

Sur une bascule tridimensionnelle anisotrope et ses applications

Paul-Louis George

► **To cite this version:**

Paul-Louis George. Sur une bascule tridimensionnelle anisotrope et ses applications. [Rapport de recherche] RT-0273, INRIA. 2002, pp.13. inria-00069904

HAL Id: inria-00069904

<https://hal.inria.fr/inria-00069904>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Sur une bascule tridimensionnelle anisotrope et ses applications

P.L. George

N° 0273

4 novembre 2002

THÈME 4



*R*apport
technique



Sur une bascule tridimensionnelle anisotrope et ses applications

P.L. George

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport technique n° 0273 — 4 novembre 2002 — 13 pages

Résumé :

On rappelle ce qu'est la bascule la plus simple en trois dimensions, à savoir la bascule face-arête qui est la transformation dite "2-3" qui modifie deux tétraèdres en trois tétraèdres en supprimant leur face commune et en créant une arête. On étend cette bascule au cas anisotrope. On montre ensuite comment cette simple opération s'applique au délicat problème du forçage d'une frontière dans un maillage de type Delaunay. On évoque également des extensions et d'autres applications.

Mots-clés : Bascule, Optimisation, Forçage de frontière, Delaunay, Maillage anisotrope.

On a 3D anisotropic flip and its applications

Abstract:

We return to the classical “2-3” flip for a tet mesh. We extend this operation in an anisotropic context. Then we show how this simple operator applies in the crucial boundary enforcement step in a Delaunay based mesh generator. Possible extensions and other applications are introduced.

Key-words: Flip, Optimisation, Boundary enforcement, Delaunay, Anisotropic mesh.

Table des matières

1	Introduction et Motivations	4
2	Rappel sur la bascule “2-3”	6
3	Extension anisotrope	7
4	Sur le forçage d’une frontière dans un mailleur de type Delaunay	8
5	Application de la bascule anisotrope	9
6	Exemples de validation	10
7	Extensions	12

1 Introduction et Motivations

Les bascules d'arêtes, en deux ou en trois dimensions, sont des opérateurs topologiques qui permettent de modifier un maillage simplicial en changeant des configurations locales de deux (ou plus en trois dimensions) simplexes. La bascule la plus simple, en deux dimensions donc, s'applique à une paire de triangles formant un quadrilatère convexe où l'arête commune aux deux triangles est supprimée au bénéfice de l'autre "diagonale" du quadrilatère. On forme ainsi deux nouveaux triangles valides.

Les bascules sont utilisées essentiellement dans deux types d'applications, l'optimisation de maillage, [8], [1], et le forçage d'une arête dans une triangulation de Delaunay au cas où cette arête n'est pas de Delaunay, [4].

Pour l'optimisation, la bascule est gouvernée par un critère de qualité, si la qualité de la configuration alternative est meilleure que celle de la configuration initiale, la bascule est appliquée. Notons, [7], que des bascules permettent également de modifier une triangulation arbitraire dans le but de la rendre Delaunay, ce qui peut être vu comme une application de type optimisation.

Pour un problème de type forçage, le but de la bascule est topologique, il s'agit de supprimer une arête en en créant une autre. Le critère est donc *a priori* topologique, la validation de l'opération restant basée sur le fait que la configuration alternative reste valide (surfaces positives, *i.e.*, quadrilatère convexe, et/ou dégradation éventuelle de la qualité du maillage contrôlée (tout en gardant la propriété de positivité)).

Ce type de problème, le forçage d'une arête (et d'une face en trois dimensions), est nécessairement présent lors de la construction du maillage d'un domaine arbitraire via une méthode de type Delaunay (c'est-à-dire utilisant un algorithme d'insertion de points basé sur l'une ou l'autre des variantes des méthodes de construction de la triangulation de Delaunay d'un nuage de points). Si la frontière du domaine (son contour discrétisé en segments (en triangles en trois dimensions)) n'est pas *a priori* Delaunay admissible, alors l'insertion mécanique des extrémités de ces arêtes (faces) conduit à une triangulation dans laquelle certaines de ces arêtes (faces) ne sont pas présentes. La Figure 1 montre un exemple simple, en deux dimensions, où deux arêtes manquent bien que leurs extrémités soient des sommets de la triangulation. En particulier, l'arête A_2B_2 manque car deux arêtes A_1P_1 et A_1P_2 ont été construites qui coupent le segment A_2B_2 . Il est donc évident que l'arête

