique. Dans le cas où plusieurs opérateurs d'élimination interviennent dans une même requête, ceci soulève de nouvelles questions. D'autres techniques telles que la recherche avec retour arrière, la recherche avec utilisation de bornes, de cohérences locales, de contraintes globales doivent également être envisagées, tout comme les algorithmes d'échantillonnage pour un calcul approché de la valeur d'une requête.

Le principal objectif (à long terme) de notre travail est de pouvoir résoudre des problèmes algorithmiquement parlant, et pas uniquement d'être capable de les représenter. Le but n'est pas simplement de construire un formalisme permettant de représenter des incertitudes, des contraintes et des préférences : il s'agit de regrouper dans un même cadre de nombreux formalismes qui partagent des propriétés algébriques communes, ce qui permettra d'une part d'identifier des approches algorithmiques similaires entre plusieurs cadres, et d'autre part de faire profiter un cadre donné des avancées des autres cadres. Des travaux similaires existent déjà (par exemple les travaux de Shenoy et Kohlas [17, 10]), mais ils ne font intervenir qu'un seul type de variable, qu'un seul type de relation, et qu'un seul type d'opérateur de combinaison et d'élimination. C'est pourquoi la construction d'un nouveau formalisme était une première étape nécessaire.

Remerciements Le travail décrit dans ce papier a été réalisé en relation avec le projet européen intégré COGNIRON ("The Cognitive Companion") et a été financé par la Division de la Commission Européenne FP6-IST Future and Emerging Technologies, sous le contrat FP6-002020.

Références

- [1] S. Bistarelli, U. Montanari, F. Rossi, T. Schiex, G. Verfaillie, and H. Fargier. Semiring-Based CSPs and Valued CSPs: Frameworks, Properties and Comparison *Constraints*, 4(3):199–240, 1999.
- [2] L. Bordeaux and E. Monfroy. Beyond NP: Arc-consistency for Quantified Constraints. In *Proc. of CP-02*.
- [3] C. Boutilier, R. Dearden, and M. Goldszmidt. Stochastic Dynamic Programming with Factored Representations. *Artificial Intelligence*, 121(1-2):49–107, 2000.
- [4] R. Dechter. Bucket Elimination: a Unifying Framework for Reasoning. *Artificial Intelligence*, 113:41–85, 1999.
- [5] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory as a basis for qualitative decision theory. In *Proc. of IJCAI-95*.
- [6] H. Fargier, J. Lang, and T. Schiex. Mixed Constraint Satisfaction: a Framework for Decision Problems under Incomplete Knowledge. In *Proc. of AAAI-96*.
- [7] M. Frydenberg. The Chain Graph Markov Property. *Scandinavian Journal of Statistics*, 17:333–353, 1990.
- [8] P.H. Giang and P.P. Shenoy. A qualitative linear utility theory for spohn's theory of epistemic beliefs. In *Proc. of UAI-00*.
- [9] R. Howard and J. Matheson. Influence Diagrams. In *Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis*, 1984.
- [10] J. Kolhas. *Information Algebras: Generic Structures for Inference*. Springer, 2003.
- [11] M. Littman, S. Majercik, and T. Pitassi. Stochastic Boolean Satisfiability. *Journal of Automated Reasoning*, 27(3):251–296, 2001.
- [12] A. Mackworth. Consistency in Networks of Relations. *Artificial Intelligence*, 8(1):99–118, 1977.
- [13] G. Monahan. A Survey of Partially Observable Markov Decision Processes: Theory, Models, and Algorithms. *Management Science*, 28(1):1–16, 1982.
- [14] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann, 1988.
- [15] M. Puterman. *Markov Decision Processes, Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [16] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [17] P. Shenoy. Valuation-based Systems for Discrete Optimization. In *Proc. of UAI-90*.
- [18] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, 1944.
- [19] T. Walsh. Stochastic Constraint Programming. In *Proc. of ECAI-02*.