



# Cohérence d'arc existentielle : un pas de plus vers la cohérence d'arc complète

Matthias Zytnicki, Federico Heras, Simon de Givry, Javier Larrosa

► **To cite this version:**

Matthias Zytnicki, Federico Heras, Simon de Givry, Javier Larrosa. Cohérence d'arc existentielle : un pas de plus vers la cohérence d'arc complète. Premières Journées Francophones de Programmation par Contraintes, CRIL - CNRS FRE 2499, Jun 2005, Lens, pp.139-148. inria-00000061

**HAL Id: inria-00000061**

**<https://hal.inria.fr/inria-00000061>**

Submitted on 25 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cohérence d'arc existentielle : un pas de plus vers la cohérence d'arc complète

Matthias Zytnicki<sup>1</sup>, Federico Heras<sup>2</sup>, Simon de Givry<sup>1</sup>, Javier Larrosa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>INRA Toulouse – BIA

<sup>2</sup>UPC – LSI

zytnicki@toulouse.inra.fr

## Résumé

Les réseaux de contraintes pondérées offrent un cadre de représentation et de résolution permettant d'exprimer des contraintes dites « molles » utiles pour modéliser un très large champ d'applications. La plupart des solveurs que l'on trouve actuellement implantent un algorithme de séparation et évaluation en profondeur d'abord qui maintient une cohérence locale durant la phase d'exploration de l'arbre. Les résultats empiriques tendent à prouver que maintenir FDAC\* semble être le meilleur choix en pratique. Nous présentons dans cet article une forme d'arc cohérence plus forte, appelée *cohérence d'arc existentielle et directionnelle*, ainsi qu'un algorithme permettant de transformer un réseau de contraintes pondérées en un réseau équivalent, satisfaisant cette propriété. L'algorithme s'avère efficace sur de nombreuses classes de problèmes.

## Abstract

The weighted CSP framework is a soft constraint framework with a wide range of applications. Most current state-of-the-art complete solvers can be described as a basic depth-first branch and bound search that maintain some form of arc consistency during the search. Empirical results indicate that maintaining FDAC\* seems to be the best in practice. In this paper we introduce a new stronger form of arc consistency, that we call *existential directional arc consistency* and we provide an algorithm to enforce it. The efficiency of the algorithm is empirically demonstrated in a variety of domains.

## 1 Introduction

Les réseaux de contraintes pondérées (RCP) constituent une extension bien connue du formalisme des réseaux de contraintes (RC) et permettent de traiter efficacement un grand nombre d'applications pratiques. Récemment, la propriété de cohérence d'arc a

été généralisée au formalisme des RCP [2, 9]. Il existe quatre généralisations connues se réduisant à la cohérence d'arc dans le cadre des RC :

- AC\* [7], qui transpose la cohérence d'arc au cas valué,
- DAC\* [8], qui transpose la cohérence d'arc directionnelle au cas valué,
- FDAC\* [8], définie comme la conjonction des deux propriétés précédentes,
- FAC\*, où chaque valeur de chaque variable doit posséder un support complet.

Malheureusement, toutes les instances de RCP ne peuvent être transformées en une instance possédant la propriété FAC\*, ce qui rend la propriété inutile en pratique. FDAC\* est la plus forte propriété qui puisse être établie sur un RCP. Dans [8], un algorithme permettant d'établir FDAC\* a été proposé avec une complexité de  $\mathcal{O}(end^3)$  ( $n$  représentant le nombre de variables de l'instance,  $e$  le nombre de contraintes et  $d$  la taille du plus grand domaine). De plus, l'article a montré que maintenir FDAC\* durant l'exploration est un meilleur choix que maintenir AC\*, plus faible.

Dans notre article, nous présentons une nouvelle cohérence locale appelée *cohérence d'arc existentielle et directionnelle* (EDAC\*). Nous montrons que EDAC\* est plus forte que FDAC\*, notamment par le fait que la première exige l'*existence* d'une valeur pour laquelle tous les supports doivent être des supports complets. Intuitivement, la différence entre l'algorithme proposé et ceux précédemment cités est que les derniers s'attachent à obtenir une cohérence locale par rapport à chaque contrainte binaire considérée indépendamment, alors que le premier prend en compte toutes les contraintes qui s'appliquent sur une variable dans leur ensemble.

Nous présentons aussi un algorithme qui établit cette propriété en temps  $\mathcal{O}(ed^2 \times \max\{nd, \top\})$ ,  $\top$  étant la borne supérieure de l'instance du RCP. Cette complexité, qui est une borne supérieure dont on ne sait pas encore si elle est effectivement atteinte, utilise les structures de données de AC2001 (cf. [1]), sur la proposition de [9]. Toutefois, d'autres structures de données peuvent éventuellement donner de meilleurs résultats en pratique, même si la complexité théorique ne semble pas être modifiée.

Un des intérêts majeurs de EDAC\* est qu'il peut être inclus dans un algorithme de séparation et évaluation (SE) qui *maintient* la propriété à chaque nœud visité. Nous avons évalué expérimentalement cette idée sur des instances de Max-SAT [3], Max-CSP [8] et des problèmes du placement d'entrepôts. Les tests montrent que maintenir EDAC\* est toujours au moins aussi bon que maintenir FDAC\*.

## 2 Définitions

Une *structure de valuation* est une structure algébrique permettant de spécifier les coûts dans les problèmes de satisfaction de contraintes valuées [11]. Elle est définie par le tuple  $\mathcal{S} = \langle E, \oplus, \prec \rangle$ , où :

- $E$  est l'ensemble des coûts,
- $\prec$  est une relation qui ordonne totalement  $E$  et définit ainsi son plus petit élément ( $\perp$ ) et son plus grand élément ( $\top$ ),
- $\oplus$  est une opération interne de  $E$  utilisée pour combiner les coûts.

D'après [9], la structure de valuation d'un RCP est  $\mathcal{S} = \langle [0..k], \oplus, \prec \rangle$  où :

- $E \subset \mathbb{N}$  et  $k$  est un entier naturel positif,
- $\oplus$  est défini par :  $\forall(a, b) \in E^2, a \oplus b = \min\{a + b, k\}$ ,
- $\prec$  est la relation d'ordre habituelle sur les entiers.