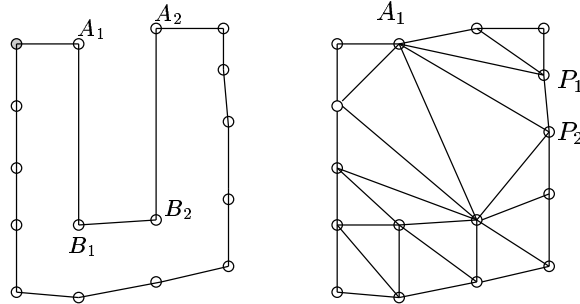


FIG. 1 – Dans cet exemple bidimensionnel très simple, on montre les triangles intersectés ou voisins de deux arêtes manquantes (certains triangles de la triangulation de l’enveloppe convexe ne sont pas dessinés). De fait, l’arête A_2B_2 est absente de la triangulation bien que ses extrémités soient des sommets de celle-ci.

A_2B_2 n’existe pas dans la triangulation de Delaunay car les arêtes A_1P_1 et A_1P_2 existent. Ces deux arêtes existent pour des raisons de proximité entre les points invoqués, réciproquement, l’arête qui manque n’existe pas pour ces mêmes raisons. Cette évidence est à la base de l’idée, non moins évidente, qui va être développée. Que faire en effet pour casser ces relations de proximité. La réponse est si simple qu’il est surprenant que l’on y ait pas pensé auparavant. En un mot, changeons la notion de proximité afin de rapprocher certains points entre eux tout en éloignant d’autres points. Ceci conduit naturellement à la notion d’anisotropie.

Cette idée peut s’appliquer à l’algorithme de triangulation lui-même et, alors, sous réserve de définir l’anisotropie voulue, la triangulation construite contient les arêtes voulues. Ceci pose deux difficultés non négligeables, i) définir puis développer un algorithme de triangulation anisotrope et, ii) trouver comment construire, localement, l’anisotropie satisfaisante (avec la question de savoir si elle existe !). Au lieu de regarder cet aspect des choses, on va appliquer cette idée aux bascules d’arêtes qui seront utilisées lors de la phase de forçage succédant à la phase de triangulation, toutes deux parties d’un mailleur de type Delaunay complet.

L’objet de ce papier est donc de regarder cette question et, ce, en trois dimensions puisque le cas de la deux dimensions est trivial et donc sans réel intérêt. Par la suite, on rappelle ce qu’est la bascule “2-3”, on en donne l’extension anisotrope puis, sachant comment marche une méthode de forçage en trois dimensions, on montre comment cette bascule anisotrope s’applique en exhibant, en particulier,

la métrique anisotrope relative à l'arête concernée. On donne quelques exemples d'applications permettant de valider l'idée puis, pour finir, on indique quelques extensions possibles.

2 Rappel sur la bascule "2-3"

La bascule "2-3" porte sur la configuration formée par deux tétraèdres partageant une face. Si le polyèdre ainsi défini est convexe, il existe une configuration alternative formée de trois tétraèdres qui recouvre exactement le même volume, Figure 2. La situation initiale est :

