Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal

Michel Fliess

Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal

Michel FLIESS

Projet ALIEN, INRIA Futurs
& Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161)
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail : Michel.Fliess@polytechnique.fr

Résumé. On propose de nouvelles définitions des fréquences, instantanées ou non.

Abstract. New definitions are suggested for frequencies, which may be instantaneous or not.

1 Introduction

Les difficultés liées à la transformation de Fourier en traitement du signal sont connues depuis longtemps[1]. L'analyse de Fourier n'en garde pas moins une importance capitale dans :

– d'innombrables applications industrielles ;
– maints développements conceptuels, comme l'inégalité temps-fréquence de Heisenberg-Gabor ou le théorème d'échantillonnage de Shannon, apportant une armature doctrinale, jamais remise en question.

Ces quelques pages[2] ont pour but de réexaminer la notion de fréquences, dont le contenu intuitif est indéniable. Elles ont pour origine des publications récentes [5, 6, 7] sur des exemples[3] de débruitage, de détection de ruptures, de démodulation et de compression, grâce à des techniques d'estimation de nature algébrique[4], sans lien apparent avec l'analyse harmonique.

Une fréquence d'un signal représenté en calcul opérationnel, au paragraphe 2, par une fonction rationnelle est la partie imaginaire d'un pôle. Le spectre de $\sin \omega t$, $\omega \neq 0$, $t \geq 0$, est, alors, $\pm\omega$, grâce au caractère causal de notre approche. Celui de l'impul-

[1]Renvoyons à [4] et [11].

[2]Elles ne doivent d'aucune façon être comprises comme une critique de la magnifique construction, édifiée par des géants, tels Fourier et ses continuateurs (voir [9]). Leur seule ambition est d'évoquer une alternative dans un domaine très délimité, étranger aux pères fondateurs.

[3]Exemples pour lesquels les procédés issus de la litérature actuelle ne donnent pas entière satisfaction.

[4]Elles sont nées en automatique (voir les références de [5, 6, 7]) où elles sont exploitées avec plein succès.

sion de Dirac à l'origine est vide, contrairement à ce qui est fourni par transformation de Fourier. Les signaux du paragaphe 3, souvent rencontrés en communications, satisfont des équations différentielles linéaires, à coefficients polynômiaux. Leurs fréquences sont les parties imaginaires des singularités des solutions des équations différentielles opérationnelles correspondantes. Ainsi, le spectre du sinus cardinal $\frac{\sin \omega t}{t}$, $\omega \neq 0$, $t \geq 0$, est encore $\pm\omega$, résultat qui tranche avec celui obtenu par transformation de Fourier.

L'écueil des « fréquences instantanées », deux mots *a priori* antinomiques[5], est brièvement analysé en 4.1. Le paragraphe 4.2 en propose une solution élémentaire, basée sur la courbure du signal.

Inégalité de Heisenberg-Gabor et théorème d'échantillonnage de Shannon deviennent, comme nous le discutons en 5, sans objet avec notre définition des fréquences.

Ces considérations iconoclastes, qui heurtent des paradigmes admis par la plupart, susciteront de vives résistances, quoiqu'elles aient pour origine des techniques d'estimation ayant donné lieu à plusieurs demandes de brevets, déjà déposées. Nous chercherons à y répondre en interrogeant les fondements pratiques du traitement du signal et d'autres domaines scientifiques, qui reposent peu ou prou sur les fréquences[6].

Nous évoquons quelques pistes nouvelles en conclusion.

2 Calcul opérationnel élémentaire

2.1 Rationalité, pôles et fréquences

Soit $\mathbb{C}(s)$ le corps des fractions rationnelles en l'indéterminée s, à coefficients complexes. Une *fréquence* $f \in \mathbb{R}$ d'un élément de $\mathbb{C}(s)$ est, par définition, la partie imaginaire d'un pôle $p = e + f\sqrt{-1}$, $e \in \mathbb{R}$. Si p est réel, donc $f = 0$, on dit, par abus de langage, qu'il n'y a pas de fréquence associée à ce pôle. Le *spectre* d'un élément de $\mathbb{C}(s)$ est, par définition, l'ensemble de ses fréquences.

Exemple 1 Les deux fréquences associées à

$$\frac{\varpi}{(s-e)^2 + f^2}$$

$f \neq 0$*, où* $\varpi \in \mathbb{C}[s]$ *est un polynôme en l'indéterminée* s*, sont* $\pm f$*.*

Exemple 2 L'ensemble des fractions rationnelles, à pôles réels, forme un sous-anneau $R \subset \mathbb{C}(s)$*, qui contient l'anneau* $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$ *des polynômes de Laurent, c'est-à-dire les sommes finies* $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} c_\alpha s^\alpha$*,* $c_\alpha \in \mathbb{C}$*. On dira que le spectre de tout élément de* R *est vide.*

2.2 Polynômes exponentiels

Appelons *polynôme exponentiel* toute somme finie

$$\sum_{\iota=1,\ldots,N} P_\iota(t) e^{a_\iota t} \tag{1}$$

[5]Est-il besoin de rappeler que ce casse-tête ancien a motivé l'introduction de superbes théories nouvelles (voir [4, 9, 10, 13]), notamment les ondelettes ?

