Bornes de Caractéristiques de Graphes

Nicolas Beldiceanu[1], Thierry Petit[1] et Guillaume Rochart[1,2]

[1] École des Mines de Nantes, LINA FRE CNRS 2729, FR-44307 Nantes, France
[2] Bouygues e-lab, 78061 St. Quentin en Yvelines, France
Nicolas.Beldiceanu@emn.fr Thierry.Petit@emn.fr GRochart@bouygues.com

Résumé

Cet article présente une approche systématique pour dériver un algorithme de filtrage à partir de la représentation des contraintes globales sous la forme de propriétés de graphes. Cette approche est basée sur le calcul de bornes des caractéristiques de graphes utilisées dans la description des contraintes globales. Les bornes des caractéristiques les plus utilisées sont étudiées.

1 Introduction

L'un des principaux objectifs de la programmation par contraintes est de fournir des outils génériques pour résoudre des problèmes combinatoires, notamment les algorithmes d'arc-consistance [13, 6, 9], des opérateurs généraux tel que l'opérateur de cardinalité [10], et les automates pour caractériser les solutions d'une contrainte [23, 15, 2]. Paradoxalement, afin de traiter des problèmes réels, de nombreuses contraintes globales avec des algorithmes de filtrage ad hoc ont été introduites. Ces algorithmes sont bien souvent basés sur la théorie des graphes [17, 18, 19, 20, 12, 11, 4, 22, 16]. Beldiceanu présente dans [3] une description des contraintes globales sous la forme de propriétés de graphes : parmi les 224 contraintes du catalogue de contraintes globales [3], approximativement 200 sont décrites par une conjonction de propriétés. Chacune des propriétés a la forme P *op* V, où P est une caractéristique de graphe, *op* est un opérateur de comparaison dans $\{\leq, \geq, =, \neq\}$, et V une variable[1].

Exemple 1 *Soit la contrainte* **nvalue**$(N, \{x_1, ..., x_m\})$ *[5] dans laquelle N ainsi que $x_1, ..., x_m$ sont des variables.* **nvalue** *est satisfaite ssi le nombre de valeurs distinctes affectées aux variables $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_m\}$ vaut N. Elle peut être représentée par la propriété de graphe suivante : N est le nombre de composantes fortement connexes du* graphe d'intersection $G(\mathcal{X}, E)$, *où* $E = \{x_i \in \mathcal{X}, x_j \in \mathcal{X} : x_i = x_j\}$.

Dans ce contexte, Dávid Hanák a réalisé une première exploitation de cette description pour définir des algorithmes de filtrage, pour une propriété de graphe particulière [8]. Dans cet article nous présentons une approche systématique ayant pour objectif de produire des algorithmes de filtrage pour les propriétés de graphes les plus usuelles [3] : étant donné une spécification de la contrainte globale C en termes de propriétés de graphes, on peut ainsi obtenir un algorithme de filtrage pour C.

La section 2 rappelle la représentation des contraintes globales à l'aide de propriétés de graphes. Elle présente les caractéristiques de graphes traitées dans cet article. La section 3 introduit une méthodologie pour filtrer à partir des bornes des caractéristiques impliquées dans la description des contraintes globales. Finalement, la section 4 présente comment calculer la borne inférieure et supérieure de chacune des caractéristiques introduites dans la section 2.

2 Rappels

Cette section résume la représentation des contraintes globales sous la forme de propriétés de graphes introduite dans [1], et illustre ce paradigme à l'aide de la contrainte `nvalue`.

Une contrainte globale C est représentée par un graphe orienté initial $G_i = (\mathcal{X}_i, E_i)$: à chaque sommet de $\mathcal{X}_i$ correspond une variable impliquée dans C, et à chaque arc e de E_i correspond une contrainte binaire impliquant les variables extrémités de e. Pour générer G_i à partir des paramètres de C, on utilise l'ensemble de générateurs d'arcs décrits dans [1].

[1] Une *variable* est définie par un domaine $dom(V)$ qui est un ensemble fini d'entiers ; $min(V)$ et $max(V)$ désignent respectivement le minimum et le maximum de $dom(V)$.

Lorsque toutes les variables de C sont fixées, on supprime de G_i toutes les contraintes binaires qui ne sont pas satisfaites, ainsi que les sommets isolés, i.e., les sommets qui ne sont extrémités d'aucun arc. Ce graphe final est noté G_f. C est définie par une conjonction de propriétés de graphes devant être satisfaites par G_f. Chaque propriété de graphe a la forme P *op* V ; P est une caractéristique de graphe, V une variable et *op* est un opérateur de comparaison $\geq, \leq, =, \neq$. Dans le catalogue de contraintes globales [3], les caractéristiques de graphe les plus communément utilisées sont :

- **NARC** et **NVERTEX**, qui désignent le nombre d'arcs et de sommets. Elles sont respectivement utilisées par 95 et 17 contraintes globales.
- **NCC** et **NSCC**, qui désignent le nombre de composantes connexes et le nombre de composantes fortement connexes. Elles sont respectivement mentionnées dans la description de 19 et 13 contraintes globales.
- **NSINK** (resp. **NSOURCE**), qui désigne le nombre de sommets n'ayant aucun successeur (resp. aucun prédécesseur). Cette caractéristique est utilisée par 16 (resp. 15) contraintes globales. Sachant que **NSINK** et **NSOURCE** sont similaires, cet article ne traitera que **NSINK**.

Exemple 2 *Considérons la contrainte* **nvalue**$(N, \mathcal{X})$ *présentée en introduction. Les parties (A) et (B) de la figure 1 montrent respectivement le graphe initial G_i généré pour la contrainte* **nvalue** *avec* $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *ainsi que le graphe G_f associé à la solution* **nvalue**$(3, \{5, 8, 1, 5\})$. *Chaque sommet de G_i correspond à une variable de $\mathcal{X}$. Tous les arcs de G_i associés à des contraintes d'égalité non satisfaites sont supprimés afin d'obtenir G_f. La figure indique pour chaque sommet de G_f la valeur qui a été affectée à la variable correspondante. La contrainte* **nvalue** *est définie par la propriété de graphe* **NSCC** $= N$. **nvalue**$(3, \{5, 8, 1, 5\})$ *est satisfaite car G_f contient 3 composantes fortement connexes, ce qui s'interprète comme le fait que N est égal au nombre de valeurs distinctes affectées aux variables x_1, x_2, x_3 et x_4.*

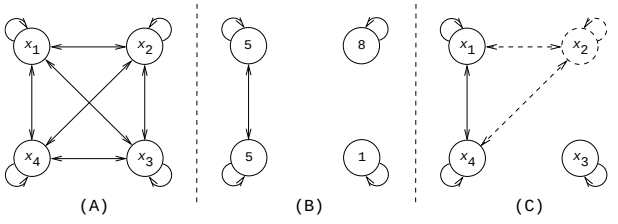


FIG. 1 – (A) Graphe initial G_i associé à la contrainte $\texttt{nvalue}(N, \{x_1, x_2, x_3, x_4\})$. (B) Graphe final G_f de la solution $\texttt{nvalue}(3, \{5, 8, 1, 5\})$. (C) Graphe intermédiaire.