$$K_1 = [M_1 M_2 M_3 \alpha]$$

$$K_2 = [\beta M_1 M_2 M_3].$$

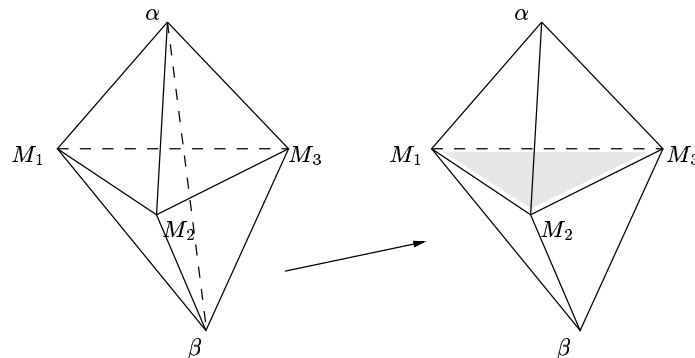


FIG. 2 – Le polyèdre formé par les deux tétraèdres $M_1 M_2 M_3 \alpha$ et $\beta M_1 M_2 M_3$, à droite, est convexe et peut être remaillé au moyen des trois tétraèdres $M_1 \alpha \beta M_2$, $M_2 \alpha \beta M_3$ et $M_3 \alpha \beta M_1$ visibles à gauche.

La situation finale est :

$$K_1^* = [M_1 \beta \alpha M_2]$$

$$K_2^* = [M_2 \beta \alpha M_3]$$

$$K_3^* = [M_3 \beta \alpha M_1].$$

Autrement dit, on obtient une *coquille*¹ de trois éléments. Notons que cette transformation, du seul point de vue topologique, supprime une face et construit une arête.

La validation de cette transformation se fait en vérifiant que le volume des trois tétraèdres résultants est positif (autrement dit, le polyèdre est convexe).

Bien que seule la positivité des volumes suffit, en pratique, pour l'application considérée, on ajoute un contrôle sur la qualité des éléments construits. En optimisation, on demande une augmentation de qualité, en forçage, on tolère une dégradation de cette qualité en la bornant (pour éviter, par un emploi répété de cet opérateur, de trop dégrader le maillage).

La mesure de qualité du tétraèdre K est basée sur l'une des fonctions possibles, par exemple :

$$Q_K = \text{coef} \frac{\rho}{h_{max}}$$

où ρ est le rayon de la sphère inscrite dans K , h_{max} est le diamètre de K et coef un coefficient de normalisation. Une autre mesure est donnée par la fonction :

$$Q_K = \text{coef} \frac{h^3}{V_K},$$

où $h = \sqrt{\sum_{i=1}^6 L_i^2}$ avec L_i la longueur de l'arête i du tétraèdre K et coef un coefficient de normalisation. C'est cette deuxième fonction que nous retiendrons dans la suite, pour des raisons évidentes (bien que l'autre ait notre préférence dans le cas classique isotrope).

3 Extension anisotrope

L'extension proposée consiste simplement à gouverner l'opérateur ci-dessus via une fonction de qualité anisotrope. On prendra donc la dernière fonction vue ci-dessus qui se prête naturellement à cette extension.

Soit \mathcal{M} la matrice représentant la métrique anisotrope en présence, on a alors :

$$Q_K^{\mathcal{M}} = \text{coef} \frac{h^3}{V_K^{\mathcal{M}}},$$

1. Une coquille d'arête est l'union des tétraèdres partageant cette arête.

avec, respectivement :

$$V_K^{\mathcal{M}} = \text{Det}(\mathcal{M}) V_K$$

$$h = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (L_i^{\mathcal{M}})^2}$$

où

$$L_i^{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle A_i, \mathcal{M}A_i \rangle},$$

le symbole $\langle ., . \rangle$ dénotant le produit scalaire tandis que A_i est le vecteur correspondant à l'arête i de K . En pratique, la matrice est supposée constante dans K .

4 Sur le forçage d'une frontière dans un mailleur de type Delaunay

Comme indiqué, l'application que nous envisageons est le forçage d'une frontière en trois dimensions. Avant de voir ce que cette bascule anisotrope peut apporter on rappelle les grandes lignes de ce qu'est cette étape de forçage.

On se donne donc un domaine défini via un maillage triangulaire de sa surface. On immerge ce domaine dans une boîte englobante. On considère les sommets des triangles donnés comme un nuage. On insère alors ce nuage dans la boîte introduite. À l'issue de cette opération on dispose d'une triangulation de cette boîte dont les sommets d'éléments sont les points du nuage ci-dessus et les coins de la boîte introduite.