Dans ce cas,  $0 = \perp$  et  $k = \top$ . Il est de plus utile de définir la soustraction  $\ominus$  des coûts :

$$a \ominus b = \begin{cases} a - b & \text{si } a \neq k \\ k & \text{sinon} \end{cases}$$

Un *réseau de contraintes pondérées* est un tuple  $\mathcal{P} = \langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{S} \rangle$  où :

- $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  est l'ensemble des *variables* ;
- $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$  est l'ensemble des *domaines* finis associés aux variables, chaque domaine  $D_i$  est l'ensemble des valeurs que peut prendre  $x_i$  ;
- $\mathcal{C}$  est l'ensemble des contraintes pondérées unaires et binaires, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de coûts sur  $\mathcal{S}$ .

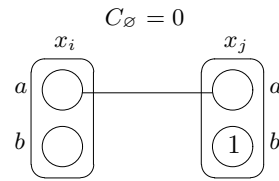
Une contrainte unaire  $C_i$  est une fonction de la forme :  $D_i \rightarrow E$ , une contrainte binaire  $C_{ij}$  est de la forme :  $D_i \times D_j \rightarrow E$ . On suppose qu'il existe pour chaque

variable  $x_i$  une contrainte unaire  $C_i$  (éventuellement la fonction nulle sur  $D_i$ ) et une contrainte d'arité nulle  $C_\emptyset$  (éventuellement nulle).

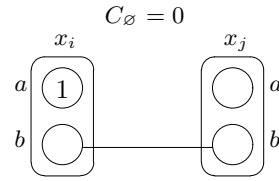
Lorsqu'une contrainte  $C$  assigne à un tuple  $t$  le coût de  $\top$ , cela signifie que  $t$  est interdit par  $C$ . Si le coût est différent, l'affectation est autorisée, avec un coût  $C(t)$ . Le *coût* d'une affectation  $t = (v_1, \dots, v_n)$  de  $D_1 \times \dots \times D_n$ , notée  $\mathcal{V}(t)$ , est la somme de tous les coûts :

$$\mathcal{V}(t) = \bigoplus_{\substack{C_{ij} \in \mathcal{C} \\ i < j}} C_{ij}(v_i, v_j) \oplus \bigoplus_{C_i \in \mathcal{C}} C_i(v_i) \oplus C_\emptyset$$

Un tuple  $t$  est *cohérent* si  $\mathcal{V}(t) \prec \top$ . Le problème général qui consiste à trouver *un tuple cohérent de coût minimal* est NP-difficile. Un RCP dont  $\top$  vaut 1 est un réseau de contraintes classiques.



(a) le réseau originel



(b) après projection

FIG. 1 – Deux instances équivalentes de RCP ( $\top = 2$ ).

**Exemple 1** *Considérons le problème décrit FIG. 1(a). Il a deux variables  $x_i$  et  $x_j$ , chacune ayant deux valeurs  $a$  et  $b$ . Les coûts des contraintes unaires sont donnés dans les cercles (par défaut, la valeur est de 0). Les contraintes binaires sont représentées par des arcs reliant une paire de valeurs, l'arc est étiqueté par le coût de cette paire (la valeur par défaut étant 1). S'il n'existe pas d'arc entre deux valeurs, le coût est nul pour la contrainte. Dans les deux exemples, le coût optimal est 0, obtenu par le tuple  $(b, a)$ .*

## 3 Quelques cohérences locales de RCP

Deux instances de RCP définies sur le même ensemble de variables sont dites *équivalentes* si elles

donnent la même distribution de coût sur toute instantiation complète. Les cohérences locales sont largement utilisées pour transformer des problèmes en des problèmes équivalents, plus simples. En général, les contraintes sont données explicitement par des tables de coûts, ou implicitement par des expressions mathématiques ou des procédures algorithmiques. Par souci de clarté, nous supposons l'expression explicite des contraintes. La plus simple des cohérences locales est la *cohérence de nœud* :

**Définition 1 [7]** *La variable  $x_i$  est nœud-cohérente ssi :*

- $\forall v \in D_i, C_\emptyset \oplus C_i(v) \prec \top$ ,
- $\exists v \in D_i, C_i(v) = \perp$ .

Un RCP est nœud-cohérent ssi toutes ses variables le sont.

Un RCP peut facilement être transformé en un RCP nœud-cohérent équivalent si l'on projette toutes les contraintes unaires sur le  $C_\emptyset$  et en éliminant toutes les valeurs interdites. C'est ce que font les fonctions *ProjetteUnaire* et *ÉlaguerVariable* (ALG. 1).

Les propriétés de cohérence d'arc sont basées sur la notion de *support* et de *support complet*. Pour une contrainte binaire  $C_{ij}$ ,  $w \in D_j$  est un support de  $v \in D_i$  si  $C_{ij}(v, w) = \perp$ . C'est un support complet si  $C_{ij}(v, w) \oplus C_j(w) = \perp$

**Définition 2 [7]** *La variable  $x_i$  est arc-cohérente si pour toute contrainte binaire  $C_{ij}$ , toute valeur de son domaine  $v \in D_i$  possède un support sur  $C_{ij}$ . Un RCP est arc-cohérent ( $AC^*$ ) si toutes ses variables le sont.*

**Définition 3** *La variable  $x_i$  est complètement arc-cohérente si pour toute contrainte binaire  $C_{ij}$ , toute valeur de son domaine  $v \in D_i$  possède un support complet sur  $C_{ij}$ . Un RCP est complètement arc-cohérent ( $FAC^*$ ) si toutes ses variables le sont.*

Les supports pour  $v \in D_i$  par rapport à  $D_j$  peuvent être trouvés par projection des coûts binaires  $C_{ij}(v, \cdot)$  sur  $C_i(v)$ . C'est ce qui est fait par la procédure *Projette* (ALG. 1). La procédure *ChercheSupport* (ALG. 2) trouve un support sur  $D_j$  pour chaque valeur de  $D_i$ .

