

# Stratégie optimale d'un problème dans le cadre de la lutte biologique

M. Jerry, Jean-Luc Gouzé

► **To cite this version:**

M. Jerry, Jean-Luc Gouzé. Stratégie optimale d'un problème dans le cadre de la lutte biologique.  
RR-5253, INRIA. 2004, pp.25. inria-00070745

**HAL Id: inria-00070745**

**<https://hal.inria.fr/inria-00070745>**

Submitted on 19 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Stratégie optimale d'un problème dans le cadre de la  
lutte biologique*

M. Jerry — J.L. Gouzé

**N° 5253**

Juillet 2004

Thème BIO



*rapport  
de recherche*



## Stratégie optimale d'un problème dans le cadre de la lutte biologique

M. Jerry <sup>\*†</sup> , J.L. Gouzé<sup>‡</sup>

Thème BIO — Systèmes biologiques  
Projet Comore

Rapport de recherche n° 5253 — Juillet 2004 — 25 pages

**Résumé :** Ce travail consiste en l'étude d'un problème de contrôle optimal dans le cadre de la lutte biologique coccinelle/puceron. Nous nous intéressons à trouver la condition initiale optimale de coccinelles que nous devons introduire pour réduire les dégâts causés par les pucerons. Nous considérons différents critères de minimisation, et différents modèles, de complexité croissante.

**Mots-clés :** Condition initiale optimale, lutte biologique, critères de minimisation, contrôle optimal.

\* jemounir@yahoo.fr

† Laboratoire SIANO, Département de Mathématiques et d'Informatique. Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, B.P. 133, Kénitra, Maroc

‡ Jean-Luc.Gouze@sophia.inria.fr

## Optimal strategie of a problem of biological control

**Abstract:** This work consists in the study of a optimal control problem within the framework of the biological control ladybird/aphids. We are interested to find the optimal initial condition of ladybirds which we must introduce to reduce the damage caused by the aphids; we consider several criteria for optimizing, and several models, of increasing complexity.

**Key-words:** Optimal initial condition, biological control, criterion of minimization, optimal control.

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation et le problème de contrôle.</b>	<b>5</b>
2.1	Les modèles. . . . .	5
2.2	Contrôle et critère . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Résolution du premier critère de minimisation</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Résolution du deuxième critère de minimisation</b>	<b>11</b>
4.1	Cas d'un système linéaire . . . . .	11
4.2	Cas d'un système non linéaire . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Résolution du troisième critère de minimisation</b>	<b>13</b>
5.1	Cas linéaire . . . . .	13
5.2	Cas non linéaire . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>24</b>

## 1 Introduction.

Nous nous intéressons dans ce papier à résoudre analytiquement un problème de lutte biologique, où notre principal objectif est de déterminer la condition initiale optimale des coccinelles que nous devons lâcher sur une culture ravagée par les pucerons : l'immense majorité des pucerons connus sont des espèces monophages ou associées étroitement à une série de plantes de la même famille botanique. Ils forment un exemple de ravageurs hautement évolués, singulièrement spécialisés et avec une forte capacité d'adaptation au milieu. Ainsi le puceron *Aphis gossypii* est un ravageur des cultures de cucurbitacées sous serre (concombre et melon). Ravageur car les dégâts qu'il cause entraînent une baisse du rendement des plantes.

Dans ce contexte, diverses méthodes ont été développées pour pallier à ces problèmes. L'utilisation de pesticides dans le cadre de la lutte chimique a des conséquences néfastes sur l'écosystème. Ces inconvénients ont encouragé la recherche d'alternatives moins nuisibles pour l'environnement. La lutte biologique est définie par [9] comme étant l'utilisation d'êtres vivants ou de leurs produits pour empêcher ou réduire les pertes ou dommages causés par des organismes nuisibles.

Le développement des stratégies de lutte biologique semble judicieux étant donné qu'un nombre croissant d'espèces nuisibles développent une résistance aux insecticides. Rabasse et al [10] ont mis en évidence ce phénomène chez le puceron *Aphis gossypii*. Cependant, l'utilisation pratique en lutte biologique exige de l'auxiliaire une voracité importante, un potentiel reproducteur élevé et la possibilité d'être produit en masse. Ces critères de sélection sont remplis par la coccinelle *Harmonia axyridis*. Cette dernière en provenance de Chine a été importée en France par l'équipe "entomologie et lutte biologique" du centre INRA d'antibes. Une étude approfondie des caractéristiques biologiques et comportementales de cette espèce a montré qu'il s'agissait d'un auxiliaire potentiel de lutte biologique contre les pucerons.

Il y a plusieurs travaux mathématiques qui ont étudié la prédation du puceron par les coccinelles, ou tout simplement les problèmes de proie-prédateur, soit en étudiant les systèmes décrivant l'évolution des deux biomasses d'une façon analytique ou par simulation numérique, pour montrer l'existence des points d'équilibres et la stabilité du système en question, soit en ajoutant un contrôle classique dans le modèle et résoudre le problème de contrôle optimal en appliquant les outils d'optimisation : entre-autres le théorème du principe du maximum, le hamiltonien et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, citons par exemple le travail de Frazer et Gilbert [5], Chaudhuri et Saha [2], ainsi que Guitierrez et al. [7].

Mais notre principal objectif est la mise au point des stratégies optimales de lâcher sur cultures [6], pour améliorer l'efficacité du traitement biologique, en utilisant les outils de l'automatique et des systèmes dynamiques. Nous allons nous intéresser dans ce travail à l'étude d'un problème de contrôle optimal, pour le cadre de la lutte biologique coccinelle/puceron, et notre objectif est de trouver le nombre des coccinelles qu'il faut introduire de manière à minimiser les dégâts causés par les pucerons sur l'agriculture, avec une contrainte non classique sur l'état. Nous allons utiliser dans ce travail des outils mathématiques et de simulations pour résoudre les différents problèmes envisagés pour cette étude.

## 2 Modélisation et le problème de contrôle.

Dans ce paragraphe nous introduisons les différents modèles ainsi que le critère de minimisation que nous utiliserons tout au long de ce travail.

### 2.1 Les modèles.

Le modèle de base pour notre étude est un modèle non linéaire, de type proie-prédateur [1, 3, 4, 8] :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = a.P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - b\frac{P(t)}{P(t)+c}C(t) \\ \dot{C}(t) = e\frac{P(t)}{P(t)+c}C(t) - d.C(t). \end{cases} \quad (1)$$

$P(t)$  représentant la biomasse de la population de pucerons et  $C(t)$ , la biomasse de la population de coccinelles.

Les paramètres de ce modèles sont  $a, K, b, c, e$  et  $d$  :

- $a$  : taux de croissance intrinsèque des proies,
- $K$  : capacité de soutien du milieu,  $P(t) \in [0, K]$ ,
- $b$  : masse maximale de proies attaquées par unité de temps,
- $c$  : défini tel que  $f(c) = \frac{b}{2}$  avec  $f(x) = \frac{bx}{x+c}$ , où la fonction  $f$  est le taux de prédation, relation entre la masse de proies attaquées par un prédateur par unité de temps et la masse de proies disponibles,
- $e$  :  $e = b.c_u$  où  $c_u$  est le coefficient d'utilisation, autrement dit le pourcentage de proies ingérées par les prédateurs,
- $d$  : taux de disparition des prédateurs (mortalité et fuite).