Cette triangulation ne contient pas, en général, toutes les faces de la surface initiale, par suite, on ne peut pas en extraire un maillage du domaine donné. En pratique, des faces et des arêtes manquent. Prenant le cas d'une arête manquante, la cause de ce fait est qu'il existe des faces et des arêtes de la triangulation courante qui sont coupées par le segment associé à l'arête manquante.

En se restreignant au cas où seules des faces sont coupées, on applique, tant que possible, des bascules "2-3" aux tétraèdres intersectés, en les prenant deux à deux. On a montré dans [4] que ce simple opérateur permet, au moins dans certains cas, de forcer l'arête cherchée.

En pratique, ces bascules sont faites avec un certain degré d'aléatoire et en contrôlant que le maillage ne dégénère pas trop à chaque opération (ceci pour mé-

nager la suite du processus de maillage). Autrement dit, on dégrade le maillage jusqu'à un certain niveau.

L'idée est alors de remplacer ces bascules par la bascule anisotrope introduite en

- construisant une métrique adéquate favorisant le forçage désiré,
- optimisant strictement le maillage pour la fonction de qualité associée à cette métrique.

L'intérêt de cette approche est double, i) favoriser le forçage en cours en orientant la bascule et ii) augmenter un critère, évitant ainsi de boucler.

Il reste donc à définir la métrique à utiliser.

5 Application de la bascule anisotrope

Si \mathcal{M} est la matrice associée à une métrique (donc une matrice 3×3 symétrique définie positive), on peut écrire

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \Lambda {}^t \mathcal{R},$$

avec \mathcal{R} une matrice orthogonale et Λ une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.

Si AB est l'arête que l'on cherche à forcer, on construit la métrique de la façon suivante :

$$h = \|AB\|$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(kh)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(kh)^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{AB}{h}$$

$$d_2 \text{ tel que } \langle d_1, d_2 \rangle = 0 \text{ et } \|d_2\| = 1$$

$$d_3 = \frac{d_1 \wedge d_2}{\|d_1 \wedge d_2\|}$$

avec $k \ll 1$. À partir de d_1, d_2 et d_3 , on construit

$$\mathcal{R} = {}^t(d_1, d_2, d_3).$$

Ainsi \mathcal{M} est entièrement définie et possède les bonnes propriétés (symétrie et positivité). La construction proposée rapproche artificiellement les points A et B et éloigne donc les autres points les uns des autres, au moins temporairement. Par ailleurs, elle privilégie la direction du vecteur support de l'arête AB .

6 Exemples de validation

La validation de cette bascule anisotrope a été menée en utilisant le code GHS3D, mailleur automatique en tétraèdres de domaines arbitraires, [3]. À cette fin, on a modifié dans l'étape de forçage de frontière, incluse dans ce mailleur, les bascules "2-3" actuelles (en dégradation de qualité et en "pseudo-aléatoire") par cette bascule anisotrope. Chaque arête à forcer induit sa métrique particulière et les "2-3" sont gouvernés en qualité via cette métrique. Les résultats sont très probants à divers titres :

- robustesse (moins de cas, en particulier les cas très compliqués (au sens de la méthode), d'échec,
- qualité, la qualité globale se détériorant moins, le maillage final est meilleur en terme de qualité,
- coût plus faible, les "bonnes" bascules étant faites, l'étape de forçage est plus rapide et, si ce n'est pas le cas, c'est le processus de maillage complet qui est plus rapide.

Sans même montrer les géométries traitées, on donne quelques résultats chiffrés portant sur le temps CPU qui confirment ce dernier point relatif au coût.

objet safe	.38 sec	versus	.39
objet cylis	5.55 sec	versus	6.46
objet cyrain	13.19 sec	versus	13.25
objet ff2	82.39 sec	versus	165.05
objet b747	139. sec	versus	215. .

Le nombre d'éléments, pour ces exemples, est, respectivement de l'ordre de 3 000, 13 000, 16 000, 193 000 et 150 000. Le temps reporte l'effort nécessaire à la triangulation des points de départ ajouté à l'effort correspondant à l'étape de forçage. Plus l'objet est grand et plus sa frontière est compliquée, plus le gain en temps est visible. Par ailleurs, même un gain faible se traduit par un gain important sur le temps d'exécution du mailleur en entier (ainsi, pour l'exemple 1, on avait besoin de 1.04 sec, il n'en est plus besoin que de .95).