3 Filtrage

Étant donnée une propriété de graphe P *op* V apparaissant dans la description d'une contrainte globale C, cette section montre comment réduire le domaine de V afin de forcer P *op* V. Elle discute ensuite du cas où plusieurs propriétés de graphes sont utilisées pour définir C.

Gestion d'une propriété de graphe. Il est tout d'abord nécessaire d'introduire la notion de *graphe intermédiaire* issu du graphe initial G_i, et tel que les sommets et les arcs ont différents états, détaillés ci-dessous. Le rôle de ce graphe intermédiaire est de refléter la connaissance courante que l'on a des sommets et des arcs de G_i qui pourront appartenir ou pas au graphe final G_f. Cette connaissance est issue de deux sources :

- À cause du domaine courant de ses deux variables, une contrainte binaire associée à un arc de G_i n'est pas satisfaite (ou doit obligatoirement être satisfaite),
- À cause d'une raison externe un arc ou un sommet de G_i doit impérativement appartenir à G_f (ou ne doit pas appartenir à G_f).

Au moment où une contrainte globale C est posée le graphe intermédiaire correspond à G_i. Lorsque toutes les variables de C ont été instanciées, le graphe intermédiaire est égal à G_f.

Notation 1 *Soit $G_i = (X_i, E_i)$ le graphe initial d'une contrainte globale C, et $G_f = (X_f, E_f)$ son graphe final. À une certaine étape correspondant à une instanciation partielle des variables impliquées dans C, nous classifions un sommet $v_j \in X_i$ et un arc $e_k \in E_i$ de la manière suivante :*

- *v_j est un T-sommet ("true") ssi $v_j \in X_f$; v_j est un F-sommet ("false") ssi $v_j \notin X_f$; sinon v_j est un U-sommet ("undetermined"). X_T, X_F et X_U désignent respectivement les ensembles de T-sommets, de F-sommets et de U-sommets.*
- *e_k est un T-arc ("true") ssi $e_k \in E_f$; e_k est un F-arc ("false") ssi $e_k \notin E_f$; sinon e_k est un U-arc ("undetermined"). E_T, E_F et E_U désignent respectivement les ensembles de T-arcs, de F-arcs et de U-arcs.*

La définition de *graphe intermédiaire* donnée ci-dessous prend en compte le fait que le graphe final ne contiendra aucun sommet isolé.

Définition 1 *Le* graphe intermédiaire *est le graphe orienté dérivé de G_i, X_T, X_F, X_U, E_T, E_F, E_U en appliquant les règles suivantes tant que celles-ci induisent des modifications :*

- *supprimer les F-arcs,*
- *supprimer tout F-sommet qui n'est pas l'extrémité d'au moins un T-arc ; quand un sommet est supprimé, tous les arcs entrant et sortant de ce sommet sont transformés en F-arcs,*
- *supprimer tout U-sommet qui n'est pas l'extrémité d'au moins un arc,*
- *transformer tout U-sommet qui est l'extrémité d'un T-arc en T-sommet,*
- *si un T-sommet est l'extrémité d'exactement un U-arc e et l'extrémité d'aucun T-arc, alors e est transformé en T-arc.*

Lorsqu'un sommet ou un arc est supprimé, ou bien lorsque l'état d'un sommet ou d'un arc est changé par l'une des règles ci-dessus alors les ensembles X_T, X_F, X_U, E_T, E_F, E_U sont mis à jour selon ces modifications.

Exemple 3 *Soit la contrainte* **nvalue**$(N, \mathcal{X})$ *présentée en introduction. On suppose que les domaines initiaux des variables de $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sont dom(x_1)=$\{5\}$, dom(x_2)=$\{5\}$, dom(x_3)=$\{5, 8\}$ et dom(x_4)=$\{1\}$. De plus, on fait l'hypothèse que la satisfaction d'une contrainte d'égalité ec associée à un arc du graphe initial G_i de* **nvalue** *n'est détectée que lorsque toutes les variables de ec sont fixées. Ceci amène à partitionner les arcs de G_i en trois ensembles :*

- $E_T = \{(x_1, x_1), (x_1, x_4), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_4)\}$,
- $E_U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_2)\}$,
- $E_F = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_3)\}$.

L'état des sommets est initialement fixé à "indéterminé" (i.e. $X_U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$) et l'on applique les règles de la définition 1 afin d'obtenir le graphe intermédiaire *illustré par la partie (C) de la figure 1. Une ligne pleine indique un T-sommet ou un T-arc, tandis qu'une ligne en pointillés désigne un U-sommet ou un U-arc. Le même style sera utilisé dans toutes les autres figures de cet article.*

Propriété 1 *D'après la définition de G_f, la contrainte globale C n'a pas de solution si le graphe intermédiaire contient un F-sommet ou s'il contient un T-sommet qui n'est pas l'extrémité d'un arc.*

Étant donnée une propriété de graphe P *op* V associée à une contrainte globale C, le graphe intermédiaire sera utilisé pour évaluer une borne inférieure $\underline{P}$ et une borne supérieure $\overline{P}$ de la caractéristique de graphe P. La section 4 fournit des algorithmes pour calculer $\underline{P}$ et $\overline{P}$ pour différentes caractéristiques de graphe. Dans cette section il est supposé que tous les U-sommets ou U-arcs du graphe intermédiaire peuvent être librement changés en T-sommets ou T-arcs (respectivement en F-sommets ou F-arcs) indépendamment les uns des autres. En fonction de l'opérateur de comparaison *op*, la table suivante donne les différents cas possibles pour réduire le domaine de la variable V en fonction des bornes $\underline{P}$ et $\overline{P}$.