**Exemple 2** *Le RCP décrit FIG. 2(a) n'est pas  $AC^*$  car la valeur  $a \in D_i$  n'a pas de support par rapport à la variable  $x_j$ . La propriété est obtenue en exécutant *ChercheSupport*( $i, j$ ) (ce qui nous donne l'instance FIG. 2(b)) puis *ProjetteUnaire*( $i$ ) (instance FIG. 2(c)).*

Pour obtenir un support complet pour les valeurs de  $D_i$  par rapport à  $D_j$  (assuré par la fonction *ChercheSupportComplet* de ALG. 2), il faut étendre les coûts unaires de  $C_j(\cdot)$  sur  $C_{ij}(\cdot, \cdot)$  (procédure *Étend*

de ALG. 1). Enfin, les coûts binaires sont projetés sur  $C_i(v)$ .

Dans le cas des RC (où  $\top = 1$ ), être un support pour  $v \in D_i$  est équivalent à être un support complet et les deux notions se réduisent à la même propriété. C'est pourquoi  $AC^*$  et  $FAC^*$  se réduisent au même RC. Ce n'est pas le cas dans le cadre des RCP et alors que, dans [8], il a été prouvé qu'un RCP pouvait être transformé en une instance  $AC^*$  équivalente en  $\mathcal{O}(ed^3)$ , il n'est pas toujours possible d'en trouver une qui satisfasse la propriété  $FAC^*$ .

**Exemple 3** *Le problème FIG. 1(a) est  $AC^*$ , mais pas  $FAC^*$  car la valeur  $a \in D_i$  n'a pas de support complet. On peut alors appeler la fonction *ChercheSupportComplet*( $i, j$ ), ce qui donne le problème FIG. 1(b). Il n'est pas  $FAC^*$  non plus car  $b \in D_j$  n'a pas de support complet. Appeler *ChercheSupportComplet*( $i, j$ ) (cf. ALG. 2) nous ramènerait à l'instance précédente. On peut facilement prouver que ce problème n'a pas d'équivalent  $FAC^*$ .*

C'est pourquoi  $FAC^*$  n'est pas une bonne propriété. Pour tenter de résoudre le problème, une propriété plus faible a été proposée. Dans la suite, nous supposons que l'ensemble des variables  $\mathcal{X}$  est totalement ordonné par  $<$ .

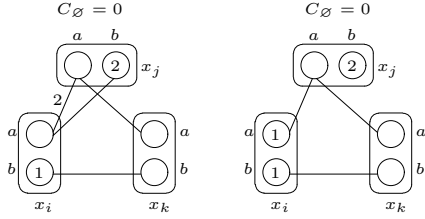
**Définition 4 [8]** *La variable  $x_i$  est directionnellement arc-cohérente si toutes ses valeurs  $v \in D_i$  ont un support complet pour chaque contrainte binaire  $C_{ij}$  telle que  $j > i$ . Elle est complètement et directionnellement arc-cohérente ( $FDAC^*$ ) si elle est de plus arc-cohérente. Un RCP est complètement et directionnellement arc-cohérent si chaque variable l'est.*

**Exemple 4** *Le problème FIG. 2(c) est  $AC^*$  mais pas  $FDAC^*$  car la valeur  $a \in D_i$  n'a pas de support complet par rapport à la variable  $x_j$ . La propriété  $FDAC^*$  est établie par l'exécution de *ChercheSupportComplet*( $i, j$ ) (cf. ALG. 2), qui produit FIG. 2(d).*

Tout RCP peut être transformé en une instance équivalente satisfaisant  $FDAC^*$  en temps  $\mathcal{O}(end^3)$  [8]. Dans le cas des RC,  $FDAC^*$  se ramène aussi à la cohérence d'arc. Dans le cas général,  $FAC^*$  est plus fort que  $FDAC^*$ , qui est plus fort que  $AC^*$ . Il est alors intéressant de savoir si on peut trouver une propriété plus forte que  $FDAC^*$ , tout en garantissant l'existence d'une instance possédant cette propriété pour tout problème.

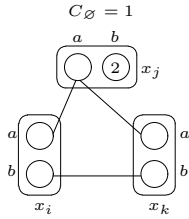
## 4 La cohérence d'arc existentielle : une propriété plus forte

Considérons le problème  $FDAC^*$  FIG. 2(d). Notons que la valeur  $a \in D_k$  possède un support en  $x_j$  (ce qui

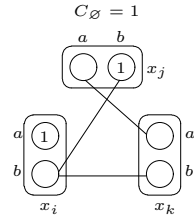


(a) le problème original

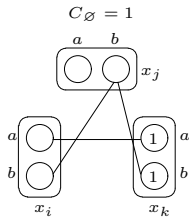
(b) après projection de  $C_{ij}$  sur  $x_i$  en  $a$



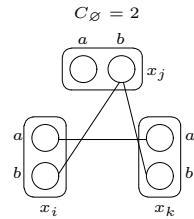
(c) l'instance équivalente AC\*



(d) l'équivalente FDAC\* avec  $i < j < k$



(e) après FindFullSupports( $k, i$ ) et FindFullSupports( $k, j$ )



(f) l'équivalente EDAC\*

FIG. 2 – Six instances équivalentes (avec  $\top = 4$ )

est exigé par FDAC\*) mais pas de support complet. Nous avons la même situation pour la valeur  $b \in D_k$  et  $x_i$ . Ainsi, le coût unaire de ces deux valeurs peut être augmenté en établissant les supports complets (FIG. 2(e)). Comme tous les coûts unaires des valeurs de  $x_k$  sont plus grands que  $\perp$ , la cohérence de nœud est perdue et la borne inférieure peut être augmentée (FIG. 2(f)). D'une manière générale, les supports complets peuvent être établis sans erreur possible dans les deux directions si l'on augmente  $C_\emptyset$ . Nous montrerons ensuite qu'il existe une cohérence locale naturelle derrière cette observation. Nous l'appellerons cohérence d'arc existentielle (EAC\*).

**Définition 5** La variable  $x_i$  est existentiellement arc-cohérente s'il existe au moins une valeur  $v \in D_i$  telle que  $C_i(v) = \perp$  et si cette valeur possède un support complet pour toutes les contraintes  $C_{ij}$ . Un RCP est existentiellement arc-cohérent si toutes ses variables le sont.

