

Un problème de Laplace non standard en milieu non borné

Sébastien Tordeux

► **To cite this version:**

Sébastien Tordeux. Un problème de Laplace non standard en milieu non borné. [Rapport de recherche] RR-5799, INRIA. 2006, pp.13. inria-00070224

HAL Id: inria-00070224

<https://hal.inria.fr/inria-00070224>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Un problème de Laplace non standard en milieu non borné

Sébastien Tordeux

N° 5799

Janvier 2006

THÈME 4

A large blue rectangle containing the text 'Rapport de recherche' in a white serif font. To the left of the text is a large, stylized, light grey 'R' logo. A horizontal grey brushstroke is positioned below the text.

*Rapport
de recherche*



Un problème de Laplace non standard en milieu non borné

Sébastien Tordeux *

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet POems

Rapport de recherche n° 5799 — Janvier 2006 — 10 pages

Résumé : Dans le cadre des problèmes elliptiques en dimension deux, nous nous intéressons à un domaine constitué d'un demi-espace connecté à une bande infinie. Un résultat d'existence et unicité est obtenu pour un problème de Laplace inhomogène muni de comportements asymptotiques à l'infini.

Mots-clés : Problème de Laplace, domaine non borné, espaces de Sobolev à poids.

Projet POems, Batiment 13, INRIA, Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France

* Seminar for Applied Mathematics ETH Zurich, CH- 8092 Zurich, Suisse, tordeux@math.ethz.ch

A non standard Laplace problem in unbounded domain

Abstract: This report deals with an elliptic problem on an unbounded domain Ω , defined as the union of three domains Ω_H , Ω_I , and Ω_S , see equations (1) and (2). One can remark that $\overline{\Omega_H} \cup \overline{\Omega_I}$ is the half space $x \leq 0$, which is unbounded in the two space directions. The domain Ω_S is a horizontal semi infinite tube of width one which is unbounded in the direction associated to x . The Laplace problem we are interested in is the following:

Find $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ satisfying the asymptotic behaviours (5) where $u_H \in H_{loc}^1(\Omega_H)$, $u_S \in H_{loc}^1(\Omega_S)$, and the source term $f \in L_{loc}^2(\Omega)$ are given.

There are many articles on the Laplace problem in the literature: see [1, 2, 3, 5], but to our knowledge, there is no result for this specific geometry. Moreover, an additional difficulty is that u has to behave as u_H and u_S do at infinity, which means that it may be increasing at infinity. The next theorem is the main result of the paper:

Theorem 1 *If u_H , u_S and f satisfy (4), then condition (6) implies that problem (5) has a unique solution.*

The end of the paper is devoted to the proof of this theorem.

The first step consists in associating to u an auxiliary unknown \tilde{u}^R defined by (14) and (15). The function \tilde{u}^R is a solution of the Laplace problem (16), with homogeneous behaviours and homogeneous source term at infinity and therefore \tilde{u}^R is not increasing at infinity.

During the second step, we derive the variational problem (21) for \tilde{u}^R , which comes from characterization of the bounded solutions of the homogeneous Laplace equation in Ω_H and Ω_S : lemma 2.1 and 2.2. The variational formulation uses classical weighted Sobolev spaces.

The third step consists in proving that under condition (6), the variational problem for \tilde{u}^R is equivalent to problem (5). One can conclude by showing that the variational problem for \tilde{u}^R is well posed via the Lax-Milgram theorem (the main point is the coercivity result —lemma 4.1— which is based on the Hardy inequality and compactness arguments).

Key-words: Laplace Problem, unbounded domain, wheighted Sobolev spaces.

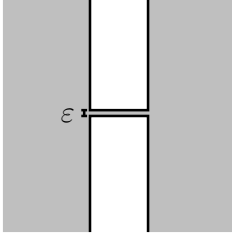


FIG. 1 – Fente mince.

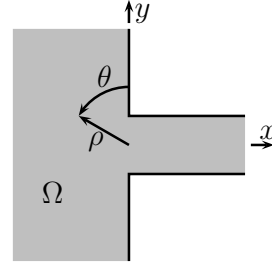


FIG. 2 – Le domaine d'étude.