$P \leq V$	$min(V) \geq max(\underline{P}, min(V))$
$P \geq V$	$max(V) \leq min(\overline{P}, max(V))$
$P = V$	$min(V) \geq max(\underline{P}, min(V)) \wedge$ $max(V) \leq min(\overline{P}, max(V))$
$P \neq V$	$\underline{P} = \overline{P} \Rightarrow \underline{P} \notin dom(V)$

Gestion de plusieurs propriétés de graphe. Il arrive assez souvent que le graphe final d'une contrainte globale doive satisfaire plus d'une propriété de graphe[2]. Dans ce contexte, ces propriétés de graphe impliquent plusieurs caractéristiques qui ne varient pas indépendamment les unes des autres. Aussi, afin d'obtenir des conditions nécessaires de réalisabilité de C plus fortes, il est possible de chercher des invariants de graphes liant les différentes caractéristiques. Ces invariants sont typiquement des inégalités entre deux expressions arithmétiques, qui mentionnent plusieurs caractéristiques de graphe. Dans ce contexte, chaque invariant de graphe sera utilisé pour ajuster le minimum et le maximum de ses caractéristiques de graphe. La borne inférieure et la borne supérieure de chaque caractéristique sera calculée en utilisant les inégalités de la section 4. On peut enfin faire une dernière observation : il arrive souvent que le graphe associé à une contrainte globale ait une structure régulière qui est issue de son graphe initial ou d'une propriété des contraintes correspondant à chaque arc. Dans ce cas on peut avoir des invariants de graphe plus fins, spécifiques à certaines classes de graphes. Le chapitre 3 de [3] propose 200 invariants de graphes liant des caractéristiques de graphe.

Exemple 4 *On considère à nouveau la contrainte* **nvalue**. *Bessière et al. [5] ont donné une condition nécessaire basée sur un résultat de Turán [21]. Pour le graphe final G_f de la* **nvalue**, *qui est symétrique, réflexif et transitif*[3], *cette condition nécessaire*[4] *lie le nombre de composantes fortement connexes, le nombre de sommets et le nombre d'arcs de G_f :* $\mathbf{NSCC} \geq \left\lceil \frac{\mathbf{NVERTEX}^2}{\mathbf{NARC}} \right\rceil$. *Ceci permet d'évaluer le nombre minimum de valeurs distinctes en fonction du nombre de variables de la contrainte* **nvalue** *et du nombre maximal d'arcs de son graphe intermédiaire.*

[2] On peut observer que, même lorsque la définition de C n'utilise qu'une seule propriété de graphe, le graphe intermédiaire associé à C introduit toujours implicitement les caractéristiques **NVERTEX** et **NARC** pour lesquelles des bornes inférieures et supérieures existent (cf. propriétés 2, 3, 4 et 5 de la section 4).

[3] G_f est constitué d'une ou plusieurs cliques.

[4] Nous reformulons la condition originale présentée dans [5] dans le contexte du graphe intermédiaire de `nvalue`.

4 Bornes des caractéristiques de graphes

Cette section est dédiée à l'évaluation des bornes inférieures et supérieures des caractéristiques de graphe introduites dans la Section 2. Nous traitons pour cela des graphes issus du graphe intermédiaire avec différents ensembles d'arcs et de sommets, qui sont décrits à l'aide des notations ci-dessous.

Notation 2 *Soit Q, R et S des mots non vides issus de l'alphabet $\{T, U\}$.*

- *Etant donné un mot W, $w \in W$ désigne une lettre de W.*
- *X_Q et E_Q désignent respectivement $\bigcup_{q \in Q} X_q$ et $\bigcup_{q \in Q} E_q$.*
- *$X_{Q,R}$ (resp. $X_{Q,\neg R}$) désigne $v \in X_Q$ tel qu'il existe au moins un arc (resp. il n'existe aucun arc) de E_R tel que v en soit une extrémité.*
- *$E_{Q,R}$ désigne l'ensemble d'arcs $(v_1, v_2) \in E_Q$ tel que $v_1 \in X_R$ ou $v_2 \in X_R$.*
- *$X_{Q,R,S}$ (resp. $X_{Q,R,\neg S}$) désigne les sommets $v \in X_{Q,R}$ tels que, parmi les sommets qui partagent un arc avec v, il existe au moins un sommet appartenant à X_S (resp. aucun sommet appartenant à X_S).*
- *$X_{Q,\neg R,\neg S}$ désigne les sommets $v \in X_{Q,\neg R}$ tels que, parmi les sommets qui partagent un arc avec v, aucun sommet n'est dans X_S.*

D'après les notations ci-dessous on définit quatre types de graphes, où $\mathcal{X}$ est un ensemble de sommets et $\mathcal{E}$ un ensemble d'arcs :

- $\overrightarrow{G}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ désigne le graphe orienté défini par l'ensemble de sommets $\mathcal{X}$ et le sous-ensembles d'arcs de $\mathcal{E}$ ayant leurs deux extrémités dans $\mathcal{X}$.
- $\overrightarrow{G}(\mathcal{E})$ désigne le graphe orienté défini par l'ensemble d'arcs $\mathcal{E}$ et l'ensemble de sommets qui sont les extrémités d'arcs appartenant à $\mathcal{E}$.
- $\overleftrightarrow{G}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ (resp. $\overleftrightarrow{G}(\mathcal{E})$) désigne le graphe non orienté dérivé de $\overrightarrow{G}(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ (resp. $\overrightarrow{G}(\mathcal{E})$) en ignorant l'orientation des arcs et en conservant les éventuelles boucles.

On remarque que $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ est le graphe intermédiaire introduit dans la définition 1.

Comme nous le verrons par la suite, calculer des bornes inférieures et supérieures de caractéristiques de graphe peut être vu comme calculer des caractéristiques de graphe sur les graphes particuliers définis ci-dessus. On utilisera les notations suivantes, étant donné un graphe orienté G : $narc(G)$, $nvertex(G)$, $ncc(G)$, $nscc(G)$, $nsink(G)$ et $nsource(G)$ désignent respectivement le nombre d'arcs, de sommets, de composantes connexes, de composantes fortement connexes, de puits et de sources de G. Lorsque cela est requis pour l'évaluation d'une borne, nous introduirons quelques notations supplémentaires.

Certaines bornes s'expriment en termes de caractéristiques de graphe correspondant à des problèmes qui ne sont pas polynomiaux. Dans ce cas, il convient cependant de noter que nous fournissons des bornes qui sont précises. En pratique, la plupart des graphes utilisés pour représenter une contrainte globale appartiennent à des classes de graphes spécifiques. Souvent pour ces classes de graphes des problèmes non polynomiaux dans le cas général deviennent polynomiaux. D'ailleurs, même pour les caractéristiques de graphe évaluables en temps polynomial, il est possible d'exploiter la structure particulière du graphe intermédiaire considéré afin d'améliorer la complexité de l'évaluation. Par exemple, dans la contrainte `group` [3] on estime le nombre minimum de composantes connexes du graphe final. Dans ce but la propriété 6 présentée en Section 4 requiert de calculer le nombre de composantes connexes du graphe intermédiaire. Or ce graphe est un sous-graphe d'un chemin élémentaire augmenté par des boucles. La complexité du calcul du nombre de composantes connexes sur un tel graphe est linéaire en nombre de sommets.