Toutes les cohérences locales précédemment évoquées demandent à chaque valeur de chaque variable une certaine propriété. Pour EAC\*, on demande dans chaque variable l'existence d'une valeur possédant certaines propriétés. Il est important de noter que si une variable  $x_i$  n'est pas EAC\*, alors pour toutes les valeurs  $v \in D_i$  telles que  $C_i(v) = \perp$ , il existe  $x_j$  tel que  $\forall w \in D_j, C_{ij}(v, w) \oplus C_j(w) \succ \perp$ . L'établissement d'un support complet sur  $x_i$  violera donc la propriété NC\* et il sera possible d'augmenter  $C_\emptyset$ .

D'autre part, il est possible d'intégrer EAC\* à FDAC\* pour exploiter les avantages de chacun. On parle alors de cohérence d'arc existentielle et directionnelle.

**Définition 6** Un RCP est EDAC\* s'il est FDAC\* et EAC\*.

Ainsi, EDAC\* impose que chaque valeur ait un support complet dans une direction et un support simple dans l'autre (pour satisfaire FDAC\*). De plus, une valeur au moins de chaque variable doit avoir un support complet dans les deux directions (pour satisfaire EAC\*). Cette dernière valeur est appelée valeur complètement supportée. Notons que dans le cas des RC, EDAC\* se réduit aussi en cohérence d'arc.

EDAC\* est par construction plus forte que FDAC\*. Elle est plus faible que FAC\* car pour chaque variable, seule une de ses valeurs est totalement supportée. L'exemple 3 rappelle que trouver un support complet pour plus d'une valeur n'est pas toujours possible.

## 5 Algorithmes

Nous présentons ici un algorithme qui établit EDAC\* dans le cas des RCP binaires. EDAC\* (ALG. 3) transforme un problème arbitraire en une instance équivalente vérifiant la cohérence locale EDAC\*. L'idée générale en est la suivante :

- On tente de trouver pour chaque variable  $x_i$  sa valeur complètement supportée pour établir EAC\* ; s'il n'y en a pas, on propage les coûts de façon à en trouver un.
- On tente de trouver pour chaque variable  $x_j$  un support complet par rapport à toute contrainte binaire qui s'applique sur elle et une variable  $x_i$  telle que  $i < j$  pour établir DAC\*.
- On tente de trouver pour chaque variable  $x_j$  un support complet par rapport à toute contrainte binaire qui s'applique sur elle pour établir AC\*.
- On tente de trouver pour chaque variable toutes ses valeurs dont le coût unaire est trop élevé.

On peut accélérer l'algorithme en remarquant que l'établissement de DAC\* sur  $x_i$  par rapport à une contrainte  $C_{ij}$  telle que  $i < j$  rend inutile la recherche de support pour AC\* ou de support existentiel pour EAC\* dans cette direction.

De plus, établir une propriété peut en casser une autre. Pour remédier à cela, on rentre les variables dont une propriété est éventuellement violée dans une des trois files  $Q$ ,  $R$  et  $S$  qui sont implantées comme des files de priorité telles que la plus petite valeur (ou la plus grande) peut être retirée en temps constant. La signification des files est la suivante :

- Si  $x_j$  est dans  $Q$ , alors une de ses valeurs a été supprimée et dans ce cas les plus grands voisins de  $x_j$  peuvent avoir perdu leur support et doivent être vérifiés (traitement de la propriété AC\* pour  $j > i$ ).
- Si  $x_j$  est dans  $R$ , alors le coût unaire d'une de ses valeurs est passé de  $\perp$  à une valeur de coût strictement supérieure et dans ce cas les plus petits voisins de  $x_j$  peuvent avoir perdu leur support complet et doivent être vérifiés (traitement de la propriété DAC\* pour  $j < i$ ).
- Si  $x_i$  est dans  $P$ , alors soit le coût unaire de la valeur complètement supportée pour  $x_i$  a été augmenté, soit le coût unaire d'une des valeurs de  $x_j$  (un plus petit voisin de  $x_i$ ) est passé de  $\perp$  à une valeur de coût strictement supérieure et, dans ce cas,  $x_i$  peut avoir perdu le support complet de sa valeur complètement supportée et doit être vérifié (traitement de la propriété EAC\* pour  $j < i$ ).

Il existe de plus une autre file auxiliaire,  $S$ , qui sert à remplir efficacement  $P$ .

L'algorithme est constitué d'une boucle principale et quatre boucles intérieures. Les boucles **tant que** aux lignes 5, 8 et 10 établissent respectivement EAC\*, DAC\* et AC\*. La ligne 11 établit NC\*. À chaque fois qu'un coût est projeté pour l'établissement d'une propriété, une autre propriété peut être violée. Les variables dont une cohérence locale est à vérifier sont stockées dans les files. L'établissement de NC\*, AC\* et DAC\* est fait comme dans [8]. Nous nous concentrons donc sur EAC\*.

Cette propriété est principalement établie par ChercheSupportExistentiel( $i$ ), qui trouve un support existentiel pour  $x_i$  en donnant un support complet par rapport à chaque plus petit voisin  $x_j$  (l'établissement d'un support complet sur les plus grands voisins se fait avec DAC\*). Lorsque l'on établit le support existentiel de  $x_i$ , la fonction de coût  $C_j$  diminue ou reste constante. Nous n'aurons donc pas à vérifier la cohérence existentielle de  $x_j$  ni la cohérence d'arc directionnelle des plus petits voisins de  $x_j$ . De plus, comme la cohérence existentielle est plus forte que AC\*, il est inutile d'établir la cohérence d'arc entre  $x_i$  et  $x_j$ . Cependant, la cohérence d'arc directionnelle de la variable  $x_i$  doit être vérifiée car une valeur de  $x_i$  peut avoir vu son coût unaire augmenter (ligne 6). De même, la cohérence existentielle des plus grands voisins de  $x_i$  doit aussi être revue (ligne 7).

ÉlagueVariable() établit la cohérence de nœud après qu'un coût unaire ou  $C_\emptyset$  a été augmenté (ligne 11). Cette fonction peut être exécutée plus souvent pour éviter certains examens superflus dans les boucles **tant que** sans que cela ne change la complexité dans le pire cas. Par souci de clarté de notre exposé, nous ne décrirons pas ici le cas où le problème est incohérent et où  $C_\emptyset$  atteint  $\top$ .