On effectue une mise à l'échelle afin que les valeurs de  $P$  et  $C$  ne deviennent pas trop grandes. Pour ce faire on applique un changement de variables :

$$P_e = \frac{P}{K}, \quad C_e = \frac{C}{C_M}.$$

Comme la variable  $P$  varie entre 0 et  $K$ , on choisit pour le changement de diviser par  $K$ , et ainsi, la nouvelle variable  $P_e$  varie entre 0 et 1. On cherche à faire de même pour la variable  $C$ , or on ne connaît pas la valeur maximale que peut prendre cette variable, néanmoins on prendra  $C_M$  assez grand (proche de  $K$ ) afin d'avoir  $C_M$  le plus souvent possible dans  $[0, 1]$ . Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{P}_e(t) = a.P_e(t)(1 - P_e(t)) - \frac{b}{K} \cdot \frac{P_e(t)}{P_e(t) + \frac{c}{K}} C_M.C_e(t) \\ \dot{C}_e(t) = e\frac{P_e(t)}{P_e(t) + \frac{c}{K}} C_e(t) - d.C_e(t). \end{cases} \quad (2)$$



Dans la suite, par souci de simplification, on notera  $(P, C)$  pour  $(P_e, C_e)$ . Le modèle (2) sera étudié sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , le temps 0 étant le moment où la biomasse des pucerons atteint le seuil minimum de détection  $P_0$ , et la variable  $T$  indiquant le temps final considéré, le moment de la récolte.

Le comportement du système (2) est présenté par les deux graphes suivants, et les paramètres du système sont donnés par [4], donc :

$$a = 0,4, K = 40000, b = 2, c = 100000, e = 1, d = 0,1, C_M = 30000, P_0 = 0,0375, C_0 = 0,015.$$

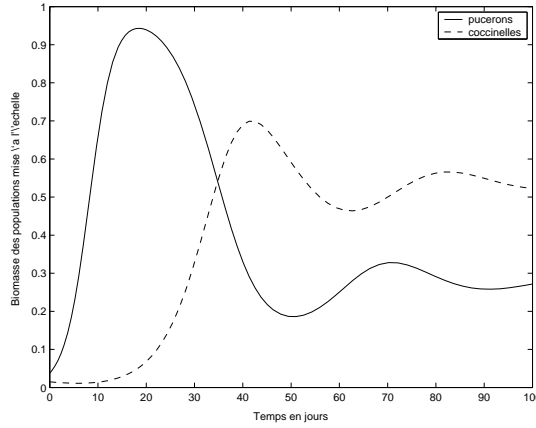


FIG. 1 – Evolution des populations au cours du temps.

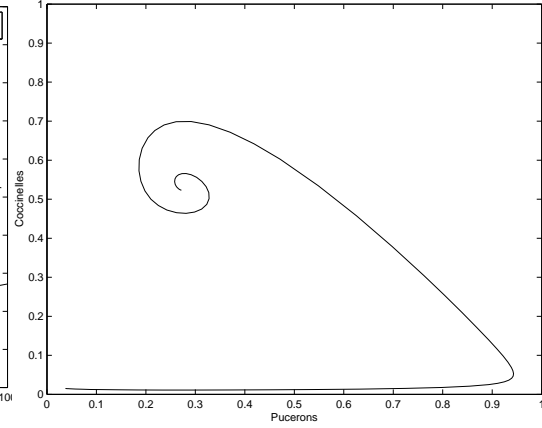


FIG. 2 – Portrait de phase.

Les points d'équilibres du système sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = 0 \\ \dot{C}(t) = 0 \end{cases}$$

Le système (2) admet trois points d'équilibres :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(P^*, C^*)$ , où

$$\begin{cases} P^* = \frac{cd}{K(e-d)} \\ C^* = \frac{ace}{b(e-d)C_M} \left(1 - \frac{cd}{K(e-d)}\right) \end{cases}$$

Ces points d'équilibres agissent sur le comportement du système :  $(0, 0)$  est instable,  $(1, 0)$  est stable sous la condition  $\frac{e}{1 + \frac{c}{K}} - d < 0$ , or cette condition n'est jamais vérifiée, en

effet  $(\frac{e}{1 + \frac{c}{K}} - d < 0) \rightarrow (\frac{cd}{k(e-d)} = P^* > 1$ , et comme  $P^* \in [0, 1]$ , alors  $(1, 0)$  est instable,

et  $(P^*, C^*)$  est stable sous la condition  $\frac{K-c}{2} \leq \frac{cd}{e-d}$ . Les paramètres du système (2) sont choisis tels que cette dernière condition soit vérifiée.

Les variations des solutions du système (2),  $P(t)$  et  $C(t)$ , sont définies par les courbes isoclines. Ces courbes sont déterminées par  $\dot{P}(t) = 0$  pour les isoclines liées à  $P$ , et par  $\dot{C}(t) = 0$  pour celles liées à  $C$ . Les points d'intersection des isoclines sont les points d'équilibre. La figure ci-dessous illustre ces variations.

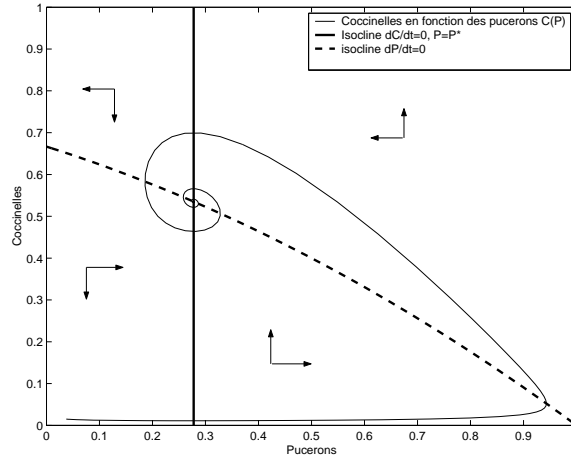


FIG. 3 – Détermination des isoclines du système et de la variation des deux états  $C$  et  $P$  par rapport au temps.

Le deuxième modèle pour notre étude est un modèle simplifié du premier (2). Si nous supposons que le paramètre  $c$  prend des valeurs assez grandes, alors les deux fonctions  $\frac{P(t)}{K.P(t)+c}$  et  $\frac{\dot{P}(t)}{P(t)+\frac{c}{K}}$  du système (2) peuvent être approchées par les deux fonctions  $\frac{P}{c}$  et  $\frac{KP}{c}$  respectivement, ainsi nous considérons le modèle de Lotka-Volterra [3, 2, 8] :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = a.P(t)(1-P(t)) - b'.P(t).C(t) \\ \dot{C}(t) = e'.P(t).C(t) - d.C(t). \end{cases} \quad (3)$$

Où :

$$b' = \frac{b.C_M}{c} \text{ et } e' = \frac{e.K}{c},$$

mais dans la suite, on notera  $b'$  et  $c'$  par  $b$  et  $c$  respectivement. Les points d'équilibres de ce système sont :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(P^*, C^*)$ , où

$$\begin{cases} P^* = \frac{d}{e} \\ C^* = \frac{a(e-d)}{bd} \end{cases}$$

le point  $(0, 0)$  est instable, ainsi que le point  $(1, 0)$ , car leurs matrices jacobiennes ne vérifient pas les conditions de Routh-Hurwitz, par contre le point  $(P^*, C^*)$  est stable, puisque sa matrice jacobienne vérifie la condition de Routh-Hurwitz.