Exemple 5 *Nous illustrons ci-après quelques ensembles de sommets et d'arcs ainsi que des graphes issus du graphe intermédiaire de la partie (C) de la figure 1 :*

- $X_{U,T} = \{x_1, x_4\}, \quad X_{U,\neg T} = \{x_3\}$,
- $E_{UT} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_4)\}$
- $E_{U,T} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_2)\}$,
- $\overrightarrow{G}(X_T, E_T) = \overrightarrow{G}(\{x_1, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_1, x_4), (x_3, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_1)\})$,
- $\overrightarrow{G}(E_U) = \overrightarrow{G}(\{x_1, x_2, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_4, x_2)\})$.

À présent nous pouvons étudier chaque caractéristique de graphe et fournir pour chacune d'elles une borne inférieure ainsi qu'une borne supérieure. Nous indiquons également quelques exemples typiques de contraintes globales pour lesquelles la représentation sous forme de graphe présentée dans [3] utilise cette caractéristique.

4.1 Bornes du nombre d'arcs

Dans le catalogue de Beldiceanu et al. [3], **NARC** et **NARC** sont respectivement référencées dans la description d'environ 50 contraintes (parmi lesquelles `disjoint`, `inverse` ou encore `element`) et 80 contraintes (notamment `change` et `element_sparse`).

Estimation de NARC

Définition 2 *Etant donné un graphe non-orienté G, un* couplage *de G est un ensemble d'arêtes de G tel*

qu'aucune arête n'est une boucle, et qu'aucune paire d'arêtes n'a de sommet en commun. Un couplage maximal *est un couplage de cardinalité maximale. On note $\mu(G)$ la cardinalité d'un couplage maximal de G.*

Le nombre minimal d'arcs dans le graphe final G_f sera au moins égal au nombre courant de T-arcs $|E_T|$. De plus, dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ certains sommets de degré nul peuvent exister. Sachant qu'ils appartiendront à G_f, chacun d'entre eux sera l'extrémité d'au moins un arc dans G_f. C'est pourquoi la borne inférieure est égale à $|E_T|$ plus le nombre minimal d'arcs du graphe intermédiaire $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ nécessaires pour couvrir tous les T-sommets qui ne sont pas l'extrémité d'un arc dans $|E_T|$. Cette deuxième quantité est calculée en temps polynomial sur un graphe non orienté issu de $\overleftrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$. Le principe consiste d'abord à identifier les T-sommets de degré nul dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ qui peuvent être joints entre eux en transformant des U-arcs en T-arcs, car cela permet de sauver pour certains d'entre eux un arc dans l'estimation. Pour les autres T-sommets de degré nul dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ un arc supplémentaire sera requis.

Propriété 2
$\underline{\mathbf{NARC}} \geq |E_T| + |X_{T,\neg T}| - \mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U))$

Preuve : Par definition $\forall e \in E_T : e \in E_f$ (arcs du graphe final). Ainsi $\underline{\mathbf{NARC}} \geq |E_T|$. De plus dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ certains sommets peuvent avoir un degré nul. Comme ils appartiendront nécessairement à G_f et que G_f ne contient pas de sommet isolé, des arcs supplémentaires sont requis pour les connecter. On considère le graphe non orienté $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U)$, construit avec les T-sommets de degré nul dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ et les $U-$arcs existant entre ces sommets. $X_{T,\neg T}$ peut être partitionné en deux ensembles $X_{T,\neg T,\neg T}$ et $X_{T,\neg T,T}$. Les sommets du premier ensemble ne peuvent pas être joint deux à deux, un nouvel arc sera donc nécessaire pour chacun d'entre eux : $\underline{\mathbf{NARC}} \geq |E_T| + |X_{T,\neg T,\neg T}|$ $(\star)$. Certains sommets du deuxième ensemble peuvent être connecté entre eux. Pour tous les connecter, il faudra impliquer un nombre d'arcs au moins égal à la cardinalité d'un "edge cover" minimal[5] dans $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U)$. D'après [14], cette quantité est $|X_{T,\neg T,T}| - \mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U))$. Sachant que l'on a considéré une partition des sommets et que par définition toutes les arêtes de $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U)$ n'impliquent que des sommets de $X_{T,\neg T,T}$, d'après $(\star)$ on a $\underline{\mathbf{NARC}} \geq |E_T| + |X_{T,\neg T,\neg T}| + |X_{T,\neg T,T}| - \mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U))$. On observe que $|X_{T,\neg T,\neg T}| + |X_{T,\neg T,T}| = |X_{T,\neg T}|$. En outre, par définition $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,\neg T}, E_U)$ n'a pas d'arête. D'où $\mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U)) = \mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U))$. La propriété est vraie. □

[5] Un *edge cover* d'un graphe non orienté G est un sous-ensemble $\mathcal{S}$ d'arêtes de G tel que, pour chaque sommet v de G, il existe au moins une arête e de $\mathcal{S}$ telle que v soit une extrémité de e. Un *edge cover minimal* est un edge cover de cardinalité minimale.

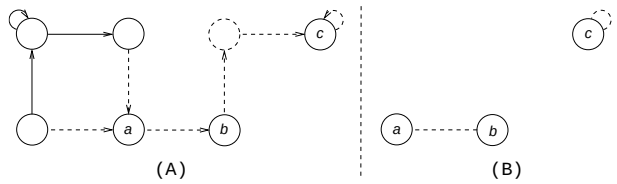


FIG. 2 – (A) Graphe intermédiaire et (B) graphe non orienté utilisé pour calculer le couplage dans l'estimation de la borne inférieure de **NARC**.

La figure 2 illustre la propriété 2 : elle montre comment calculer la borne inférieure de **NARC** d'après le graphe intermédiaire $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ de la partie (A) de la figure 2. La partie (B) illustre le graphe non orienté correspondant $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U)$, utilisé pour calculer le couplage maximal. On a $|E_T| = 3$, $|X_{T,\neg T}| = 3$, $\mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U)) = 1$, et ainsi $\underline{\mathbf{NARC}} \geq 3 + 3 - 1$.

Cette borne inférieure est précise. En effet, il est possible de construire un graphe final en ajoutant au graphe courant $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$:
- pour chaque $x \in X_{T,\neg T,\neg T}$ n'importe quel U-arc de $\overleftrightarrow{G}(X_T, E_U)$ où x est une extrémité ;
- pour chaque arête d'un edge cover minimal de $\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U)$ un arc de $\overrightarrow{G}(X_{T,\neg T,T}, E_U)$ ayant les même extrémités que cette arête.

Par définition tous les T-sommets seront couverts, et le nombre total d'arcs sera $|E_T| + |X_{T,\neg T}| - \mu(\overleftrightarrow{G}(X_{T,\neg T}, E_U))$.