**Theorème 1** *La complexité de EDAC\* est de  $\mathcal{O}(ed^2 \max\{nd, \top\})$  en temps et  $\mathcal{O}(ed)$  en espace.*

**Preuve 1** *En ce qui concerne l'espace, on utilise la structure donnée par [2] pour avoir une complexité en  $\mathcal{O}(ed)$ .*

*De plus, [8] prouve les points suivants :*

- *ProjetteUnaire, Projette, Étend et ÉlagueVariable ont une complexité en  $\mathcal{O}(d)$  ;*
- *ChercheSupport et ChercheSupportComplet ont une complexité en  $\mathcal{O}(d^2)$ .*

*Étudions maintenant la complexité de la boucle **tant que** dans EDAC\*. La boucle à la ligne 8 établit DAC\*. Comme décrit dans l'article précédemment cité, elle est en  $\mathcal{O}(ed^2)$  car chaque variable est stockée dans  $R$  au maximum une fois, ce qui entraîne que chaque contrainte  $C_{ij}$  est vérifiée une seule fois (ligne 9). De même, la boucle ligne 10 qui établit AC\* dans la direction des plus grandes variables est aussi en  $\mathcal{O}(ed^2)$ .*

**Algorithme 1** : Algorithme propageant les coûts.

```

[Supprime les valeurs dont les coûts de la contrainte
 unaire  $C_i$  sont trop élevés ]
Fonction ÉlaguerVariable( $i$ ) : booléen
  drapeau  $\leftarrow$  faux ;
  pour chaque  $a \in D_i$  faire
    si  $(C_\emptyset \oplus C_i(a) \succeq \top)$  alors
       $D_i \leftarrow D_i \setminus \{a\}$  ;
      drapeau  $\leftarrow$  vrai ;
  retourner drapeau ;

[Projette le minimum du coût de la contrainte
 unaire  $C_i$  sur la contrainte d'arité nulle  $C_\emptyset$  ]
Procédure ProjetteUnaire( $i$ )
   $\alpha \leftarrow \min_{a \in D_i} \{C_i(a)\}$  ;
   $C_\emptyset \leftarrow C_\emptyset \oplus \alpha$  ;
  pour chaque  $a \in D_i$  faire  $C_i(a) \leftarrow C_i(a) \ominus \alpha$  ;

[Projette le coût  $\alpha$  de la contrainte binaire  $C_{ij}$  sur la
 contrainte unaire  $C_i$  en  $a$  ]
Procédure Projette( $i, a, j, \alpha$ )
   $C_i(a) \leftarrow C_i(a) \oplus \alpha$  ;
  pour chaque  $b \in D_j$  faire
     $C_{ij}(a, b) \leftarrow C_{ij}(a, b) \ominus \alpha$  ;

[Projette le coût  $\alpha$  de la contrainte unaire  $C_i$  en  $a$ 
 sur la contrainte binaire  $C_{ij}$  ]
Procédure Étend( $i, a, j, \alpha$ )
  pour chaque  $b \in D_j$  faire
     $C_{ij}(a, b) \leftarrow C_{ij}(a, b) \oplus \alpha$  ;
     $C_i(a) \leftarrow C_i(a) \ominus \alpha$  ;

```

La boucle de la ligne 5 établit  $EAC^*$  dans la direction des plus grandes variables. En un seul parcours de la boucle, une variable n'entrera jamais deux fois dans  $P$  car les variables  $x_i$  qui en ont été extraites sont toujours les plus petites de la file et les variables qui entrent dans la file sont plus grandes que  $x_i$ . La boucle **tant que** itère donc au maximum  $n$  fois. Cela donne une complexité de  $\mathcal{O}(e)$  pour la ligne 7. La complexité amortie de **ChercheSupportExistentiel** est de  $\mathcal{O}(ed^2)$  car cette fonction peut être appelée avec chaque variable en paramètre, et chaque contrainte binaire est examinée une fois aux lignes 1 et 2. La complexité de  $EAC^*$  est donc aussi de  $\mathcal{O}(ed^2)$ .

La ligne 4 prend un temps  $\mathcal{O}(n)$ . Le **pour chaque** de la ligne 11 est en temps  $\mathcal{O}(nd)$  (qui est inférieur à  $\mathcal{O}(ed)$  car le graphe est supposé connexe). Au vu de ces différents résultats, la complexité à l'intérieur du **tant que** de la ligne 3 est de  $\mathcal{O}(ed^2)$ . Elle itère lorsque :

- soit  $Q$  n'est pas vide : le **pour chaque** de la ligne 11 a donc éliminé une valeur et ceci ne peut pas être fait plus de  $nd$  fois ;

**Algorithme 2** : Algorithmes établissant les supports

```

[Établit un support sur  $x_i$  par rapport à  $C_{ij}$  ]
Fonction ChercheSupport( $i, j$ ) : booléen
  drapeau  $\leftarrow$  faux ;
  pour chaque  $a \in D_i$  faire
     $\alpha \leftarrow \min_{b \in D_j} \{C_{ij}(a, b)\}$  ;
    si  $(\alpha \succ \perp \wedge C_i(a) = \perp)$  alors drapeau  $\leftarrow$  vrai ;
  Projette( $i, a, j, \alpha$ ) ;
  ProjetteUnaire( $i$ ) ;
  retourner drapeau ;

[Établit un support complet sur  $x_i$  par rapport à  $C_{ij}$  ]
Fonction ChercheSupportComplet( $i, j$ ) : booléen
  drapeau  $\leftarrow$  faux ;
  pour chaque  $a \in D_i$  faire
     $P[a] \leftarrow \min_{b \in D_j} \{C_{ij}(a, b) \oplus C_j(b)\}$  ;
    si  $(P[a] \succ \perp \wedge C_i(a) = \perp)$  alors
      drapeau  $\leftarrow$  vrai ;
  pour chaque  $b \in D_j$  faire
     $E[b] \leftarrow \max_{a \in D_i} \{P[a] \ominus C_{ij}(a, b)\}$  ;
  pour chaque  $b \in D_j$  faire Étend( $j, b, i, E[b]$ ) ;
  pour chaque  $a \in D_i$  faire Projette( $i, a, j, P[a]$ ) ;
  ProjetteUnaire( $i$ ) ;
  retourner drapeau ;

[Établit un support existentiel sur  $x_i$  ]
Fonction ChercheSupportExistentiel( $i$ ) : booléen
  drapeau  $\leftarrow$  faux ;
   $\alpha \leftarrow$ 
  1  $\min_{a \in D_i} \{C_i(a) \oplus \bigoplus_{C_{ij} \in \mathcal{C}, j < i} \min_{b \in D_j} \{C_{ij}(a, b) \oplus$ 
   $C_j(b)\}\}$  ;
  si  $(\alpha \succ \perp)$  alors
  2 pour chaque  $C_{ij} \in \mathcal{C}, j < i$  faire
    drapeau  $\leftarrow$  drapeau  $\wedge$ 
    ChercheSupportComplet( $i, j$ ) ;
  retourner drapeau ;