[6]Le *Gedankenexperiment* rudimentaire de la remarque 3 du paragraphe 2.3 en est une première ébauche.

$a_\iota \in \mathbb{C}$, où $P_\iota \in \mathbb{C}[t]$ est un polynôme en la variable réelle t. Pour $t \geq 0$, le calcul opérationnel[7] établit une bijection entre polynômes exponentiels et fractions rationnelles de $\mathbb{C}(s)$, strictement propres, c'est-à-dire avec degrés des numérateurs strictement inférieurs à ceux des dénominateurs. Il en découle que le spectre de (1) est formé des parties imaginaires des coefficients $a_1, \ldots, a_N$, car ceux-ci sont les pôles de la fraction rationnelle correspondante.

Exemple 3 Le spectre de la fonction polynômiale $P(t)$, $P \in \mathbb{C}[t]$, $t \geq 0$, est vide. Celui de la fonction $P(t)\sin(\omega t + \phi)$, $P \neq 0$, $\omega, \phi \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $t \geq 0$, est formé de $\pm\omega$.

Remarque 1 Ces résultats diffèrent de ceux obtenus avec la transformation de Fourier, où, en particulier, $\sin(\omega t + \phi)$, $t \geq 0$, possède toutes les fréquences. Que l'on nous permette d'y voir un atout de notre point de vue, dû au caractère causal *du calcul opérationnel.*

2.3 Impulsion de Dirac

L'impulsion, ou mesure, de Dirac à l'origine, δ, correspond à 1 dans $\mathbb{C}(s)$. Son spectre est donc vide.

Remarque 2 Rappelons que la transformée de Fourier de δ vaut également 1. *Il en découle, dans ce langage, que le spectre de δ possède toutes les fréquences, qui évidemment se* détruisent en se compensant *hors de l'origine.*

Remarque 3 Prenons, avec les ingénieurs et les physiciens, un filtre réalisable*, c'est-à-dire à* fonction de transfert $\mathfrak{F}$, rationnelle et propre*, approximation d'un filtre à* bande étroite *autour des fréquences $\pm\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ (cf. [11]). Sa* réponse impulsionnelle $\mathfrak{R}$*, c'est-à-dire sa réponse à l'impulsion de Dirac*[8]*, ne signifie pas, d'après nous, que δ contient les fréquences $\pm\omega_0$, mais traduit un fait algébrique trivial, le produit de $\mathfrak{F}$ par* 1*, c'est-à-dire la convolution de $\mathfrak{R}$ avec l'élément neutre.*

3 Fréquences et singularités

3.1 Dérivation algébrique

Munissons $\mathbb{C}(s)$ d'une structure de *corps différentiel* (voir, par exemple, [2, 16]) avec la dérivation, dite *algébrique* [14, 15], $\frac{d}{ds}$. On sait [14, 15, 20] que cette dérivation correspond à la multiplication par $-t$ des polynômes exponentiels. L'anneau non commutatif des opérateurs différentiels linéaires $\mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$, à coefficients rationnels, est principal à gauche et à droite et contient l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[s, \frac{d}{ds}]$ [12].

Un signal[9] $x \notin \mathbb{C}(s)$ examiné ci-dessous est solution d'une équation différentielle linéaires non nécessairement homogène : il existe $L \in \mathbb{C}(s)[\frac{d}{ds}]$, $L \notin \mathbb{C}(s)$, $\varpi \in \mathbb{C}(s)$ tels que $Lx = \varpi$. Les techniques traditionnelles d'algèbre différentielle [2, 16] permettent de considérer x comme appartenant à une *extension de Picard-Vessiot* de $\mathbb{C}(s)$.

Les singularités des solutions d'équations différentielles linéaires (voir, par exemple, [16]) permettent de généraliser 2.1 : une *fréquence* de x est la partie imaginaire $f \in \mathbb{R}$

[7]Le calcul opérationnel est traditionnellement abordé avec la transformation de Laplace (*cf.* [11]). L'approche algébrique de Mikusiński, indépendante de cette transformation, nous semble présenter de gros avantages (voir [14, 15, 20]).

[8]Bien entendu, on utilise en pratique une approximation.