Estimation de $\overline{\mathbf{NARC}}$

Propriété 3 $\overline{\mathbf{NARC}} \leq |E_{TU}|$

Preuve : Par définition de $\overrightarrow{G}(E_{TU})$, $\forall e \in E_i \backslash E_{TU} : e \notin E_f$. D'où $\overline{\mathbf{NARC}} \leq |E_{TU}|$. □

Cette borne supérieure est précise : si tous les arcs de $\overrightarrow{G}(E_{TU})$ appartiennent à G_f alors $\mathbf{NARC} = |E_{TU}|$.

4.2 Bornes du nombre de sommets

Dans la catalogue de Beldiceanu et al. [3], **NVERTEX** est uniquement utilisée dans les propriétés de graphes de la forme **NVERTEX** = *variable*, où *variable* est une variable, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'évaluer conjointement $\underline{\mathbf{NVERTEX}}$ et $\overline{\mathbf{NVERTEX}}$. **NVERTEX** est référencée dans 15

contraintes telles que, par exemple, `cutset` ou `group`.

Estimation de NVERTEX

Définition 3 *Un* graphe biparti $G((X,Y),E)$ *est un graphe tel que* (X,Y) *est une partition et* $\forall (u,v) \in E$, *soit* $u \in X$ *et* $v \in Y$, *soit* $u \in Y$ *et* $v \in X$.

Définition 4 *Etant donné un graphe biparti* $G((X,Y),E)$, *un* hitting set *[7] est un ensemble de sommets de* Y *nécessaire à la couverture de tous les sommets de* X. $h(G)$ *désigne la* cardinalité d'un hitting set minimal *de* G.

Quand on estime **NVERTEX**, on sait que tous les T-sommets appartiendront à G_f. Sachant que G_f ne contient pas de sommets de degré nul et que $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ peut en contenir, certains U-sommets supplémentaires peuvent nécessiter d'être transformés en T-sommets, afin de connecter ces sommets isolés. Tous les sommets de degré nul dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ qui sont l'extrémité d'un U-arc ayant pour autre extrémité un T-sommet peuvent être connectés via cet arc. On les ignore donc. Ce cas inclut celui des U-arcs qui sont des boucles ayant pour extrémité un T-sommet. A partir des sommets isolés restants (ne se situant pas dans les cas ci-dessus), le nombre de sommets supplémentaires nécessaire est égal à la cardinalité d'un hitting set minimal sur un graphe non orienté issu de $\overleftrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$.

Propriété 4 $\underline{\textbf{NVERTEX}} \geq |X_T| + h(\overleftrightarrow{G}((X_{T,\neg T,\neg T}, X_{U,\neg T,T}), E_{U,T}))$

Preuve : Tous les T-sommets dans X_T appartiendront à G_f. En partant du fait que G_f ne peut pas contenir de sommets isolés, certains sommets de X_T qui ont un degré nul dans $G(X_T, E_T)$ peuvent nécessiter de transformer certains U-sommets en T-sommets. Par définition ce n'est pas le cas des sommets $X_{T,T}$. Ce n'est pas non plus le cas pour les sommets non couverts par un T-arc mais qui sont l'extrémité d'un arc de E_U tel que l'autre extrémité soit un T-sommet (l'ensemble $X_{T,\neg T,T}$). $(X_{T,T}, X_{T,\neg T,T}, X_{T,\neg T,\neg T})$ est une partition de X_T : considérons maintenant le cas des sommets $X_{T,\neg T,\neg T}$. Ils ne sont pas connectés entre eux ni par des T-arcs ni par des U-arcs. C'est pourquoi, si cet ensemble n'est pas vide, certains U-sommets devront nécessairement être transformés en T-sommets. Ces U-sommets doivent être l'extrémité d'au moins un arc contenant un T-sommet, on considère donc $X_{U,\neg T,T}$, et les arcs joignant ces sommets à des T-sommets. Par définition le nombre minimum de sommets de $X_{U,\neg T,T}$ requis pour couvrir tous les sommets $X_{T,\neg T,\neg T}$ est $h(\overleftrightarrow{G}((X_{T,\neg T,\neg T}, X_{U,\neg T,T}), E_{U,T}))$. La propriété est vraie. □

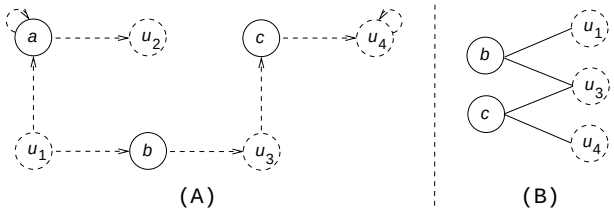


FIG. 3 – (A) Graphe intermédiaire et (B) graphe non orienté utilisé pour calculer le hitting set minimal utile à l'estimation de la borne inférieure de **NVERTEX**.

La figure 3 illustre la propriété 4 : elle montre comment calculer la borne inférieure de **NVERTEX** en fonction du graphe intermédiaire $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ décrit dans la partie (A) de la figure 3. La partie (B) illustre le graphe non orienté $\overleftrightarrow{G}((X_{T,\neg T,\neg T}, X_{U,\neg T,T}), E_{U,T})$ utilisé pour calculer le hitting set minimal. On a $|X_T| = 3$, $h(\overleftrightarrow{G}((X_{T,\neg T,\neg T}, X_{U,\neg T,T}), E_{U,T})) = 1$, donc $\underline{\textbf{NVERTEX}} \geq 3 + 1$.

Cette borne inférieure est précise : en suivant le schéma énoncé dans la preuve, il est possible de construire un graphe final $\overleftrightarrow{G}(X_T, E_T)$ en transformant en T-sommets $h(\overleftrightarrow{G}((X_{T,\neg T,\neg T}, X_{U,\neg T,T}), E_{U,T}))$ U-sommets.

Estimation de $\overline{\text{NVERTEX}}$

Propriété 5 $\overline{\textbf{NVERTEX}} \leq |X_{TU}|$

Preuve Par définition de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$, $\forall x \in X_i \setminus X_{TU} : x \notin X_f$ (sommets du graphe final), donc $\overline{\textbf{NVERTEX}} \leq |X_{TU}|$. □

Cette borne supérieure est atteinte quand tous les sommets de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ appartiennent à G_f.

4.3 Bornes du nombre de composantes connexes

Dans le catalogue de Beldiceanu et al. [3], **NCC** est, le plus souvent, utilisée dans des propriétés de graphes de la forme **NCC** = *variable*, où *variable* est une variable, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'évaluer à la fois **NCC** et $\overline{\textbf{NCC}}$. **NCC** est référencée dans 18 contraintes, telles que, par exemple, `cycle`, `group` et `tree`.