Le comportement du système (3) est présenté par les deux graphes suivants, où :

$$a = 0,4, b = 0,6, e = 0,4, d = 0,1, P_0 = 0,0375, C_0 = 0,015.$$

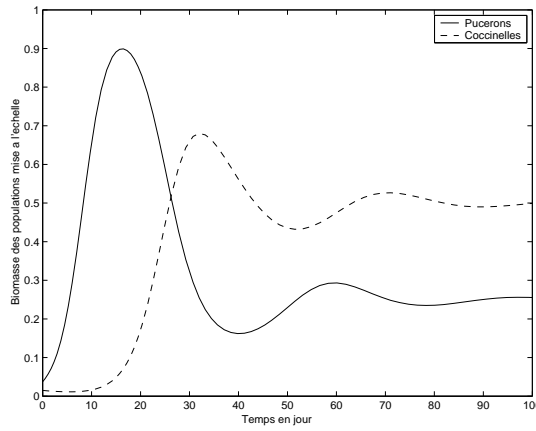


FIG. 4 – Evolution des populations au cours du temps.

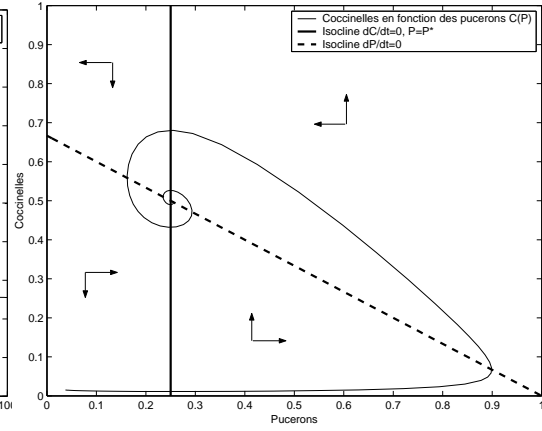


FIG. 5 – Portrait de phase.

Comme nous pouvons remarquer, d'après ces figures, il n'y a pas de grandes différences (numériques) entre ce modèle (3) et le modèle (2).

## 2.2 Contrôle et critère

Dans notre problème,  $P(t)$  représente l'évolution de la population des pucerons, et  $C(t)$  celle de la population des coccinelles. Notre but est d'agir sur la population de pucerons (de la faire diminuer) en introduisant des coccinelles  $C_0$ .

Ce qui correspond dans notre système, à agir sur la condition initiale  $C_0$ , qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[C_0^{min}, C_0^{max}]$ , où le temps 0 est le moment où la biomasse des pucerons atteint le seuil minimum de détection  $P_0$ . Ainsi notre étude se focalisera sur trois critères de minimisation, nous allons commencer par le plus simple :

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \alpha C_0, \text{ avec } P(t) \leq P_m. \quad (4)$$

où  $\alpha$  présente le prix d'achat des coccinelles par unité, ainsi  $\alpha C_0$  représente le coût de l'introduction des coccinelles et  $P_m$ , le seuil maximum économiquement acceptable par les agriculteurs, donc la biomasse des pucerons doit rester toujours en-dessous de ce seuil (une contrainte sur l'état) pour tout  $t \in [0, T]$ . Le deuxième critère de minimisation est le suivant :

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \alpha C_0 + \beta \int_0^T P(t) dt. \quad (5)$$

où  $\beta \int_0^T P(t) dt$  représente les dégâts effectués par les pucerons sur l'agriculture. La résolution de cette étude a été faite par Caroline Bidot [1]. Le dernier critère de minimisation est tout simplement une combinaison entre le premier (4) et le deuxième (5).

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \alpha C_0 + \beta \int_0^T P(t) dt, \text{ avec } P(t) \leq P_m. \quad (6)$$

Ainsi nous aurons un problème de contrôle non classique puisqu'il correspond à contrôler la condition initiale des coccinelles ou tout simplement le nombre du lâcher des coccinelles avec une contrainte sur la biomasse des pucerons.

### 3 Résolution du premier critère de minimisation

Nous étudierons dans ce paragraphe la combinaison entre le système (2) et le critère à minimiser (4), alors le problème s'écrit de la façon suivante :

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \left[ \begin{array}{l} \alpha C_0, \text{ avec } P(t) \leq P_m \text{ où,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{P}(t) = a.P(t)(1 - P(t)) - b \frac{P(t)}{K.P(t) + c} C_M.C(t) \\ \dot{C}(t) = e \frac{P(t)}{P(t) + \frac{c}{K}} C(t) - d.C(t). \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (7)$$

Le critère de minimisation pour le problème (7) est une fonction linéaire par rapport à  $C_0$ . Or le paramètre  $\alpha$  est de signe positif, donc la solution optimale est  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$ , mais comme le critère contient une contrainte non classique sur la biomasse des pucerons, alors nous aurons trois situations possibles suivant les paramètres du problème, et chaque situation sera justifiée par une figure :

**Situation 1**  $\forall C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$ , la trajectoire  $(P(t), C(t))$  du système (2) ne coupe pas la droite  $P = P_m$ , et dans ce cas, nous chercherons la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[C_0^{min}, C_0^{max}]$ .

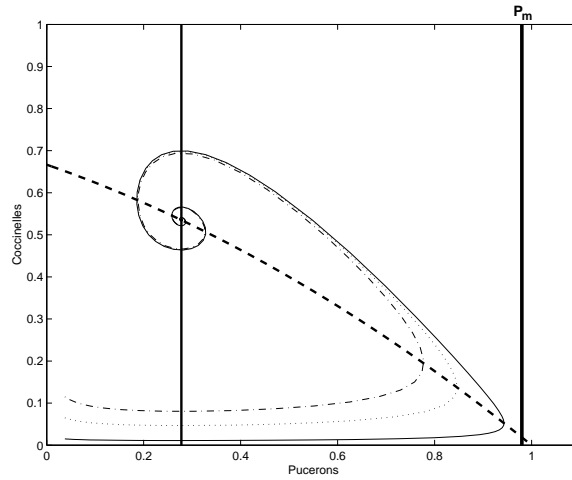


FIG. 6 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

**Situation 2** *il existe un  $\tilde{C}_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$  tel que la trajectoire correspondante  $(\tilde{P}(t), \tilde{C}(t))$  est tangente à la droite  $P = P_m$  au point  $\left(P_m, \frac{a(1 - P_m)(K P_m + c)}{b C_M}\right)$ , alors dans ce cas, nous allons chercher la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[\tilde{C}_0, C_0^{max}]$ .*

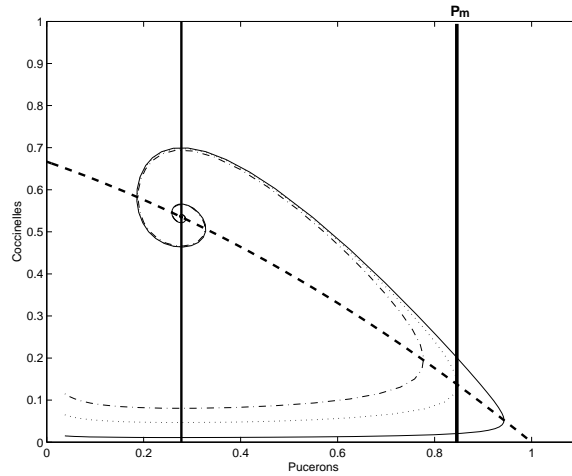


FIG. 7 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

**Situation 3** toutes les trajectoires coupent la droite  $P = P_m$ , ce qui implique que dans ce cas, il n'existe pas une solution optimale du problème.