```

- soit  $R$  n'est pas vide :  $AC^*$  a inséré une variable dans  $R$  et ceci n'est possible que  $\mathcal{O}(nd)$  fois, d'après le point précédent ;
- soit  $S$  n'est pas vide : un élément a été inséré lors de l'établissement de  $AC^*$  ou  $DAC^*$ . Dans le premier, on a vu que ce ne peut pas être fait plus de  $\mathcal{O}(nd)$  fois. Le second cas se produit  $\mathcal{O}(\max\{nd, \top\})$  fois car la condition de la ligne 8 est vraie lorsque :
  - soit  $AC^*$  a introduit un élément dans  $R$  ( $\mathcal{O}(nd)$  fois)
  - soit  $EAC^*$  a introduit un élément ( $\mathcal{O}(\top)$  fois car chaque fois que  $EAC^*$  est violé,  $C_\emptyset$  augmente).

La complexité de l'algorithme dans le pire cas est donc  $\mathcal{O}(ed^2 \max\{nd, \top\})$ .

**Algorithme 3** : Etablissement de EDAC\*, initialement,  $Q = R = S = \mathcal{X}$ .

[Établit la propriété EDAC\*

Procédure EDAC\*

```

3  tant que ( $Q \neq \emptyset \vee R \neq \emptyset \vee S \neq \emptyset$ ) faire
4  |    $P \leftarrow \{l \mid i \in S, l > i, C_{il} \in \mathcal{C}\} \cup S$ ;
   |    $S \leftarrow \emptyset$ ;
5  |   tant que ( $P \neq \emptyset$ ) faire
   |   |    $i \leftarrow \text{popMin}(P)$ ;
   |   |   si (ChercheSupportExistentiel( $i$ )) alors
   |   |   |    $R \leftarrow R \cup \{i\}$ ;
   |   |   |   pour chaque  $C_{ij} \in \mathcal{C}, j > i$  faire
   |   |   |   |    $P \leftarrow P \cup \{j\}$ ;
   |   |   tant que ( $R \neq \emptyset$ ) faire
   |   |   |    $j \leftarrow \text{popMax}(R)$ ;
   |   |   |   pour chaque  $C_{ij} \in \mathcal{C}, i < j$  faire
   |   |   |   |   si (ChercheSupportComplet( $i, j$ )) alors
   |   |   |   |   |    $R \leftarrow R \cup \{i\}$ ;
   |   |   |   |   |    $S \leftarrow S \cup \{i\}$ ;
   |   |   tant que ( $Q \neq \emptyset$ ) faire
   |   |   |    $j \leftarrow \text{popMin}(Q)$ ;
   |   |   |   pour chaque  $C_{ij} \in \mathcal{C}, i > j$  faire
   |   |   |   |   si (ChercheSupport( $i, j$ )) alors
   |   |   |   |   |    $R \leftarrow R \cup \{i\}$ ;
   |   |   |   |   |    $S \leftarrow S \cup \{i\}$ ;
11  |   pour chaque  $i \in \mathcal{X}$  faire
   |   |   si (ÉlagueVariable( $i$ )) alors  $Q \leftarrow Q \cup \{i\}$ ;

```

## 6 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous dresserons une comparaison empirique entre MEDAC\* et MFDAC\* pour mettre en évidence l'intérêt du premier. Le filtrage EDAC\* ayant tout intérêt à être utilisé dans un algorithme de séparation et d'évaluation, l'idée est de *maintenir* EDAC\* durant l'exploration (d'où le nom MEDAC\*). Nous avons implémenté l'algorithme en C en utilisant les tables de supports telles que décrites pour AC2001 [1]. Dans les problèmes non binaires, on attend l'instanciation partielle des contraintes jusqu'à ce qu'elles deviennent binaires. Pour la sélection de variable, on utilise la simple heuristique *dom/deg* qui donne la variable qui possède le plus faible ratio taille de domaine sur degré. Lorsque l'on a le choix, la valeur sélectionnée est celle qui possède le coût unaire le plus faible. L'ordre des variables est l'ordre naturel de leur indice. L'optimum de chaque instance est donné à l'algorithme SE comme étant la première borne supérieure. Les résultats sont donnés sur trois domaines facilement modélisables par des RCP.

Pour une formule en CNF donnée, **Max-SAT** doit trouver une instanciation complète comportant le plus grand nombre de clauses satisfaites possible. Nous avons généré et résolu des instances de Max-2SAT à 80 variables et des instances de Max-3SAT à 40 variables en variant le nombre de clauses grâce à *Cnfgen*<sup>1</sup>, un générateur aléatoire de Max- $k$ SAT. Il est à noter que ce générateur ne produit pas deux littéraux identiques ou opposés dans une même clause mais éventuellement deux clauses identiques.

Pour un RC sur-contraint donné, **Max-CSP** doit trouver une instanciation complète comportant le plus grand nombre de contraintes satisfaites possible. Nous avons généré 6 classes de problèmes binaires aléatoires dont les domaines possèdent 10 valeurs, comme proposé dans [8]. Les problèmes peuvent être :

- peu contraints si  $e = 2,5 \times n$ , très contraints si  $e = \frac{n(n-1)}{8}$  ou fortement connexes;
- lâches si  $t = t^o$ , resserrés si  $t = d^2 - \frac{t^o}{4}$  ( $t$  représente le nombre de tuples interdits dans le problème et  $t^o$ , le plus petit  $t$  tel que le problème soit sur-contraint).