Estimation de NCC

Propriété 6 $\underline{\textbf{NCC}} \geq ncc_T(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU}))$, *où* ncc_T *désigne le nombre de composantes connexes avec au moins un* T*-sommet.*

Preuve : Tous les arcs et sommets d'une composante connexe de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ ne contenant aucun T-sommet

peuvent au final ne pas appartenir à G_f. On peut les ignorer. Pour obtenir dans G_f moins de composantes connexes que celles de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ contenant des T-sommets, il est nécessaire d'avoir au moins un nouvel arc qui joint deux d'entre elles. Ce n'est pas possible car $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ contient tous les arcs pouvant potentiellement appartenir à G_f. La propriété est vraie. □

Cette borne est précise : on peut construire un graphe final G_f avec tous les arcs et tous les sommets issus de E_{TU} qui appartiennent à une composante connexe de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ contenant au moins un T-sommet, et où tous les autres U-arcs de E_{TU} sont supprimés. Le nombre de composantes connexes sera égal à $ncc_T(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU}))$.

Estimation de $\overline{\mathbf{NCC}}$

Les T-sommets et les T-arcs de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ appartiendront nécessairement à G_f. Si l'on excepte les T-sommets de degré nul dans $\overleftrightarrow{G}(X_T, E_T)$, il est possible de compter dans $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ un certain nombre de composantes connexes exclusivement composées de T-sommets et de T-arcs. Par définition, augmenter n'importe laquelle de ces composantes connexes avec de nouveaux arcs ne peut pas en augmenter le nombre. C'est pourquoi l'idée intuitive pour calculer une borne supérieure de $\overline{\mathbf{NCC}}$ est d'abord de compter de telles composantes connexes, de les supprimer de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$, de supprimer aussi tous les arcs qui y sont reliés, et ensuite d'estimer le nombre maximum de composantes connexes pouvant exister dans le graphe restant.

Notation 3 *$ncc_{T_{ni}}$ désigne le nombre de composantes connexes formées exclusivement de T-arcs et de T-sommets qui ne sont pas isolés. L'ensemble correspondant de composantes connexes est noté $CC_{T_{ni}}$.*

Il est nécessaire de prendre en compte le fait que certains T-sommets puissent être isolés dans $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$. Ces sommets appartiendront à G_f. S'ils sont finalement connectés à l'une des composantes connexes de $CC_{T_{ni}}$ alors ils n'induiront pas une augmentation du nombre de composantes connexes. C'est pourquoi nous pouvons ignorer les T-sommets isolés *exclusivement* connectés aux composantes connexes précédemment comptées[6] dans $CC_{T_{ni}}$. Similairement on ignore les U-sommets qui sont exclusivement connectés aux composantes connexes de $CC_{T_{ni}}$.

[6] On ne perdra pas l'aspect précis de la borne car, si ce sommet est connecté par un unique arc à une composante connexe, alors cela ne réduira pas leur nombre. Il est possible de construire un graphe final où tous les sommets de ce type satisfont cette propriété (on ne les connecte que par un unique arc).

Définition 5 *$\overrightarrow{G}_{rem} = (X_{rem}, E_{rem})$ est le graphe orienté obtenu à partir de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ en supprimant tout d'abord tous les sommets présents dans $CC_{T_{ni}}$ et ensuite tous les sommets devenant isolés dans le graphe résultant de ces suppressions.*

Propriété 7 *D'après la définition précédente,*
- *aucun sommet n'est commun à X_{rem} et à une composante connexe de $CC_{T_{ni}}$,*
- *tous les T-arcs appartiennent à des composantes connexes de $CC_{T_{ni}}$,*
- *un sommet qui n'est ni présent dans X_{rem} ni dans $CC_{T_{ni}}$ ne peut pas être l'extrémité d'un arc impliquant un sommet de X_{rem}.*

Preuve : Par construction de $\overrightarrow{G}_{rem}$. □

D'après la propriété 7 on peut ajouter, sans risque d'erreur dans l'évaluation, $ncc_{T_{ni}}$ à une estimation du nombre maximal possible de composantes connexes dans n'importe quel graphe final issu de $\overrightarrow{G}_{rem}$. Ceci nous fournira l'estimation $\overline{\mathbf{NCC}}$ que nous cherchons. A présent nous pouvons décrire ce processus en détail.

Notation 4 *$\overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ désigne le nombre maximal possible de composantes connexes dans un graphe final issu de $\overrightarrow{G}_{rem}$.*

Définition 6 *$\overleftrightarrow{G}_{rem} = (X_{rem}, E_{rem})$ est le graphe non orienté obtenu à partir du graphe non orienté $\overleftrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ en supprimant tous les sommets présents dans $CC_{T_{ni}}$ et ensuite tous les sommets devenant isolés dans le graphe non orienté restant.*

Définition 7 *Etant donné un graphe non orienté G contenant éventuellement des boucles, un* l-couplage *de G est un ensemble d'arêtes tel qu'aucune paire d'arêtes distinctes n'ait de sommet en commun. Un* l-couplage maximal *est un l-couplage de cardinalité maximale*[7]*. $\mu_l(G)$ est la* cardinalité d'un l-couplage maximal *de G.*

$\overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ est le nombre d'ensembles d'une partition d'arêtes de cardinalité maximale. Cette quantité est la cardinalité d'un l-couplage de taille maximale de $\overleftrightarrow{G}_{rem}$ (voir preuve ci-dessous).

Propriété 8 $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem} = \mu_l(\overleftrightarrow{G}_{rem})$.

Preuve : Un l-couplage de taille maximale correspond à la taille d'une partition d'arêtes de taille maximale où tous les ensembles sont des singletons. $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem} \geq \mu_l(\overleftrightarrow{G}_{rem})$.

[7] Les algorithmes (polynomiaux) existants pour calculer un couplage de taille maximale peuvent être simplement adaptés à ce cas en déployant chaque boucle par l'ajout d'un sommet puits.

Considérer un ensemble de taille $k > 1$ entraîne l'ajout de 1 à la cardinalité d'un l-couplage maximal sur un sous-graphe de $\overleftrightarrow{G}_{rem}$ tel qu'on ait supprimé au moins $k > 1$ arêtes. Par récurrence $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem} \leq \mu_l(\overleftrightarrow{G}_{rem})$ et la propriété est vérifiée. □

On peut remarquer que dans un l-couplage maximal donné, certains T-sommets ne sont pas pris. Ils appartiendront à G_f. Par définition n'importe lequel d'entre eux est une extrémité d'une ou plusieurs arêtes telles que l'autre sommet appartienne systématiquement au l-couplage (si ce n'était pas le cas alors le l-couplage pourrait être augmenté, et il ne serait donc pas maximal). C'est pourquoi dans tout graphe final issu d'un tel l-couplage maximal on ne peut pas avoir plus de composantes connexes. $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ est une borne supérieure. Ce fait entraîne aussi que le cas des T-sommets connectés entre eux par des U-arcs n'est pas un cas particulier. Etant donné un l-couplage donné on peut toujours connecter un tel sommet uniquement en ajoutant exactement une arête. La borne supérieure est donc précise.