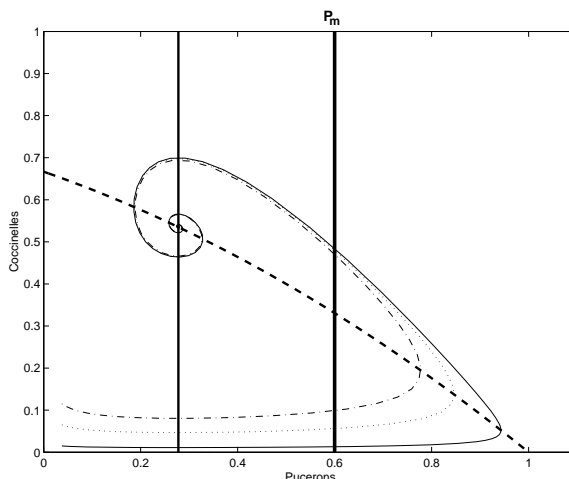


FIG. 8 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

D'après cette étude, nous avons tous les ingrédients pour donner la solution optimale dans chaque situation : dans la situation (1) la solution est  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$ , pour la deuxième (2), la solution est  $\hat{C}_0 = \bar{C}_0$ , par contre dans la troisième (3), nous n'avons aucune solution pour le problème.

**Conclusion :** La solution optimale pour le premier critère de minimisation ne dépend pas du coût  $\alpha$  dans les deux premières situations (1,2), par contre nous remarquons que dans la deuxième (2) elle prend une valeur comprise entre  $C_0^{min}$  et  $C_0^{max}$ .

## 4 Résolution du deuxième critère de minimisation

L'étude consiste à rechercher, pour les problèmes donnés dans le deuxième paragraphe, la condition initiale  $C_0$ , pour un  $P_0$  donné, qui va minimiser la fonction coût :

$$J(C_0) = \alpha C_0 + \beta \int_0^T P(t) dt .$$

Tout d'abord, simplifions le problème.

### 4.1 Cas d'un système linéaire

Regardons ce qu'il se passe dans le cadre d'un système linéaire  $\dot{X} = AX + B$  où  $X = (P, C)^T$ ,  $B = (b_1, b_2)^T$  et  $A$  une matrice carrée. Dans ce cas, minimiser par rapport à  $X_0$  le

critère

$$J(X_0) = QX_0 + R \int_0^T X(t)dt ,$$

où  $Q = (Q_1, Q_2)$  et  $R = (R_1, R_2)$ , revient à choisir pour  $X_0$  l'une des bornes de son intervalle de définition  $[X_0^{min}, X_0^{max}]$ . En effet, la solution de  $\dot{X} = AX + B$  est donné par la formule :

$$X(t) = e^{A.t}.X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bd\tau .$$

Si on remplace  $X$  par son expression dans celle du critère, on obtient :

$$J(X_0) = (Q + RI_T)X_0 + \int_0^T R \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bd\tau dt , \quad (8)$$

avec  $I_T = \int_0^T e^{At}dt$ . Le terme  $\int_0^T R \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bd\tau dt$  est constant par rapport à  $X_0$ , de même que le vecteur  $Q + RI_T$  (une étude exhaustive est faite sur la valeur  $(Q + RI_T)X_0$  dans le prochain paragraphe). La fonction  $J$  est donc linéaire en  $X_0$ , et par conséquent en  $C_0$ . Alors si le signe de la valeur  $(Q + RI_T)X_0$  est positif, la solution optimale est  $\hat{X}_0 = X_0^{min}$ , par contre si c'est négatif, la solution est  $\hat{X}_0 = X_0^{max}$ .

## 4.2 Cas d'un système non linéaire

Nous considérons maintenant le problème suivant :

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \left[ \begin{array}{l} \alpha C_0 + \beta \int_0^T P(t)dt , \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{P}(t) = a.P(t)(1 - P(t)) - b.P(t).C(t) \\ \dot{C}(t) = e.P(t).C(t) - d.C(t) . \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (9)$$

Or l'expression de  $\dot{C}$  ( $\dot{C} = e.P(t).C(t) - d.C(t)$ ) amène, pour  $C_0 \neq 0$ ,  $P = \frac{\dot{C}}{eC} + \frac{d}{e}$ . En intégrant sur  $[0, T]$ , on obtient :

$$\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{e} (\ln(C(T)) - \ln(C_0)) + \frac{d}{e}T .$$

D'où

$$J(C_0) = \alpha C_0 - \frac{\beta}{e} \ln(C_0) + \frac{\beta}{e} (dT + \ln(C(T))) . \quad (10)$$

En supposant  $T$  assez grand,  $C(T)$  tend vers l'équilibre qui est stable, quelle que soit la condition initiale, on peut considérer  $C(T)$  comme indépendant de  $C_0$ . Alors, en dérivant  $J$  par rapport à  $C_0$ , on obtient  $\alpha - \frac{\beta}{eC_0}$ .

Pour trouver  $C_0$  qui minimise  $J$ , on cherche  $C_0$  qui annule  $\frac{dJ}{dC_0}(C_0) = \alpha - \frac{\beta}{eC_0}$  (car la fonction  $J(C_0)$  est convexe par rapport à  $C_0$ . Ce qui donne  $\hat{C}_0 = \frac{\beta}{e\alpha}$  si  $\frac{\beta}{e\alpha} \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$ , sinon la condition initiale optimale est  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$  si  $J(C_0^{min}) < J(C_0^{max})$  ou  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si  $J(C_0^{max}) < J(C_0^{min})$ .

**Conclusion :** Pour ce problème (9), le choix de la condition initiale pour minimiser le critère va être dépendant du rapport  $\frac{\beta}{\alpha}$  entre le coût des dégâts causés par les pucerons et le coût des coccinelles.

## 5 Résolution du troisième critère de minimisation

Nous analyserons dans ce paragraphe le troisième critère de minimisation, qui contient une contrainte non classique sur la biomasse des pucerons, et nous allons commencer par résoudre le cas linéaire ; nous entamerons après le cas non linéaire.

### 5.1 Cas linéaire

Nous allons étudier dans cette section le linéarisé des deux systèmes (2) et (3). Notre objectif est de résoudre le problème autour du point d'équilibre. Nous commencerons par le système (3) :

$$(S) \begin{cases} \dot{P}(t) = a.P(t)(1 - P(t)) - b.P(t).C(t), & P(0) = P_0 \text{ est une constante} \\ \dot{C}(t) = e.P(t).C(t) - d.C(t), & C(0) = C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]. \end{cases} \quad (11)$$

L'unique point d'équilibre stable du système est le suivant :

$$P^* = \frac{d}{e}, \quad C^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{d}{e}\right).$$

Maintenant, nous linéarisons le système (S) autour du point d'équilibre  $(P^*, C^*)$ . Posons :

$$\begin{cases} x(t) = P(t) - P^* \\ y(t) = C(t) - C^*. \end{cases}$$

Le système linéarisé est le suivant :

$$(S') \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{a.d}{e}x(t) - \frac{b.d}{e}y(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{e.a}{b} \left(1 - \frac{d}{e}\right)x(t). \end{cases} \quad (12)$$

En remplaçant  $x(t)$  et  $y(t)$  par leur valeur, on trouve le système suivant :



$$(S') \begin{cases} \dot{P}(t) = -\frac{a.d}{e}P(t) - \frac{b.d}{e}C(t) + \frac{a.d}{e} \\ \dot{C}(t) = \frac{e.a}{b}(1 - \frac{d}{e})P(t) - \frac{a.d}{b}(1 - \frac{d}{e}). \end{cases} \quad (13)$$

Nous pouvons réécrire le système  $(S')$  de la façon suivante :

$$(S') \begin{cases} \dot{P}(t) = a_{11}P(t) + a_{12}C(t) + b_1 \\ \dot{C}(t) = a_{21}P(t) + a_{22}C(t) + b_2, \end{cases} \quad (14)$$

où :

$$a_{11} < 0, a_{12} < 0, a_{21} > 0, a_{22} = 0, b_1 > 0, b_2 < 0.$$

Etudions maintenant le système  $(S')$ , en s'intéressant à son plan de phase. Cherchons tout d'abord les isoclines du système (14) :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = 0 \rightarrow P = \frac{-a_{12} \cdot C - b_1}{a_{11}} \\ \dot{C}(t) = 0 \rightarrow P = \frac{-b_2}{a_{21}}, \end{cases} \quad (15)$$

La figure suivante décrit le résultat donné par le système (15).