1 Introduction.

Le type de problèmes auquel nous nous intéressons dans cette note intervient naturellement dans l'analyse asymptotique de la propagation d'une onde dans un milieu comportant des fentes minces (le petit paramètre étant l'épaisseur de la fente, c.f. figure 1). Lorsque l'on applique la méthode des développements asymptotiques raccordés [6, 4], l'étude de la zone de jonction entre la fente mince et le reste du milieu de propagation nécessite la résolution de problèmes elliptiques non standards en domaine non borné. Plus précisément, nous nous intéressons à des problèmes de Laplace inhomogènes dans un domaine canonique Ω en forme de T infini (c.f. figure 2). Pour la suite de l'exposé, il est utile de décomposer ce domaine en trois zones :

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_H \cup \bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_S, \quad (\text{c.f. figure 3}). \quad (1)$$

La zone Ω_H est non bornée dans les deux directions d'espace, Ω_S est non bornée dans la direction x , et Ω_I est une zone intermédiaire bornée :

$$\Omega_H =]1; +\infty[_\rho \times]0; \pi[_\theta, \quad \Omega_S =]0; +\infty[_x \times]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[_y, \quad \Omega_I =]0; 1[_\rho \times]0; \pi[_\theta. \quad (2)$$

où (ρ, θ) sont les coordonnées polaires définies par :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = \arccos(y/\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3)$$

On considère les problèmes : étant donnés $u_H \in H_{loc}^1(\Omega_H)$, $u_S \in H_{loc}^1(\Omega_S)$ et $f \in L_{loc}^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \Delta u_H = -f, & \text{dans } \Omega_H, & \frac{\partial u_H}{\partial x} = 0, & \text{en } x = 0, \\ \Delta u_S = -f, & \text{dans } \Omega_S, & \frac{\partial u_S}{\partial y} = 0, & \text{en } y = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

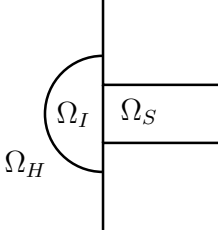
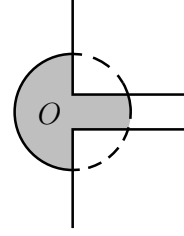


FIG. 3 – La partition.

FIG. 4 – Les ensembles O_1 et O_2 .

on cherche $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta u = -f, & \text{dans } \Omega, & \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[\sup_{\theta \in [0; \pi]} u(\rho, \theta) - u_H(\rho, \theta) \right] = 0 & \text{dans } \Omega_H, & u - u_S \text{ est borné dans } \Omega_S. \end{cases} \quad (5)$$

Remarque 1 Dans nos applications [6], u_H et u_S (ainsi que f) sont connus analytiquement et ont une croissance polynomiale dans Ω_S et Ω_H à l'infini. Il en sera donc de même pour la solution u de (5).

L'objet de ce rapport est le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Sous la condition :*

$$\int_0^\pi \frac{\partial u_H}{\partial \rho}(1, \theta) d\theta + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u_S}{\partial x}(0, y) dy + \int_{\Omega_I} f(x, y) dx dy = 0, \quad (6)$$

le problème (5) admet une unique solution $H_{loc}^1(\Omega)$.

Les problèmes de Laplace en domaine non borné ont été étudiés de manière approfondie dans la littérature dans le cadre des espaces de Sobolev à poids (espace vide, demi-espace ou extérieur d'un obstacle borné, se référer à [1, 2, 3, 5]). L'originalité du problème 5 vient, d'une part, de la géométrie du domaine Ω qui connecte deux structures infinies (un demi-espace et une bande infinie). D'autre part, le problème est non homogène à l'infini : des comportements asymptotiques non nuls à l'infini sont prescrits.

2 Caractérisation des solutions bornées de l'équation de Laplace homogène dans Ω_H et Ω_S à l'aide d'espaces de Sobolev à poids.