Propriété 9 $\overline{\mathbf{NCC}} \leq ncc_{T_{ni}} + \overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$.

Preuve : D'après la propriété 7, n'importe quel arc a au moins, soit un sommet dans $CC_{T_{ni}}$, soit un sommet dans $\overrightarrow{G}_{rem}$. □

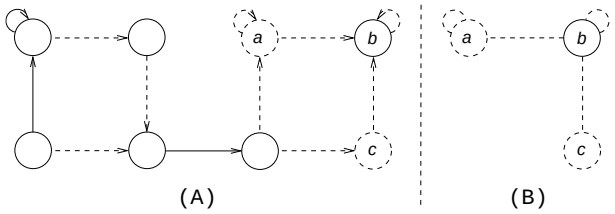


FIG. 4 – (A) Graphe intermédiaire et (B) Graphe non orienté utilisé pour calculer $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ afin d'estimer une borne supérieure de **NCC**.

La figure 4 illustre la propriété 9 : elle montre comment calculer la borne supérieure de **NCC** en fonction du graphe intermédiaire $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ représenté par la partie (A) de la figure 4. La partie (B) illustre le graphe non orienté correspondant $\overleftrightarrow{G}_{rem}$ sur lequel est calculé un l-couplage maximal. On a : $ncc_{T_{ni}} = 2$, $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem} = \mu_l(\overleftrightarrow{G}_{rem}) = 2$, et donc $\overline{\mathbf{NCC}} \leq 2 + 2$.

D'après la propriété 8, $\overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ est une borne supérieure précise. $ncc_{T_{ni}}$ correspond à un calcul exact. D'après la propriété 7 il n'existe aucun T-arc joignant $\overrightarrow{G}_{rem}$ et $CC_{T_{ni}}$. Ajouter un U-arc joindra une composante connexe de $CC_{T_{ni}}$ à $\overrightarrow{G}_{rem}$ ou bien augmentera simplement une des composantes connexes, soit dans $CC_{T_{ni}}$, soit dans $\overrightarrow{G}_{rem}$. C'est pourquoi $ncc_{T_{ni}} + \overline{\mathbf{NCC}}_{rem}$ est une borne précise.

4.4 Bornes pour le nombre de composantes fortement connexes

Dans le catalogue de Beldiceanu et al [3], **NSCC** est, le plus souvent, utilisée dans des propriétés de graphes de la forme **NSCC** = *variable*, où *variable* est une variable, ce qui signifie que l'on doit évaluer conjointement $\underline{\mathbf{NSCC}}$ et $\overline{\mathbf{NSCC}}$. **NSCC** est référencée dans 12 contraintes, comme par exemple `not_all_equal`, `nvalue` et `soft_alldifferent`.

Estimation de $\underline{\mathbf{NSCC}}$

Propriété 10 $\underline{\mathbf{NSCC}} \geq nscc_T(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU}))$, *où* $nscc_T$ *désigne le nombre de composantes fortement connexes ayant au moins un* T*-sommet.*

Preuve : On peut tout d'abord observer que deux T-sommets appartiennant à deux composantes fortement connexes de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ appartiennent aussi à deux composantes fortement connexes distinctes de G_f. De plus, toutes les composantes fortement connexes de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ sans T-sommet peuvent disparaître de G_f. Cela nous donne la borne. □

Afin de prouver que cette borne inférieure est précise, nous montrons comment calculer une solution qui atteint $nscc_T(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU}))$ composantes fortement connexes. Tous les U-sommets et les U-arcs d'une composantes fortement connexe de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ qui contient au moins un T-sommet sont respectivement transformés en T-sommets et T-arcs. Tous les U-sommets et U-arcs restants sont transformés en F-sommets et F-arcs.

Estimation de $\overline{\mathbf{NSCC}}$

Propriété 11 $\overline{\mathbf{NSCC}} \leq nscc(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_T))$

Preuve : Sachant que le graphe $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_T)$ ne contient aucun U-arc, tous ses U-sommets sont isolés. Ainsi, $nscc(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_T)) = nscc(\overrightarrow{G}(X_T, E_T)) + |X_U|$. De plus on observe que des sommets distincts de $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ appartenant à la même composante fortement connexe de $\overrightarrow{G}(X_T, E_T)$ appartiendront également à la même composante fortement connexe du graphe final G_f. On compte une composante fortement connexe supplémentaire pour chaque U-sommet. □

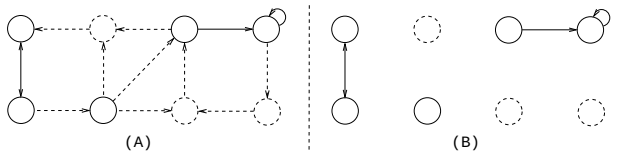


FIG. 5 – (A) Graphe intermédiaire et (B) graphe utilisé pour l'estimation de la borne supérieure de **NSCC**.

La figure 5 illustre la propriété 11 : elle montre comment calculer la borne supérieure de **NSCC** d'après le graphe intermédiaire $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ représenté par la partie (A) de la figure 5. La partie (B) illustre le graphe correspondant $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_T)$ qui a 7 composantes fortement connexes, et ainsi $\overline{\mathbf{NSCC}} \leq 7$.

Afin de prouver que cette borne supérieure est précise, nous montrons comment calculer une solution qui atteint $nscc(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_T))$ composantes fortement connexes avec aucun sommet isolé. Considérons le graphe $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$, où on contracte chaque composante fortement connexe constituée uniquement de T-sommets en un unique sommet. Sur ce nouveau graphe on construit une forêt recouvrante $\mathcal{F}$. A présent, si on supprime de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ tous les U-arcs qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, on obtient une solution avec le nombre de composantes fortement connexes requis, sans aucun sommet isolé.

4.5 Bornes pour le nombre de puits

Dans le catalogue de contraintes de Beldiceanu et al. [3], **NSINK** est le plus souvent utilisée dans des propriétés de graphes de la forme **NSINK** = *variable*, où *variable* est une variable, ce qui signifie que l'on doit évaluer conjointement $\underline{\mathbf{NSINK}}$ et $\overline{\mathbf{NSINK}}$. **NSINK** est référencée dans 15 contraintes parmi lesquelles, par exemple, `common`, `same` et `sort`.