Dans Max-SAT, chaque classe possède 10 instances et dans Max-CSP, 50. On ne mentionne ici que les résultats moyens.

Dans le problème du *placement d'entrepôts* (UWLP<sup>2</sup>), une entreprise propose d'ouvrir des entrepôts à certains endroits pour fournir les magasins existants. L'objectif est de déterminer quels entrepôts ouvrir et à quel entrepôt assigner un magasin pour minimiser le coût de la maintenance et des coûts d'approvisionnement, sachant que chaque magasin est approvisionné par un unique entrepôt. Ce problème est modélisé par  $l$  variables booléennes pour les lieux candidats,  $s$  variables entières pour les magasins dont la taille du domaine est fixée à  $l$ ,  $l + s$  contraintes molles pour les coûts et  $l \times s$  contraintes binaires dures reliant les magasins aux entrepôts. Nous avons résolu les problèmes cap71-134<sup>3</sup> des bancs de tests de la librairie standard OR pour UWLP ainsi que les instances MO\*-MP\* fournies dans [6]. Les instances M\* sont particulièrement intéressantes lorsque résolues par programmation linéaire car elles ont un grand nombre de solutions sous-optimales.

Les résultats ont été obtenus sur un Pentium 4 à 2,0 GHz avec 512 MB de mémoire<sup>4</sup>. Les résultats sont donnés FIG. 3, 4, 5 et TAB. 5. Dans

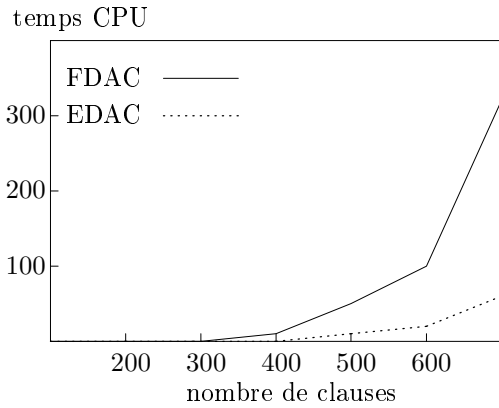
<sup>1</sup>A. van Gelder [ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/satisfiability/contributed/UCSC/instances](http://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/satisfiability/contributed/UCSC/instances)

<sup>2</sup>CSPLib <http://www.csplib.org/>, problème 034.

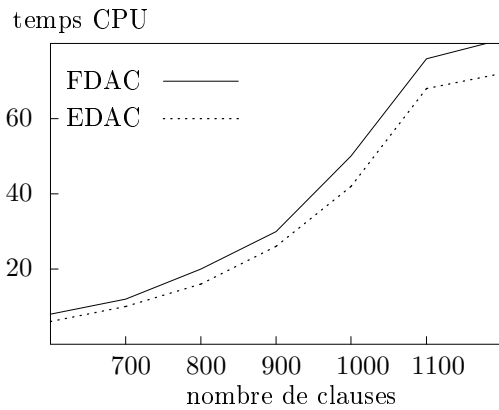
<sup>3</sup>J. E. Beasley <http://www.dcc.unicamp.br/~aprox/facility/instancias/uncapacitated/uncapinfo.html.gz>.

<sup>4</sup>Le programme TOOLBAR et les bancs de test sont disponibles sur <http://carlit.toulouse.inra.fr/cgi-bin/awki.cgi/SoftCSP>.



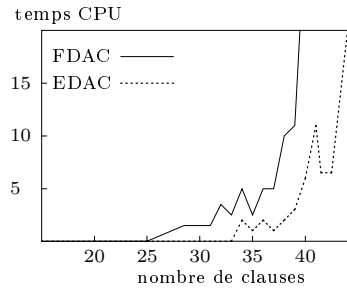


(a) CNF2 (80 variables)

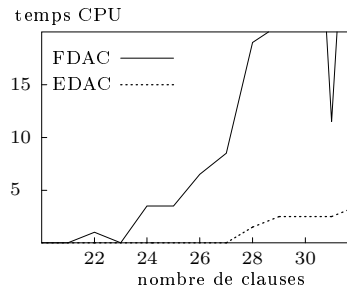


(b) CNF3 (40 variables)

FIG. 3 – Temps en secondes pour trouver l’instanciation optimale de problèmes Max-2SAT et Max-3SAT aléatoires.

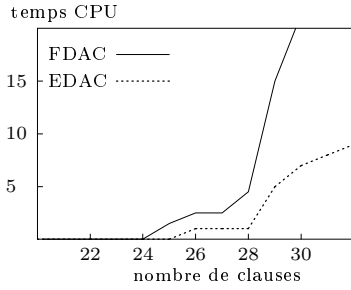


(a) peu contraint/lâche

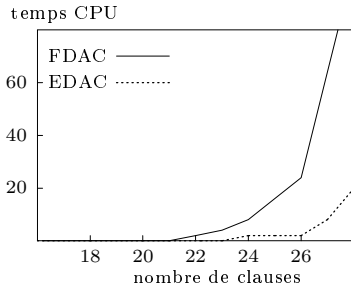


(b) peu contraint/resserré

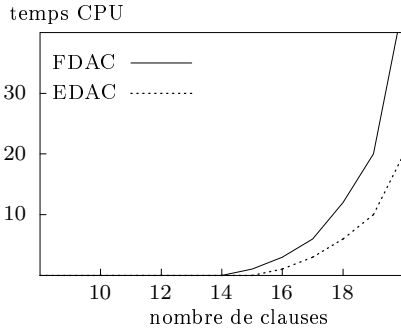
FIG. 4 – Temps en secondes pour trouver l’instanciation optimale de problèmes Max-CSP binaires aléatoires.