[9]Comparer avec [5, 6, 7].

d'une singularité $e+f\sqrt{-1}$, $e \in \mathbb{R}$, de x. Le *spectre* de x est, ici encore, l'ensemble des fréquences.

Remarque 4 Cette approche du calcul opérationnel, qui semble nouvelle, évite l'usage des tables de transformations, comme [3].

3.2 Quelques signaux courants

3.2.1 Sinus cardinal

Le sinus cardinal $\sigma = \frac{\sin \omega t}{t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \gneqq 0$, $t \geq 0$, satisfait[10]

$$\frac{d\sigma}{ds} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = 0$$

Il est clair que σ possède deux singularités *logarithmiques* [8] en $\pm\omega\sqrt{-1}$. Le spectre de σ est formé de $\pm\omega$.

Remarque 5 Rappelons que la transformée de Fourier de $\frac{\sin \omega t}{t}$, $t \in \mathbb{R}$, est

$$\chi_\omega(\xi) = \begin{cases} \omega & \text{si } -\omega < \xi < \omega \\ 0 & \text{si } \xi < -\omega \text{ ou } \xi > \omega \end{cases} \tag{2}$$

3.2.2 Cosinus surélevé

Le cosinus surélevé $\varrho = \frac{\cos \omega t}{t^2+1}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \gneqq 0$, $t \geq 0$, satisfait

$$\left(\frac{d^2}{ds^2}+1\right)\varrho = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

On vérifie aisément que le spectre est formé de $\pm\omega$.

3.2.3 Retards et avances

L'exponentielle opérationnelle $\varrho = e^{-Ls}$, $L \in \mathbb{R}$, désigne l'opérateur de retard si $L > 0$, d'avance si $L < 0$. Elle satisfait l'équation

$$\left(\frac{d}{ds}+L\right)\varrho = 0$$

sans singularités. Ce spectre vide est en accord avec 2.3.

3.2.4 Singularités à l'infini

Le signal complexe

$$\varepsilon = \exp\left[(at^2+bt+c)\sqrt{-1}\right]$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, satisfait l'équation

$$\left[s + \left(2a\frac{d}{ds} - b\right)\sqrt{-1}\right]\varepsilon = \exp(c\sqrt{-1})$$

sans singularité finie. Le spectre, au sens entendu ici, est donc vide. Il existe par contre une singularité infinie [16], qui traduit les oscillations de plus en plus *rapides* de

[10] Ici, comme en 3.2.2 et 3.2.4, on désignera avec les mêmes notations le signal, fonction de t, et son image en calcul opérationnel.

ε lorsque $t \to +\infty$. Il serait peut-être intéressant d'enrichir la notion de spectre afin d'y inclure ce type de comportement[11].

4 Fréquences instantanées

4.1 Durée limitée

La définition suivante comble certains manques de l'approche traditionnelle : le spectre d'un signal x, coïncidant, sur un intervalle de temps arbitraire $[t_0, t_0 + h[$, $h > 0$, avec l'un de ceux examinés aux paragraphes 2 et 3, soit ξ, est celui de ξ. Elle n'est cependant pas satisfaisante :

Supposons, pour simplifier, $\xi = \sin \omega t$, $\omega \neq 0$. Il paraît impossible, si h est *petit*, de distinguer x de son développement de Taylor tronqué à un ordre *suffisamment élevé*, dont, d'après 2.2, le spectre est vide.

On obtiendrait ainsi deux réponses contradictoires.

4.2 Cercle osculateur

Supposons le signal $t \mapsto x(t)$ localement C^2. En *confondant* autour du point $(t, x(t))$ son graphe de courbure

$$\frac{\ddot{x}(t)}{(1 + (\dot{x}(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec le cercle osculateur, on obtient la *fréquence instantanée* en t :

$$\Phi(t) = \frac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{1 + (\dot{x}(t))^2}}$$

Il est immédiat de vérifier que cette définition, très large, ne fournit pas les mêmes résultats que celle de Ville (*cf.* [4, 11]).

Exemple 4 La fréquence instantanée d'un signal constant par morceaux est nulle preque partout.

Exemple 5 Pour $x(t) = A \sin \omega t$, $A, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, il vient[12]

$$\Phi(t) = \frac{\omega^2 A \sin \omega t}{\sqrt{1 + \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t}}$$

5 Conséquences méthodologiques

5.1 Inégalité de Heisenberg-Gabor

Illustrons le cadre habituel de l'inégalité de Heisenberg-Gabor par les deux exemples suivants :

---

[11] Les travaux de Poincaré, Birkhoff, Turrittin, et d'autres (voir, en [16], le théorème 3.1 de et ses divers prolongements) devraient y jouer un rôle majeur. Ces mêmes résultats, appliqués dans le domaine temporel, aux équations à coefficients analytiques devraient permettre de définir leurs fréquences. Quant aux signaux non linéaires, c'est-à-dire satisfaisant des équations différentielles non linéaires, suggérons que leurs spectres pourraient se définir grâce aux équations linéaires variationnelles.