Il est à noter que, dans certains exemples de validation, la nouvelle méthode, bien que plus lente, conduit à un temps plus faible pour le processus de maillage complet, les valeurs ci-dessous en sont quelques occurrences. En premier, la présente méthode n'est pas plus rapide :

objet fa 1.05 sec versus .99

objet av 1.56 sec versus 1.41 .

En contrepartie, le temps de construction final est, lui, meilleur :

objet fa 3.11 sec versus 3.71

objet av 4.94 sec versus 5.86 .

Ceci confirme l'idée que le maillage, après forçage, est plus propice, en terme de qualité, à la poursuite du processus de maillage. Notons, pour ces deux derniers exemples, que le nombre d'éléments du maillage final est respectivement de 28 426 et 85 004 donnant ainsi une vitesse moyenne de construction de quelques 570 000 et 1 030 000 tétraèdres à la minute (plus le maillage est "petit", moins la vitesse est élevée, ce qui s'explique aisément).

Par ailleurs, sur la robustesse, une série d'exemples difficiles a été traité. On a vérifié que le taux d'échec est nettement baissé (ces exemples ayant été construits pour servir de test de robustesse, c'est-à-dire que leur surface est particulièrement mal maillée).

7 Extensions

L'idée sous-jacente à cette bascule anisotrope a très certainement bien des applications. Laissant au lecteur sagace² le soin de voir jusqu'où on peut pousser cette idée simple. Pour ma part, je citerai deux pistes. L'une a trait à ce même problème crucial lié au forçage d'une frontière dans une triangulation donnée, l'autre a trait à l'optimisation anisotrope d'un maillage anisotrope.

Pour forcer des entités dans une triangulation, on peut appliquer la même idée aux bascules généralisées qui ne concernent plus seulement deux éléments. La première, inverse du présent "2-3" est le "3-2" qui bascule l'arête commune à trois tétraèdres et reforme le motif à deux tétraèdres partageant une face. Ensuite viennent les transformations "4-4", "5-6", "6-8", ..., [1]. Le but sera de valider le fait que les nouvelles bascules anisotropes permettent encore de diminuer le coût de l'étape de forçage tout en améliorant la qualité globale des maillages ainsi construits.

Pour le problème d'optimisation, les mêmes opérateurs locaux sont utilisés (couplés avec d'autres tel le bougé de points) avec, cette fois, la métrique du problème (et non plus, comme ici, une métrique artificiellement construite) et le souci est de faire croître la qualité du maillage dans le champ de métriques du problème.

Références

- [1] E. BRIÈRE DE L'ISLE AND P.L. GEORGE, Optimization of tetrahedral meshes, *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, I. Babuska, W.D. Henshaw, J.E. Oliger, J.E. Flaherty, J.E. Hopcroft and T. Tezduyar (Eds.), **75**, 97-128, 1995.
- [2] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris. Also as *Mesh Generation. Applications to Finite Elements*, 1999.
- [3] P.L. GEORGE, Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design*, **25**(3-4), 297-317, 1997.
- [4] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **92**, 269-288, 1991.
- [5] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès, Paris. Also as *Delaunay triangulation and meshing. Applications to Finite Elements*, 1997.

2. et francophone, ou, à tout le moins, lisant notre belle langue.

- [6] W.G. HABASHI, J. DOMPIERRE, Y BOURGAULT, M. FORTIN AND M.G. VALLET, Certifiable computational fluid dynamics through mesh optimization, *AIAA*, Vol. 36, n° 5, p. 703-711, 1998.
- [7] B. JOE, Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations, *Comput. Aided Geom. Design*, **8**, 123-142, 1991.
- [8] J.Y. TALON, Algorithmes d'amélioration de maillages tétraédriques en 3 dimensions, *Rapport Technique Artemis-Imag*, **21**, 1987.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-0803