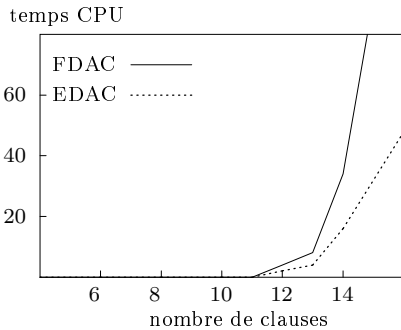
(a) très contraint/lâche



(b) très contraint/resserré



(c) fortement connexe/lâche



(d) fortement connexe/resserré

FIG. 5 – Temps en secondes pour trouver l’instanciation optimale de problèmes Max-CSP binaires aléatoires (suite).

toutes les classes Max-SAT, la phase d’exploration semble grandir exponentiellement avec le nombre de clauses, et pour Max-CSP, exponentiellement avec le nombre de variables. Nous avons sommé les temps de calcul pour tous les exemples qui ont été complètement résolus par les deux algorithmes et calculé le ratio MFDAC\*/MEDAC\*. Dans le cas de Max-2SAT, MEDAC\* est 5,7 fois plus rapide que MFDAC\*. L’amélioration est moindre dans Max-3SAT et nous supposons que cela est dû au fait que nous attendons l’instanciation des variables pour prendre en compte les contraintes d’arité supérieure à deux. Pour Max-CSP, MEDAC\* est plus rapide que MFDAC\* avec un facteur allant de 2,01 (pour « fortement connexe/resserré ») à 13,8 (« peu contraint/resserré »). Des résultats identiques ont été observés lors de l’analyse du nombre de nœuds explorés par MEDAC\* et MFDAC\*. Pour résumer, le gain est d’autant plus substantiel que les instances sont peu contraintes.

Problème	Taille	MFDAC*	MEDAC*	CPLEX
cap71	16 × 50	0,01	0,00	0,02
cap72	16 × 50	0,01	0,01	0,00
cap73	16 × 50	0,02	0,01	0,00
cap74	16 × 50	0,02	0,01	0,02
cap101	25 × 50	0,03	0,02	0,02
cap102	25 × 50	0,13	0,03	0,01
cap103	25 × 50	0,35	0,03	0,01
cap104	25 × 50	0,24	0,04	0,01
cap131	50 × 50	65,02	0,11	0,05
cap132	50 × 50	155,08	0,12	0,04
cap133	50 × 50	194,36	0,14	0,05
cap134	50 × 50	44,75	0,12	0,05
MO1	100 × 100	-	216,57	202,48
MO2	100 × 100	11775,60	44,45	36,67
MO3	100 × 100	15123,70	74,60	199,84
MO4	100 × 100	3525,61	31,74	43,26
MO5	100 × 100	2354,95	33,98	42,96
MP1	200 × 200	-	3403,37	2296,65
MP2	200 × 200	-	1443,93	917,92
MP3	200 × 200	-	981,28	1209,15
MP4	200 × 200	-	1768,51	1936,57
MP5	200 × 200	-	1099,88	697,51

TAB. 5 – Temps en secondes pour trouver l’instanciation optimale pour UWLP. La taille du problème est  $l \times s$ , où  $l$  est le nombre d’entrepôts et  $s$  le nombre de magasins. Le signe « - » signifie que l’instance n’a pas été résolue en moins de 5 heures.

Pour UWLP, MEDAC\* est de plusieurs ordres meilleur que MFDAC\* pour des problèmes de taille supérieure ou égale à  $l \times 50$ . La borne inférieure calculée par EDAC\* pour UWLP est donc meilleure et dépend moins de l’ordre des variables. Bien que UWLP soit un problème rapidement résolu par des modélisations dédiées ([4, 5]) ou par des heuristiques *ad hoc* ([6, 10]), on peut noter que notre algorithme générique est capable de résoudre le problème pour des instances

de taille raisonnable dans un temps relativement court (ici moins d'une heure). À titre de comparaison, nous avons utilisé le solveur Ilog CPLEX 9.0 avec les paramètres par défaut et sans borne supérieure initiale, sur une formulation directe de UWLP. MEDAC\* et CPLEX résolvent les instances en des temps comparables.

## 7 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté dans cet article la nouvelle cohérence locale appelée EDAC\*, adaptée aux RCP. Nous avons étudié sa complexité et, malgré son fort coût théorique dans le pire cas, il est montré que maintenir EDAC\* donne toujours de meilleurs résultats que maintenir FDAC\*, et ceci pour plusieurs classes de problèmes. Dans un futur proche, nous souhaiterions étudier une version paresseuse de EDAC\* pour l'appliquer à d'autres classes de problèmes.

## Remerciements

Les auteurs remercient Thomas Schiex pour les remarques pertinentes faites sur des versions préliminaires, et fêtent la naissance de Julia Larossa, née durant l'écriture de cet article.

## Références

- [1] C. Bessière and J.-C. Régim. Refining the basic constraint propagation algorithm. In *IJCAI-2001*, 2001.
- [2] M. Cooper and T. Schiex. Arc consistency for soft constraints. *Artificial Intelligence*, 154 :199–227, 2004.
- [3] S. de Givry, J. Larrosa, P. Meseguer, and T. Schiex. Solving Max-SAT as weighted CSP. In *CP-03*, pages 363–376, 2003.
- [4] D. Erlenkotter. A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location. *Operations Research*, 26(6) :992–1009, 1978.
- [5] M. Körkel. On the exact solution of large-scale simple plant location problems. *European Journal of Operational Research*, 39 :157–173, 1989.
- [6] J. Kratica, D. Tosic, V. Filipovic, and I. Ljubic. Solving the Simple Plant Location Problems by Genetic Algorithm. *RAIRO Operations Research*, 35 :127–142, 2001.
- [7] J. Larrosa. On arc and node consistency in weighted CSP. In *Proc. AAAI'02*, 2002.
- [8] J. Larrosa and T. Schiex. In the quest of the best form of local consistency for weighted CSP. In *IJCAI-03*, 2003.
- [9] J. Larrosa and T. Schiex. Solving Weighted CSP by Maintaining Arc-consistency. *Artificial Intelligence*, 159(1-2) :1–26, 2004.
- [10] L. Michel and P. Van Hentenryck. A Simple Tabu Search for Warehouse Location. *European Journal on Operations Research*, 157(3) :576–591, 2004.
- [11] T. Schiex, H. Fargier, and G. Verfaillie. Valued constraint satisfaction problems : hard and easy problems. In *IJCAI-95*, pages 631–637, 1995.