On pourra trouver les preuves (assez longues mais sans difficulté) des résultats de cette section dans [6]. Elles s'appuient essentiellement sur des techniques de séparation de variables en coordonnées polaires dans le demi-espace et en coordonnées cartésiennes dans la bande. Pour tout $R \geq 0$, introduisons le domaine :

$$\Omega_H^R =]1 + R; +\infty[_\rho \times]0; \pi[_\theta \quad \left(\Omega_H^1 = \Omega_H \right). \quad (7)$$

Sur ce domaine, il est classique, lorsque l'on étudie les équations de Laplace en domaine non borné, d'introduire les espaces de Sobolev à poids $W_0^1(\Omega_H^R)$ et $W_0^1(\Delta, \Omega_H^R)$:

$$\begin{cases} W_0^1(\Omega_H^R) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\Omega_H^R) \mid \nabla u \in L^2(\Omega_H^R) \text{ et } \frac{u}{\rho \log(1+\rho)} \in L^2(\Omega_H^R) \right\}, \\ W_0^1(\Delta, \Omega_H^R) = \left\{ u \in W_0^1(\Omega_H^R) \mid \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_H^R, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \right\}. \end{cases} \quad (8)$$

Lemme 2.1 *Pour tout $R \geq 0$, nous avons l'identité algébrique suivante :*

$$W_0^1(\Delta, \Omega_H^R) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\Omega_H^R) \mid \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_H^R, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } u \text{ est borné} \right\}. \quad (9)$$

De plus, si $u \in W_0^1(\Delta, \Omega_H^R)$, alors u admet une limite uniforme en θ et :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} u(\rho, \theta) = \left(\int_{1+R}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{u(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1+\rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right) / \left(\int_{1+R}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{1}{\rho^2 |\log(1+\rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right). \quad (10)$$

Pour $R \geq 0$, introduisons le domaine :

$$\Omega_S^R =]R; +\infty[_x \times]0; 1[_y \quad \left(\Omega_S^1 = \Omega_S \right). \quad (11)$$

Dans ce domaine qui favorise la direction x , il est naturel de définir les espaces de Sobolev à poids :

$$\begin{cases} W_0^1(\Omega_S^R) = \left\{ u \in L_{loc}^2(\Omega_S^R) \mid \nabla u \in L^2(\Omega_S^R) \text{ et } \frac{u}{1+x} \in L^2(\Omega_S^R) \right\}, \\ W_0^1(\Delta, \Omega_S^R) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\Omega_S^R) \mid \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_S^R \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ en } y = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2} \right\}. \end{cases} \quad (12)$$

Lemme 2.2 *Pour tout $R \geq 0$, nous avons l'identité algébrique suivante :*

$$W_0^1(\Delta, \Omega_S^R) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\Omega_S^R) \mid \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_S^R \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ en } y = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ et } u \text{ est borné} \right\}. \quad (13)$$

3 Reformulation du problème.

Etant donné $R > 0$, nous associons à toute solution u de (5), la nouvelle inconnue \tilde{u}^R :

$$\tilde{u}^R = u - \chi_H^R u_H \text{ dans } \Omega_H, \quad \tilde{u}^R = u \text{ dans } \Omega_I, \quad \tilde{u}^R = u - \chi_S^R u_S \text{ dans } \Omega_S. \quad (14)$$

où $\chi_H^R : \Omega_H \rightarrow \mathbb{C}$ et $\chi_S^R : \Omega_S \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de troncature de classe C^∞ qui vérifient :

$$\begin{cases} \chi_H^R(r, \theta) = \chi_H^R(r), & \chi_H^R(r) = 0 \text{ si } 1 \leq r \leq 1 + R/2, & \chi_H^R(r) = 1 \text{ si } 1 + R \leq r, \\ \chi_S^R(x, y) = \chi_S^R(x), & \chi_S^R(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq R/2, & \chi_S^R(x) = 1 \text{ si } R \leq x, \end{cases} \quad (15)$$