Estimation de $\underline{\mathbf{NSINK}}$

Propriété 12 $\underline{\mathbf{NSINK}} \geq nsink_T(\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU}))$, *où $nsink_T$ désigne le nombre de puits qui sont des T-sommets.*

Preuve : Les T-sommets de $\overrightarrow{G}(X_{TU}, E_{TU})$ appartiendront au graphe final G_f. En outre, sachant qu'ils n'ont pas d'arc sortant pouvant appartenir à G_f ces sommets seront également des puits de G_f. □

Cette borne inférieure n'est pas précise. Considérons le graphe intermédiaire représenté par la partie (A) de la figure 6. On obtient une borne inférieur de 0, mais tous les graphes finaux correspondant à ce graphe intermédiaire contiennent au moins un puits.

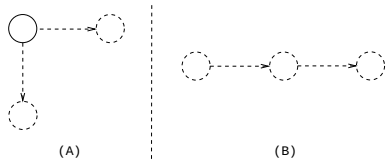


FIG. 6 – (A) Graphe intermédiaire pour lequel la borne inférieure de **NSINK** n'est pas précise. (B) Graphe intermédiaire pour lequel la borne supérieure de **NSINK** n'est pas précise.

Estimation de $\overline{\mathbf{NSINK}}$

Propriété 13 $\overline{\mathbf{NSINK}} \leq nsink(\overrightarrow{G}(X_T, E_T)) + |X_U|$

Preuve : Soit S l'ensemble des sommets qui ne peuvent nécessairement pas être des puits du graphe final. S correspond aux T-sommets qui ont un T-arc sortant. La quantité $nsink(\overrightarrow{G}(X_T, E_T)) + |X_U|$ est égale à la différence entre le nombre de sommets du graphe initial G_i et le nombre d'éléments de S. □

Cette borne supérieure n'est pas précise. Considérons le graphe intermédiaire représenté dans la partie (B) de la figure 6. On obtient une borne supérieure de 3, alors que tous les graphes finaux possibles correspondant à ce graphe intermédiaire contiennent au plus un puits.

5 Conclusion

Cette article fournit des bornes inférieures et supérieures relatives à un ensemble de caractéristiques de graphe utilisées dans la représentation des contraintes par des propriétés de graphe. Il montre comment obtenir un premier algorithme de filtrage pour les contraintes globales pouvant être spécifiées à l'aide d'une conjonction de propriétés de graphe.

Références

[1] N. Beldiceanu. Global constraints as graph properties on a structured network of elementary constraints of the same type. *Proceedings CP*, pages 52–66, 2000.

[2] N. Beldiceanu, M. Carlsson, and T. Petit. Deriving filtering algorithms from constraint checkers. *Proceedings CP*, 2004.

[3] N. Beldiceanu, M. Carlsson, and J.-X. Rampon. Global constraint catalog. Technical Report T2005-06, Swedish Institute of Computer Science, 2005.

[4] N. Beldiceanu, I. Katriel, and S. Thiel. Filtering algorithms for the *same* constraint. In J.-C. Régin

and M. Rueher, editors, *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimisation Problems (CP-AI-OR 2004)*, volume 3011 of *LNCS*, pages 65–79. Springer-Verlag, 2004.

[5] C. Bessière, E. Hebrard, B. Hnich, Z. Kızıltan, and T. Walsh. Filtering algorithms for the *nvalue* constraint. In *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimisation Problems (CP-AI-OR 2005)*, LNCS. Springer-Verlag, 2005. To appear.

[6] C. Bessière and J-C. Régin. Refining the basic constraint propagation algorithm. *Proceedings IJCAI*, pages 309–315, 2001.

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computers and intractability : A guide to the theory of NP-completeness. *W.H. Freeman and Company*, ISBN 0-7167-1045-5, 1979.

[8] D. Hanák. Implementing global constraints as structured graphs of elementary constraints. *Scientific Journal Acta Cybernetica*, 2003.

[9] P. Van Hentenryck, Y. Deville, and C.M. Teng. A generic arc consistency algorithm and its specializations. *Artificial Intelligence*, 57(2-3) :291–321, 1992.

[10] P. Van Hentenryck, V. Saraswat, and Y. Deville. Design, implementation, and evaluation of the constraint language cc(fd). *Journal of Logic Programming*, 37(1-3) :139–164, 1998.

[11] I. Katriel and S. Thiel. Fast bound consistency for the *global cardinality* constraint. In F. Rossi, editor, *Principles and Practice of Constraint Programming (CP'2003)*, volume 2833 of *LNCS*, pages 437–451. Springer-Verlag, 2003.

[12] K. Mehlhorn and S. Thiel. Faster algorithms for bound-consistency of the *sortedness* and the *alldifferent* constraint. In *Principles and Practice of Constraint Programming (CP'2000)*, volume 1894 of *LNCS*, pages 306–319. Springer-Verlag, 2000.

[13] U. Montanari. Networks of constraints : Fundamental properties and applications to picture processing. *Information Science*, 7 :95–132, 1974.

[14] R. Z. Norman and M. O. Rabin. An algorithm for minimum cover of a graph. *American Math. Soc.*, 10, 1959.

[15] G. Pesant. A regular language membership constraint for sequence of variables. In *Workshop on Modelling and Reformulation Constraint Satisfaction Problems*, pages 110–119, 2003.

[16] C.-G. Quimper, A. López-Ortiz, P. van Beek, and A. Golynski. Improved algorithms for the *global cardinality* constraint. In M. Wallace, editor, *Principles and Practice of Constraint Programming (CP'2004)*, volume 3258 of *LNCS*, pages 542–556. Springer-Verlag, 2004.

[17] J-C. Régin. A filtering algorithm for constraints of difference in CSPs. *Proceedings AAAI*, pages 362–367, 1994.

[18] J-C. Régin. Generalized arc consistency for global cardinality constraint. *Proceedings AAAI*, pages 209–215, 1996.

[19] J-C. Régin. The symmetric alldiff constraint. *Proceedings IJCAI*, pages 420–425, 1999.

[20] J-C. Régin and M. Rueher. A global constraint combining a sum constraint and difference constraints. *Proceedings CP*, pages 384–395, 2000.

[21] P. Turán. On an extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok*, 48 :436–452, 1941. In Hungarian.

[22] W.J. van Hoeve. A hyper-arc consistency algorithm for the *soft alldifferent* constraint. In M. Wallace, editor, *Principles and Practice of Constraint Programming (CP'2004)*, volume 3258 of *LNCS*, pages 679–689. Springer-Verlag, 2004.

[23] N. R. Vempaty. Solving constraint satisfaction problems using finite state automata. In *National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-92)*, pages 453–458. AAAI Press, 1992.