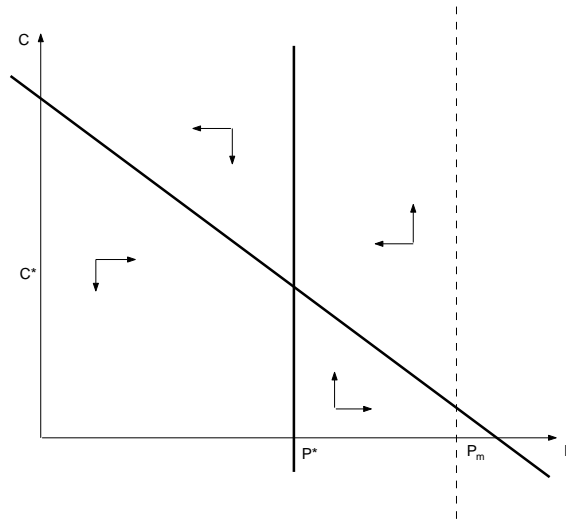


FIG. 9 – Détermination des isoclines du système  $S'$  et de la variation des deux états  $C$  et  $P$  par rapport au temps.

Or d'après cette figure, nous pouvons constater que nous avons aussi trois situations possibles :

**Situation 4**  $\forall C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$ , la trajectoire  $(P(t), C(t))$  du système (14) ne coupe pas la droite  $P = P_m$ , et dans ce cas, nous chercherons la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[C_0^{min}, C_0^{max}]$ .

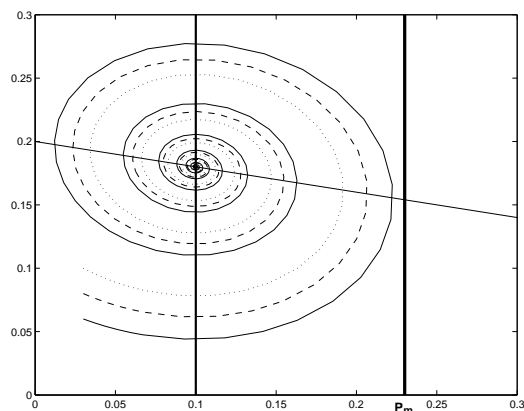


FIG. 10 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

**Situation 5** il existe un  $\bar{C}_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$  tel que la trajectoire correspondante  $(\bar{P}(t), \bar{C}(t))$  est tangente à la droite  $P = P_m$  au point  $(P_m, \frac{a}{b}(1 - P_m))$ , alors dans ce cas, nous allons chercher la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[\bar{C}_0, C_0^{max}]$ .

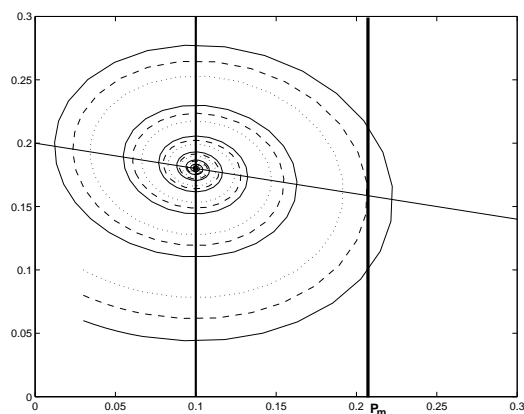


FIG. 11 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

**Situation 6** toutes les trajectoires coupent la droite  $P = P_m$ , ce qui implique que dans ce cas, il n'existe pas une solution optimale du problème.

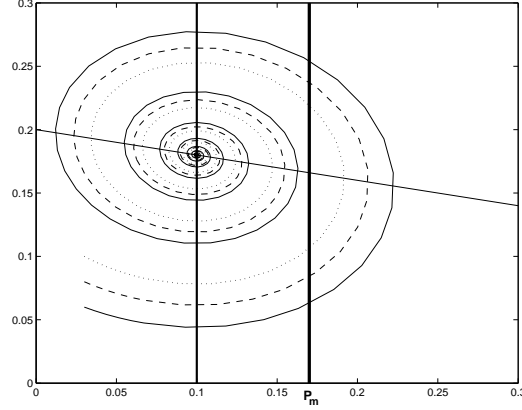


FIG. 12 – La position de la trajectoire  $(P(t), C(t))$  par rapport à la droite  $P_m$ .

Maintenant, nous intéresserons à l'évaluation de la fonctionnelle  $J(C_0)$ . Posant  $X^t(t) = (P(t), C(t))$ . Ainsi le critère de minimisation va s'écrire dans le cas linéaire :

$$J(C_0) = \bar{\alpha}^t \cdot X_0 + \int_0^T \bar{\beta}^t \cdot X(t) dt, \quad (16)$$

où :

$$\bar{\alpha}^t = (0, \alpha), \quad \bar{\beta}^t = (\beta, 0), \quad X_0^t = (P_0, C_0).$$

Développons maintenant le critère de minimisation du problème en simplifiant son écriture. La solution du système (14) est donnée par l'équation suivante :

$$X(t) = e^{A \cdot t} \cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau, \quad (17)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Donc la fonctionnelle  $J(C_0)$  s'écrit de la façon suivante, en remplaçant  $X(t)$  par son expression (17) :

$$J(C_0) = \bar{\alpha}^t \cdot X_0 + \int_0^T \bar{\beta}^t \left[ e^{A \cdot t} \cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\alpha}^t . X_0 + \int_0^T \bar{\beta}^t [e^{A.t} . X_0 - A^{-1} . B + A^{-1} . e^{A.t} . B] dt \\
&= \bar{\alpha}^t . X_0 + \bar{\beta}^t (A^{-1} (e^{A.T} . X_0 - X_0) - A^{-1} . B . T + (A^{-1})^2 . e^{A.T} . B - (A^{-1})^2 . B) \\
&= (\bar{\alpha}^t + \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} - \bar{\beta}^t . A^{-1}) X_0 + \bar{\beta}^t . (A^{-1})^2 . e^{A.T} . B - \bar{\beta}^t (A^{-1} . B . T + (A^{-1})^2 . B) .
\end{aligned}$$

Comme on cherche le minimum de la fonctionnelle  $J(C_0)$  par rapport à  $C_0$ , nous pouvons déduire de la dernière équation, que le minimum dépend du signe de la valeur  $(\bar{\alpha}^t + \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} - \bar{\beta}^t . A^{-1}) X_0$ . On a :