[12] Si l'on sait *a priori* avoir à faire à un signal sinusoïdal $A \sin(\omega t + \varphi)$, on peut estimer $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ sur une fenêtre de temps très courte, y compris dans un environnement bruité (voir [7]).

1. Le support de l'impulsion de Dirac δ est ponctuel, alors que, sa transformée de Fourier étant égale à 1, son spectre est uniformément réparti sur $\mathbb{R}$.
2. On sait que la limite, pour $\omega \to \pm\infty$, du sinus cardinal $\frac{\sin \omega t}{\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$, est δ. La formule (2) indique un étalement de plus en plus grand du spectre.

Les calculs de 2.3 et 3.2.1 montrent que cette inégalité temps-fréquence perd tout sens ici.

5.2 Échantillonnage

Il est impossible de trouver un analogue au théorème d'échantillonnage de Shannon, qui, rappelons-le, est acausal, car il repose sur la transformation de Fourier. Pour un signal transitoire arbitraire[13], notre démarche [5] conduit à des procédés voisins de l'analyse numérique classique : on estime les dérivées du signal[14] jusqu'à un certain ordre et on utilise les techniques usuelles d'interpolation[15].

6 Conclusion

La citation suivante, due à de Broglie [1], est bien connue :
« La considération exclusive des ondes monochromatiques conduit à une autre conception qui me paraît erronée. Si l'on considère une grandeur qui peut être représentée, à la manière de Fourier, par une superposition de composantes monochromatiques, c'est la superposition qui a un sens physique et non les composantes de Fourier considérées isolément. »
Elle suggère que certains des paradoxes de l'interprétation, dite « orthodoxe », de la mécanique quantique pourraient être dues à des manipulations hasardeuses des fréquences.

Inégalité de Heisenberg-Gabor et théorème d'échantillonnage de Shannon expriment les limitations inhérentes à toute analyse d'un signal. Nous reviendrons sur ce point incontournable en réexaminant la notion de *bruit*[16]. L'analyse non standard (*cf.* [17]) devrait nous y aider.

Références

[1] L. de Broglie, *Certitudes et incertitudes de la science*, Albin Michel, Paris, 1966.

[2] A. Chambert-Loir, *A Field Guide to Algebra*, Springer, Berlin, 2005.

[3] V.A. Ditkin, A.P. Prudnikov, *Formulaire pour le calcul opérationnel* (traduit du russe), Masson, Paris, 1967.

[4] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, 2^e^ éd., Hermès, Paris, 1998.

[5] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Compression différentielle de transitoires bruités, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 339, 2004, 821-826.

[13] On aura compris qu'on ne cherche pas ici à définir le spectre d'un tel signal.

[14] Insistons sur le fait que cette estimation fonctionne avec des signaux bruités.

[15] Unser [18, 19] prône aussi la considération des signaux physiques, c'est-à-dire continus, avant tout échantillonnage, pour lequel il propose certains types de splines.

[16] Rappelons que nos techniques d'estimation [5, 6, 7] sont indépendantes de toute considération statistique.

[6] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures, Actes 20^e coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005.

[7] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editiorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21.

[8] A. Hurwitz, R. Courant, *Funktionentheorie*, 4. Auflage, Springer, Berlin, 1964.

[9] J.-P. Kahane, P.G. Lemarié-Rieusset, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, Paris, 1998.

[10] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éditions École Polytechnique, Palaiseau, 2000.

[11] J. Max, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, 4^e éd., t. 1 & 2, Masson, Paris, 1985 & 1987.

[12] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[13] Y. Meyer, *Ondelettes : algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, 1992.

[14] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, 2^{nd} ed., t. 1, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.

[15] J. Mikusiński, T.K. Boehme, *Operational Calculus*, 2^{nd} ed., t. 2, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1987.

[16] M. van der Put, M.F. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, Berlin, 2003.

[17] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, 2^{nd} ed., North-Holland, Amsterdam, 1974.

[18] M. Unser, Cardinal exponential splines : Part II – Think analog, act digital, *IEEE Trans. Signal Procesing*, 53, 2005, 1425-1438.

[19] M. Unser, T. Blu, Cardinal exponential splines : Part I – Theory and filtering algorthms, *IEEE Trans. Signal Procesing*, 53, 2005, 1439-1449.

[20] K. Yosida, *Operational Calculus* (translated from the Japanese), Springer, New York, 1984.