Il est clair que la recherche de u est équivalente à la recherche de $\tilde{u}^R \in H$, solution du problème suivant (le cadre fonctionnel est suggéré par les lemmes 2.1 et 2.2) :

$$\Delta \tilde{u}^R = -\tilde{f}^R, \quad \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \tilde{u}^R}{\partial n} = 0, \text{ dans } \partial\Omega, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \tilde{u}^R(\rho, \theta) = 0, \quad (16)$$

avec \tilde{f}^R la fonction $L^2(\Omega)$ à support compact (notons que \tilde{f}^R est nul dans Ω_H^R et Ω_S^R) définie par :

$$\tilde{f}^R = f + \Delta[\chi_H u_H] \text{ dans } \Omega_H, \quad \tilde{f}^R = f \text{ dans } \Omega_I, \quad \tilde{f}^R = f + \Delta[\chi_S u_S] \text{ dans } \Omega_S \quad (17)$$

et H l'espace de Hilbert :

$$\begin{cases} H = H_{loc}^1(\Omega) \cap W_0^1(\Omega_H) \cap W_0^1(\Omega_S), \\ (u, v)_H = (u; v)_{H^1(\Omega_I)} + (u; v)_{W_0^1(\Omega_H)} + (u; v)_{W_0^1(\Omega_S)}, \end{cases} \quad (18)$$

où nous avons noté :

$$\begin{cases} (u; v)_{W_0^1(\Omega_H)} = \int_{\Omega_H} \nabla u(\rho, \theta) \overline{\nabla v(\rho, \theta)} + \int_{\Omega_H} \frac{u(\rho, \theta) \overline{v(\rho, \theta)}}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta, \\ (u; v)_{W_0^1(\Omega_S)} = \int_{\Omega_S} \nabla u(x, y) \overline{\nabla v(x, y)} + \int_{\Omega_S} \frac{u(x, y) \overline{v(x, y)}}{(1 + x)^2} \, dx \, dy. \end{cases} \quad (19)$$

En utilisant d'une part la formule de Green et la densité de H dans $H^1(\Omega)$ (voir [6]) et d'autre part le lemme 2.1, on déduit de (16) que :

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}^R \overline{\nabla v} = \int_{\Omega} \tilde{f}^R \bar{v}, \quad \forall v \in H \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_H^R} \frac{\tilde{u}^R(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 0. \quad (20)$$

En conséquence, $\tilde{u}^R \in H$ est tel que pour tout v dans H :

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}^R \overline{\nabla v} + \left[\int_{\Omega_H^R} \frac{\tilde{u}^R(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right] \left[\int_{\Omega_H^R} \frac{\overline{v(\rho, \theta)}}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right] = \int_{\Omega} \tilde{f}^R \bar{v}. \quad (21)$$

Lemme 3.1 *Sous la condition (6), le problème (16) est équivalent au problème (21).*

Preuve. Il nous suffit de montrer que toute solution de (16) est solution de (21). On remarque d'abord que la condition (6) équivaut au fait que la fonction \tilde{f}^R est d'intégrale nulle sur Ω . Si nous choisissons alors $v = 1 \in H$ dans (21), il vient :

$$\int_{\Omega_H^R} \frac{\tilde{u}^R(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 0. \quad (22)$$

A l'aide des techniques variationnelles classiques, pour $v \in H$, nous tirons les deux premières équations de (16). Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2.1 pour déduire de (22) la dernière équation de (16).

4 Démonstration du résultat d'existence et unicité.

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram à (21), le seul point délicat est la coercivité :

Lemma 4.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H$:*

$$\|u\|_H \leq C \left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega_H^R} \frac{u(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right| \right]. \quad (23)$$

Preuve. Nous nous appuyons sur des inégalités classiques de type Poincaré-Hardy (voir [3]) :

$$\begin{cases} \forall u^H \in W_0^1(\Omega_H) / u^H(1, \theta) = 0, & \forall \theta \in [0; \pi], & \|u^H\|_{W_0^1(\Omega_H)} \leq C \|\nabla u^H\|_{L^2(\Omega_H)}, \\ \forall u^S \in W_0^1(\Omega_S) / u^S(0, y) = 0, & \forall y \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], & \|u^S\|_{W_0^1(\Omega_S)} \leq C \|\nabla u^S\|_{L^2(\Omega_S)} \end{cases} \quad (24)$$