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_{12} . a_{21}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est :

$$\lambda^2 - \lambda a_{11} - a_{12} a_{21} = 0$$

Donc, le discriminant correspondant est :

$$\Delta = a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21} = ad \left( \frac{ad}{e^2} + \frac{4d}{e} - 4 \right)$$

D'après cette équation, on remarque que nous avons aucune information sur le signe du discriminant  $\Delta$ , ce qui laisse dire que nous avons trois cas possible : soit la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes réelles ou complexes, soit une valeur propre multiples. Ainsi, commençons par les deux premiers cas : lorsque la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes (réelles ou complexes)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . En utilisant l'interpolation de Sylvester, on calcule  $e^{AT}$  en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 T} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 T} \\ I & A & e^{AT} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Alors :

$$e^{AT} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} (\lambda_2 - a_{11})e^{\lambda_1 T} + (a_{11} - \lambda_1)e^{\lambda_2 T} & a_{12}(e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}) \\ a_{21}(e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}) & \lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Donc :

$$(\bar{\alpha}^t - \bar{\beta}^t . A^{-1}) X_0 = \left( (0, \alpha) - \frac{-1}{a_{12} . a_{21}} (\beta, 0) \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} P_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$= \left( \alpha - \frac{\beta}{a_{21}} \right) C_0 . \quad (22)$$

Et,

$$\begin{aligned} & \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} . X_0 = \\ & \frac{-\bar{\beta}^t}{(\lambda_2 - \lambda_1) a_{12} . a_{21}} \left( \begin{array}{cc} -a_{12} a_{21} (e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}) & -a_{12} (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T}) \\ -a_{21} (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T}) & e^{\lambda_1 T} (a_{12} a_{21} + \lambda_2 a_{11}) - e^{\lambda_2 T} (a_{12} a_{21} + \lambda_1 a_{11}) \end{array} \right) . X_0 \\ & = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1) a_{12} . a_{21}} (-\beta a_{12} a_{21} (e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}) P_0 - \beta a_{12} (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T}) C_0) . \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$(\bar{\alpha}^t + \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} - \bar{\beta}^t . A^{-1}) X_0 = \left( \alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T})}{(\lambda_2 - \lambda_1) a_{21}} \right) C_0 + \frac{\beta (e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T})}{\lambda_2 - \lambda_1} P_0 . \quad (23)$$

Dans le cas où les valeurs propres de la matrice  $A$  sont complexes, autrement dit, si  $\lambda_1 = a + ib$  et  $\lambda_2 = a - ib$ , alors on aura :

$$\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T})}{(\lambda_2 - \lambda_1) a_{21}} = \alpha + \frac{\beta}{a_{21}} \left( \frac{e^{aT}}{b} (b \cos(bT) - a \sin(bT)) - 1 \right) , \quad (24)$$

où

$$a = \frac{a_{11}}{2} \text{ et } b = \sqrt{-a_{11}^2 - 4a_{12}a_{21}}$$

Maintenant, nous pouvons donner la solution optimale du problème (14), si la matrice admet deux valeurs propres distinctes réelles ou complexes. Si nous sommes dans la première situation (4), la solution optimale est soit  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$  si le signe de l'équation (24) est positive, soit  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si le signe de l'équation (24) est négative, dans la deuxième situation (5), la solution optimale est soit  $\hat{C}_0 = \bar{C}_0$  si le signe de l'équation (24) est positive, soit  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si le signe de l'équation (24) est négative.

Les deux figures suivantes justifient l'étude faite au-dessus dans les deux cas réels et complexes respectivement :

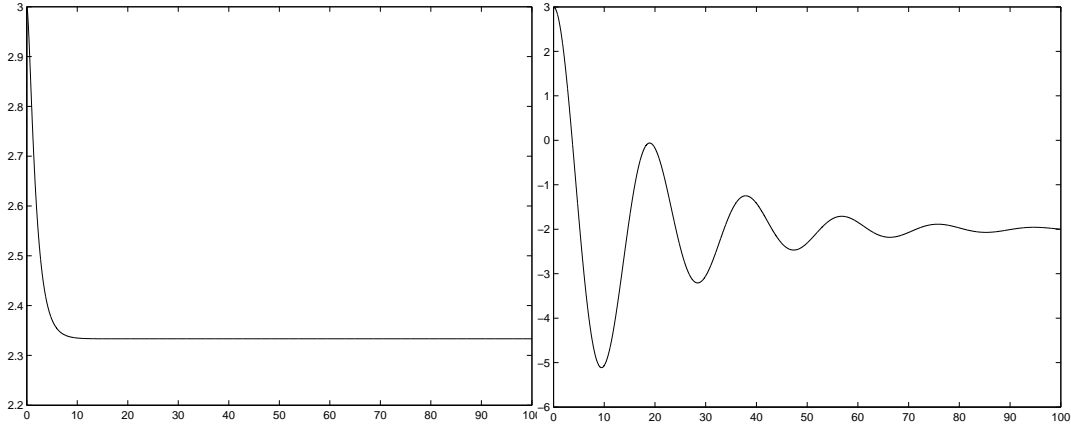


FIG. 13 – Evolution de la fonction (23) dans le cas réel en fonction de  $T$ .

FIG. 14 – Evolution de la fonction (24) dans le cas complexe en fonction de  $T$ .

Par contre si la matrice  $A$  admet une valeur propre multiples  $\lambda$ , en utilisant l'interpolation de Sylvester, on calcule  $e^{AT}$  en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & Te^{\lambda T} \\ 1 & \lambda & e^{\lambda T} \\ I & A & e^{AT} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Alors :

$$e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda T}(1 + T(a_{11} - \lambda)) & a_{12}Te^{\lambda T} \\ a_{21}Te^{\lambda T} & e^{\lambda T}(1 - T\lambda) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} . X_0 &= \frac{-\bar{\beta}^t}{a_{12} . a_{21}} \begin{pmatrix} -a_{12}a_{21}Te^{\lambda T} & -a_{12}e^{\lambda T}(1 - T\lambda) \\ -a_{21}e^{\lambda T}(1 - T\lambda) & -a_{12}a_{21}Te^{\lambda T} + a_{11}e^{\lambda T}(1 - T\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{a_{12} . a_{21}} (-\beta a_{12}a_{21}Te^{\lambda T}P_0 - \beta a_{12}e^{\lambda T}(1 - T\lambda)C_0) . \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$(\bar{\alpha}^t + \bar{\beta}^t . A^{-1} . e^{A.T} - \bar{\beta}^t . A^{-1}) X_0 = \left( \alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}} \right) C_0 + \beta T e^{\lambda T} P_0 . \quad (27)$$

Maintenant, nous pouvons donner la solution optimale du problème (14), lorsque la matrice  $A$  admet une racine multiple. Si nous sommes dans la première situation (4), la

solution optimale est soit  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$  si le signe de la valeur  $\left(\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}}\right)$  est positive, soit  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si le signe de la valeur  $\left(\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}}\right)$  est négative, dans la deuxième situation (5), la solution optimale est soit  $\hat{C}_0 = \bar{C}_0$  si le signe de la valeur  $\left(\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}}\right)$  est positive, soit  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si le signe de la valeur  $\left(\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}}\right)$  est négative.

La figure suivante justifie l'étude faite au-dessus dans le cas d'une valeur propre multiple :

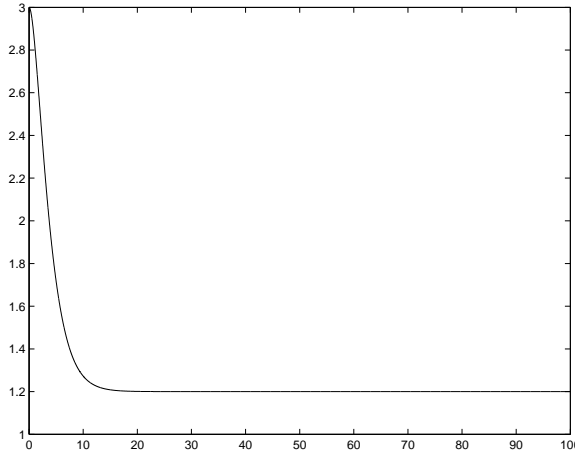


FIG. 15 – Evolution de la fonction (27) dans le cas réel en fonction de  $T$ .

**Conclusion :** Nous constatons dans cette étude que nous avons deux différents cas : le premier cas est lorsque la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes réelles ou multiples négatives, or nous remarquons que d'après la représentation graphique des deux fonctions  $\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta(\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T})}{(\lambda_2 - \lambda_1)a_{21}}$  et  $\alpha - \frac{\beta}{a_{21}} + \frac{\beta e^{\lambda T}(1 - T\lambda)}{a_{21}}$  donnée par les deux figures (13,15) respectivement, que leurs signes changent au plus une fois, alors la solution optimale ne change qu'une fois suivant la valeur de  $T$ . Cette solution ne sera donc pas très sensible à la valeur de  $T$ , par contre dans le deuxième cas où la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes complexes (c'est le cas qui nous intéresse le plus), nous remarquons suivant la représentation graphique de la fonction  $\alpha + \frac{\beta}{a_{21}} \left( \frac{e^{aT}}{b} (b \cos(bT) - a \sin(bT)) - 1 \right)$  donnée par la figure (14), que son signe peut changer plus qu'une fois suivant les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ,

ainsi dans ce cas la détermination de la solution optimale devient de plus en plus difficile, car la fonction oscille en changeant de signe.

On passe maintenant au système (2) :

$$(S_1) \begin{cases} \dot{P}(t) = a.P(t)(1 - P(t)) - b \frac{P(t)}{K.P(t) + c} C_M.C(t), & P(0) = P_0 \text{ est une constante} \\ \dot{C}(t) = e \frac{P(t)}{P(t) + \frac{c}{K}} C(t) - d.C(t), & C(0) = C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]. \end{cases} \quad (28)$$

Nous étudierons ce problème de la même façon que dans le cas précédent. Ce dernier admet un seul point d'équilibre stable  $(P^*, C^*)$ , où

$$\begin{cases} P^* = \frac{cd}{K(e-d)} \\ C^* = \frac{ace}{b(e-d)C_M} \left(1 - \frac{cd}{K(e-d)}\right) \end{cases}$$

Maintenant, nous allons linéariser le système  $S_1$  autour de son point d'équilibre stable. Le système trouvé est le suivant :

$$(S'_1) \begin{cases} \dot{P}(t) = \left[ -aP^* + \frac{bKC_M P^* C^*}{(KP^* + c)^2} \right] (P(t) - P^*) - \frac{bC_M P^*}{KP^* + c} (C(t) - C^*) \\ \dot{C}(t) = \frac{ecC^*}{K(P^* + \frac{c}{K})^2} (P(t) - P^*) . \end{cases} \quad (29)$$

Nous pouvons réécrire le système  $S'_1$  de la façon suivante :

$$(S') \begin{cases} \dot{P}(t) = a_{11}P(t) + a_{12}C(t) + b_1 \\ \dot{C}(t) = a_{21}P(t) + a_{22}C(t) + b_2, \end{cases} \quad (30)$$

où

$$\begin{cases} a_{11} = \left[ -aP^* + \frac{bKC_M P^* C^*}{(KP^* + c)^2} \right] \\ a_{12} = -\frac{bC_M P^*}{KP^* + c} \\ a_{21} = \frac{ecC^*}{K(P^* + \frac{c}{K})^2} \\ a_{22} = 0 \\ b_1 = \frac{bC_M P^*}{KP^* + c} C^* - \left[ -aP^* + \frac{bKC_M P^* C^*}{(KP^* + c)^2} \right] P^* \\ b_2 = -\frac{ecC^*}{K(P^* + \frac{c}{K})^2} P^* \end{cases} \quad (31)$$



Maintenant, nous nous intéressons au signe des paramètres  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $b_1$  et  $b_2$ . En remplaçant  $P^*$  et  $C^*$  par leur valeur, on a :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left[ -aP^* + \frac{bK C_M P^* C^*}{(K P^* + c)^2} \right] \\ &= \frac{acP^*}{(K P^* + c)^2} \left( \frac{-cd^2}{(e-d)^2} - \frac{2cd}{e-d} - c + \frac{eK}{e-d} - \frac{ecd}{(e-d)^2} \right) \end{aligned}$$

En prenant compte de la condition  $\frac{K-c}{2} \leq \frac{cd}{e-d}$ , qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{eK}{e-d} \leq \frac{2ecd}{(e-d)^2} + \frac{ec}{e-d}$$

Alors, on aura :

$$\begin{aligned} a_{11} &\leq \frac{acP^*}{(K P^* + c)^2} \left( \frac{-cd^2}{(e-d)^2} - \frac{2cd}{e-d} - c - \frac{ecd}{(e-d)^2} + \frac{2ecd}{(e-d)^2} + \frac{ec}{e-d} \right) \\ &\leq \frac{acP^*}{(K P^* + c)^2 (e-d)^2} (cd^2 - 2cde - c(e-d)^2 + ce^2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

D'où les signe des paramètres du système  $S'_1$  est le suivant :

$$a_{11} \leq 0, a_{12} < 0, a_{21} > 0, a_{22} = 0, b_1 > 0, b_2 < 0.$$

En conclusion, nous avons trouvé que les signes des paramètres du système  $S'_1$  sont les mêmes que ceux du système  $S'$ , ce qui laisse dire que les résultats trouvés dans l'étude précédente seront valables pour ce cas. On s'intéresse maintenant à résoudre le problème dans le cas non linéaire.

## 5.2 Cas non linéaire

Le problème  $S$  est donné comme suivant :

$$\min_{C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]} \left[ \begin{array}{l} \alpha \cdot C_0 + \int_0^T \beta \cdot P(t) dt \text{ avec } P(t) \leq P_m, \forall t \in [0, T] \text{ où} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{P}(t) = a \cdot P(t)(1 - P(t)) - b \cdot P(t) \cdot C(t), \quad P(0) = P_0 \text{ est une constante} \\ \dot{C}(t) = e \cdot P(t) \cdot C(t) - d \cdot C(t), \quad C(0) = C_0 \in [C_0^{min}, C_0^{max}]. \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (32)$$

Les isoclines du système  $S$  sont :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = 0 \rightarrow C = \frac{a(1-P)}{b} \\ \dot{C}(t) = 0 \rightarrow P = \frac{d}{e}, \end{cases} \quad (33)$$

Or les signes des paramètres du système  $S$  sont tous positifs, alors on aura trois situations possibles :

**Situation 7**  $\forall C_0 \in [C_0^{\min}, C_0^{\max}]$ , la trajectoire  $(P(t), C(t))$  du système (14) ne coupe pas la droite  $P = P_m$ , et dans ce cas, nous chercherons la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[C_0^{\min}, C_0^{\max}]$ .