Nous faisons un raisonnement par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une suite $u_n \in H$ telle que

$$\|u_n\|_H = 1, \quad \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \left| \int_{\Omega_H^R} \frac{u_n(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta \right| \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty. \quad (25)$$

Comme u_n est bornée dans H , nous pouvons en extraire une sous-suite faiblement convergente, sa limite faible u vérifiant :

$$\nabla u = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad (a) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_H^R} \frac{u(\rho, \theta)}{\rho^2 |\log(1 + \rho)|^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 0 \quad (b). \quad (26)$$

Comme le gradient de u est nul au sens des distributions, u est constant et par conséquent d'après (26,b) nul.

Par compacité, u converge vers 0 dans H^1 de tout ouvert borné inclus dans Ω . (R)

Nous introduisons alors deux ouverts bornés $O_1 = B_1 \cap \Omega$ et $O_2 = B_2 \cap \Omega$ où B_1 et B_2 sont les boules ouvertes de rayons 2 et 3 centrées en l'origine. De plus, soit χ une fonction de classe C^∞ telle que :

$$\chi = 1 \text{ dans } O_1 \text{ et } \chi = 0 \text{ hors de } O_2. \quad (27)$$

Par inégalité triangulaire, il vient :

$$\|u_n\|_H \leq \|\chi u_n\|_H + \|(1 - \chi) u_n\|_H. \quad (28)$$

Comme χu_n est à support inclus dans $\overline{O_2}$, nous avons :

$$\|\chi u_n\|_H \leq C \|\chi u_n\|_{H^1(O_2)} \leq C \|u_n\|_{H^1(O_2)} \rightarrow 0. \quad (\text{see (R)}) \quad (29)$$

De même, le support de $1 - \chi$ est inclus dans $\overline{\Omega_H} \cup \overline{\Omega_S}$

$$\|(1 - \chi) u_n\|_H \leq \|(1 - \chi) u_n\|_{W_0^1(\Omega_H)} + \|(1 - \chi) u_n\|_{W_0^1(\Omega_S)}. \quad (30)$$

Il nous suffit alors d'appliquer (24)

$$\|(1 - \chi) u_n\|_H \leq C \left(\|\nabla[(1 - \chi)u_n]\|_{L^2(\Omega_H)} + \|\nabla[(1 - \chi)u_n]\|_{L^2(\Omega_S)} \right) \quad (31)$$

et de remarquer que $\nabla(1 - \chi)$ est à support dans O_2 pour obtenir :

$$\|(1 - \chi) u_n\|_H \leq C \left(\|\nabla(1 - \chi)\|_{L^\infty(O_2)} \|u_n\|_{L^2(O_2)} + \|1 - \chi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (32)$$

D'où, il vient :

$$\|(1 - \chi) u_n\|_H \leq C \left(\|u_n\|_{L^2(O_2)} + \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \right) \rightarrow 0. \quad (\text{see (25) and (R)}) \quad (33)$$

De (29) et (33), nous tirons la convergence forte de u_n dans H vers 0, ce qui contredit (25).

Références

- [1] C. Amrouche , V. Girault, J. Giroire, Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in \mathbb{R}^n , J. Math. Pures Appl. 73 (1994) 579-606.
- [2] T. Z. Boulmezaoud, Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Mathématique, Volume 328, Numéro 3 (1999) 221-226.
- [3] J. Giroire, Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales, thèse d'état de l'université de Pierre et Marie Curie, septembre (1987).

- [4] A. M. Il'in, Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, Translations of Mathematical Monographs, Volume 102, Translated from the Russian by V. Minachin, American Mathematical Society, (1992).
- [5] M. N. Le Roux, Résolution numérique du problème de potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis, Thèse de troisième cycle de l'université de Rennes, octobre (1974).
- [6] S. Tordeux, Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes, Thèse de doctorat de l'université de Versailles, (2004).



Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399