**Situation 8** il existe un  $\bar{C}_0 \in [C_0^{\min}, C_0^{\max}]$  tel que la trajectoire correspondante  $(\bar{P}(t), \bar{C}(t))$  est tangente à la droite  $P = P_m$ , alors dans ce cas, nous allons chercher la solution optimale du problème dans l'intervalle  $[\bar{C}_0, C_0^{\max}]$ .

**Situation 9** toutes les trajectoires coupent la droite  $P = P_m$ , ce qui implique que dans ce cas, il n'existe pas une solution optimale du problème.

Maintenant, nous intéresserons à l'évaluation de la fonctionnelle  $J(C_0)$ , en remplaçant  $P(t)$  par sa valeur donné par (32), on aura :

$$\begin{aligned} J(C_0) &= \alpha.C_0 + \int_0^T \beta.P(t)dt \\ &= \alpha.C_0 + \int_0^T \beta \left( \frac{\dot{C}(t)}{eC(t)} + d \right) dt \\ &= \alpha.C_0 - \frac{\beta \ln C_0}{e} + \frac{\beta}{e}(\ln C(T) + dT) . \end{aligned}$$

En supposant  $T$  assez grand,  $C(T)$  tend vers l'équilibre qui est stable, quelle que soit la condition initiale, on peut considérer  $C(T)$  comme indépendant de  $C_0$ . Alors, en dérivant  $J$  par rapport à  $C_0$ , on obtient,

$$\alpha - \frac{\beta}{eC_0} .$$

Etudions maintenant la fonctionnelle  $J$  :

$$\begin{aligned} J(C_0) &= \alpha.C_0 - \frac{\beta \ln C_0}{e} + \frac{\beta}{e}(\ln C(T) + dT) \\ \frac{dJ}{dC_0}(C_0) &= \alpha - \frac{\beta}{eC_0} \\ \frac{d^2 J}{dC_0^2}(C_0) &= \frac{\beta}{eC_0^2} > 0 . \end{aligned}$$

Pour trouver  $C_0$  qui minimise  $J$ , on cherche  $C_0$  qui annule  $\frac{dJ}{dC_0}(C_0) = \alpha - \frac{\beta}{eC_0}$ . Ce qui donne  $C_0^* = \frac{\beta}{e\alpha}$ .

Revenons aux trois situations du problème, alors si on est dans la première situation (7) la solution optimale du problème (32) est  $\hat{C}_0 = C_0^*$  si  $\frac{\beta}{e\alpha} \in [C_0^{min}, C_0^{max}]$ , sinon c'est soit  $\hat{C}_0 = C_0^{min}$  si  $J(C_0^{min}) < J(C_0^{max})$  ou soit  $\hat{C}_0 = C_0^{max}$  si  $J(C_0^{max}) < J(C_0^{min})$ . Dans la deuxième situation (8), nous avons deux possibilités : la première est lorsque  $\bar{C}_0 \leq C_0^*$ , alors la condition initiale optimale est tout simplement  $\hat{C}_0 = C_0^*$ , et la deuxième est lorsque  $C_0^* < \bar{C}_0$ , ce qui implique que nous devons chercher l'optimum de la fonctionnelle  $J$  dans l'intervalle  $[\bar{C}_0, C_0^{max}]$ . Puisque la fonction  $J(C_0)$  est convexe, d'où elle est croissante sur l'intervalle  $[C_0^*, C_0^{max}]$ , et en particulier sur  $[\bar{C}_0, C_0^{max}]$ , alors la solution optimale dans ce cas est  $\hat{C}_0 = \bar{C}_0$ .

**Conclusion :** Ainsi même pour ce cas, le choix de la condition initiale pour minimiser le critère va être dépendant du rapport entre le coût des coccinelles et le coût des dégâts causés par les pucerons. Mais si  $T$  n'est pas toujours assez grand, cette étude n'est plus valable, or la figure suivante montre que lorsque le temps  $T$  est assez petit, on ne trouve pas les mêmes résultats que dans le cas linéaire.

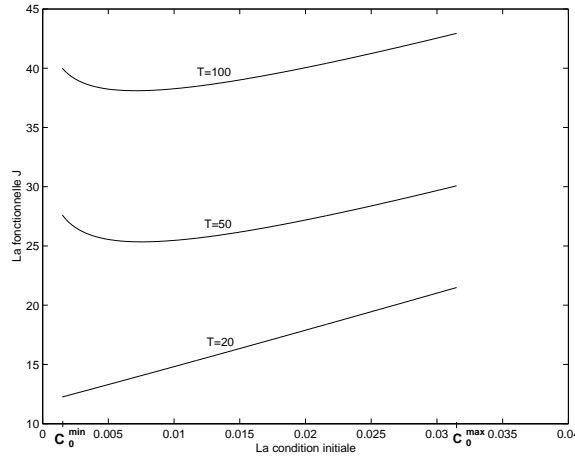


FIG. 16 – Evolution de la fonctionnelle  $J$  par rapport à la condition initiale  $C_0$ .

## 6 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à chercher la condition initiale optimale du lâcher des coccinelles dans le cas linéaire et nonlinéaire avec trois différents critères à

minimiser, et nous avons trouvé que la résolution du problème devient de plus en plus difficile lorsqu'on se place dans le cas nonlinéaire. Comme nous pouvons voir, ces études ont permis de répondre d'une façon générale à plusieurs questions. Cependant, les résultats obtenus ne sont pas directement appliqués, mais constituent une base de réflexion intéressante pour déterminer l'impact et l'efficacité de certains outils de contrôle et déduire des tendances pour la lutte biologique.

## Références

- [1] Bidot, C. (2001), Modélisation et commande optimale de l'interaction Coccinelle/Puceron dans le cadre de la lutte biologique. Rapport de stage Insa Toulouse.
- [2] Chaudhuri, K.S. & Sumita Saha Ray (1991), Bionomic exploitation of lotka-volterra prey-predator system. Bull. Cal. Math. Soc., 83, 175-186.
- [3] Clark, C.W. (1990), Mathematical Bioeconomics : the Optimal Management of Renewable Resources, 2nded. : A Wiley-Interscience.
- [4] Duffau, M. (2000), Modélisation d'un système proie-prédateur dans le cadre de la lutte biologique. Rapport de stage Insa Toulouse.
- [5] Frazer, B.D. & Gilbert, N. (1976), Coccinellids and aphids : a quantitative study of the impact of adult ladybirds (coleoptera : coccinellidae) preying on field populations of pea aphids (homoptera : aphididae). J. ent. Soc. Br. Columb., 73, 33-56.
- [6] Goh, B.S.; Leitmann, G. & Vincent, T.L. (1974), Optimal control of a prey-predator system. Mathematical Biosciences 19, p.263-286.
- [7] Gutierrez, A.P.; Wang, Y. & Jones, R.E. (1979), Systems analysis applied to crop protection. Bull. E.P.P.O., 9, 133-148.
- [8] Murray, J.D. (1989), Mathematical biology. Springer-Verlag, Berlin.
- [9] OILB(1975) "Progrès en lutte biologique" Bull OILB/SPRO 1.
- [10] Rabasse, J.-M.; Lafont, J.-P.; Guenaoui, Y.; Tardieux, I. & Lopin, N. (1989) "Potentialités des parasites de pucerons comme agents de lutte biologique en cultures maraîchères protégées." Integrated pest management in protected crops, Cabrils, CEC/IOBC group meeting.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399